Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp. 221-236

L' "utilità" della geometria euclidea

Veronica Bitonti* Francesco Laudano**

* veronica.bitonti03@gmail.com
** Liceo M. Pagano di Campobasso; francesco.laudano@unimol.it

DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.059

Sunto: *In questa nota si indicano alcune possibili direzioni dell'innovazione nell'insegnamento-apprendimento della Geometria euclidea. In particolare, si mostrano alcuni semplici problemi che consentono un approccio concreto allo studio della disciplina. Inoltre, si evidenzia la possibilità di sviluppare un percorso integrato di geometria euclidea e trigonometria al biennio dei licei, avvalendosi del software di geometria dinamica. Per fornire un esempio delle tecniche utilizzate, si presenta un'attività didattica sul teorema di Carnot, rivolta agli studenti del primo anno delle superiori. Lo scopo ultimo del lavoro è confermare il valore formativo della geometria euclidea.*

Parole Chiave: *geometria euclidea, trigonometria, software di geometria dinamica, teorema del coseno.*

Abstract: *This note indicates some possible directions of innovation in the teaching-learning of Euclidean geometry. In particular, some problems are shown that allow a concrete approach to the study of the discipline. It also highlights the possibility of developing an integrated course of Euclidean geometry and trigonometry in the first two years of high school, using the dynamic geometry software. To give a taste of the techniques used, a didactic activity on the cosine* *law is presented, aimed at first year high school students. The ultimate aim of the work is to confirm the formative value of Euclidean geometry.*

Keywords: *Euclidean geometry, trigonometry, dynamic geometry software, cosine theorem.*

1 – Introduzione

Negli ultimi anni lo studio la geometria euclidea (GE) nel secondo ciclo è stato ridimensionato per lasciare spazio ad altre parti della matematica, ritenute a ragione indispensabili nella formazione del cittadino, come l'induzione matematica, la statistica inferenziale, e le equazioni differenziali. È evidente che queste ed ulteriori auspicabili integrazioni dei contenuti non possono essere realizzate con una semplice riduzione del tempo da dedicare agli altri argomenti, ma richiedono una profonda revisione dei percorsi didattici, peraltro già suggerita dalle indicazioni nazionali per i licei (MIUR, 2010). Tale revisione potrebbe riguardare in particolare l'insegnamento della GE, in modo da renderne più concreto l'approccio, anche mediante l'uso del software di geometria dinamica (GDS). Senza trascurare i processi di astrazione, e, quindi, le dimostrazioni.

Nelle pagine seguenti, proveremo ad evidenziare la possibilità di insegnare/apprendere la GE mediante un approccio problematico e laboratoriale, proponendo un esempio di "problema di realtà" sulla similitudine, che chiameremo "Il problema della cruise girl". Inoltre proporremo un'attività didattica sul teorema di Carnot, rivolta agli alunni del primo anno dei licei. Si tratta di un esempio di integrazione dello studio della trigonometria nel percorso di geometria del primo biennio, in linea con le già citate indicazioni nazionali.

2 – Il problema della cruise girl

> *È una bellissima mattinata estiva, il sole non è ancora alto, sembra il momento ideale per passare un po' di tempo in piscina, assieme agli amici. La ragazza si dirige verso il ponte superiore della nave portando con sé un asciugamano, e la sua fedele poquette, nella quale custodisce un tubetto di crema solare e l'immancabile smartphone. La nave è ferma di fronte alla costa. La ragazza toglie gli occhiali da sole ed affacciandosi a dritta vede distintamente una torre, proprio di fronte a sé. Dopo aver contemplato per un po' il panorama, trova un lettino libero, vi stende l'asciugamano e si sdraia, felice di rilassarsi al sole. Ma una domanda si insinua nella sua mente:*
>
> *"chissà quanto siamo distanti dalla costa".*
>
> *È solo un attimo, il pensiero svanisce e la ragazza inforca lo smartphone per contattare gli amici conosciuti a bordo. Lo schermo si accende e l'occhio le cade su un'applicazione che misura le distanze, che ha usato a scuola per risolvere un problemino di geometria. E il pensiero, subdolo, ritorna. "È chiaro che lo smart-phone non può misurare la distanza dalla costa, ma deve esserci un modo per calcolarla. Certo, con un po' di approssimazione."*

Come potrebbe procedere la cruise girl per determinare la distanza della nave dalla costa?

Lasciamo al lettore interessato la risoluzione del problema, limitandoci ad osservare che si tratta di un semplice problema di misurazione, analogo a "Il problema del boy scout" (Laudano, 2017). Nella pratica didattica problemi di questo tipo aiutano a stimolare l'interesse degli studenti, quindi costituiscono un buon punto di partenza per avviare lo studio di un nuovo argomento. Nelle fasi successive l'insegnante guiderà gli studenti nella costruzione delle capacità di astrazione e nell'assimilazione del metodo assiomatico, obiettivi salienti dei percorsi di GE.

3 – Le innovazioni delle indicazioni nazionali

Nel seguito dell'attività di apprendimento avviata col problema della cruise girl si prevede l'apporto decisivo del software di geometria dinamica. Un suggerimento esplicito all'uso del software è fornito dalle indicazioni nazionali (MIUR 2010), le quali, con riferimento al primo biennio, prevedono che:

> *La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

Come sottolineato da vari autori e come vedremo nell'ultima sezione di questo lavoro, l'uso del GDS consente un approccio laboratoriale finalizzato alla ricerca/scoperta delle proprietà geometriche. In tal modo anche gli studenti meno interessati sono attratti dallo studio della GE.

Un altro suggerimento esplicito fornito dalle indicazioni nazionali, che ha avuto poco seguito, riguarda lo studio delle funzioni circolari. A tal proposito nel suddetto documento, con riferimento al primo biennio dei licei scientifici, si legge che:

> *Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli ed il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica. Lo studente studierà … … … le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappre-sentazione e soluzione di problemi applicativi.*

È opportuno sottolineare che il suddetto documento ministeriale non prevede lo studio della trigonometria negli anni successivi. Dunque le indicazioni nazionali suggeriscono di sviluppare l'intero percorso di trigonometria al primo biennio dei licei scientifici. Tale suggerimento, ignorato dalla maggior parte dei testi, è un'innovazione importante che non trova eguali negli altri sistemi scolastici occidentali. Trattando la trigonometria, in una versione snellita, al primo biennio è possibile negli anni successivi trovare tempo da dedicare alle equazioni differenziali, alla statistica inferenziale ed alle geometrie non euclidee.

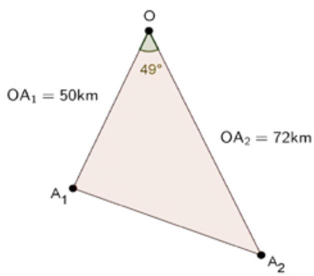
4 – Un'attività di apprendimento sul Teorema di Carnot al primo anno del liceo

In questo paragrafo descriviamo un esempio di attività di apprendimento sul teorema di Carnot diretta agli alunni del primo anno delle superiori. In particolare si vuole dare un'idea del modo in cui l'insegnante può guidare gli studenti alla scoperta del Teorema, facendogli usare il software di geometria dinamica in aula. L'attività dura all'incirca 90 minuti ed ha i seguenti obiettivi:

- Scoprire il teorema di Carnot
- Dimostrare il teorema di Carnot
- Risolvere problemi usando il teorema di Carnot

Si utilizza la metodologia dell'inquiry based learning (Laudano & Tortoriello & Vincenzi, 2020), secondo la quale la riflessione degli studenti deve essere guidata attraverso domande appropriate. L'attività prende le mosse da un problema e si sviluppa attraverso le seguenti fasi.

Fase 1. Il problema della torre di controllo



Una torre di controllo posta in un punto O può determinare la sua distanza da due aerei posti nei punti A1 ed A2. Sapendo che l'angolo A1OA2 misura 49° e le distanze tra O ed i due aerei misurano 50km e 72km, trovare la distanza tra i due aerei.

Fig. 1 - Il problema degli aerei

Dopo qualche minuto di riflessione guidata dall'insegnante alcuni studenti propongono due possibili strategie risolutive. La prima inizia disegnando la perpendicolare dal punto A1 a OA2 ed applica due volte la formula pitagorica. La seconda parte dalla costruzione col GDS di un triangolo $B1PB2$ simile a A1OA2, con $B1P$ = $5cm$, $PB2$ = $7.2cm$ e l'angolo $B1PB2$=49°, e trova la distanza tra i due aerei moltiplicando la lunghezza di $B1B2$ per il fattore di similitudine 106. L'insegnante sottolinea che entrambe le strategie sono valide. Tuttavia, una formula che esprime la lunghezza di un lato di un triangolo in funzione degli altri lati e l'angolo tra essi compreso permetterebbe di risolvere il problema in modo più efficace. Pertanto l'insegnante invita gli studenti a riflettere e discutere per rispondere alla seguente domanda.

D_1: In linea di principio, potrebbe esistere una formula generale che esprime la lunghezza di un lato di un triangolo in funzione degli altri lati e dell'angolo tra di essi?

Alcuni studenti sottolineano che due lati e l'angolo tra loro determinano in modo univoco tutti gli elementi del triangolo, e concordano sul fatto che tale formula possa esistere. Pertanto, l'insegnante propone un'indagine volta a cercare un'estensione del teorema di Pitagora che sarebbe utile per risolvere il problema dell'aereo.

Fase 2. Attività laboratoriale con l'uso del DGS

La prima parte dell'attività è volta a scoprire il ruolo che assume l'angolo nella formula che si vuole determinare, e, in particolare, a capire quale delle funzioni sinα e cosα potrebbe intervenire nella formula. L'insegnante invita gli studenti a lavorare su un file opportunamente preparato con DGS (vedi Fig. 2) in modo che possano modificare l'ampiezza dell'angolo BCA agendo sullo slider, mentre BC e DC sono segmenti di lunghezza data pari a $10cm$. Usando lo slider relativo all'angolo, gli studenti si rendono subito conto che aumentando l'angolo BCA aumenta anche la lunghezza di AB. Quindi l'insegnante li guida attraverso le seguenti domande e la relativa discussione.

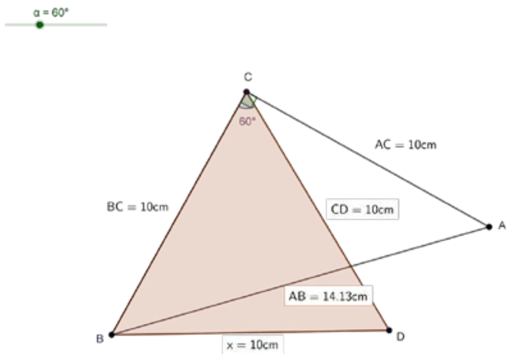


Fig. 2 - lavorando con triangoli isosceli

D2: come cambia il valore di AB^2 al variare del seno e coseno dell'angolo α?

Per rispondere a questa domanda, l'insegnante invita gli studenti ad annotare su un foglio di lavoro i valori di seno e coseno degli angoli 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° ed i corrispondenti valori di AB2. Confrontando le relazioni mostrate nella tabella, gli studenti notano che il valore del coseno diminuisce costantemente all'aumentare dell'angolo. Quello del seno, invece, aumenta per $0° < \alpha \leq 90°$ mentre diminuisce per $90° \leq \alpha < 180°$. Quindi la lunghezza di AB non sembra essere correlata a sin α. Inoltre, osservano che all'aumentare di α, aumenta la quantità $-\cos\alpha$, e così anche la lunghezza di AB. Il docente consiglia agli studenti di ricercare la formula più semplice che verifica le condizioni emerse con l'utilizzo del DGS. Quindi, poiché la relazione cercata deve estendere il teorema di Pitagora, pone la seguente domanda ed anima la relativa discussione.

D3: si può ricavare la formula cercata a partire dalla relazione pitagorica, sottraendo alla somma dei quadrati dei due lati una quantità opportuna che dipende da $\cos\alpha$?

L'insegnante indirizza la discussione allo scopo di ottenere AB^2 sottraendo da $BC^2 + AC^2$ un termine proporzionale a $\cos\alpha$. Quindi invita gli studenti a calcolare il fattore di proporzionalità in vari casi utilizzando il file DGS della Figura 2, per rispondere alla seguente domanda.

D4: qual è la relazione tra AB^2 e α nei casi precedenti?

L'insegnante verifica che gli studenti, calcolando le quantità $(AB^2 - AC^2 - BC^2)/\cos\alpha$, ottengano sempre il valore 200, al variare di α. Quindi verifica se gli studenti scoprono che $AB^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 100\cos\alpha$. Poi l'insegnante invita gli studenti a modificare la lunghezza di e BC per verificare se la relazione precedente può essere estesa ad altri triangoli isosceli. Eseguendo questi test, gli studenti scoprono che per i triangoli isosceli vale la formula: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos\alpha$

Fase 3. Formulazione di una congettura

A questo punto l'insegnante propone agli studenti di costruire triangoli scaleni, utilizzando un nuovo file DGS, preparato per testare la formula che ci sembra di aver scoperto. Le domande poste dall'insegnante guidano gli studenti nella formulazione della congettura generale.

D5: la relazione precedente vale anche per i triangoli scaleni?

D6: a questo punto, possiamo formulare una congettura per generalizzare il Teorema di Pitagora?

Le osservazioni fatte utilizzando gli sliders sembrano confermare la validità della formula (1) per i triangoli scaleni.

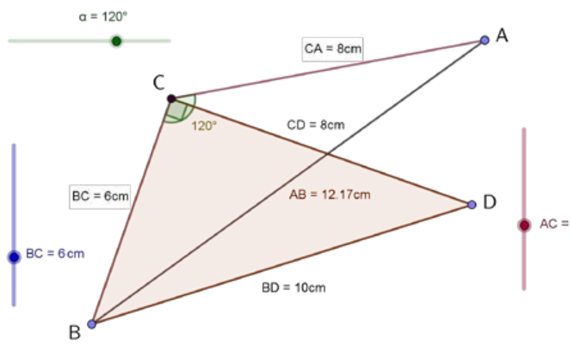


Fig. 3 - Lavorando con triangoli qualunque

Attraverso la domanda successiva e la discussione che ne segue, l'insegnante lascia emergere la necessità di una dimostrazione.

D7: possiamo essere certi che la formula precedente valga per tutti i triangoli?

Fase 4. Dimostrazione del teorema di Carnot

Poiché la formula da dimostrare è un'estensione del Teorema di Pitagora, l'insegnante propone di provarla generalizzando una dimostrazione di questo Teorema. In particolare, suggerisce di partire dalla già nota dimostrazione visualizzata nella Figura 4, che si basata sul Teorema della tangente e della secante. Com'è ben noto questo teorema afferma che

«conducendo da un punto esterno ad una circonferenza un segmento tangente ed uno secante ad essa, risulta verificata una proporzione in cui il segmento tangente è medio proporzionale tra il segmento secante e la sua parte esterna.»

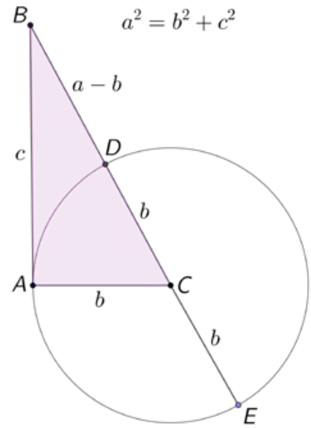


Fig. 4 - Una prova visuale del Teorema di Pitagora

Nella figura *BE : AB = AB : BD*. Da cui segue immediatamente $(a+b):c=c:(a-b)$, e quindi $(a+b)(a-b)=c^2$, cioè $a^2-b^2=c^2$.

È il caso si sottolineare che Il teorema precedente è una semplice applicazione del terzo criterio di similitudine tra triangoli, infatti i triangoli *ABD* e *ABE* hanno l'angolo *B* in comune e gli angoli *BAD* e *AED* congruenti poiché insistono sullo stesso arco *AD*. Si tratta di una dimostrazione visuale (Nelsen, 2000 e 2015) la cui semplicità è dovuta alla scelta della figura. L'introduzione della trigonometria al primo biennio è resa possibile proprio da questo tipo dimostrazioni. A questo punto il docente pone agli studenti la seguente domanda:

D7: Il ragionamento mostrato nella Figura precedente può essere esteso ai triangoli non rettangoli?

Il docente anima la discussione che segue alla domanda, e, se necessario, suggerisce di utilizzare il Teorema due secanti, che estende naturalmente il Teorema della tangente e della secante, guidandoli nella comprensione della dimostrazione. Nella Figura 5 mostriamo uno schizzo di tale dimostrazione, che verrà esplicitata agli alunni solo se non riescono a scoprirla da soli.

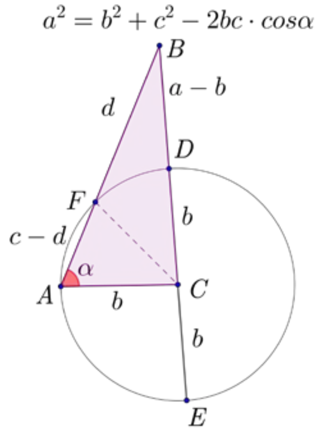


Fig. 5 - Una prova visuale del Teorema di Carnot

Com'è evidente, essa si può ottenere sulla falsa riga della prova precedente, tenendo conto che c-d=2b cosα.

Sembra opportuno sottolineare che in letteratura si possono trovare prove visuali per tutte le formule trigonometriche, in (Wolfram, 2020) e nei già citati testi di R. Nelsen compaiono alcuni esempi interessanti. Tali prove sono fondamentali nella definizione di un percorso integrato di geometria euclidea e trigonometria rivolto agli studenti del primo biennio. A titolo esemplificativo riportiamo di seguito una dimostrazione delle formule di addizione e sottrazione del coseno (Nelsen, 2000).

Anche in questo caso l'efficacia della prova si basa sulla scelta della figura.

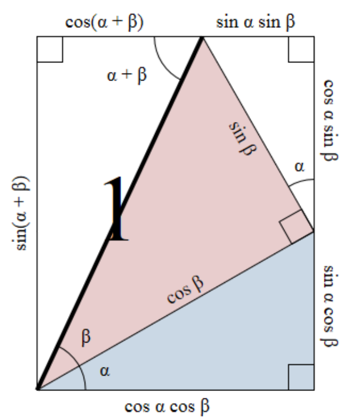


Fig. 6 - Una prova visuale delle formule di addizione del seno e del coseno

Applicando le formule dei triangoli rettangoli è immediato osservare che il lato di sinistra del rettangolo è sin(α+β), mentre quello di destra è sinαcosβ+cosαsinβ. Questa semplice osservazione dimostra la formula di addizione del seno e in modo analogo si può ottenere quella del coseno. Pare opportuno rilevare che, nella sperimentazione condotta negli ultimi anni dagli autori, le dimostrazioni visuali sono state particolarmente utili nella didattica a distanza. Infatti esse hanno consentito di sostituire sequenze di passaggi formali, difficili da seguire a distanza, con ragionamenti più semplici che poggiano sull'intuizione geometrica.

4 – Conclusioni

Negli ultimi anni nella scuola secondaria si sono moltiplicate le proposte didattiche centrate sulla "modellizzazione", spesso poco chiara, di "problemi di realtà". Tali attività assorbono gli studenti fin dai primi anni della scuola secondaria ed aspirano talvolta a diventare addirittura curriculari, sottraendo tempo prezioso ad altri segmenti della matematica. Nelle pagine precedenti abbiamo mostrato che anche la GE può essere utilizzata per risolvere problemi concreti. Tuttavia è evidente che l'insegnamento della matematica non può essere finalizzato esclusivamente alla risoluzione di problemi, ma deve indirizzare verso lo sviluppo del pensiero razionale, e quindi critico, indispensabile per l'esercizio consapevole della cittadinanza.

La GE, a 2300 anni dal suo concepimento, sembra ancora insostituibile per raggiungere queste finalità (Moise, 1975). Non solo, essa potrebbe integrarsi con la trigonometria consentendo di anticiparla al primo biennio, in modo da poter inserire altri argomenti nella formazione matematica degli studenti del secondo ciclo.

Bibliografia

LAUDANO F. (2017). Il problema del boy scout, *Periodico di Matematiche*, serie XIII vol 9 n.1, 2017.

LAUDANO F., Tortoriello F.S., Vincenzi G. (2020). An experience of teaching algorithms using inquiry-based lear-ning, *Int J Math Educ Sci Technol*, Vol. 51 (3), 2020, pp. 344-353.

MIUR (2010). *Schema di regolamento recante 'Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.*

NELSEN R. (2000). One figure, six identities, *College Mathematics Journal*, 31 (2000), pp. 145–146.

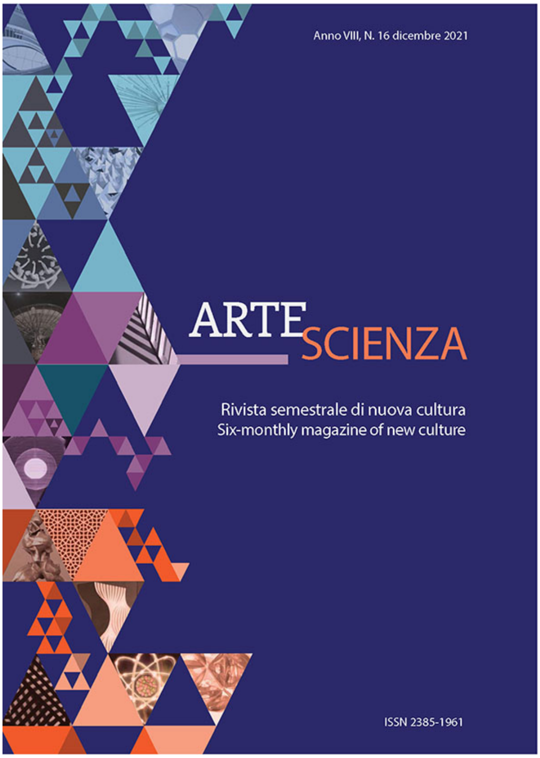
NELSEN R. (2000). *Proofs Without Words II*. Mathematical Association of America.

NELSEN R. (2015). *Proofs Without Words III*, Mathematical Association of America.

MOISE E.E. (1975). The meaning of Euclidean Geometry in school Mathematics, *The Mathematics Teacher*, 68 (6) (1975) pp. 472-477.

WOLFRAM MathWorld (2020). Prosthapheresis Formulas,

https://mathworld.wolfram.com/ProsthaphaeresisFormulas.html



ArteScienza ® **Anno VIII, N. 16, dicembre 2021**

Rivista semestrale telematica
www.assculturale-arte-scienza.it

Indice