Riflessioni su spazio e tempo

di Francesco Speranza
Università degli Studi di Parma - Dipartimento di Matematica

Spazio e tempo: gemelli oppure opposti?

Spazio e tempo sono due pilastri della nostra conoscenza del mondo. Di solito, nell'insegnamento scientifico, tendiamo a passare subito alla geometria (scienza dello spazio) e alla cinematica (scienza dello spazio e del tempo); invece è opportuno riflettere su alcune problematiche molto generali, in linea di principio «a monte» della fase scientifica, che ci possono illuminare meglio anche su quest'ultima. Vale a dire, le idee di spazio e di tempo sono cariche di «filosofie implicite», di premesse profonde che influenzano la costruzione della geometria e della fisica.

A livello didattico, la «fase prescientifica» è particolarmente significativa per la scuola dell'obbligo (le indicazioni metodologiche della sezione «Geometria» dei programmi delle elementari e, in parte, delle medie, sono orientate proprio in questo senso). Ma questo vale anche per le scuole superiori, per chiarire i presupposti della trattazione razionale, e per mettere in rilievo alcune importanti connessioni interdisciplinari fra matematica, fisica e filosofia.

La sensazione primaria del tempo e quella dello spazio sono ben diverse, anche per quanto riguarda livelli più avanzati della conoscenza. La misura dello spazio si può ottenere con strumenti dei quali sia assicurata la «permanenza» in luoghi e in tempi diversi: per esempio, la mano aperta, un regolo, un filo inestendibile, ... Per il tempo, Poincaré sostenne l'assoluta arbitrarietà della scelta d'un «orologio»; ma Enriques osservò che una base «umana» per la misura può consistere nel fatto che certi intervalli (per esempio i battiti di un metronomo) sono sentiti di ugual durata: ma resta problematico confrontare due intervalli che si realizzino in tempi o in luoghi diversi; né si può procedere alla divisione in parti uguali di un intervallo temporale, come invece si può fare con un intervallo spaziale.

Schopenhauer ha proposto una tabella di analogie e di opposizioni, alcune delle quali sono qui sotto riportate:

Conosciamo le leggi del tempo a *priori*, ma solo sotto la forma d'una linea.

Conosciamo le leggi dello spazio a *priori*:
lo spazio è immediatamente percepibile a *priori*.

Il tempo non ha durata, ma tutte le durate sono in esso

Lo spazio non ha moto, ma tutti i moti sono in esso

Il tempo è onnipresente. Ogni sua parte è dappertutto

Lo spazio è eterno, ogni sua
parte esiste sempre.

Il tempo rende possibili i cambiamenti di accidenti

Lo spazio rende possibile il mantenimento
della sostanza.

Il tempo rende possibile l'aritmetica.

Lo spazio rende possibile la geometria (Kant).

Tuttavia, è significativo, nelle lingue indoeuropee, l'uso di metafore spaziali per indicare situazioni temporali (e forse, a volte, anche viceversa): «intervallo» (tanto spaziale che temporale); «a questo punto» (per dire «in questo momento»); «riservare uno spazio per...» (in luogo di «riservare un intervallo di tempo per...»). Questo è un primo passo sulla via della «spazializzazione del tempo», cioè dell'interpretazione dei fenomeni temporali sulla falsa riga di fenomeni spaziali (secondo la «tesi di Sapir-Whorf», l'influenza del linguaggio è determinante: essa si può riassumere nel motto «ogni lingua contiene parole che cristallizzano i postulati fondamentali d'una filosofia implicita»).

Quando a un bambino della scuola elementare facciamo segnare su una linea alcuni avvenimenti della giornata, probabilmente ci sembra di fare qualcosa di naturale, o comunque di ricorrere a una rappresentazione «neutrale»; invece abbiamo fatto un passo decisivo: abbiamo interpretato il tempo su una linea, cioè come una ulteriore dimensione spaziale. Di fatto, noi conosciamo solo la semiretta del passato; ma siamo spinti a pensare al completamento di questa semiretta con l'opposta, quella del futuro. Noi (nella nostra cultura) costruiamo il futuro, in quanto ipotizziamo che, nelle grandi linee, esso assomiglierà al passato: quindi possiamo lanciarci in previsioni, in aspettative a proposito del futuro. E questo è confermato, per opposizione, da alcuni studi antropologici secondo i quali in alcune popolazioni di matrice culturale diversa il concetto di futuro è qualcosa di profondamente diverso (per esempio, negli indoamericani Hopi il passato sarebbe collegato alla sfera dell'oggettività, il futuro a quella della soggettività: Whorf). Va anche notato che gli individui di questi popoli non hanno difficoltà a inserirsi nel modo di pensare «europeo», il che conferma il carattere culturale e non genetico della diversa concezione del tempo.

Su queste basi si è potuta sviluppare (fin dal tardo Medioevo) l'idea di rappresentare il tempo su una linea, poi di costruire grafici spazio-tempo; la spazializzazione del tempo è arrivata a conclusione con la teoria della relatività, nel mondo oggettivo non vi sarebbero più tre dimensioni spaziali e una dimensione temporale, ma quattro dimensioni spazio-temporali [Meyerson 1925]. Una interpretazione «forte» della spazializzazione relativistica del tempo (Minkowski), ci riporterebbe, si dice, all'eliminazione parmenidea del tempo.

Capire lo spazio e il tempo per «opposizioni»

Se chiedete a un matematico una definizione di spazio, probabilmente vi risponderà con la definizione che viene data all'inizio di un trattato di topologia generale (quella che parla di aperti, o di intorni d'un punto); ma queste non sono utili per capire «che cosa è lo spazio», dobbiamo invece analizzare il concetto di spazio in situazioni affettive, prese dalla geometria, dalla fisica, dall'arte, dalla vita di tutti i giorni, dalla filosofia,... In particolare, è utile mettere in evidenza alcune «contrapposizioni» intorno alle quali si può polarizzare il concetto di spazio. Per il tempo, sulla scia della «spazializzazione», spesso si cerca di individuare in esso strutture analoghe a quelle dello spazio. Alcune contrapposizioni hanno interesse per la geometria e/o per la fisica, altre sono di carattere filosofico, altre di carattere psicologico e/o cognitivo. Cominciamo appunto con una di quest'ultimo tipo:

Spazio relazione o spazio indipendente

Le prime esperienze ci fanno conoscere dei corpi o (se ci limitiamo ai «fatti spaziali») delle figure geometriche: questo deve essere accaduto all'inizio della storia del pensiero, e anche Euclide parla di singole figure, non dello spazio ambiente. Probabilmente il primo passo per superare questa concezione è stato compiuto dagli atomisti, che avevano bisogno del vuoto nel quale far muovere gli atomi;

l'idea di vuoto (assenza di materia) si è evoluta in quella di spazio (possibile assenza di figure). Platone, nel Timeo, parla di una «terza entità», fra il mondo delle idee e le cose sensibili, nella quale queste ultime si realizzano, e che di per sé è incorruttibile: lo spazio; gli atomi sarebbero porzioni di spazio a forma di poliedri regolari.

Si tratta di capire se noi pensiamo prioritariamente alle figure (si parla di concezione relazionale dello spazio), oppure allo spazio («spazio indipendente», che popoliamo poi di figure).

Con l'evolversi del pensiero geometrico l'attenzione si è spostata dalle singole figure all'intero spazio, cioè dalla concezione relazionale a quella «indipendente». Sembra che Cartesio fosse per la prima; ma l'evolversi del metodo delle coordinate è stato decisivo per esaltare lo spazio indipendente: quando diciamo «nel piano prendo due rette con un punto in comune»... diamo la precedenza allo spazio ambiente (a due o tre dimensione). Anche le trasformazioni geometriche nascono da considerazioni su singole figure, ma ben presto è opportuno estendere la trasformazione all'intero spazio. Pensiamo anche al programma di Erlangen di Felix Klein.

Lo spazio è reale o è qualcosa di nostro

La contrapposizione è di carattere prevalentemente filosofico: l'idea che lo spazio sia reale ha dominato la scena da Platone a Newton. Per Kant, invece, lo spazio (e il tempo) sono forme della nostra sensibilità, per altri essi sono forme del nostro intelletto; qalcosa di analogo si può dire delle altre «categorie» (sostanza, causa-effetto). A prima vista sembrerebbe trattarsi di una di quelle scelte poco influenti in pratica; invece, se si prende l'alternativa kantiana, o post-kantiana, ci liberiamo la possibilità di intendere spazio e tempo «a modo nostro», anzi, addirittura, di cambiare opinione su di essa a seconda del problema che dobbiamo affrontare; per esempio, la contrapposizione relazionale/indipendente diventa un'opzione modificabile a seconda delle circostanze.

Lo spazio è un insieme di punti?

Per disinnescare i paradossi di Zenone, Aristotele dice che «un continuo non si può pensare composto di indivisibili (per esempio una linea non è composta da punti)». Negli *Elementi* Euclide si attiene a questa prescrizione, tant'è che non parla del «luogo dei punti tali che...». Il metodo delle coordinate ha dato una spinta decisiva verso un cambiamento del modo di pensare: linee e superfici sono generate come «luogo dei punti tali che ...» (la permanenza di antiche concezioni che veniva fatta ancora in età moderna fra «linee geometriche», definite come un tutto, e «linee meccaniche», descritte da un punto mobile). Oggi sarebbe impensabile non pensare allo spazio come a un insieme di punti, e tuttavia c'è un filone di ricerca sulle «geometrie senza punti» (cioè nelle quali non c'è l'appartenenza, ma resta la relazione d'inclusione).

L'analoga questione riferita al tempo è stata uno dei punti essenziali della filosofia di Henri Bergson, che ammette la riducibilità dello spazio a punti, ma rifiuta una analoga possibilità per il tempo: per lui, gli istanti non esistono, sono una pura astrazione matematica: il tempo è durée, flusso continuo. Questo crea non pochi problemi quando se ne voglia tener conto in ambito fisico. Lo stesso Bergson ne era ben cosciente, e se ne occupò con particolare riferimento alla teoria della relatività.

Lo spazio nell'arte

Il problema dello spazio nell'arte, e del suo significato filosofico è stato dibattuto in alcuni saggi classici, il più celebre dei quali è [Panofsky 1924]. Ritroviamo anche nella rappresentazione artistica alcune delle grandi contrapposizioni. Per esempio, Panofsky sostiene che nell'antichità mancava l'idea dell'unitarietà dello spazio, diciamo, di spazio indipendente anche nella pittura; questa ha cominciato a evolversi durante il Medioevo, per raggiungere la sua pienezza con la teoria matematica della prospettiva, fra i cui presupposti vi è una unità di valori artistici, di forma matematica e di concezione filosofica (neoplatonica). La prospettiva ha portato al superamento di un'altra limitazione tipica dell'antichità, il tabù contro l'infinito; con la prospettiva l'infinito diviene rappresentabile mediante i punti di fuga, e quindi viene a far parte del sistema estetico-matematico-filosofico di cui si diceva.

Fin dalle sue prime versioni imperfette, la prospettiva si è avvalsa di pavimenti strutturati con un sistema di quadrati: i primi che li hanno utilizzati in modo sistematico sono stati i fratelli Pietro e Ambrogio Lorenzetti dal 1330 circa in poi. Si tratta di una chiara anticipazione della geometria analitica, di una «strutturazione dello spazio [Panofsky 1924, Speranza 1994].

Anche il contrasto fra atomismo e continuismo si potrebbe ritrovare nel campo della pittura (pensare per esempio al «divisionismo» o «pointillisme»: Seurat, Pissarro, Segantini, Pellizza da Volpedo, ...).

«Capire» un'opera d'arte non è soltanto un fatto di «godimento del bello»: vi sono aspetti culturali dei quali le concezioni spaziali (sui versanti matematico e filosofico) hanno un ruolo essenziale.

Che cosa sono le figure geometriche?

Le figure geometriche (e le loro analoghe, le trasformazioni) sono gli individui di cui si occupa la geometria, il cui primo compito è di classificarle in «specie», di organizzarle in «concetti geometrici». Il filosofo neoplatonico Proclo (V sec. d. C.) si è posto il problema: su che cosa operiamo quando «facciamo della geometria»: non sulle cose sensibili, ma neppure sui concetti astratti, perché, per esempio, parliamo di «dividere in due un cerchio», ma il concetto di cerchio è uno, non divisibile.

Possiamo dire che le figure geometriche si situano «fra» il mondo delle cose sensibili e il mondo puramente intellettuale dei concetti (che per il neoplatonico Proclo sono addirittura fuori della nostra mente). Le figure fanno parte del mondo dell'immaginazione; oggi si parla a questo proposito di «immagini mentali», quello che «vediamo con gli occhi della mente»: si tratta di entità «prive di materia», ma dotate di una cosiddetta materia intelligibile, che noi siamo in grado di immaginare «perfette» (cioè senza le irregolarità che presentano sempre gli oggetti sensibili, e in particolare con una o due dimensioni soltanto, mentre gli oggetti hanno sempre tre dimensioni).

Considerazioni analoghe si possono fare per le trasformazioni geometriche (per le quali c'è un livello sensibile, di modificazione o immagini di oggetti, un livello di immaginazione e un livello astratto).

Come si passa da un livello all'altro? Per i neoplatonici, la strada è chiara: vengono prima i concetti, sui quali la nostra immaginazione modella le immagini mentali, per riconoscerle poi approssimativamente nel mondo dei sensi.

Da un punto di vista empirista, invece le immagini mentali sono tratte dall'esperienza sensibile; si aprono a questo punto alcune difficoltà: come possiamo immaginarci «perfette» queste immagini, se non lo sono gli oggetti fisici? La risposta probabilmente può essere un parziale ritorno al platonismo: in un primo momento forse le immagini mentali non sono perfette, ma poi, quando abbiamo elaborato i concetti astratti, per esempio quello di «cerchio», questi possono influenzare la formazione delle immagini mentali. Lo stesso oggetto (in disco fonografico) potrà indurre immagini mentali di un cerchio (se «decidiamo» di prescindere dallo spessore), o d'un cilindro piuttosto schiacciato, o d'un cerchio con sopra tracciata una spirale, ...

Il programma di Erlangen (di Felix Klein)

Nel 1872 in occasione d'una prolusione presso l'Università di Erlangen (vicina a Norimberga), Felix Klein espose le sue idee a proposito d'una sistemazione unitaria della geometria, che a quell'epoca tendeva a dividersi in rami apparentemente separati (geometria euclidea, non euclidea, proiettiva, affine, topologia, ...). Qualche decennio addietro, essa faceva parte integrante dell'insegnamento della geometria nel primo biennio universitario; oggi sembra se ne parli solo in qualche corso del secondo biennio, eppure è importante per capire alcuni aspetti della geometria nella scuola secondaria (si pensi a tutte le volte che le trasformazioni sono usate come strumento per la comprensione della geometria, per esempio nel tema 6 dei programmi della media, e nei programmi Brocca).

L'idea portante è che ogni tipo di geometria si caratterizza per lo studio delle proprietà che restano invariate per le trasformazioni di un certo tipo. Si vede facilmente che le trasformazioni che lasciano invariato qualcosa formano un gruppo (infatti il loro insieme deve essere chiuso rispetto alla composizione e al passaggio alla trasformazione inversa). Quindi: una geometria si ottiene fissando uno spazio S e in questo un gruppo G di trasformazioni; si parla di G-geometrie. Secondo il programma di Erlangen, il gruppo G è i sostanza più importante dello spazio S nell'individuazione d'una geometria.

Per esempio, la geometria euclidea metrica è lo studio delle proprietà invarianti per isometrie; la geometria simile è lo studio delle proprietà invarianti per similitudini (il cui gruppo è detto da Kein *gruppo principale*); la geometria affine è lo studio delle proprietà invarianti per affinità; la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà invarianti per proiettività. In particolare, come oggetto geometrico da trasformare si può prendere una T di S in sé; la sua trasformata mediante una f $\in$ G è la trasformazione f(T) tale che

$$f(T) = f \circ T \circ f^{-1}.$$

Se T è biiettiva, lo anche f(T): si vede che $g(f(T))=(g \circ f)(T)$.

Se T descrive un gruppo Γ, allora f(T) descrive un gruppo Γ', isomorfo a Γ. In questa occasione, abbiamo una trasformazione che funziona da «oggetto geometrico», la T, e una che funziona da organizzatrice dello spazio, la f.

Si osservi che gli stessi concetti geometrici possono avere «diritto di cittadinanza» in una geometria ma non in un'«altra», e sono quindi relativi a un gruppo di trasformazioni. Per esempio, sia G il gruppo delle affinità: nella geometria affine, si può parlare di «parallelogramma» ma non di «rettangolo» (perché un'affinità trasforma...); si può parlare di «punto medio d'un segmento», (perché...); si può parlare di «traslazione» (perché se f è un'affinità e T una traslazione, f(T) è una traslazione); non si può parlare di «isometria», perché se f è un'affinità e T un'isometria, non è detto che f(T) sia un'isometria.

Se il gruppo H è incluso nel gruppo G, tutto ciò che è invariante rispetto a G è invariante anche rispetto a H: i concetti e le proprietà della G-geometria sono anche concetti e proprietà della H-geometria; quindi concetti e proprietà di G si possono anche selezionare fra quelli di H controllando se sono invarianti rispetto a tutte le trasformazioni di G (in questo senso, per Klein le «geometrie classiche» sono quelle il cui gruppo contiene il gruppo delle similitudini). Tuttavia, ogni geometria ha una sua unitarietà che conviene sviluppare autonomamente. Il «più grande gruppo significativo» per uno spazio S è il gruppo degli omeomorfismi di S in sé (trasformazioni biunivoche e bicontinue), il «più piccolo» è quello formato dalla sola identità, rispetto al quale tutto è invariante, ogni punto è distinguibile dagli altri; S si presenta allora come «spazio assoluto». Nei casi più consueti, il gruppo G è omogeneo (cioè, dati due punti A,B di S, esiste almeno una f di G tale che f(A)=B; inoltre di solito G è isotropo, cioè preso un punto A, e due direzioni d, d' per A, fra le f appartenenti a G che lasciano fisso A ce n'è almeno una che trasforma d in d'.

Due casi notevoli «non classici» sono quelli in cui G è il gruppo delle traslazioni, oppure il gruppo delle traslazioni e delle omotetie di uno spazio lineare in sé; questi gruppi sono omogenei ma non isotropi.

Anche lo spazio-tempo della teoria della relatività si può interpretare come regolato da un opportuno gruppo G, non isotropo, perché l'asse dei tempi non può essere scelto ad arbitrio, ma deve stare entro il «cono di luce».

Bibliografia

M. Capek (ed.), 1976, *The concepts of space and time*, Reidel, Dordrecht.

F. Enriques, 1925, *Spazio e tempo davanti alla critica moderna*, in «Questioni riguardanti le Matematiche Elementari», parte I, v. II, 431-459, Zanichelli, Bologna.

F. Klein, 1872 (tr. it.) *Alcune considerazioni intorno a ricerche geometriche recenti*, Ann. di Mat., s. II, t. XVII, 307-343 (1889/90).

E. Meyerson, 1925, *La déduction relativiste*, Payot, Paris.

F. Monnoyeur (ed.), 1992, *Infini des mathematiciens, infini des philosophes*, Belin, Paris.

E. Panofsky, 1924, (tr. it.) *La prospettiva come «forma simbolica»*, Feltrinelli, Milano.

Proclo, *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giuntini, Pisa, 1978.

A. Schopenhauer, 1819, (tr. it.) *Il mondo come volontà e come rappresentazione*, cit. in [Capek 1976].

F. Speranza, 1994, *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio*, L'Ed. Mat., s. IV, v. I, 95-116.

B. L. Whorf, 1936, (tr. it.) *Un modello d'Universo per gli indiani d'America*, in *Linguaggio, mente e realtà*, Einaudi, Torino.