

Variazioni sul teorema di Pitagora

Antonio Fontana*

*Università di Camerino; antonio.fontana@unicam.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n3-4.057

Sunto: Presentiamo alcuni spunti relativi al teorema di Pitagora in vista di un possibile laboratorio a suo riguardo nelle scuole secondarie di secondo grado.

Parole Chiave: Teorema di Pitagora; Inverso del Teorema di Pitagora; Dimostrazioni senza parole; terne pitagoriche.

Abstract: We present some ideas related to the Pythagorean Theorem, in view of a possible laboratory about it in high schools.

Keywords: Pythagorean Theorem; Inverse of the Pythagorean Theorem; Proofs without words; Pythagorean triples.

1 - Introduzione

Questa nota nasce da alcuni corsi di aggiornamento e PCTO rivolti a docenti o studenti della Scuola Secondaria di secondo grado. Può essere la base per ulteriori, analoghe esperienze laboratoriali. Parla del teorema di Pitagora: un argomento che, bisogna riconoscerlo, in genere è spesso avvertito solo come una fastidiosa presenza nei programmi scolastici. Eppure rappresenta una pietra miliare nel pensiero matematico. È questo il parere autorevole del grande matematico del Novecento Godfrey Hardy, che, all'inizio della sua *Apologia di un matematico* (Hardy, 2002), menziona e celebra *“due dei teoremi più famosi della matematica ... «semplici»... e tuttavia di primissimo ordine”*, aggiungendo che ciascuno di essi *“conserva la freschezza e l'importanza di quando è stato scoperto”*. Ebbene, il primo di questi due risultati è proprio il teorema di Pitagora – aggiungiamo che il secondo è la dimostrazione euclidea dell'esistenza di un'infinità di numeri primi.

Perché il teorema di Pitagora è da ritenersi *“di primissimo ordine”*? Hardy sottolinea come esso si colleghi alla genesi dei numeri irrazionali, o comunque alla scoperta di grandezze incommensurabili: tali sono infatti, già nel caso apparentemente elementare di un triangolo rettangolo isoscele (il così detto semiquadrato) il cateto e l'ipotenusa, come dire il lato e la diagonale del quadrato doppio.

L'avvento dei numeri irrazionali è storicamente rilevante, ma già considerato dai programmi (anche se certamente difficile da spiegare e in genere trascurato). Quali altri spunti si possono individuare per meglio avvicinare gli studenti alla bellezza e alla ricchezza del teorema di Pitagora? Nel seguito

della nota ne proponiamo due: dimostrazioni senza parole e terne pitagoriche.

2 - Dimostrazioni senza parole

Il Teorema di Pitagora corrisponde alla proposizione 47 del primo libro degli *Elementi* (Euclide, 1988). La dimostrazione, basata sulla Figura 1, è abbastanza elaborata.

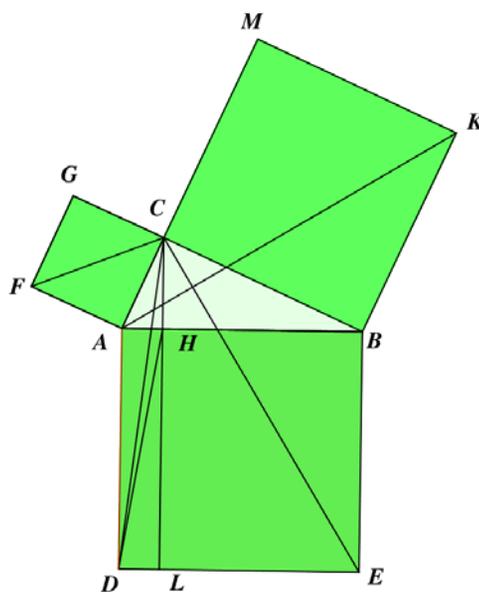


Figura 1

Il triangolo rettangolo in esame è quello ABC di ipotenusa AB e cateti AC e BC , così che i quadrati da confrontare risultano $ABED$ (costruito sull'ipotenusa) e $ACGF$, $BCMK$ (costruiti sui cateti). I punti chiave dell'argomento euclideo sono:

- i triangoli FAB e CAD sono uguali,
- il triangolo CAD è equivalente al triangolo rettangolo AHD, di cui condivide la base AD e la relativa altezza,
- allo stesso modo il triangolo FAB è equivalente a FAC,
- facendo ruotare i triangoli AHD e FAC attorno alle rispettive ipotenuse otteniamo in un caso il rettangolo AHLD e nell'altro il quadrato ACGF, essi pure equivalenti.

Allo stesso modo si procede dalla parte di BC.

La dimostrazione più comune del teorema di Pitagora, quella che una volta si insegnava, e forse ancora si insegna, nelle scuole secondarie, si basa sul così detto *primo teorema di Euclide*. In realtà il risultato compare negli *Elementi* solo all'interno della proposizione 8 del sesto libro, dunque molto dopo il teorema di Pitagora. Vi si enuncia, per un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB e altezza relativa CH, la similitudine tra l'intero ABC e i triangoli AHC e BHC. La si può tradurre, in particolare, come l'equivalenza tra il quadrato costruito su AC e il rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e le proiezioni AH di AC sull'ipotenusa. Questa equivalenza si ricava tramite un opportuno parallelogramma ausiliario, come in Figura 2. Il teorema di Pitagora si deduce facilmente, ripetendo l'argomento dalla parte di BC.

Esistono tuttavia dimostrazioni ben più semplici e intuitive del teorema di Pitagora, suggerite da figure opportunamente architettate. Possono interessare, e forse addirittura attrarre gli studenti.

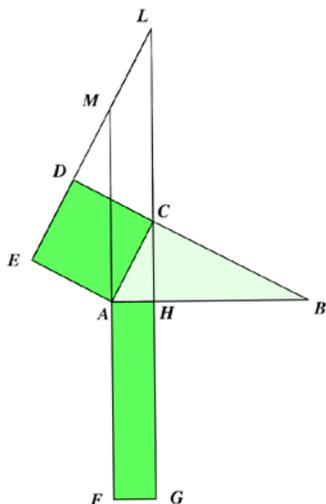


Figura 2

Ne ricordiamo qui alcune, tra le più famose, a cominciare da quella del testo cinese Zhoubi Suanjing, probabilmente del 200 a. C. . In essa lo stesso quadrato si compone di quattro triangoli rettangoli verdi, uguali a quello ABC di partenza, e poi a sinistra dei due quadrati blu costruiti sui cateti, a destra del quadrato viola costruito sull'ipotenusa, come in Figura 3.

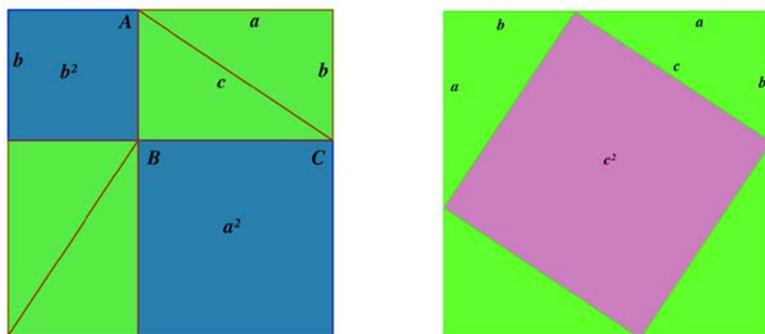


Figura 3

Curiosa è la dimostrazione in versi dell'astronomo britannico George Airy (1802-1892). Nell'originaria versione inglese recita così:

I am, as you can see,

$$a^2 + b^2 - ab.$$

When two triangles on me stand,
square of hypotenuse is plann'd
but if I stand on them instead
the square of both sides are read.

Magari gli studenti stessi possono cercare una traduzione in italiano, che comunque riportiamo qui sotto per completezza.

Come potete vedere son qui,

$$a^2 + b^2 - ab.$$

Se due triangoli son sopra di me
il quadrato dell'ipotenusa c'è
ma se questi di sotto invece stanno
i quadrati dei cateti si hanno.

Se questi versi non sono sufficienti a capire l'argomento, la Figura 4 interviene ad illustrarlo.

Il triangolo rettangolo a cui si fa riferimento è quello viola in basso a sinistra, uguale tuttavia all'altro triangolo rettangolo viola a destra, e ai due triangoli rettangoli celesti in alto.

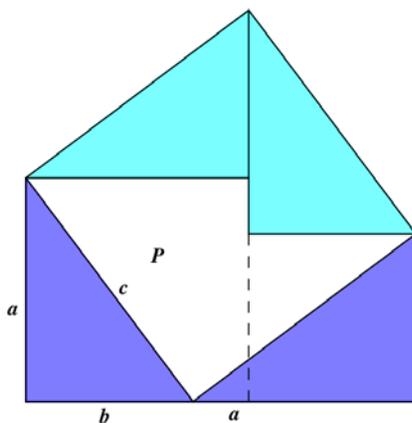


Figura 4

La parte in bianco e in celeste corrisponde al quadrato costruito sull'ipotenusa, quella in bianco e viola alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Le parti viola e celeste sono evidentemente uguali, componendosi di due dei quattro triangoli rettangoli di partenza. La parte bianca misura poi $a^2 + b^2 - ab$, che è la quantità di cui parla la poesia.

Citiamo ancora la dimostrazione di (addirittura) un presidente USA, James Garfield (1831-1881). Difficile immaginare che i suoi successori dei nostri tempi manifestino la stessa attenzione per la geometria. Stavolta il discorso è più articolato. Nella Figura 5 non compaiono quadrati, ma un trapezio rettangolo, insieme a due copie del triangolo rettangolo in esame. Le lunghezze di cateti e ipotenusa sono qui indicate con x, y, z . I triangoli sono in verde, rispettivamente ABC e CED , mentre il trapezio aggiunge loro anche la parte in bianco, coincide quindi con $ABED$.

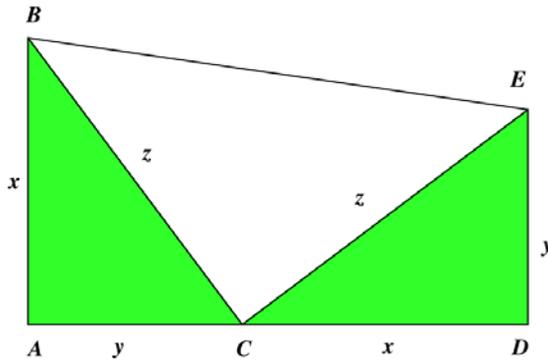


Figura 5

Si noti che il triangolo bianco a centro figura è rettangolo in **C** e isoscele. Il trapezio **ABED** ha altezza **x+y** e basi **x** e **y**, dunque area $S = \frac{(x+y)(x+y)}{2} = \frac{(x^2+y^2)}{2} + xy$. Ma la stessa area si ottiene come la somma di quelle dei tre triangoli rettangoli, due con cateti **x** e **y**, l'altro con due cateti uguali di misura **z** dunque vale: $S = \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{z^2}{2} = xy + \frac{z^2}{2}$. Confrontando le due espressioni di **S** si ottiene la tesi del teorema.

Ad anticipare le dimostrazioni senza parole fu anche Leonardo da Vinci (1452-1519): il suo approccio alla matematica è visivo, geometrico e intuitivo, e tuttavia riesce efficace e convincente, anche in prospettiva didattica (Pasquazi, 2019). Fornisce anche un collegamento affascinante tra geometria e arte.

L'interesse di Leonardo per il teorema di Pitagora è manifestato da molte delle figure (e relative didascalie) di una delle sue più celebri opere scritte, ovvero *Il codice atlantico* (Figura 6).

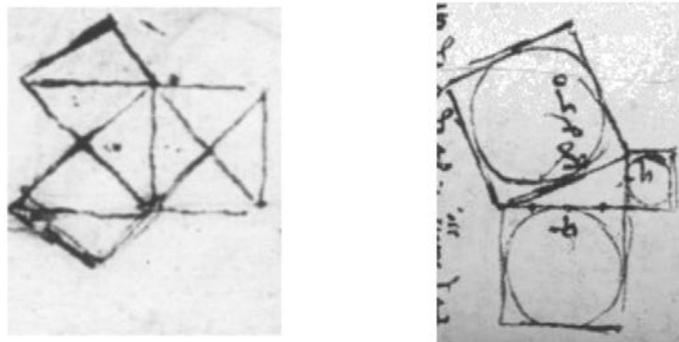


Figura 6: Codice Atlantico, Foglio 225 verso.

Immagini prese da (Pasquazi, 2019).

Concludiamo il paragrafo tornando ai due teoremi di Euclide. Come si è già riferito, nessuno dei due compare esplicitamente negli *Elementi*, ma entrambi si percepiscono nella proposizione 8 del sesto libro. Essi sottolineano come, in ogni triangolo rettangolo,

- ogni cateto sia medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa,
- l'altezza relativa all'ipotenusa sia media proporzionale tra le proiezioni dei cateti.

Forniscono così due maniere diverse per costruire geometricamente la radice quadrata di un numero intero positivo N :

- come misura del cateto di un triangolo rettangolo con ipotenusa N e proiezione 1 ,
- come misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo con proiezioni N e 1 (dunque ipotenusa $N + 1$).

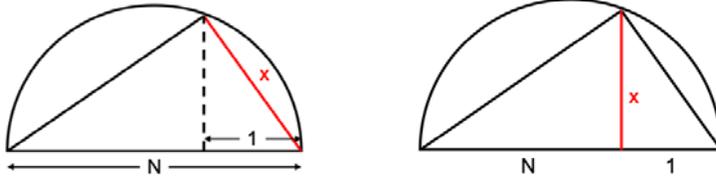


Figura 7

In altre parole, rivelano come l'estrazione di una radice quadrata si possa ottenere senza calcolatori, ma soltanto con riga e compasso (la costruzione di un triangolo rettangolo, come inscritto in una semicirconferenza, si ottiene infatti col solo uso di questi strumenti, come in Figura 7).

L'osservazione può illustrare ai ragazzi come gli antichi Greci, che mai svilupparono l'algebra per esteso, riuscirono tuttavia ad accostarla con spirito e metodi geometrici.

3 - Le terne pitagoriche

L'algebra, appunto. L'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$ (che esprime il legame tra le misure di cateti e ipotenusa di un triangolo rettangolo) è omogenea di secondo grado, a coefficienti interi, ma con soluzioni che spesso esulano dagli interi e anzi introducono i numeri irrazionali, come il caso del semiquadrato già testimonia.

Si possono tuttavia cercare le radici intere, cioè le terne di interi (a, b, c) che la soddisfano: alcune sono banali, quelle per cui per esempio $a=0, b=c$ (come $(1, 0, 1)$, per cui $0^2 + 1^2 = 1 = 1^2$): le altre, quelle per cui nessuno tra a, b, c è nullo si chiamano terne pitagoriche; stanno tra loro, come è facile verificare,

(3, 4, 5), da cui (6, 8, 10), (9, 12, 15), ...

(5, 12, 13), da cui (15, 36, 39), ...

Dal punto di vista geometrico possiamo poi concentrare l'attenzione sui casi in cui a, b, c sono tutti positivi: una restrizione semplice da accettare, visto che le incognite dell'equazione compaiono sempre e comunque al quadrato e quindi le soluzioni si preservano dopo un cambio di segno.

Ma quale interesse concreto può possedere la ricerca di queste terne pitagoriche? In effetti la loro storia è vecchia di millenni. La testimonianza più antica a loro riguardo è forse la tavoletta babilonese Plimpton 322, che risale al 1800 a. C., cioè all'epoca del re Hammurabi (Mansfield, 2021). Essa fu rinvenuta a inizio Novecento, acquistata dall'editore newyorkese George Plimpton dall'antiquario Edgar J. Banks nel 1922 e poi lasciata in eredità alla Columbia University. I numeri sono rappresentati con la scrittura cuneiforme, col sistema sessagesimale allora in uso. Si ritiene che le colonne riportino quelli che nella notazione moderna rappresentano i valori $\left(\frac{c}{b}\right)^2, c, a$ di una terna pitagorica e relativo triangolo

rettangolo. Si noti che $\frac{b}{c}$ è il seno dell'angolo opposto al cateto di misura b .



Figura 8: immagine presa da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg

Un'altra tavoletta di argilla, denominata Si.427, scoperta in Iraq nel 1894, conservata nel Museo Archeologico di Istanbul e datata probabilmente alla stessa epoca di Plimpton 322, rappresenta un documento catastale e molto probabilmente illustra l'uso delle terne pitagoriche nella determinazione di angoli retti da applicare nella suddivisione dei terreni.



Figura 9: immagine presa da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A_cadastre_text_written_in_Akkadian_Terracotta_tablet_18th_century_BCE_From_Sippar_Iraq_Ancient_Orient_Museum_Istanbul.jpg

Il punto chiave in questa prospettiva è il così detto *inverso del teorema di Pitagora*, corrispondente alla proposizione 48 del libro primo degli *Elementi* (Euclide, 1988), quella dunque che segue immediatamente, nella trattazione euclidea, il teorema pitagorico. Essa afferma: se in un triangolo le misure a, b, c dei lati soddisfano $a^2 + b^2 = c^2$, allora quel triangolo è rettangolo, e l'angolo retto è quello opposto al lato c .

Per esempio, un triangolo i cui lati misurano 15, 36 e 39, avendosi $15^2 + 36^2 = 39^2$, deve essere rettangolo, e il suo angolo retto è quello opposto al lato di misura 39. In questo modo la verifica che le lunghezze dei lati di un triangolo formano una terna pitagorica stabilisce anche se un dato angolo è retto.

Non sorprende che questo uso delle terne pitagoriche si ritrovi in altre antiche civiltà, come quella indiana. Gli antichi testi *Shulba Sutras* (la misura della corda) forniscono istruzioni geometriche per la costruzione di altari sacrificali del fuoco per i rituali vedici (Joseph, 2010). In particolare quelli attribuiti a Baudhayana, e risalenti circa all'800 a. C., propongono una formulazione del teorema di Pitagora e un accenno alle terne pitagoriche, da impiegare per le suddette ragioni architettoniche:

Le aree dei quadrati prodotti separatamente dalle dimensioni di un rettangolo eguagliano assieme l'area del quadrato prodotto dalla diagonale. Questo si osserva in rettangoli che hanno per lati 3 e 4, 12 e 5, 15 e 8, 7 e 24, 12 e 35, 15 e 36.

Le terne pitagoriche che in questo modo si ricavano sono (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 36) e quella di cui discutevamo poco fa, (15, 36, 39).

Euclide propone una ricetta per costruire tutte o quasi le terne pitagoriche nel libro nono degli *Elementi* (Euclide, 1988), nel lemma 1 alla proposizione 29. Forse conviene riportare integralmente il suo testo, per curiosità, ma anche per ribadirne lo spirito geometrico; i numeri, infatti, vi sono intesi come segmenti, si identificano cioè con le corrispondenti misure (Figura 10):

Si fissino due numeri AB e BC, entrambi pari o entrambi dispari. Siccome, se si sottrae un pari da un pari (libro IX, prop. 24) o un dispari da un dispari la differenza è pari (libro IX, prop. 26), AC è pari.

Si divida a metà AC in D. Siano AB e BC numeri piani simili, o numeri quadrati (che sono anch'essi numeri piani simili).

Il prodotto di AB e BC insieme col quadrato su CD è uguale al quadrato di BD. E il prodotto di AB e BC è quadrato, appunto perché è stato dimostrato che, se due numeri piani simili moltiplicati tra loro producono un certo numero, il prodotto è un quadrato (II, prop. 6). Allora si sono trovati due numeri quadrati, il prodotto di AB e BC, e il quadrato su CD, che sommati danno il quadrato su BD (libro IX, prop. 1).

Ed è chiaro che due numeri quadrati, il quadrato su BD e quello su CD, sono tali che la loro differenza, il prodotto di AB e BC, è un quadrato, purché AB e BC siano numeri piani simili. Ma quando essi non sono numeri piani simili, si sono trovati due numeri quadrati, il quadrato su BD e quello su DC, tali che la loro differenza, il prodotto di AB e BC, non è un quadrato.



Figura 10

Tradotta in termini moderni, la strategia di Euclide consiste in questo: si prendono due interi positivi $u > v$ e si costruiscono

$a = u^2 - v^2$ (la differenza dei quadrati, che si può anche esprimere come il prodotto di somma e differenza, $(u - v)(u + v)$),

$b = 2uv$ (il doppio prodotto),

$c = u^2 + v^2$ (la somma dei quadrati).

Per esempio, da $u = 2$, $v = 1$, si ottiene la terna pitagorica (3, 4, 5), infatti $(3 = 2^2 - 1^2, 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1, 5 = 2^2 + 1)$. Una facile verifica attesta che ogni terna (a, b, c) così prodotta è pitagorica. Attenzione, però: non ogni terna pitagorica si ottiene per questa via. Per esempio (9, 12, 15) sfugge a questa procedura, perché 15 non si può esprimere come somma di 2 quadrati $u^2 + v^2$.

La classificazione completa delle terne pitagoriche è in genere attribuita a Kronecker, ma corona una serie di contributi dei secoli precedenti.

Si chiama *primitiva* una terna pitagorica (a, b, c) le cui componenti siano prime tra loro. Chiaramente ogni terna pitagorica ne genera una primitiva, dividendo le sue componenti per il loro massimo comune divisore, e si ricava da questa terna pitagorica moltiplicandone le componenti per

questo massimo comune divisore. È in questo modo che le terne non primitive (6, 8, 10) o (9, 12, 15) si ottengono dalla terna primitiva (3, 4, 5) - moltiplicando rispettivamente per 2 e per 3.

Così il punto chiave diventa classificare le terne (a, b, c) primitive, cioè con componenti prime tra loro, come (3, 4, 5). La ricetta di Euclide, adattata a questo ambito, consente di generare tutte e sole le terne primitive nel modo già indicato

$$a = u^2 - v^2 \text{ (la differenza dei quadrati),}$$

$$b = 2uv \text{ (il doppio prodotto),}$$

$$c = u^2 + v^2 \text{ (la somma dei quadrati).}$$

a partire però da due interi positivi $u > v$ primi tra loro e uno pari e uno dispari.

In questo modo, per esempio, da $u=2, v=1$ si ottiene (3, 4, 5), da $u=3, v=2$ si ottiene (5, 12, 13), da $u=4, v=1$ si ottiene (15, 8, 17), e via dicendo.

Una curiosità. Tutte le terne pitagoriche primitive si generano a partire da (3, 4, 5), che è la più semplice, con tre semplici procedure, consistenti, a partire da una terna data (a, b, c) , nel costruire

$$(a - 2b + 2c, 2a - b + 2c, 2a - 2b + 3c),$$

$$(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c),$$

$$(-a + 2b + 2c, -2a + b + 2c, -2a + 2b + 3c).$$

Si forma così il così detto albero delle terne pitagoriche primitive, che fu individuato per la prima volta da Berrgren

nel 1934, con perfezionamenti e varianti di autori successivi. Lo riproduciamo in Figura 11.

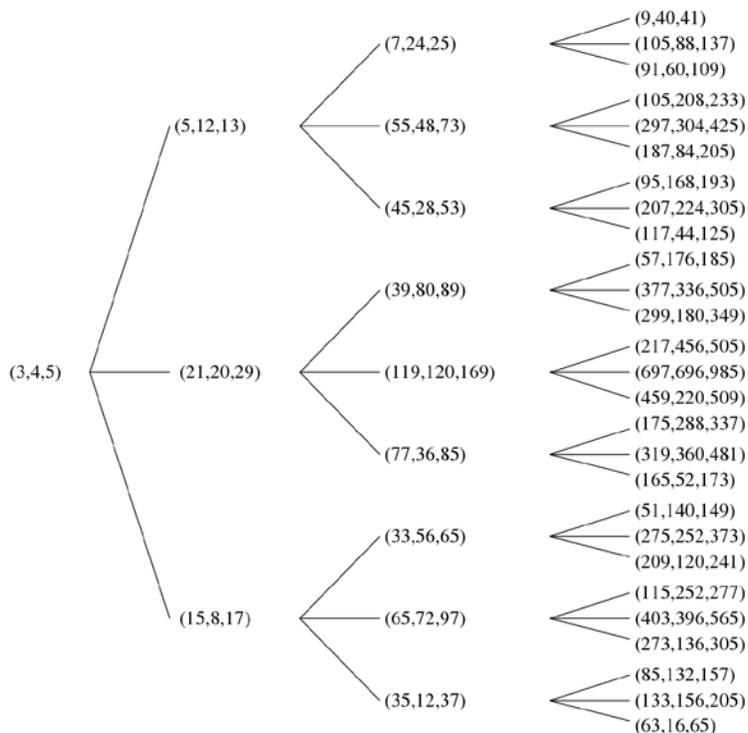


Figura 11: immagine presa da <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagorean.tree.svg>

Concludiamo questa breve serie di spunti sulle terne pitagoriche ricordando il modo in cui le introduce Diofanto, il matematico alessandrino del III secolo d. C. nel suo trattato *Aritmetica*. Il problema VIII del secondo libro chiede appunto questo: *dividere un quadrato nella somma di due quadrati*.

In altre parole, e per usare termini moderni, la questione proposta da Diofanto è la seguente: viene assegnato un intero positivo c , e si richiedono due numeri razionali (e magari due numeri interi) $a, b > 0$ in modo che $a^2 + b^2 = c^2$?

Il caso specifico considerato da Diofanto è $c=4$, così che sono da trovare a, b tali che $a^2 + b^2 = 16$ cioè $16 - a^2 = b^2$.

Il metodo seguito da Diofanto consiste nel porre $b = qa - 4$ alla ricerca di un $q > 0$ razionale che soddisfi la precedente condizione. Con facili conti si ricava

$$16 - a^2 = b^2 = (qa - 4)^2 = q^2 a^2 - 8qa + 16,$$

da cui

$$\begin{aligned} -a^2 &= q^2 a^2 - 8qa, \\ (q^2 + 1)a &= +8q \end{aligned}$$

Fissando $q=2$, si ottiene $5a=16$, dunque

$$a = \frac{16}{5}, \quad b = 2 \frac{16}{5} - 4 = \frac{12}{5}.$$

Si arriva così alla terna $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 4\right)$, che a rigore non può definirsi pitagorica, perché le prime due componenti sono intere; moltiplicando tuttavia ogni componente per 5 e dividendo poi per 4, si ottiene una nuova terna, che soddisfa ancora l'equazione di Pitagora, e in più è formata da numeri interi, dunque è pitagorica: (4, 3, 5).

Il procedimento di Diofanto si può ripercorrere anche da un punto di vista geometrico, come in Figura 12: rispetto a un fissato sistema di riferimento cartesiano, si considerano la circonferenza $x^2 + y^2 = 16 = 4^2$ con centro nell'origine e raggio 4, e la retta $y = qx - 4$ passante per il punto C di coordinate (0, -4) e hanno coefficiente angolare q razionale positivo, alla ricerca di punti di intersezione a coordinate intere, o

razionali, nell'arco che sta nel primo quadrante (esclusi $(4, 0)$ e $(0, 4)$).

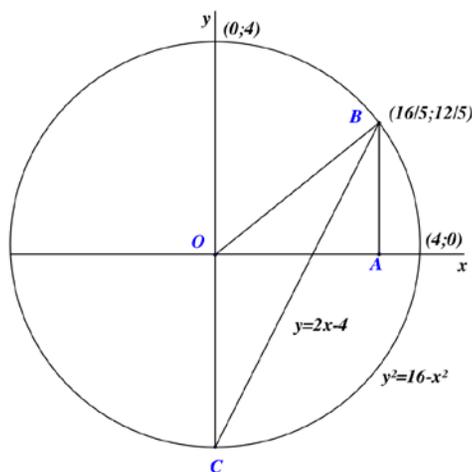


Figura 12

Per $q=2$ la retta ha equazione $y=2x-4$ così che ci si trova ad affrontare il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Per c arbitrario, nella ricerca di valori razionali (o addirittura interi) $a, b > 0$ per cui

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

si pone, per q razionale positivo, $b = qa - c$.

A riguardo del problema VIII di Diofanto, si potrà ricordare come esso sia stato proprio lo spunto che ispirò a Fermat il suo

famoso *Ultimo Teorema*. Leggendo quella pagina, il matematico francese del Seicento si chiese se non l'equazione pitagorica, ma le sue varianti con esponente intero maggiore di 2, dunque in astratto

$$x^n + y^n = z^n$$

per $n = 3, 4, 5, \dots$ (infiniti valori!), nello specifico $x^3 + y^3 = z^3, x^4 + y^4 = z^4, x^5 + y^5 = z^5, \dots$, ammettono ancora terne di soluzioni intere non banali (cioè a componenti tutte non nulle): le equivalenti, dunque, delle terne pitagoriche.

Si noti che queste equazioni di Fermat $x^n + y^n = z^n$ sono ancora ciascuna omogenea di grado n e a coefficienti intere.

La congettura di Fermat - appunto, il suo Ultimo Teorema - esclude però, a differenza del caso pitagorico, soluzioni intere non banali. Come è ben noto, Fermat annotò sul bordo della pagina di Diofanto di aver trovato una prova meravigliosa di questo fatto, troppo lunga però per potersi contenere nel margine di quel foglio. Dopo di che, la prima dimostrazione completa affermazione arrivò solo nel 1994, a opera di Andrew Wiles, impiegando strumenti matematici sofisticatissimi e impensabili ai tempi di Fermat, e occupando centinaia di pagine.

Per maggiori approfondimenti sulle terne pitagoriche rinviamo alla panoramica del recente articolo (Agarwal, 2020).

4 - Conclusione

In questo breve itinerario abbiamo visto come il teorema di Pitagora e la geometria si colleghino in modo naturale non solo all'algebra, ma anche ad arte, architettura, come pure alla storia del pensiero, fino alla progettazione dei moderni algoritmi.

Siamo allora convinti che questa proposta possa stimolare e interessare i ragazzi, e dunque occupare non certo le lezioni dedicate ai programmi tradizionali, ma altre iniziative di contorno, come appunto PCTO, o PLS, o Liceo Matematico.

Bibliografia

- Agarwal R. P. (2020). Pythagorean Triples before and after Pythagoras, *Computation* 8, 62, 36 pp.
- Euclide (1988). *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino: UTET.
- Hardy G. (2002). *Apologia di un matematico*, Milano: Garzanti.
- Joseph G. (2010). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.
- Leonardo da Vinci (2000). *Il Codice Atlantico* della Biblioteca Ambrosiana di Milano, Firenze: Giunti.
- Mansfield D. F. (2021). Plimpton 322: A Study of Rectangles, *Foundations of Science*, 29 pp.
- Pasquazi D. (2019). La geometria intuitiva di Leonardo da Vinci, *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, 3, pp. 237-258.