

Spirografo, simmetrie, moti composti

Nicla Palladino* Giulia Betani**

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia;
nicla.palladino@unipg.it

** Laurea magistrale in Matematica, Università di Perugia



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.060

Sunto: *Lo spirografo è un oggetto che permette di disegnare diverse curve come ipo ed epi trocoidi la cui versione giocattolo fu sviluppata dall'ingegnere D. Fisher che lo esibì nel 1965 alla Nuremberg International Toy Fair. Le curiosità storiche sull'origine dello strumento e l'utilizzo di esso in modo idoneo possono essere utili a sviluppare concetti geometrici legati alle simmetrie e ai moti dei pianeti. L'attività può essere condotta nell'ambito della teoria dell'autopoiesi. Si presentano premesse, fasi e risultati di un intervento didattico condotto in una scuola secondaria di II grado.*

Parole Chiave: *spirografo, simmetrie, concezione operativa*

Abstract: *The spirograph is an object that allows you to draw different curves such as hypo and epi-trochoid; the toy version was developed by the engineer D. Fisher who exhibited it in 1965 at the Nuremberg International Toy Fair. Historical curiosities about the origin of the instrument and its use in a suitable way can be useful for developing geometric concepts related to the symmetries and motions of the planets. The activity can be conducted in the context of the autopoiesis theory. We present here the premises, phases and results of a didactic intervention conducted in a secondary school of II degree.*

Keywords: *spirograph, symmetries, operational conception*

1 - Introduzione

Illustriamo un'attività che ha avuto come scopo presentare il concetto di simmetria a studenti delle scuole superiori di II grado, con approcci miranti ad un apprendimento costruttivo e significativo. Per un apprendimento solido della disciplina abbiamo lavorato in una situazione a-didattica: l'insegnante è sempre presente ma lascia agire il ragazzo di propria iniziativa in modo tale che esso si configuri come "ricercatore" delle soluzioni del problema posto. In questo ambito quando si parla di "problema" si intende un problema ampio, ben strutturato che possieda determinate caratteristiche. Il problema in questione non può essere un semplice esercizio risolvibile mediante procedure meccaniche, la risposta non può essere immediata e deve richiedere un ragionamento da parte dello studente, si svolge in aula dove è presente la figura "guida" dell'insegnante. Il fattore chiave della metodologia del problem solving è che i ragazzi hanno i prerequisiti necessari per risolvere il problema assegnatogli però viene loro richiesto di riorganizzare le proprie conoscenze in modo da trovarne la soluzione. Nel modello dello sviluppo mentale di un allievo si distinguono due livelli: il livello di sviluppo effettivo ed il livello di sviluppo potenziale. Il problem solving permette di passare dallo sviluppo effettivo a quello potenziale, purchè il passaggio sia compiuto autonomamente dallo studente.

Abbiamo qui fatto riferimento alla teoria dell'apprendimento della ricercatrice Anna Sfard e agli studi sul pensiero divergente. Nella sperimentazione si è utilizzato un approccio di tipo operativo, utilizzando un gioco che porta alla realizzazione di rappresentazioni grafiche originali e utili ai concetti matematici da presentare.

Il progetto ha coinvolto le classi II A e II B di un liceo scientifico della città di Perugia.

Come primo step, è stato somministrato un test, uguale per entrambe le classi, per verificare se i ragazzi possedessero i prerequisiti necessari per affrontare le simmetrie in matematica. Nella classe di controllo (II B) è stato introdotto il nuovo argomento con lezioni frontali tradizionali. Nella classe sperimentale (II A) è stata presentata un'attività a partire dall'utilizzo dello spirografo e di elementi architettonici a scopo decorativo ricorrenti in chiese di epoca romanica. Questa attività è stata quindi interdisciplinare. A conclusione è stato assegnato un test uguale per le due classi al fine di valutare l'efficacia dell'azione didattica.

2 - L'approccio operativo e quello strutturale

Anna Sfard in (Sfard 1991) analizza la peculiarità del pensiero matematico riflettendo sull'aspetto epistemologico e ontologico dei costrutti matematici. A seconda del punto di vista adottato, l'autrice fa una distinzione tra il concetto (spesso identificato anche con il termine "nozione") e la concezione. Definisce concetto quel blocco di conoscenza matematica inserito in un contesto teorico mentre la concezione è l'insieme di rappresentazioni interne al soggetto evocate dal concetto; in altre parole, la concezione rappresenta l'elaborazione personale che il soggetto fa del concetto.

L'autrice osserva che i matematici per parlare di un certo universo popolato da determinati oggetti fanno uso di un particolare linguaggio; tali oggetti possiedono specifiche caratteristiche e sono sottoposti a determinati processi regolati

da precise leggi. Tuttavia, i costrutti matematici avanzati sono quasi sempre inaccessibili ai nostri sensi. Essere capaci in qualche modo di "vedere" con gli occhi della mente questi oggetti invisibili sembra essere una componente fondamentale dell'abilità matematica. Per ogni concetto, la concezione può essere di due tipi: strutturale ma anche operativa.

Una concezione di tipo strutturale indica un approccio al concetto in cui la nozione è trattata come un oggetto astratto, mentre mediante la concezione operativa il concetto è considerato come il risultato di un processo operativo. Vedere un'entità matematica come oggetto significa riferirsi ad essa come se fosse una cosa reale, una struttura statica esistente; cioè vuol dire riconoscere l'idea nel suo insieme e manipolarla come un tutt'uno. D'altra parte, concepire una nozione come processo significa interpretarla come un'entità potenziale che esiste nel momento in cui viene utilizzata in una sequenza di azioni. Mentre la concezione strutturale è statica, istantanea e unificante, quella operativa è dinamica, sequenziale e dettagliata. La differenza cruciale tra i due modi di pensare risiede nelle convinzioni implicite nella natura delle entità matematiche, ovvero esiste un profondo divario ontologico tra le concezioni operativa e strutturale.

É quindi possibile pervenire ad un concetto mediante due strade diverse ma strettamente collegate fra loro. Infatti, come sottolinea Sfard, le concezioni strutturale ed operativa sono due facce della stessa medaglia. Sfard condivide il pensiero di Piaget (1952) secondo cui lo sviluppo di un concetto in ambito storico sia simile allo sviluppo di esso nel processo di apprendimento individuale. In altre parole, la dinamica di apprendimento di un concetto segue lo stesso iter che ha

seguito la sua evoluzione storica. La ricercatrice aggiunge che, come in ambito individuale le concezioni operative precedono quelle strutturali, anche in ambito storico i procedimenti operativi vengono prima di quelli strutturali. Questa non necessariamente è da considerare una legge assoluta in quanto potrebbero esserci delle eccezioni: esistono concetti geometrici che sono "nati" da immagini mentali piuttosto che dai processi. La ricercatrice individua l'esistenza di tre fasi che corrispondono a tre "gradi di strutturazione", nominati sulle basi dell'analisi teorica del rapporto tra processi e oggetti. Nella prima fase, detta interiorizzazione, il soggetto prende confidenza con i processi che daranno vita ad un nuovo concetto. Questi sono operazioni effettuate su oggetti matematici di livello inferiore. In modo graduale il soggetto diventa abile nell'eseguire questo tipo di processi. Questa fase prende il nome di interiorizzazione dal momento che un processo è "interiorizzato" se può essere portato avanti mentalmente. La fase di condensazione è uno stadio in cui delle lunghe procedure vengono ristrette ad unità più maneggevoli. A questo livello l'individuo diventa sempre più capace di pensare ad un processo come un'unica entità, senza sentire la necessità di eseguire il processo. La fase di condensazione dura finché la nuova entità resta strettamente legata al processo che le ha dato origine. Soltanto quando la persona è in grado di concepire la nozione come un oggetto a sé stante ed indipendente, si può dire che il concetto è stato reificato. Tale schema trifase deve essere compreso come una gerarchia, ovvero uno stadio non può essere raggiunto prima di eseguire tutti i passaggi precedenti.

L'aspetto operativo e quello strutturale sono importanti in ugual misura nel processo di sviluppo di un concetto matematico. Teoricamente la matematica potrebbe essere affrontata anche facendo uso del solo approccio operativo, molto utilizzato a livello scolastico. Mediante la concezione puramente operativa si procede dai processi elementari verso processi di livello superiore e poi si cerca di raggiungere processi ancora più complessi. Dal punto di vista storico, si è osservato che per moltissimo tempo una grande porzione di matematica è stata affrontata proprio in questo modo. La matematica egiziana, quella babilonese e quella dell'antico oriente erano di tipo algoritmico tanto che anche le sequenze più complesse di operazioni numeriche erano presentate verbalmente come delle "ricette", non stimolando quindi i processi di condensazione e di reificazione. Il motivo per cui Sfard sostiene che un approccio strutturale sia necessario è che senza gli oggetti astratti l'attività mentale sembra essere molto più difficile. L'uomo ha bisogno di riorganizzare le informazioni immagazzinate in modo che siano facili da gestire. Ad un certo punto della formazione della conoscenza l'assenza di una concezione di tipo strutturale potrebbe impedire ulteriori sviluppi. La ricercatrice sostiene che la transizione da processi ad oggetti astratti accresce il "senso di comprensione della matematica" del soggetto, la reificazione favorisce le abilità di problem-solving e di apprendimento. La reificazione di un processo avviene simultaneamente con l'interiorizzazione del processo di livello superiore, cioè le due fasi sembrano essere l'una prerequisito per l'altra.

3 – Il pensiero laterale

J.P. Guilford (1950) individua, oltre al pensiero convergente-verticale che aveva caratterizzato la ricerca del passato, un pensiero divergente o laterale caratterizzato da meno vincoli ed in grado di dar vita a molteplici alternative. Il pensiero verticale è il pensiero logico e sequenziale che si fonda sulla programmazione lineare di una serie di gradini logici da affrontare uno dopo l'altro. Il pensiero laterale si basa sulla ricerca di nuovi punti di vista da esaminare che permettono di rompere gli schemi abituali e trovare un approccio semplice, efficace ed originale

Ciò che permette di percorrere nuove strade è proprio la creatività. Si elencano di seguito le quattro caratteristiche del pensiero laterale, tipico della creatività:

Fluidità: è la capacità di un soggetto di fornire il maggior numero di risposte ad una data domanda;

Flessibilità: è il numero di categorie concettuali alla quali le risposte del soggetto possono essere ricondotte;

Originalità: è la facoltà di esprimere idee nuove e realmente innovative;

Elaborazione: è la capacità del soggetto di conferire concretezza ed operatività alle proprie idee.

Più questi fattori sono presenti nel soggetto e più egli potrà sperimentare la creatività che possiede. Quest'ultima riveste un ruolo di fondamentale importanza non soltanto nell'approccio alla risoluzione di problemi matematici di varia natura ma anche nelle azioni che caratterizzano la quotidianità. Il processo creativo, come tutti i processi che hanno luogo nel cervello, parte da alcuni elementi per fornire alla fine del processo dati che risultano essere nuovi per

l'individuo e che non sono stati costruiti mediante procedure deterministiche. Nel contesto educativo, che costituisce una realtà complessa e dinamica, il pensiero creativo potrebbe essere utilizzato nella risoluzione di situazioni problematiche, proprio come suggerisce Canevaro (2013).

Edward De Bono (1994, 2000), sostiene che il pensiero creativo sia un'abilità che può essere rapidamente incrementata. Uno dei metodi utilizzati da De Bono per lo sviluppo di abilità di problem solving creativo è quello dei "Sei cappelli per pensare" (De Bono 1985). Lo psicologo, attraverso la metafora dei cappelli, insegna ad affrontare i problemi assumendo punti di vista differenti e propone quindi diverse prospettive dalle quali è possibile generare un'idea. Molteplici ricercatori hanno cercato di analizzare e spiegare nei dettagli il processo creativo suddividendolo in fasi. Wallas (1926) elabora una teoria sullo sviluppo del processo creativo che sarà poi ripresa, con qualche piccolo cambiamento, da altri studiosi. Secondo Wallas un'intuizione si sviluppa mediante quattro fasi: preparazione, incubazione, illuminazione, verifica. Dal breve excursus sui concetti di creatività, di pensiero divergente e di pensiero laterale emergono, come sostengono Zollo *et alii* (2015), interessanti spunti di riflessione su possibili declinazioni didattiche di queste teorie nella prospettiva di una didattica semplice, cioè di una modalità di insegnamento in grado di decifrare e di fronteggiare la complessità dei processi formativi e dei contesti educativi. È possibile individuare importanti analogie tra l'ambito della semplicità, termine coniato da Berthoz (2011), e quello del pensiero creativo. Infatti è stato osservato che le principali caratteristiche del pensiero creativo, la

flessibilità, l'adattamento e la deviazione, sono state individuate poi da Berthoz come proprietà e come principi della semplicità, cioè come strumenti e semplici regole che consentono di decifrare la complessità, compresa quella didattica. Infatti la flessibilità e l'adattamento al cambiamento si configurano come proprietà semplici del sistema didattico e dell'azione didattica che, secondo Berthoz, devono "essere in grado di percepire, catturare, decidere o agire in molti modi a seconda del contesto, compensare deficit, affrontare situazioni nuove". Analogamente De Bono (2000) propone non di risolvere i problemi singoli, ma di cogliere nuove interpretazioni della realtà. La ricerca di soluzioni alternative alle situazioni abituali costituisce l'espressione di una libertà di scelta nell'insieme delle soluzioni possibili in modo da evitare di perdersi nella complessità.

4 - Il percorso in classe

L'obiettivo dell'azione didattica è stato presentare il concetto di simmetria che gli alunni non conoscevano. I prerequisiti necessari per comprendere le lezioni sono stati:

- conoscere la definizione di angolo;
- saper disegnare angoli con ampiezze diverse;
- conoscere le definizioni di angolo retto, angolo piatto, angolo giro;
- saper definire il concetto di segmento (e conoscere la relativa nomenclatura);
- conoscere la definizione di vettore;

- sapere la differenza tra segmento e vettore;
- conoscere il concetto di distanza tra due punti;
- riconoscere quando due figure sono congruenti;
- saper dare la definizione di punto medio di un segmento;
- saper definire il concetto di asse di un segmento;
- conoscere il concetto di poligono;
- saper individuare le diagonali di un poligono.

Gli obiettivi didattici da raggiungere sono stati:

- conoscere e saper distinguere i concetti di simmetria centrale, simmetria assiale, simmetria radiale;
- saper dare la definizione di centro di simmetria;
- conoscere il concetto di ordine di simmetria;
- saper dare la definizione di asse di simmetria;
- saper riconoscere figure simmetriche rispetto ad una retta
- saper disegnare la figura simmetrica rispetto ad un punto, data una figura ed il punto;
- saper individuare il centro di simmetria e l'ordine di simmetria di una figura;
- saper tracciare l'asse di simmetria di una figura.

Ancor prima di proporre l'attività è stato assegnato ai ragazzi un test iniziale da svolgere a casa, in autonomia, in modo da verificare se entrambe le classi possedessero i prerequisiti necessari per affrontare le simmetrie. I prerequisiti sono stati testati mediante un questionario basato sui concetti di angolo, segmento, vettore, punto medio di un segmento, asse di un segmento, distanza tra due punti, poligono e diagonale di un poligono.

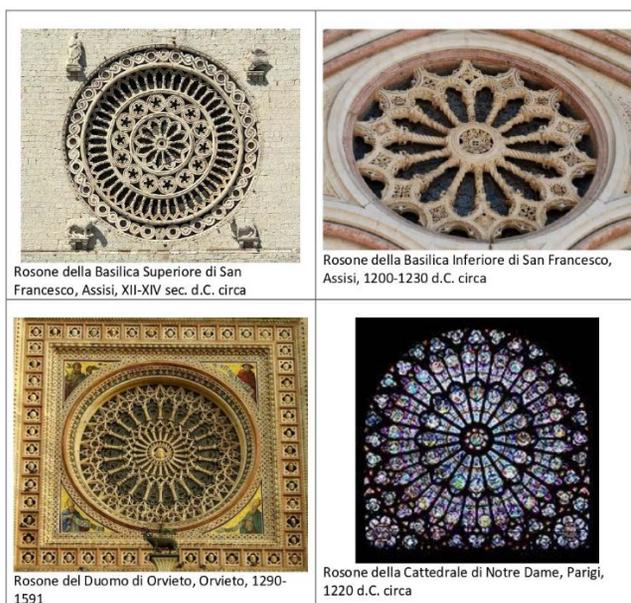
Nella lezione successiva si è pensato di ripresentare gli argomenti con una correzione collettiva del test facendo uso di una presentazione in power-point. Per la classe sperimentale l'attività è proseguita secondo un approccio di tipo operativo in base alle indicazioni degli studi di Anna Sfard e degli studi relativi al pensiero creativo, mentre per la classe di controllo lo step successivo alla correzione è stato quello di presentare le simmetrie tramite una lezione di tipo tradizionale.

Per portare avanti l'attività sperimentale ci siamo avvalsi dell'uso dello spirografo. L'idea era quella di far utilizzare agli studenti lo spirografo vero e proprio, ma a causa della DAD siamo stati costretti ad utilizzare un'applet. Lo spirografo è un dispositivo meccanico che permette di realizzare curve matematiche, dette ipotrocoidi ed epitrocoidi, mediante il "rotolamento" di una circonferenza all'interno di un'altra. L'uso di tale oggetto può essere considerato come un momento di "creazione artistica" in quanto lo spirografo è in grado di sviluppare la creatività e addirittura molte delle figure che si ottengono richiamano figure piane che di solito vengono presentate a scuola. Lo spirografo può essere utilizzato su di un foglio di carta. Si posiziona il telaio sul foglio all'interno del quale poi si mette una delle rotelle più piccole. Si posiziona la penna in uno dei fori presenti sulla rotellina e facendola roteare si ottiene la figura desiderata. Cambiando di volta in volta il foro in cui si posiziona la penna o cambiando la dimensione della rotellina si otterranno figure differenti.

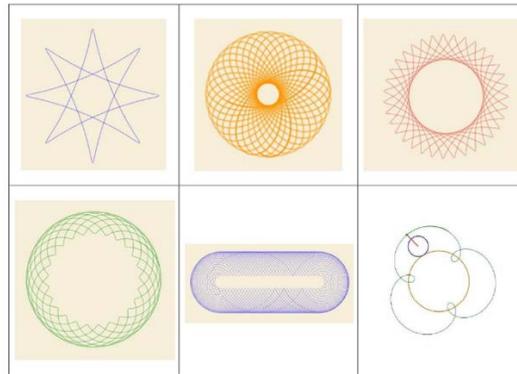
Lo scopo dell'attività presentata nella II A è stato quello di introdurre il concetto di simmetria a partire dall'uso dello spirografo e da alcune immagini di rosoni. La teoria del

pensiero divergente supporta la tesi secondo cui partire da immagini belle che colpiscono l'osservatore può essere utile per sviluppare la creatività del soggetto e favorirne l'apprendimento. L'attività è stata svolta dagli studenti a casa, in modo autonomo.

La prima parte del questionario riportava diversi rosoni realizzati tra il 1100 e il 1500. In architettura il rosone è riconosciuto come un elemento decorativo che caratterizza le chiese di epoca romanica. Agli studenti è stato chiesto se avessero mai visto elementi di questo tipo, se sapessero il loro nome e se conoscessero il motivo per cui in passato erano molto utilizzati. Per stimolare l'approccio creativo gli è stato chiesto di disegnare a mano libera uno dei rosoni presentati e al fine di incentivare la creatività gli alunni sono stati invitati a inventarne e disegnarne altri.

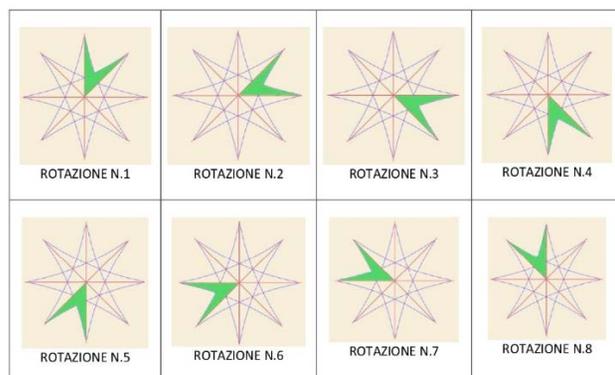


La seconda parte dell'attività prevedeva l'uso dello spirografo, strumento realizzato come giocattolo dall'ingegnere Denys Fisher negli anni '60. Sono stati posti dei problemi da risolvere in modo da capire l'utilizzo dello strumento nella sua versione come applicazione in Java. In modo particolare, si è posta l'attenzione su cosa accade cambiando il numero di denti delle ruote dentate, il foro per la penna e la posizione del foro all'interno della rotella. Nell'ultima parte dell'attività è stato chiesto agli alunni di scrivere la combinazione adatta (n. di denti delle rotelle, posizione del foro nella rotella e foro in cui è stata inserita la penna) a riprodurre alcune figure date.



Prendendo spunto dalle immagini ottenute con lo spirografo, abbiamo presentato il sistema geocentrico. Sono stati introdotti concetti storici di notevole importanza come la definizione di sistema geocentrico, di epiciclo, di deferente e sistema eliocentrico. Successivamente, sempre nella classe

sperimentale, a partire da particolari figure ottenute con l'applet si è iniziato a parlare delle simmetrie.



Siamo poi ritornati ad utilizzare le immagini iniziali dei rosoni come applicazione del concetto di simmetria radiale. Abbiamo continuato anche a lavorare su altre immagini ottenute con lo spirografo per poi arrivare ad altre figure geometriche. Sono stati introdotti poi i concetti di simmetria centrale ed assiale.

A conclusione della sperimentazione è stato somministrato un test finale, anche in questo caso uguale per entrambe le classi, al fine di valutare l'efficacia dell'azione didattica. Sono state poste delle domande aperte per verificare la capacità degli alunni di fornire definizioni e di fare confronti tra i concetti matematici spiegati, sono stati posti dei quesiti di tipo vero-falso sui concetti di simmetria centrale, simmetria assiale e simmetria radiale e si è lavorato anche con l'aspetto grafico dei concetti illustrati.

Nella classe II B è invece stata proposta una lezione frontale di tipo trasmissivo sulle simmetrie facendo uso di una

presentazione Power-point in modo da supportare gli studenti con delle immagini.

5- Risultati e conclusioni

La correzione del test ha evidenziato risultati migliori della classe sperimentale rispetto a quella di controllo, possiamo quindi affermare che l'attività di tipo sperimentale è andata bene. L'intera attività si è svolta in modalità a distanza e quindi i ragazzi non hanno potuto far uso dello spirografo vero e proprio ma dell'applet ed è venuta a calare la possibilità di interazione e confronto tra gli studenti, elementi chiave del progetto. L'aver usato l'applet è stato limitante dal momento che non è stato possibile ottenere tutte le figure che avremmo ottenuto con lo spirografo.

Il quesito 1 serviva per testare la capacità degli studenti di dare una definizione matematica precisa e rigorosa del concetto di simmetria centrale. In II A più di metà classe ha risposto correttamente alla domanda, mentre in II B sono stati pochi gli alunni che hanno dato una definizione corretta.

Successivamente sono stati proposti dei test vero-falso (quesiti 2, 3, 4, 5, 6, 7) relativi ai concetti di centro di simmetria, asse di simmetria e ad alcune proprietà delle simmetrie centrale e assiale. Nella classe sperimentale 26 alunni su 28 hanno dato la risposta giusta.

Nei quesiti 10, 11, 12, 13, 14 si è fatto riferimento all'aspetto grafico relativo ai concetti di simmetria assiale, centro di simmetria e asse di simmetria. Sia i ragazzi della classe sperimentale che quelli della classe di controllo hanno

incontrato delle difficoltà però nella classe II A in media sono stati ottenuti risultati migliori.

Nel quesito 17 è stato richiesto di tracciare l'asse di simmetria di alcune figure. In II A l'intera classe ha compreso pienamente il concetto, mentre in II B 8 studenti su 17 hanno risposto in modo corretto.

Relativamente agli obiettivi trasversali di interesse e partecipazione, l'attività sperimentale ha riscosso molto successo. Sin da subito sono stati attratti dall'uso dello spirografo e dal fatto che stavamo utilizzando un gioco per spiegare un nuovo argomento matematico. In questo modo siamo riusciti a coinvolgere anche quegli studenti che, in generale, risultano poco interessati alla disciplina ed inoltre tutti si sono divertiti a tal punto che nemmeno gli sembrava di stare a scuola a fare una lezione di matematica.

Bibliografia

- Berthoz A. (2011). *La semplicità*, Torino: Codice.
- Canevaro A. (2013). *Scuola inclusiva e mondo più giusto*, Trento: Erickson.
- De Bono E. (1985). *Sei cappelli per pensare*, Milano: BUR.
- De Bono E. (1994). *Creatività e pensiero laterale. Manuale di pratica della fantasia*, Milano: BUR.
- De Bono E. (2000). *Il pensiero laterale*, Rizzoli.
- Guildford J.P. (1950). Creativity, *American Psychologist*, 5 (9), pp. 444-454.
- Piaget J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge and Kegan.
- Sfard A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, No. 1, Springer, pp. 1-36.
- Wallas G. (1926). *The Art of Thought*, Solis Press.
- Zollo I., Kourkoutas E., Sibilio M. (2015). Creatività, pensiero divergente e pensiero laterale per una didattica semplice, *Educational Reflective Practices*.

Noterelle da *La mia vita da fisico* (1983)

Paul A. M. Dirac, *La bellezza come metodo*, Milano, Cortina Ed., 2019.

Finita la scuola, passai alla facoltà di ingegneria dell'Università di Bristol. [...] Il corso di ingegneria ebbe su di me un forte influsso. In precedenza mi ero interessato solo alle relazioni matematiche esatte. Procedere per approssimazioni non mi piaceva, e volevo evitarlo, ma da ingegnere dovetti farmene una ragione. Un ingegnere, infatti, si occupa del mondo reale, vi fa riferimento nei suoi calcoli, e deve compiere approssimazioni di continuo. Quello bravo sa intuire quali approssimazioni andranno bene e quali daranno problemi. Ho imparato che, nel descrivere la Natura, le approssimazioni vanno tollerate, e che lavorarci può essere interessante, e a volte bello. Un'altra cosa importante che appresi durante gli studi di ingegneria riguardava la relatività. Cominciai l'università a Bristol nel 1918, e fu proprio nel novembre di quell'anno, quando la guerra finì, che a un tratto sentimmo parlare della relatività e di Einstein. Fino ad allora nessuno sapeva nulla di tutto ciò, tranne pochissimi specialisti nelle università. [...] Da ingegneri, avevamo basato tutto il nostro lavoro su Newton, per scoprire adesso che, chissà come, Newton si sbagliava. Per noi quella fu una grande sorpresa. Nessuno capiva perché si sbagliasse, ma dovemmo accettare che le leggi di Newton non erano esatte. [...] Gli studi di ingegneria mi insegnarono ad accontentarmi delle approssimazioni nello studio della Natura. Forse, tutte le leggi di Natura sono soltanto approssimate, e la nostra conoscenza della Natura dovrebbe essere ritenuta tutt'altro che definitiva. [...] Terminai il corso di ingegneria in tre anni, nel 1921, e scoprii che non riuscivo a trovare lavoro come ingegnere. All'epoca c'era una crisi economica. Rimasi all'Università di Bristol a studiare matematica, per due anni. L'argomento che mi interessò di più fu la geometria proiettiva. È qualcosa che i fisici non usano molto, ma per me fu utilissimo impadronirmi delle idee basilari di questa disciplina. [...] Nel mio lavoro di ricerca uso continuamente la geometria proiettiva, anche se non troverete riferimenti a essa nei miei articoli pubblicati. La uso per visualizzare le relazioni tra quantità tensoriali e vettoriali nello spazio euclideo e nello spazio di Minkowski.