Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp. 153-176

La geometria: rileggiamone i fondamenti[1]

Parte I

Franco Eugeni * Raffaele Mascella**
*Già Professore Ordinario di Filosofia della Scienza
Presidente dell'AFSU
eugenif3@gmail.com
** Professore Associato di Filosofia della Scienza
Università degli studi di Teramo
rmascella@unite.it

DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.056

Sunto: *Questo è il primo lavoro dedicato alle basi della geometria elementare. È oramai ben noto che la geometria elementare è sempre più trascurata nell'insegnamento secondario e che la cultura geometrica è sempre più affidata allo studio della geometria analitica, quasi a voler allontanare i discenti da una serie di legami che intercorrono tra geometria e matematica, da un ambito in cui la riflessione filosofica e il ragionamento deduttivo sono ancora più rilevanti. Vengono a mancare anche i legami storico-filosofici e il pensiero di quei tanti filosofi e filosofi della matematica quali Kant, Russell, Enriques e Speranza, che riteniamo di importanza fondamentale per la cultura di un docente che vuole interagire con il mondo moderno, sempre più complesso, che necessita di un elevato grado di comprensione epistemologica dei fondamenti dei nostri saperi.*

1 Parte di questo lavoro è stata oggetto di una nostra Conferenza dal titolo: "La geometria: cosa si può fare oggi?", presentata al 7° Simposio 2021 "Bellezza e fascino della Matematica", Villa S. Angelo (AQ), 29/31 Ottobre 2021.

Parole Chiave: *Spazio Euclideo – Percezione dello Spazio – Filosofia della Geometria – Geometria assoluta.*

Abstract: *This is the first work dedicated to the basics of elementary geometry. It is now well known that elementary geometry is increasingly neglected in secondary education and that geometric culture is increasingly relying on analytical geometry, as if to distance learners from a series of links between geometry and mathematics, from an area in which philosophical reflection and deductive reasoning are even more relevant. Also historical-philosophical links are so missing, as the thought of those many philosophers and philosophers of mathematics such as Kant, Russell, Enriques and Speranza, which we believe to be of primary importance for the culture of a teacher who wants to interact with the increasingly complex modern world, which requires a high degree of epistemological understanding of the foundations of our knowledge.*

Keywords: *Euclidean Space – Space Perception – Philosophy of Geometry – Absolute Geometry.*

1 – La percezione dello spazio assoluto

L'uomo, fin dalla nascita, ha la necessità di dominare, comprendere, controllare lo spazio che lo circonda. È un atteggiamento facilmente individuabile anche nell'uomo primitivo, un'esigenza innata che prende forza anche con la conquista della razionalità, in vista del perenne mutamento sociale. Così, in un non ben definito momento evolutivo sorse l'esigenza di fornirsi di strumenti per operare su questo spazio. È tipico l'esempio degli egiziani e delle piene del Nilo.

La geometria, nella formalizzazione che oggi conosciamo, nasce nell'antica Grecia, ad opera di una serie di studiosi interessati a costruire una teoria dello spazio. Un ruolo decisivo fu quello di Euclide, per via dei suoi *Elementi di Geometria*, un'opera magistrale con cui raccolse i suoi risultati e quelli di altri, in un tentativo di scrittura completa di quello che sarà, nei secoli a seguire, l'esemplificazione massima di un edificio teorico, formale e logico-deduttivo.

Con il passare del tempo questa visione è divenuta patrimonio comune del mondo intero, in particolare di quello occidentale. Gli scienziati hanno posto la visione che si è ottenuta dalla geometria a fondamento delle teorie della fisica, la quale disciplina, personalizzata nei suoi cultori, cerca di capire come misurare il mondo e anche quali influenze su di esso agiscono. Il fatto di essere posta a fondamento del tutto, promuove l'idea che questo modo di leggere e misurare lo spazio circostante è quello vero, quello giusto. Nasce così l'idea dello *spazio assoluto*[2], su cui si sono cimentati molti filosofi e scienziati dal Rinascimento in poi, da Leibniz a Spinoza e Cartesio, da Kant a Russell.

La certezza che esista uno spazio a priori, dato proprio dalla geometria euclidea ricevette l'ultimo forte impulso dalla teoria fisica newtoniana (che appunto si basava sulla geometria euclidea) e dal suo successo che indirettamente ne decretò la sua indubitabilità (Giorello et al., 2001).

[2] Non esiste una vera e propria definizione di spazio assoluto. Dall'idea generale ove si da tale attributo ad una struttura ove non è ammesso il postulato delle parallele, vari autori hanno inteso, nella loro assiomatica una qualunque struttura che sia posta alla base delle costruzioni vettoriali, euclidee e non euclidee. Taluno ritiene tale termine come un *quid* di esistente a priori.

L'idea di uno spazio uniforme ed omogeneo è la razionalizzazione di una nostra intuizione. Come osservano Duhem,[3] e Giorello,[4] anche nell'uomo delle caverne questa intuizione si palesava:

> *Si può rappresentare per mezzo di un disegno una figura piana o per mezzo di una scultura una figura solida, e l'immagine può assomigliare perfettamente al modello, anche se questi hanno dimensioni differenti. Si tratta di una verità, della quale i cacciatori di renne del paleolitico, sulle rive della Vézère, non dubitavano minimamente. Ora, che le figure possano essere simili senza essere uguali, implica, e l'esprit de géométrie lo dimostra, l'esatta verità dei postulati di Euclide.*

Quando consideriamo la geometria come scienza a sè stante, dobbiamo tener conto che il punto di partenza non può che essere una nostra intuizione dello spazio, un'intuizione che ci permette di cogliere delle proprietà per il momento del tutto generali, che fanno da sfondo ad ogni loro uso applicativo, e su cui si basano le altre scienze, la fisica prima di tutto.

Nello studio dello spazio e fin dai tempi di Euclide, alcuni elementi vengono scelti come dati dall'intuizione, posti alla base come concetti primitivi, per i quali non si dimostra nè l'esistenza e nemmeno l'essenza.

Qualche problema nasce proprio per questo aspetto, ad esempio con l'individuazione del punto come "elemento

---

[3] Pierre Duhem (1861-1916), filosofo francese, epistemologo e storico della scienza. Noto per l'idea delle indeterminazioni legate ai limiti del metodo sperimentale e per la storia del progresso scientifico medioevale.

[4] Duheim P. (2015) pp. 115-116, cit. in: Giorello et alii, (2001), p. 139.

primitivo", introdotto come *ciò che non ha parti*, che non è in alcun modo divisibile, ed in senso metrico non ha né larghezza, né lunghezza. Ma questa non è una vera definizione! Anche Tartaglia[5] nel commentare l'opera di Euclide, così commenta la definizione euclidea del punto:

> *… l'Autthor ci diffinisce il principio della quantità continua (che è il ponto) & dice, che il punto è quello, che non ha parte alcuna, cioè, quello dal quale non si puo toglier, ne trouar, ne anchora imaginar la mettade, ouer il terzo, ouer il quarto, ne alcuna altra parte simile: Per la qual diffinitione ci dinota, il detto ponto non esser alcuna quantità: ma solamente, esser un semplice termine fatto dalla natura, ouero dall'arte, ouer con la mente imaginato, dinotante il principio ouer il mezzo, ouero il fine di alcuna quantità.*

Dagli "elementi primitivi" si desidera derivare gli altri concetti, che così vengono in effetti definiti per mezzo dei concetti di base. In realtà per gli elementi introdotti come "elementi primitivi" non è possibile fornire una definizione esplicita[6], in quanto si cadrebbe necessariamente in un circolo vizioso: *in una sorta di regresso all'infinito*.

La scelta degli elementi fondamentali, inoltre, non è determinata a priori, vengono scelti quelli che risultano più semplici e più immediati dalla nostra intuizione. Ed è da

---

[5] Tartaglia N. (1565). *De insidentibus aquæ* e *De ponderositate*, p. 1-2, Opera postuma.

[6] Una definizione esplicita è una frase nella quale il soggetto X acquista significato tramite tutti gli altri termini della frase. Ad esempio : la circonferenza è l'insieme dei punti del piano avente distanza assegnata da un punto dato, detto centro" naturalmente noti che siano tutti i termini definenti X (circonferenza).

questi, in definitiva, che la struttura dello spazio viene analizzata. Dice a tal proposito l'Enriques:[7]

> *Dall'ordine delle cose esterne, nella rappresentazione data alla mente dai sensi, scaturisce il concetto di spazio. La Geometria studia questo concetto già formato nella mente del geometra, senza porsi il problema (psicologico, ma non matematico) della sua genesi. Sono dunque oggetto di studio, nella Geometria, i rapporti intercedenti fra gli elementi (punti, linee, superficie, rette, piani ecc.) che costituiscono il concetto complesso di spazio: a tali rapporti si dà il nome di proprietà spaziali o geometriche.*

Esiste tuttavia una differenza tra la visione degli antichi che ritenevano che gli assiomi posti alla base per definire *un ente,* esistente per origine divina, fossero in un certo qual modo immutabili. La visione moderna, nata dopo l'avvento delle geometrie non euclidee, ritiene che *sia gli assiomi definenti gli enti, sia gli assiomi definenti la logica per dedurre,* siano scelti dallo scienziato formulatore della Teoria, con le sole condizioni[8] che essi siamo *non contraddittori*[9] e *indipendenti.*[10]

---

[7] F. Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898].

F. Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898.

[8] Un sistema razionale è dato da un sistema di assiomi per la teoria e una logica per dedurre. Se la logica è quella aristotelica il sistema si dice ipoteteco deduttivo. Ma a priori potrebbe anche farsi uso di una logica anche di tipo "fuzzy", cfr. Pelusi D. (2019).

[9] È ben noto fin dal medio-evo la legge dello Pseudo-Scoto (cfr. Carruccio E. (1958) p.143 e 333) asserente che se in un sistema *ammetto una frase e la sua contraria allora posso dedurre qualunque proposizione*, ottenendo in tal modo una inutile teoria piena.

[10] Il non rispettare l'indipendenza non è un grave errore, didatticamente corrisponde a dare teoremi senza dimostrazione.

La fondamentale domanda che ci si pone è se la base della geometria[11] stia nella logica oppure nell'intuizione. Per i sostenitori kantiani sta nell'intuizione; d'altro canto, tanti mondi potrebbero essere logicamente possibili, per cui come si potrebbe determinare la giusta base seguendo una via esclusivamente logica? L'intuizione iniziale, tutto sommato, ci direbbe ancora che esso è euclideo. E in effetti sembra esserci una base intuitiva nella geometria, una base che le conferisce una posizione aprioristica nella conoscenza dello spazio. La questione però è controversa: esiste uno spazio universale ed una reale possibilità che noi possiamo coglierlo, oppure ciò che vediamo, concepiamo e rappresentiamo è frutto solo della migliore classificazione che il nostro intelletto può compiere o che ritiene più opportuna, più facile?

Su questo punto geometri e filosofi hanno proposto molte posizioni differenti nella storia della scienza e della cultura occidentale. Ad esempio, la visione euclidea abbracciata dal mondo greco e fino a circa duecento anni fa, ha inteso la struttura euclidea come una fedele rappresentazione del mondo circostante che noi percepiamo. La stessa scoperta delle geometrie non euclidee, almeno da un punto di vista logico-matematico, è stata possibile solo attraverso uno sforzo di semplificazione dell'edificio geometrico euclideo, inquadrandola come sistema ipotetico-deduttivo, senza per questo mai mettere in discussione la sua storia e la sua verità.

---

[11] Naturalmente pensiamo ad una geometria delle origini, oggi dopo la rivoluzione bourbakista in generale le geometrie moderne poggiano essenzialmente sulla logica. Tuttavia dal punto di vista didattico riteniamo che il ripercorrere la strada dell'intuizione, per arrivare a costruzioni logiche in età più matura sia una via da proporre, forse come primaria.

In ogni caso, le costruzioni non euclidee si sono sempre rappresentate, per comodità, all'interno delle euclidee. Naturalmente le medesime costruzioni si possono epurare dall'essere interne alle euclidee, riformulando le costruzioni negli spazi vettoriali sui reali, che si possono pensare come una geometria non ancora strutturata come euclidea, quindi ad essa alternativa, ma in effetti non cambia molto la sostanza.

Un discorso a parte merita l'introduzione, nel mondo delle cosiddette "geometrie moderne", delle geometrie sopra un campo[12], o addirittura su strutture algebriche più deboli di un corpo, ovvero su corpi, su anelli, su quasi-corpi, su campi finiti. Nascono problematiche nuove, come l'ampio capitolo, ad esempio, di ricerche sull'esistenza e la costruzione di piani non desarguesiani finiti e no. Ovviamente in tali strutture moderne, che nascono lavorando sull'astratto, ogni idea di intuito che provenga dal mondo reale tende a sfumare[13], fino a scomparire del tutto.

È importante prendere in esame l'interessante questione della *categoricità dell'edificio euclideo*, problema questo non secondario, ma non conosciuto dagli antichi, e spesso sottaciuto anche oggi, aspetto che è stato evidenziato solo dopo la scoperta degli spazi vettoriali. Infatti, essendo tali strutture univocamente determinate a meno di isomorfismi, esse permettono all'edificio euclideo di ereditare una tale

[12] Per una panoramica vedasi Eugeni F. (2021. I e II parte), e per approfondire il trattato di Segre B. (1961) con l'appendice di Lombardo Radice L. sulle geometrie finite. Vedasi ancora: Tallini G. (2005).

[13] Forse nel caso delle geometrie non archimedee ha ancora un senso di parlare di percezione delle stesse, cfr. ad esempio Mascella R. (2019).

proprietà. Così la geometria della retta[14] (ovvero del campo reale), del piano, dello spazio a tre o più dimensioni, sono uniche a meno di isomorfismi. Le geometrie non archimedee, essendo costitute da parti di uno spazio vettoriale non presentano alcuna caratteristica di categoricità, ed esistono vari modelli di tali spazi tra loro non isomorfi.

Dall'intuizione, che non è detto che ci porti sulla strada giusta (come dimostrano le ricerche dalla relatività in poi), passiamo alla formalizzazione che ritroviamo ed utilizziamo nelle nostre applicazioni. La nostra formalizzazione teorica euclidea, se anche può permetterci di studiare i fenomeni, non è detto che riesca a cogliere lo spazio esattamente quale esso realmente sia, ammesso che tale idea del "realmente sia…" abbia un senso.

Seguendo e approfondendo le argomentazioni di kantiane, Bertrand Russell[15] propone uno spazio a priori fatto attraverso due fondamenta successive, in cui è la cosiddetta geometria dell'intuito a fare da sfondo. La prima questione è che lo spazio così come lo intendiamo è una *forma di esternalismo*, ovvero una struttura che ci permette di distinguere gli oggetti, per il fatto di essere gli uni esterni agli altri. Dopo la percezione intuitiva dello spazio e dei suoi oggetti intervengono, in fase di razionalizzazione e di costruzione logica dello spazio, le *relazioni tra gli oggetti* (punti, rette, piani,

---

[14] Esiste una problematica, inaugurata da Peano, dello studio della retta, per via assiomatica, come ente a sè stante e non derivante come sottoinsieme di una assegnato spazio euclideo 2-dimensionale cfr. Eugeni F.-Mascella R. (2001).

[15] Russell B. (1975), *I fondamenti della geometria*, G.T.E. Newton & Compton, Roma.

ecc.) e subito dopo interviene la nostra funzione di ordinamento, che ci porta a vedere il mondo fatto come quello euclideo.

Da Platone e Aristotele, fino a Cartesio e Leibniz, la geometria euclidea è stata ritenuta una teoria scientifica certa, indubitabile, da prendere ad esempio anche per le altre scienze e nella stessa indagine filosofica. Un sostegno indiretto filosofico ed epistemologico è derivato anche dalla meccanica newtoniana[16], allorché lo scienziato inglese riassunse in poche, semplici ed efficaci leggi le conoscenze fisico-sperimentali fin allora acquisite, avvalendosi implicitamente della geometria euclidea come struttura di fondo. Ciò è testimoniato anche dalla posizione kantiana, per cui questa geometria era considerata a priori, assoluta, esistente prima ancora della nostra esperienza col mondo. Non importa, diceva Kant, quale sarà il risultato della nostra esperienza perché, prima ancora di compierla, la struttura geometrica esiste ed assume le proprietà euclidee che conosciamo.

Mentre Leibniz sosteneva che lo spazio consiste solo di relazioni e Newton affermava che lo spazio assoluto è una realtà oggettiva, Kant pur sostenendo lo spazio assoluto, lo riteneva puramente soggettivo: quando le cose materiali “scompaiono”, con esse scompaiono anche le relazioni tra queste, e quindi perdiamo l’ordine spaziale, ma rimane lo spazio assoluto.

Seguendo l’approccio logicista di Russell, la conoscenza a priori è quella conoscenza che deriva dalle leggi del pensiero,

---

[16] Per una interessante sintesi dell’opera newtoniana vedasi: Gucciardini N. (2013). *Newton, un filosofo della natura e del sistema del mondo*, I grandi della Scienza2, Le Scienze, Milano.

dalle nostre categorizzazioni, che rendono possibile una qualche forma di esternalismo, che rendono accessibile l'indagine empirica, ovvero i presupposti, senza i quali la nostra esperienza non potrebbe aver luogo. Chiaramente oltre ai postulati che così classifichiamo, dobbiamo includere anche tutte le conseguenze deducibili prima che le deduzioni ottenute per via empirica entrino nella discussione.

Le proposizioni di base da noi ritenute soggettivamente primitive o fondamentali, come sosteneva Kant, non sono deducibili per via logica. Le argomentazioni di Kant[17] riguardanti la geometria e la sua concezione dell'intuizione[18] e dell'immagine produttiva sono tese a dimostrare che la costruzione dello spazio vuoto non è concettuale.

Russell aveva invece una posizione diversa. Egli sosteneva che sebbene le parti dello spazio non siano contenute nella categoria spazio, ma sono al suo interno, ciò non basta per affermare che lo spazio non è concettuale; la funzione dello spazio, per il filosofo inglese, è di distinguere tra tutte le cose che ci si presentano. La consapevolezza di un mondo fatto di cose esterne richiede un approccio conoscitivo, ma non deduttivo, che permette di discriminare gli oggetti. Non può essere deduttivo perché solo con oggetti diversi possiamo dedurre il reciproco esternalismo di essi. Kant dice:

> *Affinché le sensazioni possano essere ascritte a qualcosa a me esterno… e similmente affinché io possa essere in grado*

---

[17] Il punto di vista di Kant sulla geometria appare in *Critica della ragion pura*, ove si parla anche di assiomi, postulati, definizioni, dimostrazioni.

Si veda anche Moretto Antonio (2013), *Con Euclide e contro Euclide: Kant e la geometria*, Studi Kantiani, vol 26 pp.71-91. In https://www.jstor.org/ /stable/24347290.

[18] Vedasi per approfondire: Veneroni Stefano (2019, a cura di).

> *di presentarle come esterne e al di fuori l'una dall'altra… la presentazione dello spazio deve esistere già.*

Ma la questione dovrebbe riguardare solo il reciproco esternalismo delle cose, non l'essere esterne all'Io. E soprattutto questo può valere per una qualsiasi forma di esternalismo, euclidea o non. Qualunque forma di esternalismo che possa essere intuitiva e permettere la conoscenza. Ma dovrà anche essere un esternalismo che non sia caratterizzato dall'intuizione, anche se da essa deriva. La nostra esperienza, in altre parole, dipende da qualche elemento intuitivo, per il quale attribuiamo complessità agli oggetti percepiti. Ma le proprietà di cui si farà uso per distinguere gli oggetti, per proclamarne la diversità, deve comportare la presenza di elementi distintivi, che permettano una tale discriminazione tra gli oggetti considerati.

Russell, pur inglobando la possibilità logica delle altre geometrie non euclidee, basò la sua analisi filosofico-geometrica sul fatto che la geometria proiettiva fosse a priori, salvo ricredersi successivamente[19]. Russell basava questa scelta sul fatto che tre postulati iniziali erano indiscutibili:

> *I. Nello spazio si possono distinguere parti diverse, per il solo fatto che si trovano l'una al di fuori dell'altra. Tutte queste parti, comunque, sono qualitativamente simili.*
> *II. Lo spazio è continuo e divisibile all'infinito. Il risultato della divisione infinita, cioè la parte senza estensione, è il punto.*

[19] Russell mette come maggiormente evidente e più generale la geometria proiettiva, che per certi versi è una geometria dell'intuito visivo, oggi, invece, partiamo da uno spazio vettoriale e giova ricordare che uno spazio proiettivo è uno spazio vettoriale quozientato rispetto alle rette.

> *III. Due punti determinano una figura unica ad una dimensione, la retta. Tre punti in generale (cioè non tutti sulla stessa retta) determinano una figura unica a due dimensioni, il piano. Quattro punti in generale determinano una figura unica a tre dimensioni. E così via. In un processo che termina, diciamo con n+1 punti, determinando tutto lo spazio (con n dimensioni).*

Poi ci sono gli assiomi metrici:

> *(i) l'applicazione del concetto di grandezza alle figure spaziali comporta l'assioma del libero movimento: le grandezze spaziali possono muoversi da un posto all'altro senza subire distorsioni. L'assioma del libero movimento comporta la omogeneità dello spazio, o equivalentemente, la relatività della posizione.*
>
> *(ii) è condizione a priori della geometria che lo spazio deve avere un numero finito intero di dimensioni. L'essere intero dipende dal fatto che una frazione di relazione non ha significato, l'essere finito perché un numero infinito di dimensioni risulterebbe impossibile da specificare.*
>
> *(iii) "Ciascun punto deve avere, rispetto a ogni altro punto, una ed una sola relazione indipendente dallo spazio rimanente. Questa relazione è la distanza tra i due punti."*

Per Russell da un lato abbiamo dunque la geometria proiettiva, che "racconta lo spazio", e dunque si occupa di aspetti qualitativi dello spazio, dall'altro la geometria metrica che invece si occupa di aspetti quantitativi. Ma la possibilità di quantificare dipende dall'identità della qualità.

E poi, nello spazio vuoto tutto è omogeneo e indistinguibile. Possiamo considerare e distinguere le posizioni solo se rompiamo l'omogeneità dello spazio vuoto. Questo possiamo farlo facendo subentrare la materia come elemento distintivo, un elemento cioè non definito univocamente da proprietà spaziali. Non alludiamo ad una materia specifica, ma ad una concezione astratta. Ad esempio, nel concetto di congruenza interviene il moto, ma a muoversi non può essere un semplice punto geometrico, sarebbe una contraddizione in termini. A muoversi dovrà essere un qualche elemento, appunto la materia, che possa essere logicamente distinto dal punto o dalla posizione che occupa, di cui si sappia anche che rimane inalterata nel moto. Solo in questo modo, il moto potrà costituire una prova di uguaglianza.

La posizione di Russell è discutibile, soprattutto se riguardata dalla prospettiva della tradizione formalista della matematica o di un approccio primariamente logico-matematico, perché si subordina la geometria alla fisica, attribuendo, di conseguenza, una forma di empiricità e approssimazione alla geometria pura. Ma occorre anche osservare che tale approccio, di una geometria fisico-intuitiva, è stata spesso usata per fini didattici e probabilmente è anche la via più naturale per l'apprendimento della geometria. Per dirla con Russell, "*È come se rimandassimo la formazione dei numeri, finché non abbiamo contato le case a Piccadilly*".[20]

2 – La questione didattica nell'Italia preunitaria: un fenomeno che va oltre l'Europa

Il passo successivo scientifico rispetto all'opera di Euclide è l'assiomatica di David Hilbert[21] (1862-1943) che nel suo

[20] Ibidem, p. 93

[21] Hilbert D. (1889), *Grundlagen der Geometrie* (1889).

Grundlagen der Geometrie (1889), assegna un insieme formale, composto da 28 assiomi, che ha la caratteristica di eliminare le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche, iniziali di Euclide. È anche importante ricordare che l'assiomatica di Hilbert fu proposta, a quanto sembra in modo del tutto indipendente, da un grande didatta statunitense, Robert Lee Moore (1882 –1974), che era di vent'anni più giovane di Hilbert.

In realtà fin dalla prima metà dell'Ottocento gli scienziati della nascente Italia, ispirandosi ad alcune serie di incontri di scienziati tedeschi, che avevano avuto inizio nel 1823, promossero l'idea di fare altrettanto in Italia. Fu così che si tennero Congressi nel 1839 a Pisa, nel 1847 a Venezia, nel 1862 a Siena, nel 1873 a Roma e nel 1875 a Palermo.

La partecipazione globale degli scienziati ai congressi fu straordinaria, in quanto coinvolse sia naturalisti, sia matematici e astronomi, e anche letterati, storici e giuristi. Tuttavia nel periodo pre-unitario gli Stati italiani, dal canto loro, non ebbero una reazione univoca: il Granducato di Toscana e il Regno di Napoli furono favorevoli all'iniziativa, ma nello Stato Pontificio, Papa Gregorio XVI (sul soglio pontificio nel periodo 1831-1846) non approvò l'idea, e la Congregazione per gli Studi del Vaticano vietò ai propri professori la partecipazione alle riunioni. Ciò dipese dal fatto che nello Stato Pontificio la libertà dello scienziato era vincolata ad un rapporto gerarchico tra scienza e fede.

Molto interessante fu il modello istituzionale che portò a procedere per riforme successive, fenomeno che nella nostra nazione è tuttora in atto ed indica una scuola, almeno a grandi linee, aperta al mutamento ed adattamento continuo.

Alla nascita dell'Unità d'Italia si decise di estendere a tutto il territorio nazionale la legge del Ministro piemontese Gabrio Casati[22] (1798–1873), che fu l'ultima riforma scolastica del vecchio regno di Piemonte. Per le innovazioni sui programmi furono nominate apposite commissioni. La Commissione per la matematica, aveva come esperti, tra gli altri, due importanti matematici: il massone bolognese Luigi Cremona[23] (1830-1903) e il napoletano Giuseppe Battaglini[24] (1826-1894). La commissione propose che per la geometria si ricorresse, fin dal ginnasio, agli Elementi di Euclide, e successivamente ad una rielaborazione, degli stessi. Nel 1867 viene emanata la Legge del Ministro Michele Coppino[25]. Così con l'Unità d'Italia, *escono di scena i testi stranieri*, peraltro piuttosto scadenti e nei fatti imposti dal Regno Lombardo Veneto (1815-1866) e dalla Francia.

Ma una vera rivoluzione nell'insegnamento[26] nasce nel 1923, con la Riforma del Ministro Giuseppe Gentile[27] (1875-

---

[22] La legge piemontese, del Conte Gabrio Casati, datata 13 novembre 1859 n. 3725, perfezionò le norme dell'istruzione secondaria esistenti. Le precedenti erano state la legge Boncompagni del 1848 sull'insegnamento secondario e la legge Lanza del 1857.

[23] Cremona dal 1879 fu Senatore del Regno e nel 1898, per breve tempo, fu Ministro dell'Istruzione.

[24] Famoso per il suo "*Giornale di Matematica*", al quale si aggiunse, dopo la sua morte, la dicitura *"di Battaglini"*.

[25] La legge 10 ottobre 1867, fu emanata dal Ministro dell'Istruzione Michele Coppino (1822-1891).

[26] Si veda in: www.afsu.it/discipline/matematica/la didattica in Italia

le varie notizie e per i libri vedasi la voce ulteriore/Bollettini di Bibliografia (S. Nicotra).

[27] Giovanni Gentile fu insieme a Benedetto Croce uno dei maggiori esponenti del neoidealismo filosofico e dell'idealismo italiano. La Riforma

1944) che si avvalse della collaborazione del pedagogista Giuseppe Lombardo Radice[28] (1879-1938) e che subì la pesante influenza di Benedetto Croce[29] (1866-1952).

Lo spirito della Riforma Gentile tese a considerare preminente, ai fini della formazione culturale dei giovani, l'apporto delle discipline umanistiche, trascurando le discipline scientifiche e la matematica in particolare. L'influsso di Benedetto Croce fu decisivo. Nell'idealismo di Croce i concetti erano riservati alle teorie, ovvero alle parti nobili della conoscenza mentre venivano distinte due forme secondarie di elaborazione pratica delle conoscenze, precisamente la formazione di pseudoconcetti empirici classificatori e di pseudoconcetti astratti numerativi. I primi erano concreti ma non universali e presi a fondamento delle scienze naturali, i secondi erano universali ma non erano da considerare concreti, erano cioè pseudoconcetti a fondamento delle scienze matematiche. Così per Croce i concetti matematici, per lui pseudoconcetti, sono fuori della realtà, ed una figura geometrica, sia pure astratta dalla realtà, sarebbe una finzione concettuale. Croce, con riferimento alla definizione di Bertrand Russell (1872-1970) che recita: «*la matematica è quella scienza nella quale non si sa di che cosa si parla, e nella quale ciò che si dice non si sa se sia vero o falso*», commenta che «*una scienza*

Gentile, pubblicata il 6 maggio 1923, è un insieme di atti normativi realizzanti una riforma organica della Scuola Italiana varata in Italia. Estensori furono lo stesso Gentile, al tempo Ministro della Pubblica Istruzione con la collaborazione del pedagogista G. Lombardo Radice e l'influenza di Benedetto Croce.

[28] Padre del matematico e filosofo Lucio L.R.

[29] Per l'idealismo di Croce di fronte alla logica e alla matematica vedasi Carruccio E. (1958), pp. 323-325.

che non affermi alcuna cosa e che non si riferisca ad alcuna cosa, non è nemmeno una scienza empirica per cui è impossibile che i principi della matematica abbiano un fondo di verità. Anzi tali principi sono assolutamente falsi».

Francesco Speranza[30] nel ripresentare il progetto culturale di Federigo Enriques, evidenzia che lo stesso Enriques sostiene che una conoscenza risulta approssimata allora che si confrontino tra loro una realtà sensibile con un concetto scientifico. Altro asse portante è lo storicismo che tra '800 e '900 prevale sul razionalismo. A riguardo Enriques tenta una conciliazione parlando di razionalismo storico. Sostiene che ogni volta che si vuole ampliare una dottrina settoriale in una forma di cultura generale, sì è costretti a rivedere metodi, adeguamenti, analogie e problematiche, specie nella loro evoluzione storica.

Il pensiero di Croce e il suo influsso portarono ad accentuare il carattere estetico-letterario del Liceo Classico, mentre per il mondo delle scienze nasce il Liceo Scientifico all'inizio "quadriennale", che prende il posto di quella che fu la Sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico. In ogni caso è interessante ricordare che nell'ultima classe del Liceo Classico viene dato molto spazio alla matematica greca, attraverso lo studio diretto dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide. La riforma prevedeva la formazione classica e umanistica, come prevalente mezzo di istruzione, per formare le future classi dirigenti fasciste, e nella quale grande importanza fu data appunto al Liceo classico.

Inizia una produzione di letteratura matematica, tra il 1870 e il 1902, che sarà tipica della Scuola Italiana, produzione di

[30] Speranza F. (2020, ristampa).

elevata qualità scientifica. Ricordiamo i testi del duo[31] Achille Sannia (1822-1892) ed Enrico D'Ovidio (1843-1933), di Aureliano Faifofer[32] (1843-1909), di Riccardo De Paolis[33] (1854-1892), di[34] Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957), di Francesco Severi[35] (1879-1961), tanto per citare i più significativi. L'opera di Enriques–Amaldi sarà quella di maggior successo, sono i libri[36] nei quali io e i miei compagni di scuola ci siamo formati, come tanti in Italia.

Con gli occhi di oggi direi che la metodologia dell'opera è una metodologia di utilizzo, almeno per le parti iniziali, della via intuitivo-fisica, per stabilire i fondamenti, è una metodologia mista, dato che, solo da un certo punto in poi, si razionalizza, e si iniziano a dimostrare i teoremi. Così il punto è "ciò che non ha parti" e quindi "senza dimensioni", la retta viene resa parzialmente dall'immagine del "filo a piombo", e "non ha spessore", l'idea di piano nasce dall'osservazione "dell'acqua stagnante" ed infine lo spazio è "ciò che ci circonda, anche oltre il cielo". Non sono definizioni vere e proprie, sono immagini mediate dalla realtà, che creano delle

---

31 A. Sannia e F. D'Ovidio (1869). *Elementi di Geometria*, Ed. Pellerano, Napoli.

32 A. Faifofer (1878). *Elementi di Geometria*, Tip. Emiliana, Venezia.

33 De Paolis R (1884). *Elementi di Geometria,* Torino: E. Loescher.

34 Enriques F.-Amaldi U (1903). *Elementi di Geometria*, Zanichelli, Bologna.

35 Severi F. (1926-27). *Elementi di geometria*. Vol. I: pel ginnasio e pel corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: pei licei e pel corso superiore dell'istituto tecnico, Vallecchi, Firenze.

36 Interessante leggere sul sito il commento all'opera, cfr: www.afsu.it/discipline/matematica/i personaggi della M./enriques/ /opere di Enriques/G.Israel, articolo.

percezioni della geometria, così che la disciplina, lentamente, si fa strada in noi, creando un equivalente astratto nelle nostre menti. Il punto di passaggio dall'intuitivo al razionale è anche facile da trovare, ed è la dimostrazione del 1° Criterio di eguaglianza dei triangoli, che da sempre, nell'impostazione classica di Enriques-Amaldi, appare come una "forzatura". Se si vuole, dopo questo "impasse", la strada è in discesa. Naturalmente questa è una prima forma di educazione alla geometria, cercando di darne una lettura, compatibile con quel meraviglioso mondo della natura che osserviamo e che ci circonda. La geometria diventa una scienza solo quando si inizia a ragionare su essa e quindi a dimostrare teoremi. Ci si accorge che la linea guida cambia e il legame non è più l'osservazione visiva ed intuitiva delle singole figure, ma entrano in gioco lo studio dei legami e delle relazioni che intercorrono tra gli enti della geometria, che in questa seconda linea guida sono presenti esclusivamente nella loro astrattezza. È solo a questo punto che la geometria è divenuta una scienza.

Il Trattato di Geometria di Francesco Severi[37] si distingue dagli altri per l'impostazione originale, in quanto in esso è mantenuto intatto il rigore del metodo razionale, mitigato però dalla costante preoccupazione di mostrare per ogni nuova nozione, anche il suo substrato intuitivo, e le nozioni di senso comune da cui tali concetti hanno origine. Il metodo conduce al fatto che l'allievo possa meglio afferrare i significati dei vari concetti. Tale spirito si ritrova in un'opera successiva, precisamente nei due volumi di Geometria scritti

[37] L'impostazione di questo trattato è fortemente condivisa dagli autori di questo articolo.

da Angelo Fadini[38] (1910-1992), nei quali la formalizzazione assiomatica è sempre corredata con figure opportune, scelte nel mondo fisico-intuitivo, così che l'occhio aiuti la comprensione dell'assioma. Tali volumi hanno poi il vantaggio dell'uso di un linguaggio attuale, facendo un corretto uso sia della Logica che della Teoria degli insiemi. Torneremo ampiamente su tali volumi e sull'importanza scientifica di detta opera nella seconda parte.

La tradizione di testi prodotti da professori universitari è continuata e possiamo contare sulle opere di Francesco Speranza (1932-1998) e Alba Rossi dell'Acqua (1917-2011) della serie *Il linguaggio della matematica*, sulla *serie Scoprire la matematica* ad opera di Giovanni Prodi (1922-2010) e vari altri collaboratori, ma ancora su testi di Emma Castelnuovo (1913-2014), Bruno d'Amore, Anna Cerasoli tanto per citare quelli a noi più noti. Tali opere si distinguono tutte per la loro profondità e per il loro impegno nei vari capitoli, promuovendo una cultura della cosiddetta geometria sintetica, che di fatto oggi abbiamo del tutto dimenticata.

[38] Fadini A. (1977), *Geometria Razionale*, vol.I-II, Ed. Mursia, Milano,

Bibliografia

Carruccio E. (1958). *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*. Torino: Ed. Gheroni.

Duheim P. (1915). *La science allemande*. Paris: Ed. Hermann.

Enriques F. (1898). *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Bologna: Zanichelli.

Enriques F. (2020). *Periodico di Matematica* (IV) Vol. II (1), giugno 2020 pp.81-104.

Enriques F. (1926, rist.). *Problemi della Scienza*, Bologna: Ed. Zanichelli (www.afsu.it/matematica/person).

Eugeni F. (2019). I movimenti e la distanza nel piano di Klein, *Periodico di Matematica* (IV) Vol. I (1-2), pp. 33-96, (cfr. www.afsu.it/riviste**).**

Eugeni F. (2021). La geometria proiettiva e affine I: la via assiomatica e i piani finiti, *Periodico di Matematica,* Anno 36 (s.IV), Vol. III (1), 7-24.

Eugeni F. (2021). La geometria proiettiva e affine II: quadrati latini e piani affini finiti, *Periodico di Matematica,* Anno 36 (s.IV), Vol. III (2), pp. 19-46.

Eugeni F.–Mascella R. (2001). La retta eucidea reale a partire da una relazione d'ordine, *Periodico di Matematiche*, serie VIII, vol.1, n.3, pp.45-56. (www.afsu.it/discipline/ matematica/ fondamenti di g.**).**

Eugeni F.- Mascella R. (2020). *Il problema della percezione dello spazio in geometria,* www.afsu.it/discipline/ matematica/fondamenti di geometria**.**

Giorello G.-Sindoni E.-Sinigaglia C. (1915). *I volti del tempo*. Milano: Bompiani.

Gucciardini N. (2013). Newton, un filosofo della natura e del sistema del mondo, *I grandi della Scienza 2*, *Le Scienze,* Milano.

Lombardo Radice L. (1961). Non-desarguesian finite graphic planes, in Segre B., *Lectures on modern geometry,* Roma: Ed Cremonese.

Mascella R. (2019). La possibilità non archimedea, *Periodico di Matematica*, anno 34°, serie IV, vol. I (1-2) pp. 97-150.

Nicotra L. (2015). Il ruolo dell'Islam nello sviluppo delle scienze *ArteScienza n.4*. (http://doi.org/10.30449/AS.v2n4.029).

Nicotra L. (2018). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte I, *ArteScienza*, *10* (http://doi.org/10.30449/AS.v5n10.085).

Nicotra L. (2019). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte II, *ArteScienza*, *12* (http://doi.org/10.30449/AS.v6n12.101).

Nicotra L. (2020). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte III, *Arte Scienza*, *13* (http://doi.org/10.30449/AS.v7n13.111).

Pelusi D. (2019), Logica fuzzy e calcolo delle probabilità: due facce della stessa medaglia? *Periodico di Matematica*, anno 34 (s. IV), vol. I (1-2), pp. 151-168.

Russell B. (1975). *I fondamenti della geometria*, Roma: Newton & Compton.

Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry*. Roma: Ed Cremonese (CNR – Monografie Matematiche).

Speranza F. (1996). I fondamenti epistemologici della Matematica, in: *I fondamenti della Matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea,* Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Verona 28-29-30 novembre 1996.

Speranza F.(2019). I*nterazioni fra geometria e algebra*, (anche in: https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2021/04/F.-Speranza-geometria-PAG.27-31.pdf).

Speranza F. (2020). Il progetto culturale di Federigo Enriques, ristampato in: *Periodico di Matematica*, anno 35°, serie IV, vol. I (1) pp.83-108. (https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/11/4-F.Speranza-Periodico-di-Matematica-IV-Vol.-II-1_83-108.pdf).

Tallini G. (2005). *Lezioni di Geometria Combinatoria*, Bologna: Ed. Pitagora.

Tartaglia N. (1565). *De insidentibus aquæ* e *De ponderositate*, p. 1, Opera postuma.

Veneroni Stefano (2019, a cura di). I. Kant, *Pensieri sulla vera valutazione delle forze vive e critica delle dimostrazioni delle quali il Signor Leibniz ed altri studiosi di Meccanica si sono avvalsi in questa controversia, insieme ad alcune considerazioni preliminari riguardanti la forza dei corpi in generale,* con prefazione, introduzione, traduzione, note, commenti, 4 voll. Milano-Udine: Ed. Mimesis.