Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp.255-270

Incommensurabilità angolare in classe: un nuovo approccio didattico

Un laboratorio didattico di geometria

Bonaventura Paolillo *

*Liceo Francesco Severi-Salerno;
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net

DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.061

Sunto: *In questo lavoro si presenta un'attività laboratoriale basata sull'incommensurabilità tra due angoli. La riflessione su tale tema è spesso assente nella prassi didattica. Domande semplici come le seguenti, sono eluse o non risolte: Nel triangolo rettangolo con lati (3,4,5) gli angoli acuti, in gradi sessagesimali, sono misure razionali o irrazionali? Se* ***cos a= 2/3*** *che cosa si può dire sull' eventuale natura razionale di* ***a*** *in gradi sessagesimali? La soluzione è fornita dal* ***Teorema di Niven.*** *Il laboratorio didattico realizzato si è focalizzato su una prova semplice di tale teorema, di recente pubblicazione ed apparsa in [7]. L'attività è stata presentata da un gruppo di allievi del Liceo F. Severi di Salerno, alla 2° Giornata Internazionale della Matematica, (Pigreco Day 2021).*

Parole Chiave: *Valori razionali, funzioni trigonometriche, Teorema di Niven, Incommensurabilità,*

Abstract: *This work presents a laboratory activity based on the incommensurability between two angles. Many reflections on this theme not carried out in teaching practice. Simple issues such as the following are avoided or unresolved. In the right-angled triangle with sides (3,4,5), are the acute angles, in* *sexagesimal degrees, rational or irrational measures? If cos a = 2/3 what can be said about the possible rational nature of a in sexagesimal degrees? The solution is provided by Niven's Theorem. The laboratory activity was focused on a simple proof of this theorem, recently published in [7]. This activity was presented by some of students of the High School Liceo F. Severi-Salerno, at the 2nd International Mathematics Day, (Pi- Day 2021).*

Keywords: *Rational values,, trigonometric functions, Niven's theorem, incommensurability.*

1 - Introduzione

Nel seguente articolo si vuole illustrare la realizzazione di un laboratorio didattico di *Geometria* per riconoscere e individuare angoli incommensurabili tra loro. In continuità con una precedente proposta, presentata al *Convegno Nazionale del Centro Morin 2018*, si intende qui offrire una semplificazione didattica della prova del Teorema di Niven. Questo costituisce uno strumento teorico basilare per riconoscere la commensurabilità di due angoli. In [6],[7] sono pubblicati due recenti lavori sugli sviluppi legati alla dimostrazione di tale teorema. L'approccio didattico che si proporrà si è basato in particolare sul [7].

Il laboratorio didattico di Geometria è stato realizzato col gruppo classe della VASA del Liceo Francesco Severi di Salerno (a.s.2020-2021). Gli allievi coinvolti sono stati: Vincenzo Matteo Faino, Francesco Fabiano, Gaetano Longobardi, Mariagrazia Naddeo, Luca Scalese, Silvana Marchesano.

Viste le condizioni epidemiologiche del periodo, l'interazione col gruppo si è svolta in modalità on line e in maniera extra-curricolare, anche se è auspicabile in futuro, proporre tale esperienza all'intera classe e in orario curricolare. L'attività è stata presentata poi al Piday 2021, ovvero la Seconda giornata internazionale della Matematica, organizzata dal Laboratorio Effediesse del Politecnico di Milano con la realizzazione e produzione di un video su tale tematica, di 3 minuti e 14 secondi. L'evento aveva per titolo Pi greco e gli irrazionali.

2 - Realizzazione del Laboratorio di Geometria

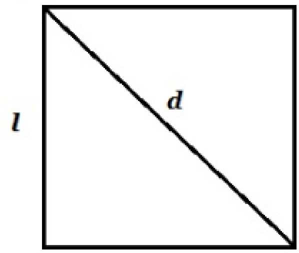
In tale percorso laboratoriale si sono sviluppate le seguenti fasi. Si indicano orientativamente i tempi di realizzazione a fianco di ciascuna fase.

2.1 – Prima Fase; Incommensurabilità classica, (2-3 h)

Si è ripreso opportunamente con gli allievi il delicato tema dell'irrazionalità di alcuni numeri notevoli.

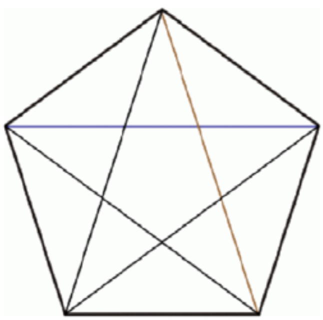
Come giustamente sottolineano le indicazioni ministeriali è auspicabile riflettere sulle cause che hanno spinto a dover introdurre i numeri irrazionali. Diventa esigente naturalmente considerare quel periodo della storia della Matematica conosciuto come Crisi degli Incommensurabili (*Scuola Pitagorica, VI-V secolo a.*C).

L'esperienza didattica sul campo, accerta spesso che nell'allievo, tale tema appare sfuggente e lontano da una reale consapevolezza di un suo significato profondo, sebbene si affronti l'irrazionalità in Geometria e con la teoria dei Radicali in Algebra. In particolare, si sono riprese alcune prove sull'irrazionalità di numeri notevoli come la radice di due $\sqrt{2}$ e il numero aureo φ ; non si riportano in questa stesura i vari dettagli dimostrativi ma si possono vederli in [3], e in [4].



Quadrato

L'irrazionalità della radice di due $\sqrt{2}$



L'irrazionalità del numero aureo φ

2.2 – Seconda Fase; il caso del contesto angolare, (30'))

La definizione di angoli incommensurabili tra loro segue in generale da quella classica per le grandezze omogenee tra loro, come segmenti, archi, aree, volumi,…

Un angolo α è commensurabile con l'angolo β se e solo se:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

con *m, n* numeri naturali. Per esempio α=30° è commensurabile con β = 360° poiché α /β = 1/12.

Si nota che per un angolo **α** rapportarsi all'angolo giro o al grado sessagesimale, non né altera la commensurabilità e questo vale pure per una qualsiasi unità di misura angolare presa come frazione dell'angolo giro. Analogamente permane l'incommensurabilità di un angolo α rispetto all'angolo giro se confrontata col grado sessagesimale o con una generica frazione dell'angolo giro. Tali considerazioni, non si possono applicare, nel confronto con unità angolari come il radiante, non essendo frazione dell'angolo giro, a causa dell'irrazionalità di **π**. I prerequisiti richiesti agli studenti sono stati quelli semplici della *Goniometria di base* e del software *GeoGebra*, oltreché naturalmente dell'uso di *Riga e Compasso*.

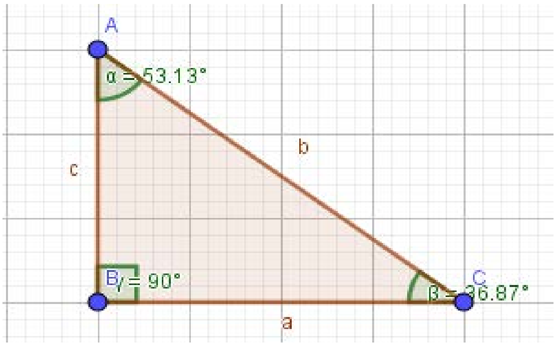
<u>Questione di base</u>

Dato un triangolo con lati a lunghezze intere, cosa si può congetturare sulla natura dei relativi angoli interni? Sono commensurabili con l'angolo giro?

Nella letteratura della didattica della Geometria, la questione non è posta all'attenzione dell'allievo, ed è in gran parte ignorata dai testi scolastici italiani e stranieri.

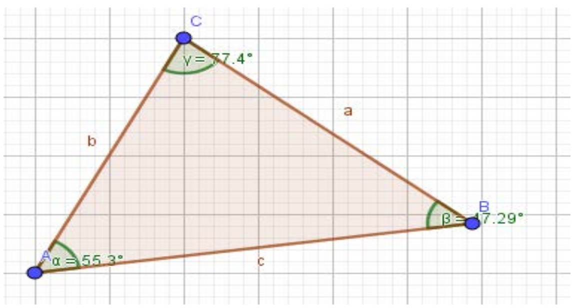
<u>Esempio 1:</u>

Nel classico triangolo rettangolo (***c*=3, *a*=4, *b*=5**) gli angoli acuti mostrati in *GeoGebra* mostrano direttamente-senza calcolarli- i relativi valori di **53,13° e 36,87°**. Ci si chiede se tali valori sono approssimati o precisi?



Esempio 2

Qualcosa di analogo accade per l'esempio seguente



Restiamo nell'incertezza dei valori riscontrati da *GeoGebra* (55,30°- 77,40° - 47,29°).

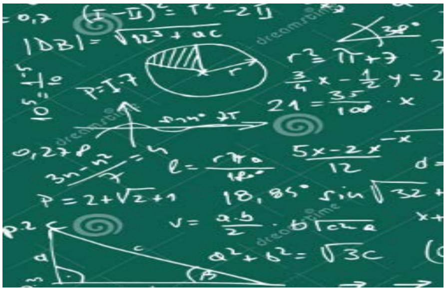
Utilizzando la *Trigonometria* e i classici teoremi dei seni e del coseno, si perviene a determinare, anche con una comune calcolatrice scientifica, *arccos*(4/5) e *arcsin*(4/5). In sintesi, le risposte degli allievi non riescono a stabilire la commensurabilità o meno degli angoli interni rispetto all'angolo giro.

Per i triangoli equilateri la risposta è immediata, in quanto si riscontrano dei lati interi con gli angoli di 60° che di certo sono commensurabili con l'angolo giro.

Un triangolo con lati interi è chiamato anche *diofanteo*. Ne segue che la questione di base è così riformulata:

Dato un triangolo diofanteo e non equilatero, gli angoli interni sono commensurabili rispetto all'angolo giro?

L'attesa di una risposta definitiva a tale questione resta significativa nell'allievo, poiché si rende manifesta un'analisi cognitiva delle proprie conoscenze e dei relativi limiti e possibilità. La soluzione è collegata al seguente risultato.



2.3 – Terza Fase; la prova del Teorema di Niven (45′)

<u>Teorema di Niven</u>

Se a = (m/n)360° e cos a è razionale, allora gli unici valori assunti dal coseno sono:

$$\cos \alpha = 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1.$$

Prima di illustrare in dettaglio la dimostrazione, ci si sofferma su qualche osservazione di carattere storico-didattico. Le dimostrazioni di tale teorema sono generalmente impegnative e si basano su identità goniometriche coinvolgenti polinomi trigoniometrici di Chebyshev, polinomi ciclotomici oppure la formula di De Moivre dei numeri comlessi, ecc; in rete per esempio sono accessibili gli articoli relativi a [1], [2].

In [5] era stato avviato un percorso laboratoriale didatticamente interessante, con gruppi di allievi liceali, in cui si utilizzava un certo tipo di argomentazione per la prova del teorema. La dimostrazione che invece si riporterà, è stata recentemente pubblicata in [7] e su di essa è basata l'attività centrale del nostro laboratorio. Ha il pregio di essere semplice ed organica, e sicuramente fruibile in classe.

Dimostrazione

Sia $\cos\alpha \neq 0$, si vuole provare necessariamente che:

$$\cos\alpha \in \left\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\right\}$$

(il caso in cui **cos α = 0** è ovviamente verificato).

Si scriva $\cos\alpha = \frac{p}{q} \neq 0$, con p, q interi coprimi, $q>0$

Si prendano tutti gli angoli con denominatore n, **cioè**

$\alpha_i = \frac{i}{n}360°$ con **i=1, 2, 3**,…numero naturale arbitrario.

Si consideri l'insieme $T = \{\cos\alpha_i \in Q - \{0\} \,/\, i \in N\}$, si hanno allora due semplici proprietà per **T**.

P$_1$) **T** è finito, per la periodicità della funzione coseno, infatti si evidenzia che a partire da un certo punto, i valori del coseno si ripetono:

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}360°, \longrightarrow \quad \cos(\alpha_1)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{n}360°, \longrightarrow \quad \cos(\alpha_2)$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{n}360°, \longrightarrow \quad \cos(\alpha_3)$$

$$\alpha_n = \frac{n}{n}360°, \longrightarrow \quad \cos(\alpha_n)$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{n+1}{n}360°, \longrightarrow \quad \cos(\alpha_{n+1}) = \cos(\alpha_1)$$

e così via.

P$_2$) *T* è non vuoto, poiché per ipotesi $\alpha_m=(m/n)360°=\alpha$.
Esiste allora q_k il massimo dei denominatori delle frazioni in *T*, per qualche α_k ; cioè $\cos\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$. Si osserva che:
$\alpha_{2k} = 2\alpha_k = \frac{2k}{n}360°$ e applicando la formula di duplicazione del coseno si ha: $\cos(\alpha_{2k}) = \frac{2p_k^2 - q_k^2}{q_k^2}$.
Poiché si sta operando con valori del coseno che sono frazioni irriducibili, si distingueranno due casi.
Se q_k è dispari la frazione di sopra è irriducibile e non nulla e quindi è in *T*. Poiché $q_k \geq q_k^2$, segue che $q_k = 1$.
Se $q_k = 2s$ è pari, con s numero naturale, si potrà scrivere:
$\cos(\alpha_{2k}) = \frac{2p_k^2 - q_k^2}{q_k^2} = \frac{p_k^2 - 2s^2}{2s^2}$ con quest'ultima che è irriducibile e non nulla, quindi è in *T*. Dovendo risultare:
$q_k \geq 2s^2 = \frac{q_k^2}{2}$, *segue* $q_k = 1, 2$. Pertanto si ha anche $q = 1, 2$, essendo q_k il valore massimo, quindi

$$\cos\alpha \in \left\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\right\}. \qquad C.V.D.$$

Un'altra prova significativa del teorema di Niven è trattata in [6] ed utilizza immediatamente la funzione tangente.

2.4 – Quarta Fase; Conseguenze del Teorema di Niven, (45'-60')

Il teorema di Niven consente di esplorare anche i valori razionali delle altre funzioni goniometriche, vale cioè la seguente:
Proposizione. Se α = (m/n)360° gli unici valori razionali delle funzioni goniometriche di α sono i seguenti: sen α = 0, ±½, ±1 ; tan α= 0,+1,-1 ; cotan α = 0,+1,-1 ; sec α = ±1; ±2 ; cosec α = ±1; ±2 .

Dimostrazione

Si proveranno le prime due uguaglianze, essendo le altre subito deducibili. Infatti, se **α** è frazione di **360°** anche **(90°- α)** lo è. Inoltre, si assuma per ipotesi che **sen *α*** sia razionale. Dall'ovvia uguaglianza sugli archi complementari:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

si può utilizzare il teorema di Niven e ottenere la tesi per la funzione seno.

La seconda uguaglianza segue dalla nota identità:

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

e questa conduce a:

$$2\alpha = 0°, 60°, 90, 120°, 180°, 240°, 270°, 300°, 360°,$$

cioè:

$$\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°$$

Essendo la tangente razionale si ricava la tesi dai soli angoli

$$\alpha = 0°, 45°, 135°, 180°.$$

Si evidenziano ancora nei seguenti corollari, alcune proprietà angolari immediate ed utili in chiave didattica.

Corollario 1.

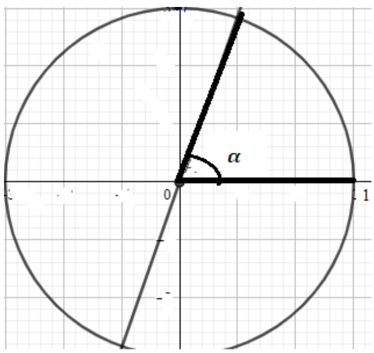
I valori degli angoli α razionali in **[0, 360°]** con $\cos\alpha$ razionale, sono:

$\alpha = 0°, 60°, 90, 120°, 180°, 240°, 270°, 300°, 360°.$

Corollario 2.

Se $\cos\alpha = p/q$ è non nullo ed è diverso, in valore assoluto, da **1** e **½,** allora **α** è incommensurabile con l'angolo giro.

Si mostra in figura, che per $\cos\alpha = 1/3$, α è irrazionale.



Si mostra allora, che la costruzione di angoli incommensurabili con l'angolo giro, non solo è possibile ma risulta anche immediata e di tali angoli se ne possono costruire in numero infinito (si pensi ad esempio alla successione ***cos*** $\boldsymbol{\alpha_n}$**=** $1/n$, con ***n*** numero naturale **>2**).

3 –Angoli commensurabili ma non costruibili con Riga & Compasso; Ciclotomia

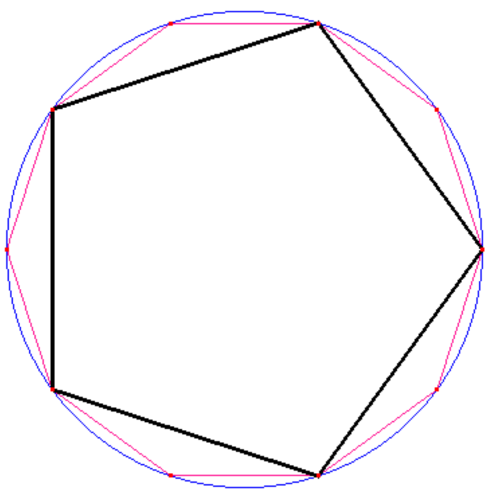
Dopo le ultime considerazioni svolte, diventa allora naturale continuare il percorso laboratoriale, introducendo almeno un collegamento sintetico con una parte fondamentale della *Geometria,* che è la *Ciclotomia.* È noto che tramite il *Teorema di Talete,* si può dividere un segmento dato in ***n*** parti congruenti, utilizzando solamente *Riga e Compasso*. Sin dall'antichità, analogamente, si poneva la questione anche per la circonferenza. Precisamente, la Ciclotomia risponde alla seguente domanda:

È possibile dividere una circonferenza data in **n** parti uguali, utilizzando Riga e Compasso, ovvero costruire, assegnandone il lato, un poligono regolare di **n** lati?

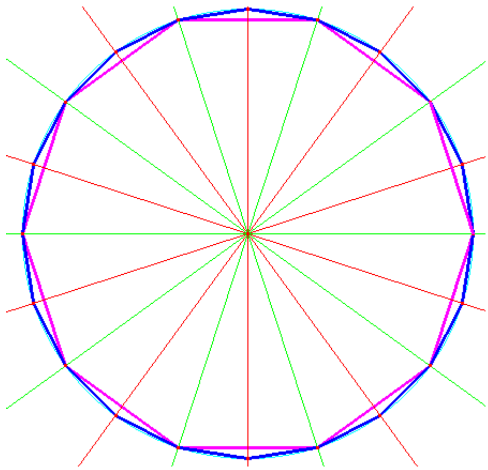
L'esposizione didattica qui svolta è ad un livello essenziale nel suo sviluppo storico ma si sono delineati i nuclei principali. Ad un livello piu' astratto, il collegamento con l'Algebra e i polinomi ciclotomici risulterebbe interessante, anche se evidentemente si può evitare di svolgere.

Concretamente erano note le costruzioni di poligoni regolari come *quadrati, triangoli, pentagoni, esagoni*. Facilmente, si verifica che se un poligono di n lati è costruibile, lo è anche il poligono con $2n$ lati. Tuttavia per $\boldsymbol{n} = 7, 9, 11,$**...**e cosi via per i successivi, cosa si poteva dire a riguardo?

Si evidenziano nelle seguenti figure, alcuni poligoni regolari costruibili con *Riga e Compasso*:



Decagono e Pentagono



Poligono di 20 lati

Vale il seguente fondamentale teorema

Proposizione - *Poligoni costruibili con riga e compasso-*

(Gauss 1796, Wantzel 1836)

Un poligono regolare di ***n*** lati può essere costruito con riga e compasso se e solo se ***n*** è un numero del tipo:

$$n = 2^k p_1 p_2 ... p_r$$

dove ***k*** è un intero ≥ 0 e i $\boldsymbol{p_m}$ sono *numeri primi di Fermat*, distinti tra loro. Essi sono del tipo:

$$\boldsymbol{p_m = 2^{2^m} + 1}$$

Si ammette anche il solo caso di $n=2^k$.

Non si conoscono molti primi di Fermat, se non in 5 casi, per *m* = 0,1,2,3,4 e la ricerca in take ambito è tutt'ora aperta. Quindi sono costruibili sorprendentemente alcuni poligoni regolari *insospettabili* con 17 o 257 lati, ma non i poligoni regolari con 7 o 9 lati, ecc. Questo significa che per esempio gli angoli 360°/7 e 360°/9 sono commensurabili con l'angolo giro ma non costruibili con *Riga e Compasso*. Da un punto di vista storico e didattico il problema ciclotomico è significativo poiché se ne evidenzia la soluzione ad un problema bimillennario e il superamento delle difficolta tecniche collegate ad esso. Sebbene la dimostrazione del risultato precedente coinvolga strumenti di Algebra superiore, e non è utilizzabile in classe, nondimeno si ritiene di tralasciarne l'enunciato. Infatti, il suo alto contenuto può apportare all'allievo sicuro giovamento, in termini di interesse, motivazione e competenze. Sarebbe poi auspicabile, se non necessario, un collegamento interdisciplinare con il *Disegno Tecnico* e un'intesa sull'effettiva costruibilità' di tali poligoni regolari. Diversi manuali, a riguardo, propongono dei metodi universali di costruzione dei poligoni regolari, ma non sono corretti, almeno teoricamente, nel senso che non possono violare il teorema precedente. Essi offrono comunque un grado accettabile di approssimazione, nella maggior parte dei casi.

4 - Conclusioni

L'incommensurabilità angolare può costituire un significativo momento di riflessione didattica che si affianca agli approcci classici di Dedekind, Cantor, Cauchy. Questi, da soli, infatti, non appaiono immediati nell'essere acquisiti nell'allievo, a causa anche di un certo grado di astrazione. Permane allora l'obiettivo di avvicinarsi alla comprensione del concetto di numero reale, la cui importanza è indiscutibile, anche attraverso contesti geometrici più ricchi e significativi.

Il gruppo di allievi ha risposto in maniera efficace a tale attività rispondendo ed integrando in maniera naturale le sollecitazioni richieste. Naturalmente si auspica di ripetere l'esperienza laboratoriale e di testarne ancora i risultati conseguiti.

Bibliografia

Olmsted J. M. H. (1945). Rational values of trigonometric functions. *The American Mathematical Monthly*, *52*(9), 507–508.

Jahnel J. When co(sin) of a rational angle equal to a rational number? ArXiv-1006.2938.

Livio M, (2005), *La sezione aurea.*, Rizzoli

Paolillo B. (2013). L'irrazionalità della √2: aspetti didattici**.** *Atti Seminario Nazionale 2013, IMSI 2013*

Paolillo B. (2019). L'incommensurabilità angolare in classe: un percorso didattico. *L'insegnamento Della Matematica E Delle Scienze Integrate*, *42* (B), 461–474.

Paolillo B., Vincenzi G. (2020). An elementary proof of Niven's theorem via the tangent function; *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*

On the Rational Values of Trigonometric Functions of Angles that are Rational in Degrees; *Math. Mag*. **94,** No. 2, 132-134, *Mathematical Association of America*.

Paolillo B., Rizzo P., Vincenzi G. (Jul,2021). Commensurable diagonals in Regular *n*-gons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

****


tab
LUCA BINDI
Quasicristalli
L'avventura di una scoperta
con un contributo di Barbara Gallavotti,
Luciano Maiani e Marco Tavani
SAGGI

****