Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp. 55-78

Successioni geometriche e dintorni

Loredana Biacino*

**Già Professore Associato Università Federico II Napoli;

loredana.biacino@libero.it

10.53159/PdM(IV).v3n3-4.052

Sunto: *Il lavoro è indirizzato a studenti delle scuole secondarie di secondo grado ed è relativo allo studio informale della somma dei primi termini delle progressioni geometriche ed al passaggio dal caso finito al caso delle serie infinite: sia in un caso che nell'altro sono riportati esempi.*

***Parole Chiave**: Somma dei primi termini di una progressione geometrica finita; somma della serie geometrica.*

Abstract: *The paper is addressed to upper secondary school's students. An informal study of the passage from the sum of the first terms of a geometric series to the sum of the whole infinite series is exposed. Many examples are given in both cases.*

Keywords: *Sum of the first terms of a geometric progression; sum of the geometric series.*

1 - Introduzione

A lungo la geometria euclidea, seguendo la tradizione kantiana, è stata considerata uno strumento di conoscenza assoluto, determinante l'esperienza e da essa inscindibile. Questa assolutezza è stata messa in crisi all'inizio del '900 con l'emergere della teoria della relatività prima e poi con le teorie quantistiche. Ma l'intuizione geometrica dello spazio è tuttora uno dei capisaldi della scienza cognitiva. La mia proposta consiste nel cercare di provare come essa possa essere usata come supporto per attività in cui generalmente non è presente.

La relazione è rivolta a studenti delle scuole secondarie di secondo grado ed è relativa ad un insegnamento che si può dispiegare in un lungo intervallo di tempo, il periodo in cui gli studenti sono posti di fronte al problema dell'infinito. Problema che, attraversando gran parte dell'insegnamento della matematica, emerge da subito, quando si cominciano a scrivere gli sviluppi decimali dei razionali periodici o degli irrazionali. La differenza dei due casi è fondamentale perché ci troviamo di fronte a due andamenti illimitati di carattere totalmente diverso; nel primo caso, il solo su cui ci soffermeremo, c'è un andamento regolare, che si può facilmente dominare, come vedremo, con l'intuizione geometrica.

Per affrontare l'argomento in modo graduale, ci soffermeremo inizialmente sullo studio di alcune successioni finite e sulle loro somme, proponendo un'interpretazione di carattere geometrico delle formule e poi, con lo stesso sistema passeremo al caso di successioni infinite, facendo leva sull'intuizione geometrica dello spazio: per questo ci avvarremo di esempi di carattere storico che si presentano ancora interessanti e adatti ad attirare l'attenzione dei ragazzi. Il passaggio al caso infinito trae vantaggio dall'inquadramento storico, che permette di evidenziare le procedure in maniera informale, e prepara il campo all'introduzione del calcolo differenziale. L'articolo si conclude con un'applicazione della teoria precedente all'insieme di Cantor e alla determinazione della sua dimensione frattale.

2 - Somma dei primi termini di una serie geometrica

Tutti gli studenti del triennio conoscono la formula, relativaalla somma dei primi n termini di una progressione geometrica di primo termine 1 e ragione $a \neq 1$:

$$1+ a + a^2+ \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}. \qquad (*)$$

Essa è immediata per n = 1, caso in cui si riduce a 1 = 1, e per n = 2, essendo: $1+ a = \frac{1-a^2}{1-a}$.

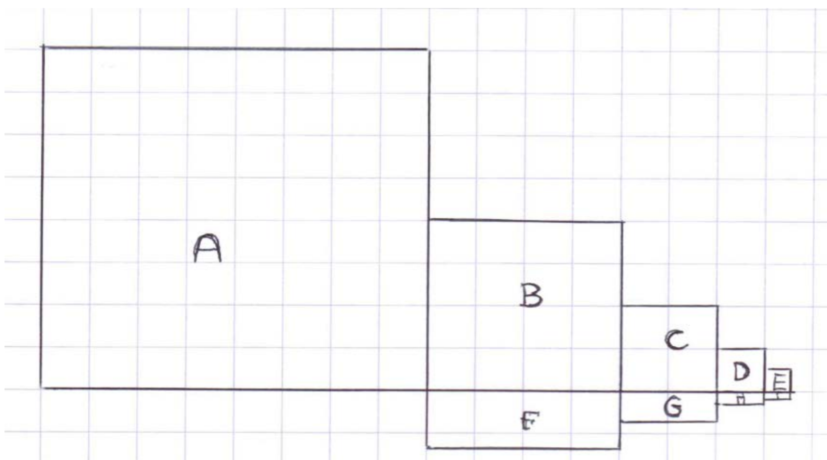
In generale ci sono vari modi per stabilirla; il più semplice è eseguire la moltiplicazione

$$(1-a)(1+ a + a^2+ \ldots + a^{n-1}) = 1+ a + a^2+ \ldots + a^{n-1} - a - a^2 \ldots - a^n = 1 - a^n;$$

ma si può procedere pure per induzione. Si può anche effettuare la divisione di $a^n - 1$ per a - 1 con la regola di Ruffini etc….

La regola precedente la troviamo già enunciata e dimostrata negli Elementi di Euclide (Proposizione IX, 35) scritti circa nel 300 a.C. ; Archimede poi la dimostra nel caso particolare che sia a = 1/4 quando, non molto tempo dopo, scrive la *Quadratura della parabola*.

La sua dimostrazione è la seguente: immaginiamo un



quadrato *A*, accanto a questo un quadrato *B* il cui lato è la metà del lato di *A*, poi un quadrato *C* il cui lato è la metà del lato di *B*, un quadrato *D* che ha il lato metà del lato di *C,* un quadrato *E* il cui lato è la metà del lato si *D* e così via. Accanto a *B* consideriamo un rettangolo *F* che è la terza parte di *B*, accanto a *C* un rettangolo *G* terza parte di *C*, accanto a *D* un rettangolo *H* terza parte di *D*, accanto ad *E* un rettangolo *I* terza parte di *E* e così via.

Si osserva che:

$$B+F = B + \frac{B}{3} = \frac{4B}{3} = \frac{A}{3};\ C+G = C + \frac{C}{3} = \frac{4C}{3} = \frac{B}{3};\ D + H = D + \frac{D}{3} = \frac{4D}{3} = \frac{C}{3};\ E + I = E + \frac{E}{3} = \frac{4E}{3} = \frac{D}{3}.$$

Sommiamo membro a membro le relazioni ottenute, indicando con le stesse lettere le aree delle figure consi-derate:

$$B + C + D + E + F + G + H + I = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3}$$

e osserviamo che:

$$F + G + H = \frac{B}{3} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3};$$

quindi, sommando A ad ambo i membri, si ottiene:

$$A + B + C + D + E + I = \frac{4A}{3},$$

cioè

$$A + B + C + D + E = \frac{4A}{3} - \mathrm{I}.$$

Ora

$$\frac{4A}{3} - \mathrm{I} = \frac{4A}{3} - \frac{E}{3} = \frac{4}{3}\left(\mathrm{A} - \frac{E}{4}\right) = \frac{A-primo\ termine\ escluso}{1-\frac{1}{4}};$$

pertanto:

$$A + B + C + D + E = \frac{A-primo\ termine\ escluso}{1-\frac{1}{4}},$$

cioè la regola, ponendo $A = 1$:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}. \qquad (**)$$

Archimede non trova soltanto questa proprietà, ma osserva che il primo termine escluso diventa sempre più piccolo al crescere delle iterazioni della procedura, se allora noi vogliamo conoscere la somma di tutti gli infiniti termini del tipo di quelli presenti a primo membro di (**) basta considerare nullo il primo termine escluso, ottenendo:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=4/3. \qquad (***)$$

Qui abbiamo fatto veramente un passo gigantesco: siamo passati da una somma finita a una infinita! Da una somma come $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$ o una somma come $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$ a una che ha infiniti addendi. La prima ha come risultato $\frac{21}{16}$, la seconda $\frac{85}{64}$, ma per il valore della somma degli infiniti addendi abbiamo usato (**) e semplicemente abbiamo messo 0 al posto di $\frac{1}{4^n}$. Ciò sembra lecito perché $\frac{1}{4^n}$ assume valori piccoli quanto si vuole dando a *n* valori opportunamente grandi. La procedura seguita ci convince quindi intuitivamente, ma solo con il concetto di limite diverrà teoricamente inattaccabile.

Chiamiamo serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ un'espressione come quella che compare a primo membro di (*); 4/3 è la somma della serie (***).

Se i termini sono moltiplicati per un numero *b*, *b* è detto primo termine. La somma di una serie geometrica di primo termine *b* e ragione $-1 < a < 1$ è data da:

$$b + ba + ba^2 + ba^3 + \dots + ba^n + \dots = \frac{b}{1-a}.$$

Un caso particolare della regola (*) lo troviamo nel papiro di Rhind: fu scritto da uno scriba di nome Ahmes al tempo del regno di un re degli Hyksos in un periodo dal 1788 al 1580 a.C. Non si sa se si trattasse di un'opera minore o importante, un compendio per studiosi, un manuale per sacerdoti o semplicemente il libro di uno scolaro. Tra i problemi che vi si trovano figura il *n*. 79, di difficile traduzione. Una interpretazione è la seguente:

Somma la progressione geometrica di 5 termini, di cui il primo è 7 e la ragione è 7.

La somma secondo la regola. Moltiplica 2801 per 7.

- 1	*2801*
- 2	*5602*
- 4	*11204*
Totale	*19607*

La somma per addizione

case	*7*
gatti	*49*
topi	*343*
spighe grano	*2401*
hecat	*16807*
Totale	*19607*

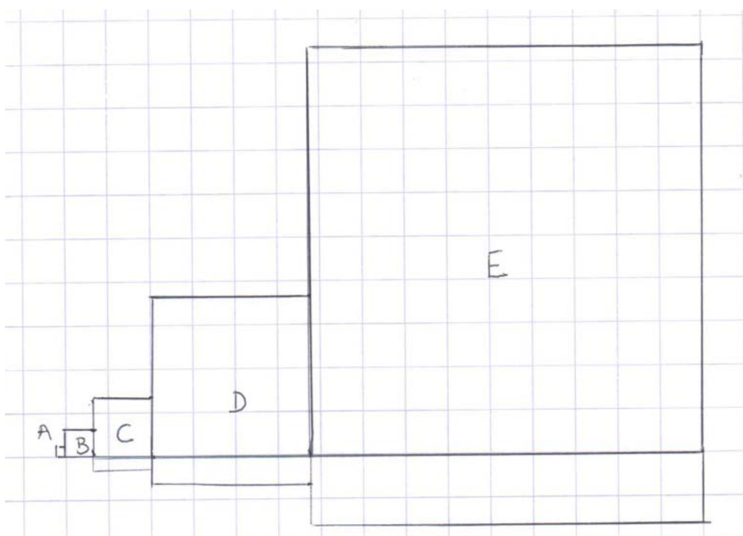
Si osservi che 2801 per 7 equivale a

$$\frac{7^6-7}{7-1} = 7 \times \frac{7^5-1}{6} = 7 \times \frac{16806}{6} = 7 \times 2801 = 19607.$$

Quindi il risultato dato da Ahmes corrisponde alla regola (*) nel caso che sia $a = 7$ ed $n = 5$. Mentre poteva avere un significato pratico sapere il numero degli hecat (misura di volume) di grano che i gatti potevano mettere al riparo dai topi, non aveva nessuna importanza conoscere il numero di tutte le disomogenee quantità che poi sono state sommate: possiamo immaginare che una curiosità di carattere matematico abbia spinto l'autore del problema ad un'indagine di questo tipo.

Riproponiamo lo schema di Archimede anche in questo caso: consideriamo un quadrato A di area 7, poi uno B di area $\mathbf{7^2}$, poi uno C di area $\mathbf{7^3}$, uno D di area $\mathbf{7^4}$, uno E di area $\mathbf{7^5}$ e infine uno F di area $\mathbf{7^6}$. Se accanto a ognuno di tali quadrati poniamo un rettangolo equivalente alla sesta parte del quadrato allora, procedendo in modo simile a quanto fatto in precedenza, otteniamo:

$$A+\frac{A}{6}=\frac{B}{6};\ B+\frac{B}{6}=\frac{C}{6};\ C+\frac{C}{6}=\frac{D}{6};\ D+\frac{D}{6}=\frac{E}{6};\ E+\frac{E}{6}=\frac{F}{6}.$$



Sommando membro a membro abbiamo:

$$A+B+C+D+E=\frac{F-A}{6};$$

che è lo stesso risultato ottenuto da Ahmes:

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5=\frac{7^6-7}{6}=7\times\frac{7^5-1}{6}=7\times\frac{16806}{6}$$

$$=7\times 2801=19607.$$

E se procediamo all'infinito? Se consideriamo cioè la serie infinita:

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5+\ldots.?$$

Dobbiamo allora tenere presente che $7+7^2+7^3+\ldots+7^n=7\times\frac{7^n-1}{6}$ in corrispondenza di ogni naturale *n*.

L'ultima espressione si differenzia da quella presente in (**) per il fatto che mentre in essa compare $\frac{1}{4^n}$, che è un termine che diventa sempre più piccolo al crescere di n, adesso abbiamo il termine 7^n che invece diventa più grande di ogni numero assegnato. Di conseguenza la serie

$$7+7^2+7^3+\ldots+7^n+\ldots$$

ha un comportamento completamente diverso.

Se la ragione di una serie geometrica *a* è minore di 1 (in valore assoluto) allora nell'espressione della somma parziale n-sima (*) a^n tende a zero quando si fa crescere illimitatamente *n* e quindi la somma della serie geometrica è il numero finito 1/(1-a) . Se la ragione è maggiore di 1 allora a^n tende all'infinito e lo stesso succede per la somma parziale n-sima come appare evidente da (*). Anche la somma della serie è allora infinita.

Su questa straordinaria proprietà delle potenze di base maggiore di 1 di crescere con enorme rapidità si basa un racconto molto significativo. Una volta un faraone apprese con suo gran diletto il gioco degli scacchi dall'ambasciatore persiano: tale fu il suo entusiasmo che volle ricompensare il dignitario straniero esaudendo un suo desiderio. L'ambasciatore disse allora che voleva che gli fosse data una quantità di grano ottenuta così:

> *Metti un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, 2 sulla seconda, 4 sulla terza, 8 sulla quarta e prosegui in questo modo raddoppiando fino a completare le 64 caselle.*

Il faraone accondiscese ma ben presto si rese conto che non solo il grano di tutti i granai dell'Egitto ma nemmeno quello prodotto nel mondo intero sarebbe bastato ad esaudire la richiesta e che l'ambasciatore si era preso gioco di lui. Infatti il numero di chicchi che si ottiene con la precedente procedura è pari a: $1+ 2+ 2^2+ 2^3 + \ldots +2^{63} =2^{64}-1$, che è un numero a venti cifre pari a circa 18 miliardi di miliardi di chicchi di grano pari a loro volta a circa 1.800.000 milioni di tonnellate di grano (produzione media annua odierna 600 milioni di tonnellate).

Ci rendiamo allora facilmente conto del motivo per cui gli esperti, per stroncare l'epidemia di covid richiedono che l'indice di contagiosità della malattia (cioè il numero medio di casi generati da un malato infetto in un determinato intervallo di tempo) sia inferiore a 1. Infatti supponendo ad esempio che malauguratamente esso sia 2 ci ritroveremmo che in media una persona ne infetta 2 (ad esempio nell'arco di una settimana) dopo due settimane sono infettate altre 4 persone, dopo tre settimane altre 8 etc.. con un effetto simile al caso della scacchiera detto prima.

3 - La somma di una serie geometrica

Quanto vale la somma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$?

Oresme vescovo di Lisieux, studioso francese alla metà del '300 trattava la questione con semplicità. Considerava un'asticella lunga 2, la divideva a metà, una delle due metà la divideva di nuovo a metà, la parte rimanente la divideva ancora a metà ed iterava il procedimento finché gli era praticamente impossibile procedere oltre.

1	½	1/4	1/8	…

Si rendeva così conto che mai avrebbe superato il numero 2 e che si sarebbe avvicinato a 2 in modo che la differenza fosse impercettibile. La somma dei primi n+1 addendi è infatti:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<2;$$

la differenza

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=2-2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^n}$$

si può rendere piccola quanto si vuole se *n* è abbastanza grande. Infatti se effettuiamo i calcoli per valori via via crescenti di n, ci rendiamo conto che dopo pochi passaggi il valore (approssimato) della frazione $\frac{1}{2^n}$ è zero e quindi se si procedesse all'infinito non potremmo ottenere altro che zero.

Ebbene tutto questo è sottointeso scrivendo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=2.$$

Oresme nel De Configurationibus (Clagett, 1968) fornisce un esempio di carattere cinematico della precedente proprietà. Osserva infatti:

> *Si supponga che un mobile si muova per un giorno lungo una semiretta con una certa velocità, il giorno successivo prosegua il suo moto con velocità che è metà della velocità del giorno precedente, il terzo giorno si muova ancora con velocità uguale alla metà della velocità del giorno precedente e così via, mai nell'eternità attraverserebbe il doppio dello spazio che ha percorso nel primo giorno. Però attraverserebbe una quantità di spazio maggiore di ogni dato spazio minore dello spazio che ha attraversato il primo giorno.*

Ma Oresme, accanto al valore della somma precedente, servendosi sempre dell'intuito geometrico, calcola anche la somma della seguente serie:

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots$$

A tale proposito egli immagina di collocare infinite asticelle eguali a quella della figura precedente una sull'altra. Nella seconda però non prende in considerazione la prima metà, nella seconda oltre alla prima metà non prende in considerazione nemmeno il quarto successivo, nella terza oltre alla prima metà e al quarto successivo non prende in considerazione nemmeno l'ottavo successivo e così di seguito indefinitamente. Se si sommano i valori sulle asticelle prese in verticale si ottiene proprio la somma che stiamo cercando. Se invece la somma la effettuiamo considerando le asticelle in orizzontale, cioè sommando i termini segnati sulla prima asta e a questo risultato si sommano i termini segnati sulla seconda, poi quelli della terza e così di seguito si trova il valore

2 (somma dei termini segnati sulla prima asta)

+ 1 (somma dei termini sulla seconda asta)

+ $\frac{1}{2}$ (somma dei termini sulla terza asta)

+ $\frac{1}{2^2}$ (somma dei termini sulla quarta asta)

+ ….

$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 4.$

Si conclude che $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ \ldots \ = 4.$

1	½	1/4	1/8	…
	½	1/4	1/8	…
		1/4	1/8	…
			1/8	…
				…
				…

Si osservi che i numeri razionali sono riducibili a successioni geometriche al seguente modo. Ad esempio: ½ =0,5 $= 5[\frac{1}{10}]$ si ottiene moltiplicando il numero 5 per la successione geometrica con primo termine $\frac{1}{10}$ e ragione 0.

Ancora:

$$2/3 = 0{,}666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = 6\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right],$$

si ottiene moltiplicando il numero intero 6 per una serie geometrica di primo termine $\frac{1}{10}$ e ragione $\frac{1}{10}$.

Talvolta ci si trova di fronte a casi più complicati dei precedenti. Ad esempio:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ 285714\ 285714\ldots =$$

$$= 285714\left[\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{6+6}} + \frac{1}{10^{6+12}} + \ldots\right]$$

si ottiene moltiplicando il numero intero 285714 per la serie geometrica il cui primo termine è $\frac{1}{10^6}$ e la ragione è $\frac{1}{10^6}$.

Se nell'espansione decimale compare l'antiperiodo si può procedere al seguente modo:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \frac{1}{10} + 6\left[\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^{2+1}} + \frac{1}{10^{2+2}} \ldots\right].$$

Si può concludere che:

Un numero è razionale se e solo se si ottiene sommando ad una frazione che ha per numeratore un numero intero e per denominatore una potenza di dieci una quantità che si ottiene moltiplicando un numero intero per una serie geometrica il cui primo termine è una potenza di $\frac{1}{10}$ *e la ragione è a sua volta una potenza di* $\frac{1}{10}$.

4 - L'insieme di Cantor

A Cantor si deve la descrizione di un insieme (Cantor 1884) chiuso, avente la potenza del continuo, privo di punti interni, cioè tale che nessun intervallo è incluso in esso, e di misura lineare nulla; questo insieme si allontana da quanto intuitivamente pensiamo possa essere un insieme di numeri reali ed è all'origine di molti esempi e controesempi nella teoria della misura.

Si consideri l'intervallo [0,1] e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\frac{1}{3} < 1$, si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza $(\frac{1}{3})^2$, eliminando quindi due intervalli di lunghezza complessiva $2(\frac{1}{3})^2$; poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti si elimini un intervallo aperto di ampiezza $(\frac{1}{3})^3$, eliminando quattro intervalli di lunghezza complessiva $4(\frac{1}{3})^3$; si proceda allo stesso modo indefinitamente.

L'intervallo di Cantor è quello che rimane dopo aver effettuato queste infinite sottrazioni.

L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con E, è data da:

$$\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3\ldots+2^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\ldots=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\ldots\right]$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Quindi la misura di E vale 1 e pertanto l'insieme di Cantor C= [0,1]-E è un insieme di misura nulla, chiuso, privo di punti interni, cioè non esiste nessun intervallo che possa esservi incluso. Alcuni per questo motivo lo chiamano polvere di Cantor, perché è un insieme composto da granelli. Ma pur essendo di misura complessiva nulla, tali granelli si può dimostrare che sono tanti quanti i punti dell'intervallo [0,1]. Cerchiamo di argomentare tale affermazione.

Si noti che aver eliminato l'intervallo centrale significa che alla fine della procedura otterremo solo i numeri tali che nella loro rappresentazione in base 3 la prima cifra è 0 oppure 2; analogamente, supposto che la prima cifra sia zero, la seconda potrà essere di nuovo 0 o 2; lo stesso se la prima cifra è 2 la seconda potrà essere 0 oppure 2 e così di seguito; procedendo indefinitamente otterremo tutti gli sviluppi in base 3 in cui compaiono solo le cifre 0 e 2; ma tali sviluppi sono tanti quanti tutti gli sviluppi in base 2, cioè tanti quanti i numeri dell'intervallo [0,1].

Uno dei fondatori della topologia moderna, F. Hausdorff (1868-1942), si rese conto che con insiemi non usuali, non confrontabili cioè con le ben note figure geometriche, il concetto di dimensione doveva essere modificato. Egli infatti introduce un concetto di dimensione frattale in modo molto complesso. Il punto di partenza consiste nel fatto che oltre a figure geometriche di dimensione intera, possono esserci insiemi lineari di dimensione compresa tra 0 e 1, curve limitate non rettificabili cioè di lunghezza infinita, che hanno una dimensione maggiore di 1 e minore o eguale a 2, superfici con dimensione superiore a 2 e minore o eguale a 3 e così via. Il matematico russo A. Besicovitch (1891-1970) avrebbe successivamente elaborato la definizione di Hausdorff e dato grandi contributi alla teoria della dimensione topologica, sviluppandone alcuni interessanti problemi. Qui daremo un'applicazione del calcolo della dimensione frattale in una forma estremamente semplificata, dimostrando che l'insieme di Cantor ha dimensione log32, cioè un numero strettamente compreso tra 0 e 1. Altre definizioni elementari di dimensione frattale si possono trovare in (Devlin, 1999) e (Mandelbrot, 1987).

Cominciamo con l'osservare che, dato il segmento unitario, lo possiamo ricoprire con 3^n segmenti tutti della stessa lunghezza 3^{-n}. Ognuno di questi segmenti può essere pensato, introdotto un parametro δ, come se avesse un peso $3^{-n\delta}$. Quindi nel valutare la somma totale dei pesi troviamo il valore

$$\frac{3^n}{3^{n\delta}}. \qquad (*)$$

Tale somma per $\delta < 1$ tende a $+\infty$, mentre per $\delta > 1$ tende a 0. Quindi, conformemente alla nostra concezione di dimensione, possiamo dire che la dimensione, data da $\delta = 1$, si presenta come elemento di separazione di due insiemi separati, il primo costituito dai $\delta < 1$ per cui (*) tende a $+\infty$ e il secondo costituito dai valori $\delta > 1$ per cui (*) tende a 0.

Consideriamo ora l'insieme di Cantor e usiamo lo stesso metodo. Al primo passo lo possiamo ricoprire con 2 segmenti che pesano ognuno $3^{-\delta}$. Al passo successivo ognuno di questi 2 segmenti dà luogo ad altri due segmenti che pesano $3^{-2\delta}$, per un contributo complessivo di $2^2 3^{-2\delta}$. Ripetiamo la stessa procedura in tutti i passaggi successivi, al passo n avremo 2^n segmenti ognuno dei quali pesa $3^{-n\delta}$, per un contributo complessivo di $\left(\frac{2}{3^\delta}\right)^n$. Tale quantità tende a 0 se $2 < 3^\delta$, cioè $\delta > log_3 2$, tende a $+\infty$ se $0 < \delta < log_3 2$. Ne segue che la dimensione dell'insieme di Cantor non è intera, ma è eguale a $log_3 2$, numero compreso tra 0 e 1.

Possiamo in generale considerare tutta una classe di insiemi del tipo Cantor al seguente modo: si consideri l'intervallo [0,1] e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\sigma < 1$, si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^2, e poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^3 e si proceda allo stesso modo indefinitamente. L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con E, è data da

$$\sigma + 2\sigma^2 + \ldots + 2^n\sigma^{n+1} + \ldots = \frac{\sigma}{1-2\sigma}.$$

Se $\sigma > 1/3$ è evidente che [0,1]-E si riduce all'insieme vuoto, ma se $0 < \sigma < 1/3$, allora $\frac{\sigma}{1-2\sigma} < 1$, quindi il complemento C_σ = [0,1]-E è un insieme chiuso, tale che nessun intervallo possa esservi incluso, la cui misura vale $1-\frac{\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$, che è un numero positivo.

Questi insiemi hanno ovviamente potenza del continuo, in quanto hanno più punti dell'insieme di Cantor C e ovviamente meno punti dell'intervallo [0,1].

Consideriamo in particolare il caso σ = 1/4. Chiamiamo isole gli intervalli che via via si considerano e che qui abbiamo sottratto all'intervallo [0,1] e arcipelago la loro unione *E*. In tal caso l'arcipelago ha misura $\frac{1}{2}$ e quindi il nostro insieme C_σ ha misura $\frac{1}{2}$. Esso coincide con la completa frontiera dell'insieme *E*; ne deduciamo che l'arcipelago *E* ha frontiera di misura positiva secondo Lebesgue e quindi, nonostante il nome suggestivo, non è misurabile secondo Peano-Jordan al pari di C_σ. Questo rende l'insieme controintuitivo: infatti l'intuizione ci porterebbe a credere che la misura di *E* anche in tal caso, come nel caso del complemento dell'insieme di Cantor (ottenuto per $\sigma = 1/3$) sia eguale a 1 e quindi la misura di C_σ sia 0.

Con l'insieme di Cantor, a mio parere, arriviamo al limite estremo cui può spingersi la nostra intuizione geometrica nell'immaginare un insieme. È naturale pensare che la frontiera di un insieme ben fatto, un insieme che possiamo disegnare, abbia misura nulla. La frontiera di misura positiva ci fa pensare che essa presenti delle nebulosità e delle sfumature che mal si adattano alla nostra quotidiana esperienza degli oggetti e delle figure della geometria tradizionale, che, fatte alcune particolarissime eccezioni, hanno tutte un ben preciso contorno (nei problemi tradizionali ci sono magari piramidi e cerchi, ma sono esclusi gas in estensione, spugne, nuvole etc ...). È allora il passaggio dalla classe degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan alla classe dei misurabili secondo Lebesgue il passo che ci porta dal mondo dell'intuizione geometrica ad un rigoroso universo dove tutte le proprietà della teoria della misura e dell'integrazione trovano la loro giusta collocazione, e che necessita di un più raffinato tipo di intuizione matematica per essere indagato.

Sul ruolo positivo che gioca l'intuizione in matematica si sofferma Salomon Feferman nel suo saggio *Mathematical intuition vs. Mathematical monsters*, dove il mostro rappresenta la possibilità di percorsi alternativi. Paladino dell'inaffidabilità dell'intuizione è invece Hans Hahn, che in (Hahn, 1933) osserva che l'asserzione di Kant secondo la quale lo spazio è una delle forme dell'intuizione pura mentre poteva avere una sua motivazione nel Settecento, periodo dominato dalla fisica newtoniana e da una matematica di carattere geometrico, alla luce dei recenti studi di fisica, con l'apparizione della teoria della relatività di Einstein, e della matematica astratta, dove sono state introdotte entità che non trovano alcuna giustificazione a livello intuitivo, si è dimostrata del tutto inattendibile.

Fatto interessante: gli insiemi generalizzati di Cantor considerati in precedenza per valori positivi di $\sigma < 1/3$ hanno tutti dimensione 1. Infatti si vede subito che gli spazi fra due isole consecutive allo stesso passo della costruzione sono eguali e dopo il primo passo ci sono due spazi a lato dell'isola centrale di ampiezza $b_1 = \frac{1}{2}(1-\sigma)$, dopo il secondo passo ci sono 4 spazi eguali di ampiezza $b_2 = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2)]$, dopo il terzo passo ci sono 8 spazi eguali di ampiezza $b_3 = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2]-\sigma^3\}$, dopo il quarto passo ci sono 16 spazi eguali di ampiezza

$$b_4 = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-4\sigma^3-8\sigma^4}{2^4}$$

e in generale dopo n passi ci sono 2^n spazi eguali di ampiezza ciascuno:

$$b_n = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-\dots-2^{n-1}\sigma^n}{2^n} = \frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)}.$$

Poiché l'unione di tali spazi ricopre C_σ la somma da considerare al fine del calcolo della sua dimensione è:

$$2^n\left(\frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)}\right)^\delta . \qquad (**)$$

Se $0 < \sigma < 1/3$ tale quantità tende a $+\infty$ se $\delta < 1$ e tende a zero se $\delta > 1$. Ne segue che in tali casi la dimensione frattale di C_σ è 1. Si noti che da (**) nel caso $\sigma = 1/3$ riotteniamo il valore $\log_3 2$ per la dimensione che presenta quindi una discontinuità quando σ passa dai valori compresi tra 0 e 1/3, in corrispondenza dei quali essa vale 1, al valore 1/3 in corrispondenza del quale essa assume il valore $\log_3 2$: ciò appare coerente con il fatto che se $0 < \sigma < 1/3$ la misura di C_σ è positiva, mentre è nulla per $\sigma = 1/3$ (ma la misura varia con continuità). Si osservi ancora che per $\delta = 1$ il limite di (**) fornisce la misura di C_σ, eguale a $\frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$, valore già determinato per altra via in precedenza.

Possiamo considerare un insieme piano, costruito nello stesso ordine di idee dell'insieme di Cantor al seguente modo: dato il quadrato Q = [0,1]x[0, 1], si divida Q in nove quadrati mediante i segmenti di equazione $x = \frac{i}{3}$ i = 1,2 e $y = \frac{i}{3}$ i = 1, 2. Si elimini il quadrato centrale. Si divida ognuno degli 8 quadrati rimasti in 9 quadrati eguali di lato 1/9 con lo stesso procedimento e si elimini poi il quadrato centrale. Si iteri indefinitamente il procedimento. L'insieme di Cantor del piano C_2 è ciò che si ottiene eliminando successivamente tutti i quadrati così ottenuti. Si verifica subito che la misura di C_2 è zero.

Per il calcolo della dimensione, poiché l'insieme è dato nel piano, ora lo ricopriremo con quadrati (o con cerchi) in modo opportuno: osserviamo che C_2 può essere ricoperto da 8 quadrati di lato 1/3, 64 quadrati di lato 1/9, in generale 8^n quadrati di lato $1/3^n$ che, al fine del calcolo della dimensione frattale, danno un contributo pari a $\frac{8^n}{3^{n\delta}}$, valore che tende a 0 se $8 < 3^\delta$ cioè se $\delta > log_3 8$ e tende a $+\infty$ se $\delta < log_3 8$, da cui si trae che la dimensione frattale di C_2 è $log_3 8$. Si può ripetere il ragionamento precedente in dimensione 3 e si ottiene una polvere C_3 simile alla spugna di Menger, dal nome del matematico austriaco Karl Menger (1902-1985) che per primo la definì. La spugna qui definita ha misura tridimensionale nulla e dimensione frattale $log_3 26$. Quindi:

$$dimC < 1 < dimC_2 < 2 < dimC_3 < 3.$$

Bibliografia

Archimede. *Opere.* A cura di A. Frajese, Classici U.T.E.T, 1974.

Cantor G. (1884). De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, *Vol.* 4, 381-396.

Clagett M. (1968). *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on uniformity and difformity of* *intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatuum et motuum*. Madison, The University of Wisconsin Press.

Delvin K. (1999). *Dove va la matematica*, Bollati Boringhieri.

Hahn H. (1933). The crisis in intuition, *The Word of Mathematics by James R. Newman, New York*, 1956-1976.

Hausdorff F. (1919). Dimension und äusseres Mass, *Mathematische Annalen*, LXXIX, 157-79.

Mandelbrot B.B. (1987). *Gli oggetti frattali*, Biblioteca Einaudi (Prima edizione 1975).

****

La bellezza in matematica

I modelli di un matematico, come quelli di un pittore o di un poeta, devono essere "belli": le idee, come i colori o le parole, devono legarsi in modo armonioso. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto per la atematica brutta. (Godfrey Harold Hardy, *Apologia di un matematico*, Bari: De Donato, 1969, p. 60)

... e nella fisica teorica

Il ricercatore, nel suo sforzo di esprimere matematicamente le leggi fondamentali della Natura, deve mirare soprattutto alla bellezza matematica. Deve prendere ancora in considerazione la semplicità, ma subordinandola alla bellezza (Einstein, per esempio, nello scegliere una legge di gravità, prese quella più semplice compatibile con il suo "continuum" spazio-temporale, ed ebbe successo). Accade spesso che i requisiti di semplicità e bellezza coincidano, ma laddove entrino in conflitto, il secondo deve avere la precedenza. (Paul A. M. Dirac, *La bellezza come metodo*, Milano: Raffaello Cortina, 2019, p. 63).

Per Dirac valeva il motto rinascimentale «pulchritudo splendor veritatis», ovvero per lo scopritore dell'antimateria laddove c'è bellezza c'è verità.[…] I formalismi matematici, per Dirac, sono tanto più eleganti quanto più "invarianti" offrono, intendendosi per "invarianti" tutte quelle entità o quantità che non cambiano quando si effettuano trasformazioni geometriche (come per es. una rotazione) o quando si cambia sistema di riferimento. E quanti più invarianti ci sono in una equazione, tanto maggiori sono la bellezza della teoria fisica su di essa basata e la possibilità della sua esattezza. Ma perché la bellezza, e quindi l'invarianza, risulta essere garante della verità di una teoria fisica? La risposta è concettualmente semplice: l'invarianza rispetto a una trasformazione (geometrica o di sistema di riferimento) è la prova più convincente dell'esistenza di un oggetto. (Luca Nicotra, "L'ideale estetico nell'opera dello scienziato", in *Nello specchio dell'altro, riflessi della bellezza fra arte e scienza,* a cura di L. Nicotra e R. Salina Borello, UniversItalia, 2011, pp. 42-43).