Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp. 199-220

Ma i punti esistono?

Geometrie aristoteliche

Giangiacomo Gerla*

*Professore Emerito dell'Università di Salerno, Italy; ggerla@unisa.it

DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.058

Sunto: *L'assunzione della nozione di punto come primitiva per definire una teoria dello spazio è sempre stata soggetta a critiche da parte di molti filosofi. Lo stesso si può dire per le nozioni di linea e di superfice. Tali critiche sono motivate dai dubbi circa l'opportunità di fondare il continuum geometrico su entità la cui esistenza appare problematica essendo ogni cosa nel mondo reale tridimensionale. In questo lavoro si citano le opinioni di alcuni di tali filosofi e si espongono recenti teorie che non assumono il punto come nozione primitiva. Viene invece assunta quella di "regione" o "corpo solido" (point-free geometry). I punti sono definiti in termini di regioni.*

Parole Chiave*: continuo, punti, geometria, regioni.*

Abstract: *The assumption of the notion of point as primitive to define a theory of space has always been subject to criticism from many philosophers. The same can be said for the notions of line and surface. Such criticisms are motivated by doubts about the advisability of founding the geometric continuum on entities whose existence appears problematic since everything in the real world is three-dimensional. In this work the opinions of some of these philosophers are cited and recent theories are presented that do not assume the point as a primitive notion, assuming instead that of "region" or "solid body" (point-free geometry). The points are instead defined in terms of regions.*

Keywords*: continuum, points, geometry, regions.*

1 - Introduzione

Scrivo questa nota sperando sia utile a suggerire un'attività interdisciplinare a cavallo tra geometria e filosofia per studenti delle superiori. Uso la parola "filosofia" per indicare l'amore per la l'analisi, la riflessione, la critica, la storia delle idee e non certo la costruzione di edifici teorici aventi la pretesa di essere una definiva rappresentazione del mondo. Intesa in tale modo, sono convinto che la filosofia debba essere maggiormente presente nell'insegnamento sia nelle scuole superiori che nelle università e questo anche dove non è esplicitamente inserita nei programmi.

Andando al titolo del lavoro, la scelta di parlare della nozione di punto è dovuta al ruolo centrale che tale nozione gioca in tutti i tentativi di descrizione razionale del continuo e quindi del mondo in cui viviamo. Il lavoro inizia con una rapida panoramica sull'atteggiamento degli antichi greci verso la nozione di punto con particolare riguardo per i Pitagorici, Euclide, Aristotele, Sesto Empirico per poi considerare anche autori come Giordano Bruno e Lobačevskij.

Successivamente il lavoro passa a descrivere alcune moderne ricerche che vanno sotto il nome di "Point-free geometry"[1] in cui si vuole mostrare come la scelta dei punti come nozione primitiva non è la sola possibile. Tali ricerche iniziano nella prima metà del Novecento ad opera di Whitehead, Tarski, Grzegorczyk, per poi proseguire fino ai giorni nostri. Tutte hanno in comune il rifiuto di assumere i punti come enti primitivi a favore delle "regioni" o, se si vuole, dei "corpi solidi". Le motivazioni sono di tipo

[1] Nome che tradurrò con "geometria point-free".

ontologico nel senso che si attribuisce alle regioni un tipo di esistenza più forte di quella dei punti i quali sono visti invece come risultato di un processo di astrazione (successioni sempre più piccole di regioni) o come caratteristiche da attribuire a regioni (spigoli risultanti da tagli).

Concludo evidenziando che questo articolo è motivato dalla mia convinzione che la geometria sintetica non è riducibile a quella analitica come attualmente si ritiene. In altri termini non sono affatto convinto della validità dell'equazioni

Geometria piana = $\mathbb{R}^2$; Geometria solida = $\mathbb{R}^3$,

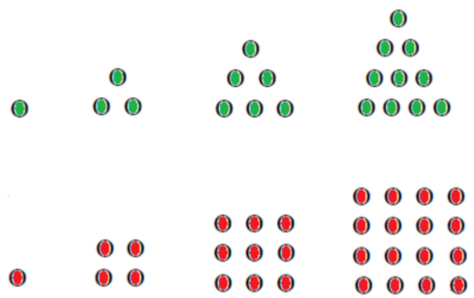
con $\mathbb{R}$ campo dei numeri reali. Questo sia per motivi teorici che per motivi, non meno importanti, didattici.

2 - I punti: alcune opinioni degli antichi greci

Dovendo parlare dei punti è inevitabile partire dalla scuola pitagorica per la quale i punti-sassolino sono considerati base di tutte le cose. Lo testimonia il seguente famoso passo di Aristotele dove per "numeri" vanno intesi i numeri naturali ai quali sembra venga attribuita un'esistenza concreta come aggregazione di un numero finito di sassolini:

> *Tra i primi filosofi ... furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri . . . Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (Aristotele, la Metafisica A, 985b23-986a3).*

In particolare, i pitagorici erano convinti che ogni figura geometrica fosse un aggregato finito di punti opportunamente disposti. Questo portava a chiamare "triangolari" i numeri che permettono la costruzione di un triangolo (equilatero), "quadrati" i numeri che permettono la costruzione di un quadrato e così via.



1, 3,6, … **numeri triangolari**

1, 4, 9, … **numeri quadrati**

Corollario di tale punto di vista è che la grandezza di una qualunque figura geometrica è esprimibile tramite un numero intero. Basta scegliere come unità di misura le unità-punto e contare di quante unità-punto è costituita la figura. Purtroppo, ben presto si vide che se il lato di un quadrato misura un numero naturale, allora la diagonale non può essere misurata tramite un numero naturale. Questo comporta l'impossibilità di riduzione del continuo geometrico al discreto dell'aritmetica. In proposito l'opinione di Aristotele è netta:

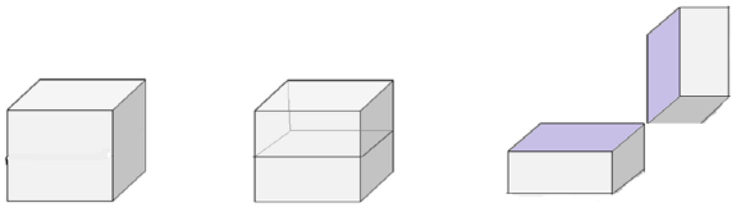
> *È impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. (Aristotele 231 a, 24-26) ... Il continuo sarebbe divisibile in indivisibili (Aristotele 231 b, 10); ma in realtà nessun continuo è divisibile in cose prive di parti... (Aristotele*

> *231 b, 11-12). Ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili (Aristotele 231 b,16).*

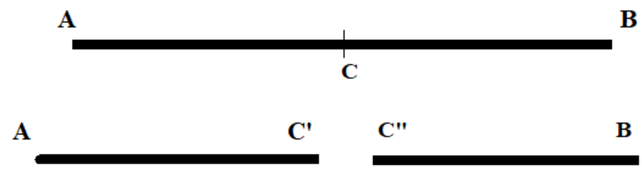
È importante l'uso del termine "divisibile" che sembra essere vista come un'azione (dividere) di un essere umano che in quanto tale non può che terminare dopo un numero finito di passi. Quindi "divisibile" è da intendere come "finitamente divisibile". Sulla natura ontologica dei punti Aristotele argomenta come segue.

> *Se nella pietra non è presente un Ermete, neppure un semi-cubo sarà presente nel cubo come qualcosa di determinato. Dunque, non sarà presente neppure la superficie: se, infatti, fosse presente una qualsiasi superficie, ci sarebbe anche quella che delimita la metà del cubo. Lo stesso ragionamento vale anche per la linea, per il punto e per l'unità. (Aristotele 1002 a 21-25) …*
>
> *… Infatti, non appena due corpi entrano in contatto o sono divisi, i loro estremi diventano simultaneamente uno se si toccano, due se si dividono. Quindi, quando i due corpi sono collegati, uno dei limiti non esiste più e quando sono divisi i due limiti esistono anche se prima non esistevano …" (Aristotele 1002 a, 35 b, 1).*

Detto in modo esplicito, se da una pietra di marmo si pensa di scolpire una statua di Ermete, allora è naturale ritenere che la pietra abbia un'esistenza attuale e la statua solo un'esistenza potenziale. Similmente, se un cubo si taglia in due pezzi allora il cubo ha un'esistenza attuale ed i due pezzi hanno un'esistenza potenziale. A maggior ragione avranno esistenza potenziale le due nuove superfici createsi che compaiono o scompaiono a seconda dell'azione compiuta. Lo stesso si può dire per le linee (due tagli) ed i punti (tre tagli).[2]



Riferendoci ad un segmento *AB*, possiamo dire che se *AB* si taglia a metà nel punto *C*, si ottengono due segmenti *AC′* e *CB″* con *C′* diverso da *C″*. Pertanto, il taglio riesce a spezzare in due parti il punto *C*: cosa assurda in quanto "un punto è ciò che non ha parti".



Possiamo anche fare il processo inverso e riunire di nuovo i segmenti in modo da ricostituire il segmento *AB* ed il punto *C*. Tutto questo è paradossale almeno che ai due punti (e più in generale a tutti i punti) non si attribuisca un'esistenza non attuale. D'altra parte, Aristotele esprime in modo esplicito la sua idea su cosa siano i punti: «*I punti sono limiti delle grandezze*» (Aristotele 1092 b, 9-10) in completa opposizione alla famosa definizione di Euclide: «*Punto è ciò che non ha parti*». (Euclide, Elementi, I, def. 1).

[2] Si veda anche Lobačevskij nel paragrafo 4.

3 - Scorrimento e rotolamento: Sesto Empirico

Non possiamo chiudere questa brevissima panoramica sull'idea di punto in Grecia antica senza parlare di Sesto Empirico il quale in "Contro i matematici" tra le altre critiche ai matematici mette in discussione il fatto che una figura geometrica possa essere "generata" dai punti per scorrimento.

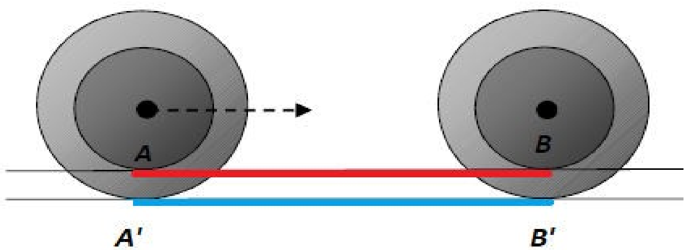
> *. . . essi dicono, inoltre, che una linea viene prodotta dallo scorrimento di un punto, una superficie dallo scorrimento di una linea, e un corpo solido dallo scorrimento di una superficie (ma)… il punto che essi definiscono come segno-privo-di-dimensioni, si deve concepire o come corporeo o come incorporeo. Corpo esso non è, secondo le loro stesse affermazioni, giacché le cose che non hanno dimensione, secondo loro, non sono corpi. Resta allora da dire che esso è incorporeo, il che è ancora una volta incredibile. Infatti, ciò che è incorporeo non si può concepire come generatore di una linea; quindi, il punto non è un segno-privo-di-dimensioni. (Sesto empirico, Libro terzo 19 e 22)*

In altri termini Sesto Empirico pone il problema di come:

- un ente di dimensione 0, il punto, possa generare per scorrimento un ente di dimensione 1,
- un ente di dimensione 1, una linea, possa generare un ente di dimensione 2,
- un ente di dimensione 2, una superfice, possa generare un ente di dimensione 3.

Si noti che esiste una notevole differenza tra dire che un segmento è prodotto dallo scorrimento di un punto dal dire che un segmento è un insieme di punti. Infatti, nel primo caso l'operazione di scorrimento non sembra coinvolgere l'infinito attuale (per meglio dire carica il relativo problema sul continuo temporale) in quanto lo scorrimento avviene in un tempo finito. Problemi relativi allo scorrimento sono forse pure presenti nel seguente paradosso dovuto, sembra, ancora ad Aristotele ma che si ritrova descritto da Galileo.

Consideriamo due ruote concentriche incollate una sull'altra, di raggi 0.5 ed 1, rispettivamente, e supponiamo di far fare alla più grande un giro completo cioè un giro di 360 gradi in modo che rotolando tracci un segmento $A'B'$. Nel frattempo, anche la ruota più piccola avrà fatto un giro completo di 360 gradi ed avrà tracciato un segmento AB della stessa lunghezza di $A'B'$.[3] Questo è assurdo perché i due segmenti rappresentano lo "srotolamento" di due circonferenze di lunghezza π e 2π, rispettivamente. Ecco quello che dice in proposito Galileo.



Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza? (Galileo, (1638) in "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze")

[3] Se si vuole, è possibile anche immaginare che sulla ruota piccola sia stato messo dell'inchiostro rosso e su quella grande dell'inchiostro blu.

4 - Giordano Bruno e Nicolaj Ivanovič Lobačevskij

Abbiamo visto che presso i greci antichi coesistevano due idee diverse di punto. Quella di Aristotele che considerava i punti come derivati dai corpi solidi ed attribuiva a loro un tipo di esistenza più debole rispetto a quello dei corpi. Quella di Euclide che sembra attribuire ai punti un tipo di esistenza non diversa da quella dei solidi. Entrambi ritenevano che un ente di data dimensione non possa essere generato da enti di dimensione inferiore. Di fatto la scelta che sarà dominante fino ai giorni nostri sarà quella di Euclide. Tuttavia, tracce di questo dualismo saranno costantemente presenti nella storia della matematica. In proposito faremo solo due esempi.

Il primo si riferisce al filosofo Giordano Bruno (1548-1600) il quale nel suo *Contro i matematici ed i filosofi* enfatizza l'importanza del "minimo" chiamando "punti" gli enti che sono un minimo in un contesto di dimensione due ed "atomi" gli enti che sono un minimo in un contesto di dimensione tre.

> *Intendiamo il minimo in due modi: uno nel piano, che è il punto, un altro nel solido che è l'atomo. Come l'unità è la sostanza del numero . . . così il minimo lo è della quantità sia geometrica che fisica.*

Si preoccupa poi di distinguere l'idea di Aristotele di punto come limite da quella, per lui centrale, di punto come minimo.

> *Il punto che è il termine non è né una quantità, né è minore di qualcosa, né è un minimo, dunque noi lo distinguiamo dal punto che è una parte minima …*

Il noto carattere, non certo morbido, di Giordano Bruno si mostra nel seguente passo in cui in segno di disprezzo chiama "geametri" e "filasafi" i matematici ed i filosofi che non riconoscono l'importanza del minimo.

> *L'ignoranza del minimo rende i geometri di questo secolo dei geametri e fa dei filosofi dei filasafi.*

Pescando un po' più in avanti nel tempo, voglio citare anche il matematico Nicolaj Ivanovič Lobačevskij che sembra seguire Aristotele ed essere un precursore della geometria point-free. Infatti, nella parte iniziale del suo libro "*Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele,* dice:

> *Il "contatto" costituisce l'attributo caratteristico dei corpi; e ad esso i corpi debbono il nome di "corpi geometrici" non appena noi teniamo fissa l'attenzione su questa loro proprietà e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano esse essenziali o accidentali.*

Dichiara poi esplicitamente che il contatto è da considerare un concetto primitivo.

> *Questo semplice concetto, che abbiamo ricevuto direttamente nella natura attraverso i sensi, non deriva da altri concetti, e non soggiace perciò ad ulteriori spiegazioni.*

Subito dopo definisce la nozione di "sezione".

> *Due corpi A e B che si toccano tra loro formano un unico corpo geometrico C ... Viceversa ogni corpo C può essere sezionato in due parti A e B … che si toccano.*

I punti, le linee, le superfici vengono definiti in termini del contatto che si crea tra pezzi di un corpo solido risultanti da uno o più tagli.

> *Se si fissano in un corpo tre sezioni principali, … , allora rispetto alla prima sezione due parti si toccano superficialmente, rispetto a due sezioni due parti poste in croce si toccano linearmente, mentre due parti che si trovano da parti opposte rispetto ad ognuna delle tre sezioni si toccano tra loro in un punto.*

5 - La nascita della moderna point-free geometry

La geometria point-free nasce in tempi moderni ad opera di due autori.

Il primo è il famoso filosofo inglese Alfred North Whitehead che scrive i due volumi *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge* (1919) e *The concept of Nature* (1920). Dopo alcuni anni pubblica un altro e più completo volume dal titolo *Process and Reality* (1929).

Il secondo è il famoso logico Alfred Tarski che nel 1927 scrive l'importante articolo *Foundation of the geometry of solids* (1927).

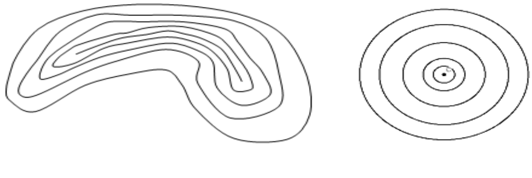
Cominciamo con l'esporre le idee di Whitehead che sono frutto di un'analisi del continuo quadrimensionale. Quest'analisi porterà a mettere in evidenza alcune proprietà del continuo. che esporrò in termini di assiomi di una possibile teoria matematica e riferirò alle dimensioni due e tre. Si considerano strutture del tipo (Re, ≤) con Re insieme i cui elementi chiameremo "regioni" e ≤ relazione binaria interpretata come "inclusione". Tra le proprietà consideriamo le seguenti che, esporrò sotto forma di assiomi.

A1. $\leq$ è una relazione d'ordine,
A2. Per ogni x esistono z_1 e z_2 tali che $z_1 < x < z_2$.
A3. Per ogni z_1 e z_2 esiste x tale che $z_1 < x < z_2$.

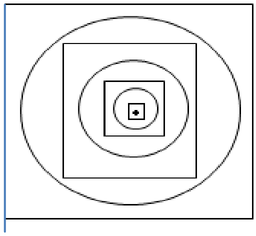
Sono messe in evidenza anche altre proprietà su cui non mi soffermo (si veda in proposito (Gerla, Tortora, 1992). Preferisco invece esporre il modo come Whitehead definisce la nozione di "elemento geometrico astratto" ed in particolare quella di "punto". Questo viene fatto definendo prima la nozione di processo di astrazione.

Definizione 5.1. Un *processo di astrazione* è una successione di regioni $(r_n)_{n\in N}$ tale che:
a) $(r_n)_{n\in N}$ è strettamente decrescente
b) non esiste un minorante di $(r_n)_{n\in N}$.

Le due figure seguenti rappresentano due processi di astrazione che permetteranno di definire una linea ed un punto, rispettivamente.



Può anche capitare che due diversi processi di astrazione rappresentino la stessa figura astratta come avviene per i due processi seguenti fatti di quadrati e di cerchi, concentrici,



rispettivamente. Whitehead affronta tale problema tramite una equivalenza.

Definizione. 5.2. Un processo $(s_n)_{n\in N}$ *copre* un processo $(t_n)_{n\in N}$ se ogni regione del primo contiene una regione del secondo. Due processi sono *W-equivalenti* se si coprono a vicenda.

Successivamente, propone la seguente definizione.

Definizione 5.3. Un *elemento geometrico astratto* è un elemento $[(s_n)_{n\in N}]$ del quoziente della classe dei processi di astrazione modulo la *W*-equivalenza. Si dice che $[(s_n)_{n\in N}]$ è *una parte* di $[(t_n)_{n\in N}]$ se $(t_n)_{n\in N}$ copre $(s_n)_{n\in N}$.

Infine si arriva alla definizione di punto che sembra dare significato alla "definizione" di Euclide.

Definizione 5.4. Chiamiamo *punto* un elemento geometrico che non ha parti.

In altre parole, come un numero reale può essere visto come un processo capace di fornire approssimazioni quanto si vuole precise di una grandezza, un punto viene visto come un processo capace di fornire approssimazioni quanto si vuole precise di una posizione nello spazio. Sottolineo anche il fatto che mentre usualmente i punti sono oggetti del primo ordine e le regioni del secondo, in Whitehead, ed in generale in geometria point-free, avviene esattamente l'inverso.

Quella di Whitehead comunque è più una analisi filosofica del concetto di spazio che la proposta di un sistema di assiomi. La prima proposta di un rigoroso sistema di assiomi per la geometria point-free è, come abbiamo detto, quella del grande matematico e logico Alfred Tarski. Tarski applica una strategia che a me piace chiamare *cannibalizzazione di una teoria T*. Si tratta di considerare uno qualunque degli esistenti sistemi di assiomi T, espresso in un linguaggio $\mathcal{L}$, per la geometria euclidea in cui si assumono come è usuale, i punti tra gli enti primitivi. La cannibalizzazione di T avviene individuando una teoria T^*, espressa in un linguaggio $\mathcal{L}^*$, in cui sono i corpi solidi ad essere considerati come primitivi. Tale teoria deve essere in grado di definire i punti di cui parla T e tutte le nozioni che in T sono primitive. Queste definizioni sono effettuate in un linguaggio $\mathcal{L}^{**}$ che è unione dei linguaggi $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}^*$. In tale linguaggio si considera la teoria $T^{**} = T^* \cap T$ i cui modelli hanno un ridotto che è un modello di T e quindi è un modello della geometria euclidea.[4]

Nel lavoro di Tarski la teoria T è quella di Mario Pieri basata sulla sola nozione di equidistanza di un punto da altri due. T^* invece assume come primitive le regioni e consiste in alcune proprietà delle regioni e del predicato "essere sfera". In T^* definisce, nella classe delle sfere, la relazione binaria di essere equi-concentrici. Poiché questa relazione è un'equivalenza ha senso dare la seguente definizione.

---

[4] Una rigorosa precisazione di tutto questo richiederebbe troppo spazio e l'introduzione di varie nozioni di logica. È evidente che questo metodo, che Tarski non descrive in modo esplicito, è molto generale ed è applicabile tutte le volte che si vogliono cambiare le nozioni primitive di una teoria.

Definizione 5.5. Detto S l'insieme delle sfere un punto è una classe completa di equivalenza modulo la relazione di equi-concentricità.

6 – Due filoni di ricerca di cui mi occupo

Successivamente ai lavori di Whitehead e di Tarski si è sviluppata una vasta letteratura sulla geometria point-free. Non tenterò di descrivere tale letteratura (si veda in proposito (Gerla, 2020) e (Gerla, 2021) limitandomi ad esporre due direzioni di ricerca che seguo da tempo con il contributo di vari colleghi.

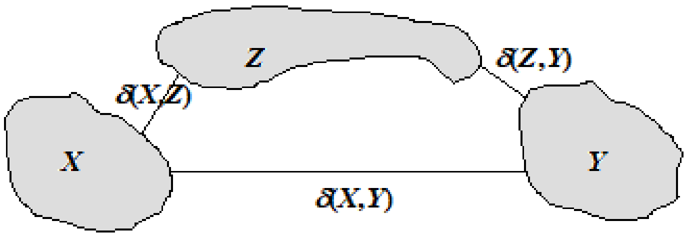
La prima è di carattere metrico e mira a cannibalizzare le esistenti assiomatizzazioni della geometria euclidea che vedono la geometria come spazio metrico (S, d) soddisfacente opportuni assiomi (si veda ad esempio (Blumenthal, 1953)). In tale caso i punti sono l'unico ente primitivo. A tale proposito viene naturale ispirarsi a nozioni di carattere metrico che si riferiscono alle regioni piuttosto che ai punti. Ad esempio, le nozioni di *diametro* e di *distanza* che, come noto, si definiscono ponendo per X ed Y insiemi non vuoti

$$|X| = Sup\{d(x,y) : x \in X, y \in X\},$$

e

$$\delta(X, Y) = Inf\{d(x,y) : x \in X, \ y \in Y\}.$$

Si noti che δ non è una metrica poiché può capitare che $\delta(X,Y) = 0$ con $X \neq Y$ e non vale la diseguaglianza triangolare come mostra la seguente figura



in cui risulta che δ(X, Y) > δ(X, Z)+δ(Z, Y). Tuttavia, valgono alcune proprietà che possiamo assumere come assiomi di una teoria point-free degli spazi metrici.

Definizione 6.1. Chiamiamo *spazio pseudo-metrico senza punti* una struttura $(Re, \leq, \delta, |\,|)$ in cui $\leq$ è una relazione d'ordine in *Re* e sono verificati i seguenti assiomi.

A_1 $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|$ (crescenza del diametro),

A_2 $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ (simmetria),

A_3 $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \delta(x_1, y) \leq \delta(x_2, y)$ (decrescenza di δ),

A_4 $\delta(x, x) = 0$,

A_5 $\delta(x, y) \leq \delta(x, z)+\delta(z, y)+|z|$ (diseguaglianza triangolare).

Come al solito, gli elementi di *Re* sono chiamati *regioni*, la relazione $\leq$ *relazione di inclusione.* Inoltre, δ è chiamata funzione *distanza* e la funzione $|\,|$ *diametro*.

Definizione 6.2. Un *rappresentante di un punto* è una successione $(x_n)_{n\in N}$ decrescente tale che $lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Teorema 6.3. Denotiamo con *RP* l'insieme dei rappresentanti di punto e con $\underline{d} : RP \times RP \to \mathbb{R}^+$ la funzione definita ponendo,

$\underline{d}((x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N}) = lim_n \delta(x_n, y_n)$, allora ($RP$, $\underline{d}$) è uno spazio pseudo-metrico. Pertanto la relazione ≡, definita ponendo $(x_n)_{n\in N} \equiv (y_n)_{n\in N}$ se e solo se $\underline{d}((x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N}) = 0$, è una relazione di equivalenza.

Grazie a tale teorema possiamo definire lo spazio metrico ($RP/\equiv$, d) dove $RP/\equiv$ è il quoziente di RP modulo ≡ e d è definita ponendo

$d([(x_n)_{n\in N}], [(y_n)_{n\in N}]) = \underline{d}((x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N})$.

Definizione 6.4. Chiamiamo *punto* un elemento di $RP/\equiv$.

Avendo associato a (Re, ≤, δ, | |) uno spazio metrico (RP/≡, d), possiamo cannibalizzare un qualunque sistema di assiomi di carattere metrico per la geometria euclidea.

Si noti che esistono anche approcci in cui si considera come primitivo il solo diametro. Il primo a seguire questa via sembra essere stato Flavio Previale nel 1966.

Un diverso filone di ricerca si basa sulla nozione di "ovale" che vuole rappresentare la nozione di insieme convesso (si veda Gerla, Gruszczyński, 2017). In tale caso si propongono strutture del tipo (B, ≤, Ov) soddisfacenti, tra gli altri, gli assiomi seguenti.

A1. (B, ≤) è un'algebra di Boole completa senza atomi i cui elementi sono chiamati "regioni".

A2. Ov è un sistema di chiusura in (B, ≤) cioè è un sottoinsieme chiuso rispetto agli estremi inferiori.

La seguente lista mostra che in un modello della teoria sono definibili tutte le nozioni della geometria di incidenza.

- Chiamiamo *semipiano* un ovale il cui complemento è ancora un ovale.
- Chiamiamo *retta* una partizione dell'universo costituita da ovali e quindi una coppia $l = \{o, -o\}$ con o semipiano. Chiameremo *lati* di l i due semipiani o e o.
- Diciamo che due rette l ed l' sono *parallele* se uno dei lati di l è disgiunto da uno dei lati di l'. Chiameremo *incidenti* due rette che non sono parallele.
- Date due rette incidenti l, l', chiamiamo *angolo* ogni regione ottenuta intersecando un lato di l con un lato di l'.
- Chiamiamo *pseudo-punto* una coppia $P = \{l, l'\}$ di rette incidenti.
- Diciamo che un pseudo-punto $P = \{l, l'\}$ *giace su di un convesso* x se tutti gli angoli ottenuti dalle rette l ed l' si sovrappongono ad x.
- Diciamo che due pseudo-punti P e Q sono *separabili* se giacciono in due convessi disgiunti, *inseparabili* altrimenti.

La relazione di non separabilità è una relazione di equivalenza e questo permette la seguente definizione.

<u>Definizione 6.5.</u> Un *punto* è un elemento del quoziente dell'insieme degli pseudo-punti modulo la non separabilità.

Avendo definito tale serie di nozioni non è difficile cannibalizzare, ad esempio, il sistema di assiomi della geometria di incidenza proposti da Hilbert.

7 - Conclusioni

Le ricerche in geometria point-free sono solo al loro inizio e molti problemi sono aperti. Il principale è trovare una teoria che non utilizzi il trucco della cannibalizzazione ma si basi su assiomi esprimenti proprietà significative dei corpi. Ad esempio, nell'approccio basato sugli ovali che abbiamo brevemente esposto non è difficile dimostrare che l'assioma delle parallele è equivalente all'affermazione che la classe dei semipiani contenuti in un semipiano è totalmente ordinata. Inoltre, sarebbe interessante esaminare cosa è derivabile dall'assumere un "assioma di separazione" affermante che due ovali disgiunti sono sempre separabili da una linea (cioè esistono due semipiani disgiunti che li contengono).

Potrebbe anche essere interessante esplorare le potenzialità didattiche della geometria point-free. Infatti, è evidente che l'intuizione dello spazio che tutti possediamo si fonda in modo prioritario su quella di corpo solido o, per meglio dire, di luogo occupabile da un corpo solido.[5] Inoltre, tale geometria potrebbe essere la base di un nuovo fusionismo.[6]

---

[5] La questione è comunque complessa in quanto è anche straordinaria la capacità dei bambini di rappresentare, quando disegnano, un mondo di dimensione tre su un foglio di dimensione due.

[6] Il fusionismo consiste nella proposta di non separare la geometria piana da quella solida (si veda ad esempio (Borgato, 2006)). Per un testo fusionista si veda (De Paolis 1884).

Bibliografia

Barbieri G., Gerla G. (2021). Defining measures in a mereological space: an exploratory paper, *Logic and Logical Philosophy.*

Biacino L., Gerla, G. (1991). Connection structures*, Notre Dame Journal of. Formal Logic, 32: 242-247.*

Blumenthal L. M. (1953). *Theory and Applications of Distance geometry,* Oxford University Press at Oxford.

Borgato M. T. (2006). Il fusionismo e i fondamenti della geometria, in: *Da Casati a Gentile momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia:* a cura di L. Giacardi, Centro Studi Enriques.

Coppola C., Pacelli, T. (2006). Approximate distances, pointless geometry and incomplete information. *Fuzzy Subsets and Systems, 157: 2371-2383.*

De Paolis R. (1884). *Elementi di geometria Torino*, ed. Loescher.

Di Concilio A., Gerla G. (2006). Quasi-metric spaces and point-free geometry, *Math. Struct. in Comp. Science*, 16, *pp 115-137*.

Galileo G., (1638). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.

Gerla G. (1990). Pointless metric spaces, *J. Symbolic Logic*, 55, *pp* 207-219.

Gerla G. (2006). Un punto dal volto di gatto: fare a meno dei punti I e II, *Periodico di Matematiche*, 3 e 4, *pp 9-20 pp 15-25*.

Gerla G., A. Miranda (2008). Mathematical features of Whitehead's point-free geometry, in *Handbook of Whiteheadian Process Thought*, Michel Weber and William Desmond, Jr. (eds.), Frankfurt/Lancaster, Ontos Verlag, 2, *pp 119-130.*

Gerla G., Gruszczyński R. (2017). Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes, *The Review of Symbolic Logic*, *pp 237-258*.

Gerla G., Tortora R. (1992). La relazione di connessione in A. N. Whitehead: Aspetti matematici, *Epistemologia* 15, *pp 341-354*.

Gerla G. (2020). Point-free continuum, in *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Geoffrey Hellman and Shapiro editors, Oxford University Press.

Gerla G. (2021). L'idea di punto e la point-free geometry (in corso di stampa sul *Portale Italiano di Filosofia Analitica.*)

Lando T., Scott D. (2019). A calculus of Regions Respecting Both Measure and Topology, *Journal of Philosophical Logic*, 14.

Previale F. (1966). Reticoli metrici, *Boll. Un. Mat. Ital.,* 21, *pp 243-250.*

Sesto Empirico (1972). *Contro i matematici*, Laterza.

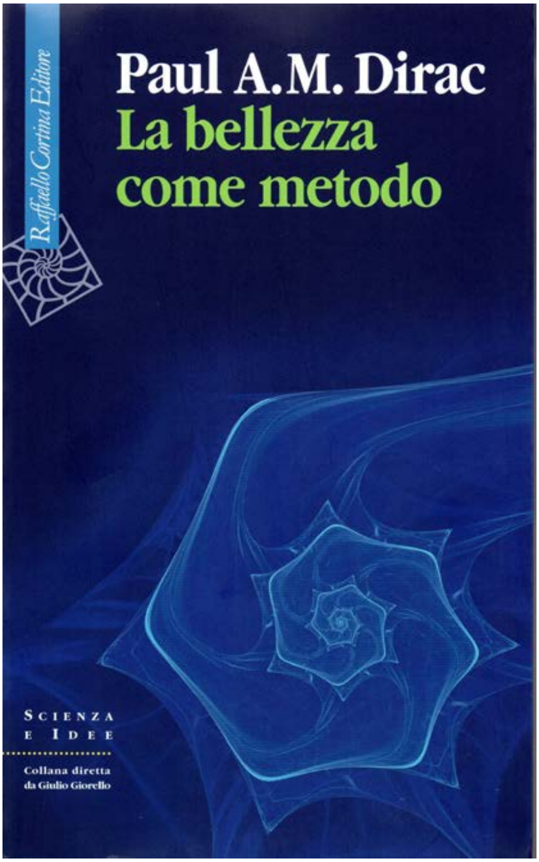
Tarski A. (1956). Foundation of the geometry of solids, in: *Logic, Semantics, Mathematics*, (traduzione di J. H. Woodger). Oxford University Press, Oxford, *pp 24-30*.

Varzi A. (1997). Boundaries, Continuity, Contact, *Noûs*, 31, *pp 26–58*.

Whitehead A.N. (1919). *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, Cambrige, University Press, Cambridge.

Whitehead A.N. (1920). *The Concept of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge.

Whitehead A.N. (1929). *Process and Reality*, Macmillan, New York.



Il principio di bellezza matematica svolge secondo Dirac una duplice funzione. Nel contesto della scoperta, la bellezza determina la direzione della ricerca, nel contesto della giustificazione – ed è questa la tesi più forte - , la bellezza è la qualità che permette di giudicare una teoria, più ancora dell'accordo con le osservazioni. Nella sua scienza, Dirac usò con impareggiabile efficacia il criterio di bellezza come un modo per trovare la verità.

L'equazione di Dirac, considerata la più bella della fisica:

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$