

Dalle congetture alle dimostrazioni in geometria

Un percorso didattico con l'uso di un software di matematica (GeoGebra)

Luigi Tomasi*

*Università di Ferrara; luigi.tomasi@unife.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.063

Sunto: *L'articolo riassume quanto è stato svolto in una relazione al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?" il 14-15 luglio 2021, dedicata alle congetture, all'argomentazione e alla dimostrazione, con l'uso di un software di geometria, per la Scuola secondaria. Inizialmente si è analizzato il vantaggio che il software permette nella costruzione di una figura geometrica, che da statica diventa dinamica. Successivamente sono stati illustrati alcuni problemi che si possono proporre in classe "in forma aperta", per attività didattiche riguardanti l'avvio alla dimostrazione, con l'uso di un software di geometria.*

Parole Chiave: *congetture, software di geometria dinamica; problemi in forma aperta; dimostrazioni.*

Abstract: *The article summarizes what we proposed in a report at the conference "What knowledge of geometry in today's school?" July 14-15, 2021, dedicated to conjectures, argumentation and demonstration, with the use of geometry software, for secondary school. Initially, we analyzed the advantage that the software allows in the construction of a geometric figure, which from static becomes dynamic. Subsequently, some problems were illustrated that can be*

proposed in class "in open form", for didactic activities concerning the start of the demonstration, with the use of a geometry software.

Keywords: *conjectures, dynamic geometry software; open problems; demonstrations.*

1 - Introduzione

In questo articolo si espone quanto è stato presentato in una relazione al Convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?” 14-15 luglio 2021, dedicata alla proposta di un percorso didattico di geometria all’inizio della scuola secondaria di II grado, con l’uso di un software di geometria (per esempio, GeoGebra).

Inizialmente sono state proposte alcune considerazioni sull’importanza della geometria nella formazione matematica degli studenti nella scuola secondaria. Nel seguito sono stati richiamati gli attuali curricoli di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l’uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi per un possibile percorso di geometria, che gradualmente porti dalle congetture alle dimostrazioni.

2 - La complessità dell’insegnamento della geometria

Tutti sanno che la geometria svolge un ruolo molto importante nell’apprendimento della matematica perché ha aspetti sia teorici che visuali e uno stretto legame con il mondo

fisico che ci circonda. La geometria è stata descritta come «prima rappresentazione del mondo fisico» (Federigo Enriques, 1906). Nello stesso tempo occorre però sottolineare che il suo insegnamento è particolarmente complesso. Tutti gli insegnanti di matematica, a qualunque livello scolare, sono consapevoli dell'importanza della geometria nel curriculum di matematica, ma di fatto ritengono difficile questo insegnamento e in diversi indirizzi di scuola secondaria la presentano in una forma ridotta oppure, date le difficoltà, la trascurano. Le ragioni di questa situazione in cui si presenta l'insegnamento della geometria sintetica sono state individuate da Vinicio Villani in un articolo del 1994, in cui scrive:

L'insegnamento della geometria è un qualcosa di estremamente articolato e complesso. Sui principali concetti occorre ritornare a più riprese nell'intero arco dell'istruzione pre-universitaria (e oltre) con successivi aggiustamenti, a livelli di approfondimento diversi e da punti di vista diversi. Ciò rischia di determinare, e di fatto determina, un senso di insicurezza e di disagio psicologico in molti insegnanti, consapevoli del fatto che il loro insegnamento della geometria rappresenta solo un tassello in un contesto più vasto. (Vinicio Villani, 1994).

Questo articolo si occupa del passaggio tra la geometria intuitiva e sperimentale a quella ipotetico-deduttiva, che di solito viene proposta nei primi anni della scuola secondaria di II grado. In questo delicato snodo si ritiene che l'uso di un software di geometria dinamica, come previsto anche dalle *Indicazioni nazionali/Linee guida* (2010) per la Scuola secondaria, possa dare un notevole contributo e suscitare un maggiore interesse da parte degli allievi.

La geometria è sempre stata tradizionalmente l'ambito privilegiato per introdurre il metodo dimostrativo nella scuola secondaria di II grado. Questa impostazione ha caratterizzato fortemente la prassi didattica nell'insegnamento del metodo dimostrativo, non solo in Italia. Si pensa, tuttavia, che questo percorso verso la dimostrazione dovrebbe essere più graduale e far uso degli strumenti tecnologici che attualmente si hanno a disposizione, come sono i software di geometria dinamica.

In questo articolo si propone quindi un approccio più graduale alla dimostrazione.

In realtà, negli ultimi decenni, nella scuola secondaria di II grado si sono andate rafforzando prassi didattiche che hanno visto un progressivo abbandono dell'insegnamento della geometria sintetica, soprattutto della dimostrazione, data la sua difficoltà, soprattutto se la si presenta agli inizi del percorso di studi di scuola superiore.

Negli ultimi decenni nella scuola c'è stata una diffusione delle tecnologie e tra queste quella dei software di geometria dinamica. Questi software hanno determinato un qualche recupero, almeno in una parte degli insegnanti, dell'interesse per l'insegnamento della geometria, proprio nel senso euclideo delle costruzioni con riga e compasso. I software di geometria dinamica consentono infatti di vedere dinamicamente le figure, riportando in primo piano la geometria sintetica e i metodi di risoluzione dei problemi geometrici. Fin dal loro apparire questi software hanno suscitato un notevole interesse per le loro caratteristiche di dinamicità e come strumenti a supporto della risoluzione di problemi, in particolare in ambito geometrico. Con l'uso di questi strumenti, per la geometria, la prima cosa che cambia è

il concetto di figura, che da statica diventa dinamica, e si può quindi manipolare, trasformare, trascinare.

L'uso di questi software nell'analisi di un problema permette di fare delle osservazioni e delle congetture, che possono facilitarne la risoluzione e sviluppare nello studente la capacità di intuizione e la necessità di un'argomentazione e di una spiegazione delle proprietà osservate.

Il software tuttavia, come tutti gli strumenti, da solo non basta. Sono fondamentali le modalità d'uso da parte degli studenti e il progetto didattico dell'insegnante. Nel seguito si porrà quindi l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso del software e in generale delle nuove tecnologie, accanto all'uso degli strumenti tradizionali. In particolare si proporranno alcuni problemi geometrici di costruzione e altri proposti "in forma aperta", per favorire il passaggio dalle congetture alle dimostrazioni, così come è suggerito dalle *Indicazioni nazionali* per i licei del 2010:

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

3 - I software di geometria dinamica: costruzioni ed esplorazioni, verso la dimostrazione

Dal punto di vista didattico il software dovrebbe essere integrato in un percorso didattico e utilizzato in classe al momento opportuno, con diverse modalità:

-quando c'è bisogno di fare una figura con elevata precisione (sia da parte degli insegnanti che degli studenti);

-per esplorare dinamicamente e per visualizzare "oggetti" geometrici che, se modificati opportunamente, mettono in luce delle proprietà invarianti; si sfrutta, per esempio, il trascinarsi di alcuni elementi iniziali di una data costruzione geometrica;

-per scoprire delle proprietà e produrre delle congetture da validare o refutare; per questo il software viene utilizzato dagli studenti, con la guida dell'insegnante.

Per potere utilizzare il software dal punto di vista didattico l'insegnante deve conoscerlo in modo approfondito e avere presente qual è la sua «logica». Occorre quindi preparare un progetto didattico in cui si prevede di usare al momento opportuno il software. In tale progetto il software a volte deve essere usato dall'insegnante e altre volte dagli allievi, suddivisi eventualmente in piccoli gruppi di lavoro.

Una figura eseguita con un software di geometria dinamica è da considerarsi corretta se ogni altra figura ottenibile per trascinarsi da questa può essere considerata corretta. Tale criterio di validazione non dipende tanto dall'aspetto dell'immagine prodotta, quanto dalla procedura che l'ha prodotta. Un esempio iniziale da proporre e da discutere è, per esempio, quello della costruzione, con l'uso del software, di un quadrato a partire dal lato. Questo primo esempio può servire per comprendere che la costruzione di una figura, anche con il software, deve essere svolta utilizzando le proprietà geometriche della figura che vogliamo costruire.

Riportiamo (figura 1) di seguito la costruzione di un quadrato, dato il lato, in cui con il software si simula la costruzione con riga e compasso di un quadrato, contenuta nella Proposizione 46 del Libro I degli *Elementi* di Euclide. I punti indicati in colore blu (A e B) dal software sono i punti iniziali della costruzione ed hanno due gradi di libertà, ossia possono essere trascinati; invece i punti indicati dal software in colore nero (C e D) non hanno gradi di libertà perché dipendono dalla costruzione dei punti iniziali.

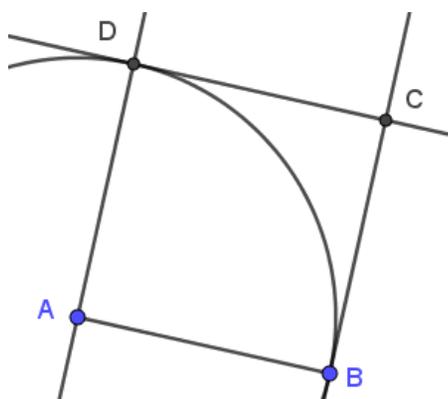


Figura 1

Cosa accade quando si integra nella pratica didattica il software di geometria? Il contesto nel quale la classe agisce cambia, perché accanto a strumenti più tradizionali, quali la riga, il compasso, il goniometro..., gli allievi e l'insegnante hanno a disposizione nuovi strumenti, offerti dal software. Gli strumenti sono molteplici; elenchiamo solo quelli salienti:

-le primitive del software che consentono di costruire le figure geometriche; per esempio la creazione di un punto, di una retta, di una circonferenza, ma anche i comandi che

permettono la costruzione dell'asse di un segmento, della bisettrice (nel software è una retta) di un angolo, di una retta parallela a una data (il V postulato è uno strumento del software...), ecc.

-le macro-costruzioni che permettono di creare nuovi strumenti a partire da alcune costruzioni fondamentali e ne permettono l'uso ogni volta che sia necessario;

-la funzione di trascinamento che serve per muovere e trasformare le figure costruite con il software, mantenendo però le proprietà geometriche utilizzate nelle costruzioni e definite dai comandi usati.

Il software di geometria dinamica offre strumenti e modi d'uso che rimandano al significato teorico di costruzione e in particolare al significato di assioma e teorema, in breve al significato di sistema teorico. È in questo senso che comandi e modi d'uso possono contribuire alla costruzione di tali significati da parte degli allievi. È importante sottolineare che quando si parla di un sistema teorico, due sono gli aspetti rilevanti tra loro interconnessi: da un lato l'idea di dimostrazione, dall'altro l'idea di teoria. (M. Alessandra Mariotti, 2005).

Con un software di geometria dinamica un compito di costruzione può considerarsi risolto se l'immagine che si ottiene sullo schermo «supera» il test del trascinamento. La possibilità di trascinamento degli elementi base di una figura costituisce senz'altro l'elemento innovativo che caratterizza gli ambienti di geometria dinamica e prevede:

-l'uso del trascinamento per verificare se la costruzione effettuata è corretta, ovvero corrisponde allo scopo prefissato;

-l'uso del trascinamento al fine di produrre una congettura: formulare un enunciato, che risponda alla formulazione di un problema proposto in forma aperta.

Nella proposta di curriculum UMI, contenuta in *Matematica* 2003, troviamo un'impostazione innovativa per quanto riguarda l'insegnamento della matematica e l'uso dei software nell'insegnamento della matematica. Alcune idee salienti di questa proposta di curriculum sono le seguenti:

-si consiglia l'uso di software (di geometria dinamica, CAS-computer algebra system, fogli elettronici, calcolatrici grafiche, ecc.)

-si propone la dimostrazione non solo in ambito geometrico;

-si richiama l'attenzione sull'argomentazione e sulle congetture, sulla discussione matematica, prima di arrivare alla dimostrazione (nella Scuola secondaria di II grado);

-si pone l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso dei software e in generale delle nuove tecnologie, accanto a quelle tradizionali;

-si dà infine importanza allo studio delle trasformazioni geometriche, in contesti motivanti e con problemi scelti opportunamente, che ne mettano in luce l'importanza.

Come sappiamo c'è una certa difficoltà degli studenti di scuola secondaria ad affrontare e produrre dimostrazioni. Di solito gli allievi leggono e ripetono delle dimostrazioni, quelle richieste dagli insegnanti. Ma produrre una dimostrazione è qualcosa di diverso. Questo richiede un itinerario didattico specifico dell'insegnante. Talvolta gli studenti pensano, soprattutto all'inizio della scuola secondaria di II grado, che in geometria si vogliano dimostrare delle proprietà «evidenti»,

che «si vedono dalla figura». Nell'insegnamento di questi temi occorre quindi fare delle scelte opportune, non potendosi usare in modo sistematico, già all'inizio della scuola secondaria di II grado, il metodo assiomatico-deduttivo. Prima di arrivare a svolgere le prime dimostrazioni, si potrebbero proporre delle attività sulle congetture e sull'argomentazione con l'uso di un software di geometria. Per quanto riguarda la dimostrazione conviene scegliere alcuni nuclei fondamentali e un numero ridotto di teoremi da dimostrare, mettendo in chiaro qual è il quadro teorico in cui si inseriscono (assiomi, enti primitivi, definizioni, teoremi,...).

Riportiamo una citazione dalle *Indicazioni nazionali/Linee guida* (del 2010) per i licei, per il I biennio:

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano...; l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

È quindi opportuno partire da alcuni problemi proposti «in forma aperta», con l'uso di un software di geometria dinamica. Nel seguito proponiamo sinteticamente alcune di queste attività di risoluzione di problemi. Un problema proposto in forma aperta deve avere le seguenti caratteristiche:

-ha un enunciato abbastanza breve;

- non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi e tantomeno la soluzione o la tesi;
- non deve indurre automaticamente a uno specifico metodo di risoluzione;
- non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste.

I problemi si presentano come situazioni in cui lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come "il risultato", ma come le conseguenze delle premesse che ha usato. In questa attività gli studenti possono essere suddivisi in gruppi di lavoro e devono utilizzare sia il loro quaderno che un software di geometria dinamica.

In queste attività, si propone di:

- a) esplorare un problema presentato in forma aperta;
- b) individuare degli invarianti, tramite le funzionalità permesse dal software: il trascinamento, la misura e la verifica di proprietà;
- c) individuare relazioni geometriche tra figure, mettendo in evidenza i legami funzionali (quali oggetti della figura variano in dipendenza di quali altri) e variazionali (come variano);
- d) formulare nuove congetture, tramite l'esplorazione della configurazione geometrica;
- e) validare le congetture formulate, tramite prove su casi particolari, o trascinamento, o costruzioni, o altro;
- f) dimostrare le congetture formulate.

Il software di geometria può quindi essere usato a diversi livelli, in attività di costruzione di figure, di esplorazione e anche come avvio alla dimostrazione. Una delle difficoltà che può insorgere è quella di introdurre l'uso del software senza integrarlo con l'attività didattica e slegato dal "problem solving". Occorre quindi scegliere questioni non troppo facili ma neppure troppo complesse, adatte alla classe in quella precisa fase in cui vengono proposte, da affrontare con l'uso del software.

4 - Alcuni esempi di problemi di costruzione e altri quesiti, presentati in forma aperta, con l'uso di un software di geometria

Proponiamo alcune attività che si possono svolgere nel Primo biennio della Scuola secondaria di II grado con l'uso di un software di geometria dinamica (oltre che con gli strumenti tradizionali).

1. Alcune costruzioni iniziali, da eseguire senza il software e in un secondo momento con il software sono le seguenti:

- costruire un triangolo equilatero, dato il lato;
- costruire un quadrato, dato il lato;
- costruire l'asse di un segmento;
- costruire la bisettrice di un angolo;
- costruire i punti notevoli di un triangolo (baricentro, circocentro, ortocentro, incentro).

2. Problema di costruibilità. Dato un segmento AB e un segmento di lunghezza $2p$, dire qual è la condizione a cui

deve soddisfare AB perché sia possibile costruire un triangolo che abbia come lato AB e perimetro $2p$.

3. Problemi di costruibilità da presentare in forma aperta, con l'uso del software.

Due altezze di un triangolo possono essere perpendicolari? E due assi? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà.

4. Problemi di costruibilità da presentare in forma aperta, con l'uso del software.

Dato un triangolo, costruire le bisettrici di due angoli interni. Con l'uso del software, trascinando opportunamente i vertici del triangolo, puoi rendere queste bisettrici tra esse perpendicolari? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiegare perché è impossibile ottenere questa configurazione (figura 2).

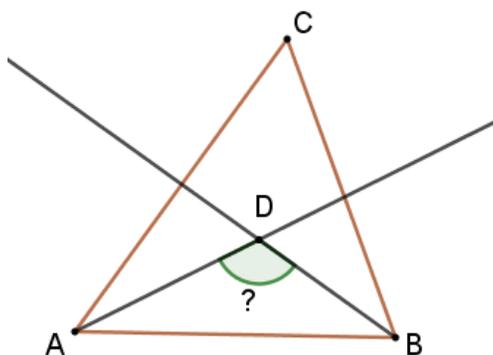


Figura 2

Commento. Dopo vari tentativi, si scopre che il problema è impossibile. Chiediamo il perché agli studenti e poi di dimostrare perché è impossibile.

5. Due mediane di un triangolo possono essere perpendicolari? In caso affermativo, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiegare perché è impossibile (figura 3).

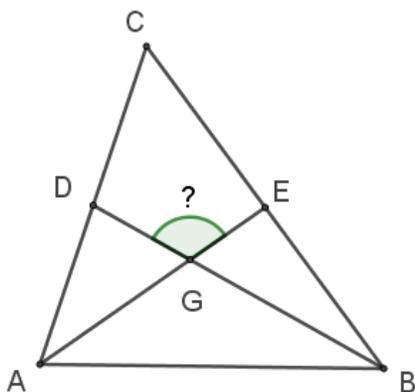


Figura 3

6. Problema di costruzione. Date tre rette a , b , c , passanti per un punto I , costruire un triangolo che abbia queste rette come bisettrici degli angoli interni. Il problema è sempre possibile? (figura 4).

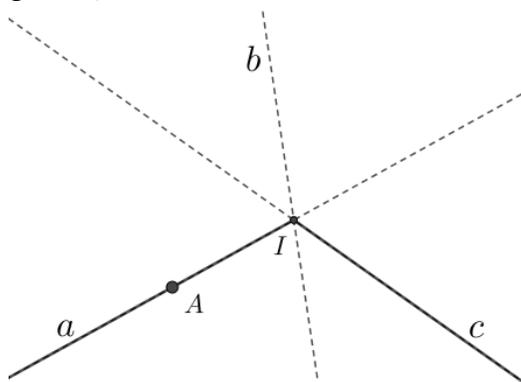


Figura 4

7. Verso la dimostrazione con il software

Sia dato un quadrilatero $ABCD$ e siano L , M , N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB , BC , CD e AD .

- Quali proprietà ha il quadrilatero $LMNP$?
- Quali configurazioni particolari può assumere il quadrilatero $LMNP$?
- Quali ipotesi occorre fare su $ABCD$ perché $LMNP$ assuma queste configurazioni?
- Produrre congetture e, successivamente, dimostrarle.

8. Sia dato un triangolo ABC . Quali ipotesi si devono aggiungere su ABC affinché questo triangolo si possa scomporre in due triangoli isosceli? Usare il software e trascinare i vertici per esaminare le possibili configurazioni che realizzano la richiesta.

9. Scoperta di proprietà, congetture

-Sia dato un triangolo equilatero. Esaminare la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolare condotti da un punto P interno (esterno) a ciascuno dei lati (figura 5). Questo problema è più difficile dei precedenti e potrà quindi essere riproposto non solo all'inizio della Scuola secondaria di II grado.

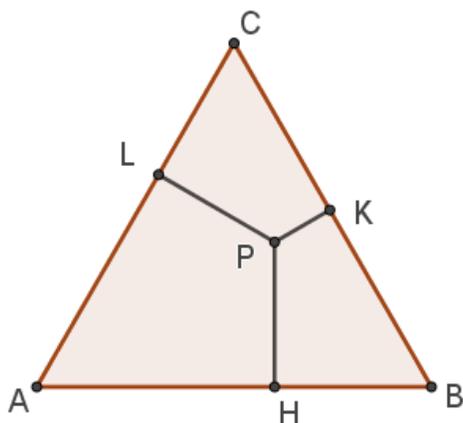


Figura 5

10. Scoperta di proprietà, di congetture, da utilizzare verso la dimostrazione con il software

Sia dato un quadrilatero ABCD. Considerare le bisettrici degli angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M in senso orario. Far variare A, B, C, D, esaminando i casi particolari. Come cambia la figura K, L, M, N?

Scrivere tutte le osservazioni fatte e le congetture. Dimostrare (o confutare) le congetture fatte.

11. Un problema di costruzione: la bisettrice... nel foglio (dai problemi di "Flatlandia").

Costruire con riga e compasso la bisettrice di un angolo (formato prolungando due segmenti disegnati nel foglio). La costruzione però si deve fare senza uscire dal foglio (vedi figura 5).

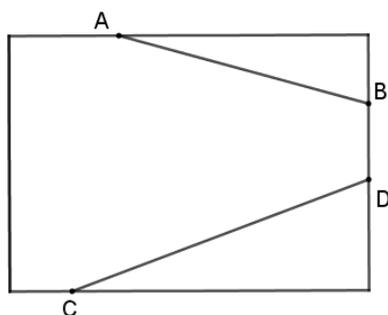


Figura 6

5 - Conclusioni

La dimostrazione è una attività molto importante da proporre nella scuola secondaria di II grado, ma ovviamente non è necessario affrontare troppe dimostrazioni: non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti. È opportuno osservare che dal punto di vista didattico e dell'apprendimento, le attività di congettura e di argomentazione vengono prima di quelle dimostrative. Non si può arrivare alle dimostrazioni se prima non è chiaro il significato che ha "il dimostrare" e che cosa esso presuppone (una teoria, degli assiomi, degli enti primitivi, delle regole che si possono utilizzare per dedurre delle affermazioni). Serve dunque un approccio graduale, che dia spazio all'uso del software in attività di scoperta di proprietà, di congettura e di dimostrazione. In questo articolo sono state proposte alcune attività di geometria che possono essere utilizzate, con l'uso del software, per un approccio graduale al metodo dimostrativo.

Bibliografia

AA.VV. (2003). *Matematica 2003* (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario). Lucca: Liceo Scientifico Vallisneri.

AA.VV. (2001). *Matematica ed aspetti didattici. Seminario di formazione per docenti*. Lugo di Romagna, Liceo Scientifico Ricci-Curbastro.

Enriques F. (1906), *Problemi della scienza*. Bologna, Zanichelli.

Mariotti M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora Editrice.

Tomasi L. (2018). Percorsi di geometria per la Scuola secondaria di II grado (con l'uso del software), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 41AB, N.5, pp. 669-680.

Tomasi L. (2019). Argomentare, congetturare, dimostrare: cosa cambia con l'uso di un software?, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 42AB, N.5, pp. 660-671.

Villani V. (1994). L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 17AB, N.5, pp. 439-457.

Villani V. (2004). *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*. Bologna: Pitagora Editrice.

I "problemi di Flatlandia" (rubrica mensile di problemi di geometria sintetica in rete, per studenti della scuola secondaria):

<http://dm.unife.it/flatlandia/>