Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, pp. 79-98

La Geometria delle Cupole Geodetiche

Giuseppe Conti* Raffaella Paoletti**
Alberto Trotta***

* Giuseppe Conti, Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia. giuseppe.conti@unifi.it

** Raffaella Paoletti, Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia. raffaella.paoletti@unifi.it

*** Alberto Trotta, IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno, Italia. albertotrotta@virgilio.it

CC BY NC ND

DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.053

Sunto: *Una cupola geodetica è un poliedro convesso, di solito con facce triangolari, i cui lati giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera circoscritta al poliedro. La prima cupola geodetica fu costruita da Walther Bauersfeld nel 1922 a Jena in Germania. Tuttavia, fu l'architetto Richard Buckminster Fuller che, a partire dal 1948, dette un notevole impulso a questa tipologia di costruzioni; a lui si devono le cupole geodetiche più note, come, ad esempio, la famosa cupola realizzata per l'Expo di Montreal del 1967. In questa nota studieremo le cupole geodetiche dal punto di vista geometrico, mostrando alcuni esempi di queste realizzazioni architettoniche. È interessante notare che le molecole di alcuni virus hanno la forma di cupole geodetiche.*

Parole Chiave: *Poliedro, poliedro convesso, poliedro regolare, formula di Eulero per i poliedri.*

Abstract: *A geodesic dome is a convex polyhedron, usually with triangular faces, such that their sides lie approximately on maximum circles of the sphere* *circumscribed by the polyhedron. Walther Bauersfeld built the first geodesic dome in 1922 in Jena in Germany, but the architect Richard Buckminster Fuller, starting from 1948, gave a significant boost to this type of construction; to him we owe the best known geodesic domes, such as, for example, the famous dome built for the 1967 Montreal Expo. In this article we will study geodesic domes from a geometric point of view, showing some examples of these architectural achievements. Interestingly, the molecules of some viruses have the shape of geodesic domes.*

Keywords: *Polyhedron, convex polyhedron, regular polyhedron, Euler's formula for polyhedra.*

1 - Generalità

Una cupola geodetica è un poliedro a facce triangolari, detto anche poliedro geodetico, inscritto in una sfera i cui lati giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera e i cui vertici hanno grado[1] 5 oppure 6. Talvolta si chiama cupola geodetica anche una parte di questo poliedro, come, ad esempio, quello che corrisponde a una semisfera o, più in generale, a una calotta sferica. Poiché una cupola geodetica approssima una sfera, talvolta essa viene chiamata anche sfera geodetica.

La scelta delle facce triangolari è una conseguenza di un importante teorema dovuto a Augustin-Louis Cauchy, che pubblicò la relativa dimostrazione nel 1813. Tale risultato afferma che un poliedro convesso è indeformabile (come struttura spaziale) se le sue facce, che sono figure piane, sono rigide; sappiamo che le facce triangolari, formate dalle travi

[1] Si chiama grado di un vertice il numero degli spigoli del poliedro che hanno quel vertice come estremo.

di una cupola geodetica, sono poligoni indeformabili, anche se sono semplicemente incernierate ai loro estremi; non lo sarebbero, invece, nel caso in cui le travi incernierate formassero facce poligonali con più di tre lati. Si possono costruire anche cupole geodetiche con facce non triangolari; tuttavia, in tal caso, le facce devono essere rigide e tale fatto può complicare la costruzione di queste cupole.

Usando il teorema delle tre perpendicolari si dimostra che il segmento, avente per estremi il circocentro di una generica faccia triangolare T di una di una cupola geodetica e il centro della sfera circoscritta ad essa, è perpendicolare alla faccia T.

Notiamo che gli spigoli delle cupole geodetiche hanno l'importante proprietà di distribuire gli sforzi locali sull'intera struttura. Inoltre, la cupola geodetica è una costruzione la cui resistenza aumenta in maniera proporzionale alle sue dimensioni.

Il procedimento più diffuso per costruire le cupole geodetiche inizia dall'icosaedro regolare: si suddividono le sue facce triangolari regolari in triangoli equilateri più piccoli tramite opportune regole che presenteremo in seguito; si proiettano, successivamente, i vertici di questi triangoli dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro sulla sfera stessa. In ogni vertice del poliedro così ottenuto concorrono 5 o 6 spigoli, perciò sono di grado 5 o 6 rispettivamente.

Da questo consegue che i poliedri duali delle cupole geodetiche (a facce triangolari) sono poliedri con facce esagonali oppure pentagonali, dunque sono poliedri di Goldberg[2]. Alcuni autori chiamano fullereni i poliedri di

---

[2] Un poliedro di Goldberg è un poliedro convesso formato da esagoni e pentagoni. Furono introdotti nel 1937 da Michael Goldberg. Essi sono

Goldberg. Notiamo che, per la proprietà della dualità, i duali dei poliedri di Goldberg sono i poliedri geodetici.

Detto parole semplici, il duale di un poliedro P è il poliedro Q ottenuto da P scambiando i ruoli dei vertici e delle facce. Tuttavia, nel caso di un poliedro P con certe regolarità, se vogliamo che il suo duale Q mantenga qualche regolarità, possiamo dare delle definizioni un po' diverse.

Nel caso che P sia un poliedro regolare, il suo duale Q è il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di P e gli spigoli sono i segmenti che hanno per estremi i centri di due facce adiacenti del poliedro P. La stessa definizione vale per poliedri le cui facce sono poligoni regolari, ma che non sono necessariamente poliedri regolari; questi solidi sono anche chiamati poliedri di Johnson (Johnson, 1966).

Se il poliedro P è circoscrittibile a una sfera, come nel caso dei poliedri di Catalan[3], il poliedro duale Q di P ha per vertici i punti di tangenza della sfera con le facce di P e per spigoli di Q sono i segmenti che hanno per estremi i punti di contatto con la sfera di due facce adiacenti di P.

Nel caso in cui il poliedro P sia inscrittibile in una sfera, ad esempio nei poliedri archimedei[4] (Brusotti, 1955, pp. 316-318),

---

definiti da tre proprietà: ogni faccia è un pentagono o un esagono, in ogni vertice si incontrano esattamente tre facce, hanno le stesse simmetrie rotazionali dell'icosaedro, che sono: l'applicazione identica, 12 rotazioni di 72°, 12 rotazioni di 144°, 20 rotazioni di 120°, 15 rotazioni di 180°.

[3] Dal nome del matematico belga Eugène Charles Catalan (1814-1894) che li descrisse nel 1865.

[4] Notiamo che i poliedri di Catalan sono i duali dei poliedri archimedei; tuttavia, mentre le facce dei poliedri archimedei sono poligoni regolari, le facce dei poliedri di Catalan non sono poligoni regolari.

il poliedro *Q* duale di *P* ha le facce tangenti alla sfera nei vertici del poliedro *P*.

Si dimostra facilmente, usando la relazione di Eulero sui poliedri convessi, che il numero delle facce pentagonali di un poliedro di Goldberg è sempre 12, mentre il numero F_6 delle facce esagonali è dato dalla seguente formula: $F_6 = \frac{V}{2} - 10$, dove V è il numero dei vertici (Conti e altri, 2018, p. 90).
Da questo segue che i vertici di gradi 5 di una cupola geodetica sono sempre 12, mentre il numero di quelli di grado 6 sono $V/2 - 10$.

Se $V = 20$, allora il poliedro di Goldberg non ha facce esagonali ma soltanto 12 facce pentagonali (si ottiene, in tal caso, il dodecaedro regolare).

Se il numero dei vertici è 60, allora si ottiene l'icosaedro troncato, detto anche buckminsterfullerene, oppure buckyball, che è la forma del poliedro che approssima il pallone da calcio (Conti e altri, 2018, p. 82).

Figura 1. Icosaedro troncato (pallone da calcio)

Notiamo che l'icosaedro troncato ha la stessa forma di una delle molecole C_{60} (la più stabile), nella quale i 60 atomi di carbonio si trovano nei vertici di questo poliedro; la suddetta molecola fu individuata nel 1985 dai chimici H. Kroto, R. Curl e R. Smalley; per questa scoperta essi ricevettero nel 1996 il Premio Nobel per la Chimica.

Dalle proprietà dei poliedri di Goldberg segue che i suoi spigoli sono tutti congruenti; inoltre, i dodici pentagoni sono tutti regolari, mentre gli esagoni sono equilateri, ma non equiangoli, a parte il caso dell'icosaedro troncato.

2 – Primi esempi di cupole geodetiche

La prima cupola geodetica fu costruita da Walther Bauersfeld nel 1922 a Jena in Germania, come superficie per il proiettore dello *Zeiss Planetarium*.

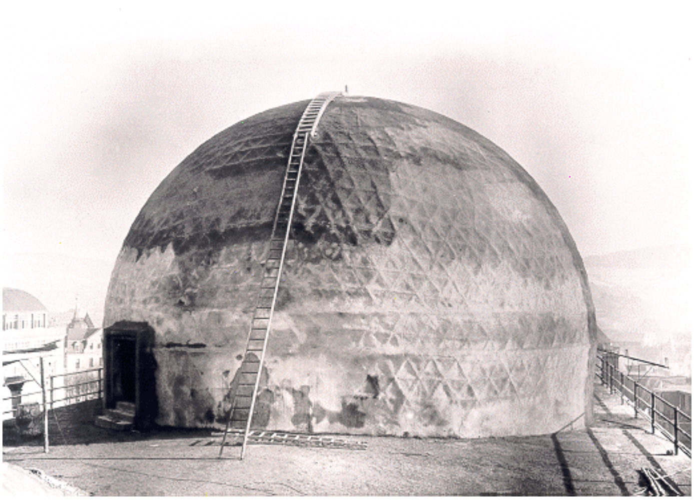

Figura 2. Cupola geodetica di Jena

Il termine buckminsterfullerene deriva dal nome di Richard Buckminster Fuller (1895 – 1983), l'architetto statunitense che per primo sviluppò in maniera sistematica l'idea di cupola geodetica a partire dal 1948 e che costruì i primi edifici con questa forma. Una delle cupole geodetiche più famose progettate da Fuller è quella realizzata per l'Expo di Montreal del 1967. Vedremo in seguito le caratteristiche geometriche di questa cupola.

Un'interessante cupola geodetica si ottiene a partire dal dodecaedro regolare, costruendo su ogni sua faccia una piramide retta a base pentagonale, in modo che i vertici di queste piramidi appartengano tutti alla sfera circoscritta al dodecaedro; tale poliedro fa parte della famiglia dei pentacisdodecaedri. Notiamo che le facce delle piramidi che formano questa cupola geodetica sono triangoli isosceli.

Un poliedro di questo tipo fu progettato da Michelangelo Buonarroti per il coronamento della lanterna della cupola della Sagrestia Nuova della chiesa di San Lorenzo a Firenze. Quasi sicuramente questa "palla", come la chiama Michelangelo, è inscrittibile in una sfera[5].

L'esecuzione di questa sfera geodetica, formata di due pezzi non saldati fra loro, fu opera dell'orafo e scultore fiorentino Giovanni di Baldassarre (1460 -1536), specializzato nelle opere di metallo e soprannominato il Piloto.

[5] Il Papa Leone X, il figlio di Lorenzo il Magnifico, aveva commissionato nel 1520 a Michelangelo i lavori della Sagrestia Nuova di San Lorenzo. In una lettera del 1525, indirizzata al Papa Clemente VII, il figlio di Giuliano de' Medici, ucciso durante la congiura dei Pazzi, Michelangelo scriveva: *Facciàn fare la palla, che viene alta circha un braccio: e io ò pensato, per variarla dall'altre, di farla a faccie, che credo che arà gratia; e chosì si fa.*

Un pentacisdodecaedro fu disegnato da Leonardo da Vinci nel libro di Luca Pacioli *Divina Proportione*[6]; tuttavia il poliedro di Leonardo non è inscrittibile in una sfera, poiché le facce delle piramidi regolari, aventi per base le facce del dodecaedro, sono dei triangoli equilateri; di conseguenza esso è un po' diverso da quello di Michelangelo.

Figura 3. Il poliedro posto a coronamento della lanterna della Sagrestia Nuova di San Lorenzo a Firenze

Naturalmente le facce di un pentacisdodecaedro sono 60; per motivi che ci sfuggono, Giorgio Vasari afferma che esse sono 72 (Vasari, 1991, p. 1223)!

[6] Il *De divina proportione*, stampato a Venezia nel 1509, è diviso in tre parti; la terza parte è ripresa quasi integralmente dal libro di **Piero della Francesca**: *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1482-1492).

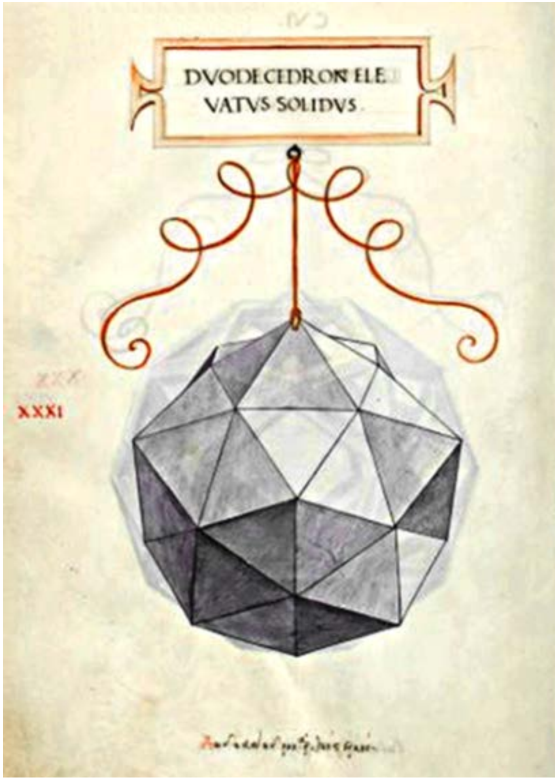

Figura 4. Il poliedro di Leonardo

Esiste anche il pentacisdodecaedro circoscrittibile ad una sfera, il cui duale è proprio l'icosaedro troncato, che è un solido archimedeo; perciò si tratta di un poliedro di Catalan.

Si dimostra che il rapporto fra il lato obliquo e la base dei triangoli isosceli (tutti uguali fra loro) che formano il pentacisdodecaedro di Catalan è circa 0,887057998; il loro angolo al vertice è circa 68° 37' 07".

Nel caso del pentacisdodecaedro inscritto in una sfera, si ha che il rapporto fra il lato obliquo e la base dei triangoli isosceli (facce del poliedro) è circa 0,897999085; il loro angolo al vertice è circa 67°40’ 07”.

Poiché le differenze fra i due pentacisdodecaedri (quello inscritto e quello circoscritto) sono minime, resta difficile sapere con certezza quale sia quello di Michelangelo. Noi pensiamo che, per questioni realizzative, l’artista abbia pensato a quello inscritto.

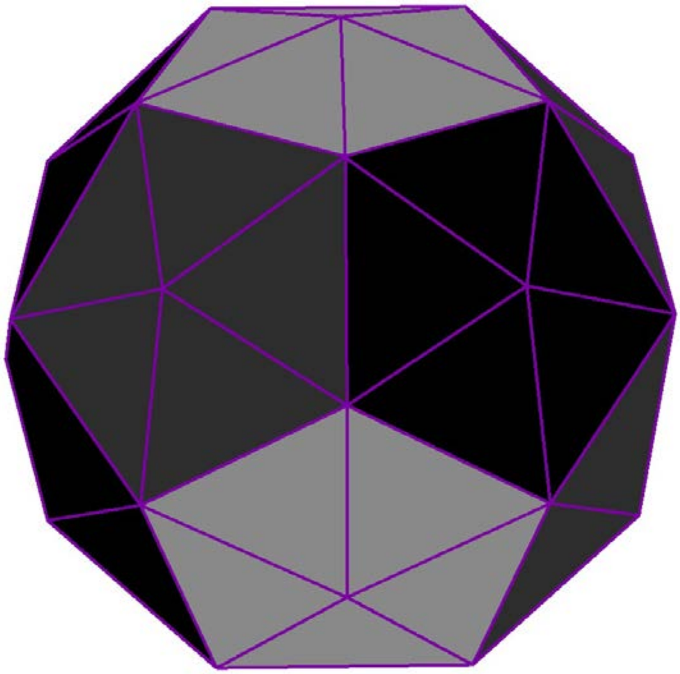

Figura 5. Pentacisdodecaedro

Analogamente a quanto fatto per la costruzione geometrica del pentacisdodecaedro inscritto nella sfera, con un procedimento simile si può costruire una cupola geodetica a facce triangolari anche a partire dall’icosaedro troncato.

Per fare questo, proiettiamo dal centro della sfera circoscritta al poliedro i centri dei suoi pentagoni ed esagoni regolari sulla sfera stessa; osserviamo che si tratta di una proiezione ortogonale dal centro della sfera su ciascuna faccia dell'icosaedro troncato. Questa costruzione geometrica (innalzamento dei centri dei poligoni dell'icosaedro troncato sulla sfera circoscritta) si chiama anche twinning e può essere estesa a un poliedro qualunque avente per facce dei poligoni regolari. Nel caso dell'icosaedro troncato tale procedimento dà luogo a 12 piramidi a base pentagonale e a 20 piramidi a base esagonale.

Notiamo che si può ottenere lo stesso poliedro geodetico per mezzo di un'altra costruzione geometrica, basata su una particolare tassellazione delle facce di un icosaedro.

(https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml).

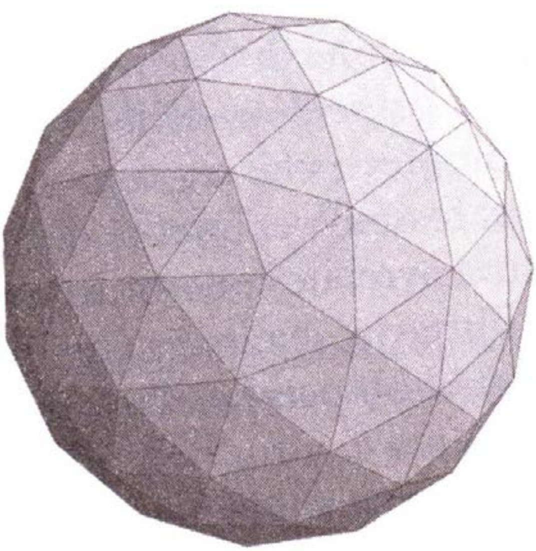

Figura 6. Cupola geodetica ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato

Otteniamo in tal modo una cupola geodetica con 180 facce, 92 vertici e 270 spigoli; è interessante notare che si tratta della forma del poliedro del virus della poliomielite. A questo proposito è da sottolineare che le strutture geodetiche si possono trovare anche nelle capsule proteiche che contengono l'acido nucleico dei virus.

Osserviamo che alcuni studiosi chiamano cupole geodetiche anche i poliedri di Goldberg, i quali, come già osservato, si chiamano anche fullereni. Noi pensiamo che questo non sia corretto; infatti, gli unici fullereni inscrittibili in una sfera sono il dodecaedro e l'icosaedro troncato; inoltre, per quanto già rilevato, le cupole geodetiche traggono un notevole vantaggio, sia statico che costruttivo, proprio dal fatto che le loro facce sono triangolari.

3 – Costruzioni geometriche di sfere geodetiche

Uno dei metodi più diffusi per costruire le cupole geodetiche in modo che queste abbiano la maggiore regolarità possibile, consiste nel considerare un icosaedro e suddividere i lati delle sue facce in m segmenti congruenti, con m numero naturale. Unendo i punti così ottenuti con segmenti paralleli ai lati di ciascuna faccia, si ottiene per ognuna di queste una tassellazione formata da m^2 triangoli equilateri congruenti fra loro, come si può vedere dalle figure seguenti.

Notiamo che nel caso $m = 1$ non si ha alcuna tassellazione delle facce dell'icosaedro.

Si usa anche la seguente notazione: se ciascun lato dell'icosaedro è suddiviso in m segmenti, si dice che la suddivisione ha frequenza *m*v, oppure è di tipo *m*v. Questo modo di dividere le facce dell'icosaedro in triangoli equilateri si chiama anche ripartizione alternata.

Notiamo che esistono altri modi per costruire una cupola geodetica a partire da un icosaedro, il quale è quasi sempre il poliedro di partenza; tali metodi saranno presentati in una prossima pubblicazione.

Proiettiamo dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro

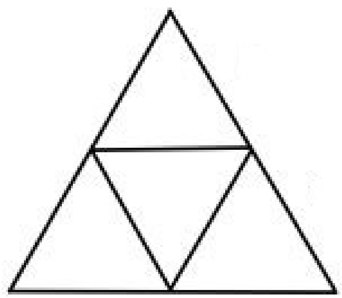

Figura 7. Frequenza 2v

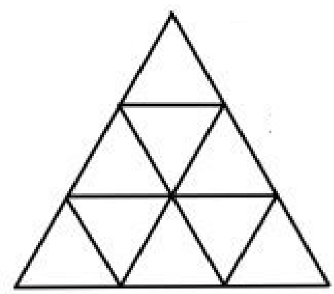

Figura 8. Frequenza 3v

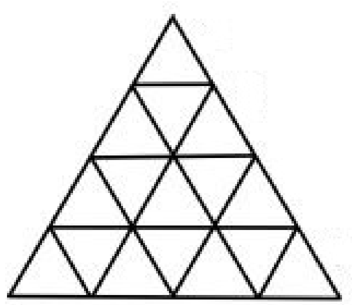

Figura 9. Frequenza 4v

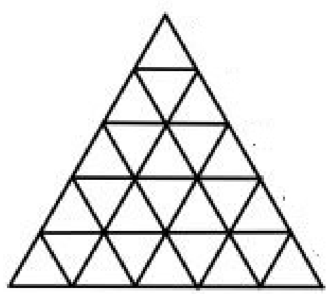

Figura 10. Frequenza 5v

i vertici dei triangoli, determinati da questa tassellazione, sulla sfera stessa, eccetto, naturalmente, i vertici dell'icosaedro che appartengono già alla sfera circoscritta; otteniamo in tal modo una sfera geodetica a facce triangolari.

La sfera geodetica 2v ha 80 facce, 42 vertici (12 di grado 5 e 30 di grado 6) e 120 spigoli.

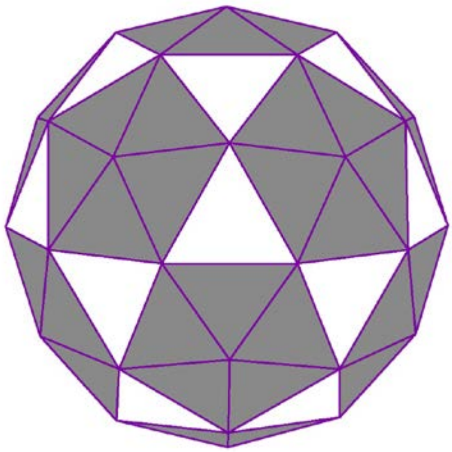

Figura 11. Sfera geodetica 2v

Notiamo che il poliedro di Goldberg, duale della sfera geodetica 2v, è il triacontaedro rombico troncato, che ha 80 vertici, 120 spigoli e 42 facce: 30 esagonali e 12 pentagonali.

Per la sua forma simile all'icosaedro troncato, questo poliedro è anche chiamato *super pallone da calcio* (per una lista di cupole geodetiche e dei loro duali, vedi: Wenninger, 1979).

Figura 12. Triacontaedro rombico troncato

Una costruzione analoga, cioè la suddivisione delle facce di un poliedro in triangoli e la successiva proiezione dei loro vertici sulla sfera, può essere fatta anche a partire da altri poliedri regolari. Tuttavia, gran parte delle cupole geodetiche si ottengono partendo dall'icosaedro, essendo questo il poliedro regolare che approssima una sfera meglio degli altri.

Abbiamo visto che, data una cupola geodetica di frequenza mv, il numero dei triangoli in cui si scompone ciascuna faccia dell'icosaedro, su cui essa si basa, è m^2; di conseguenza, il numero delle facce triangolari della cupola geodetica, ottenuta con questa costruzione, è $20m^2$.

È importante notare che, anche se la tassellazione delle facce dell'icosaedro è formata da triangoli equilateri, le facce della sfera geodetica ottenuta con questa costruzione non sono triangoli equilateri, eccetto alcuni, ma triangoli isosceli e non tutti uguali fra loro. Ad esempio, nella cupola geodetica 3v ci sono tre diverse lunghezze di spigoli; in quella 5v ci sono nove lunghezze differenti.

Osserviamo che la frequenza di una cupola geodetica si determina considerando due vertici "vicini" di grado 5 ", che corrispondono agli estremi di uno spigolo dell'icosaedro su cui è basata la sua costruzione; poi si contano i segmenti che uniscono tali centri, che corrispondono alla suddivisione dei lati delle facce dell'icosaedro di partenza.

Quindi, tenendo conto del fatto che il numero delle facce è $20m^2$, si ha immediatamente il numero delle facce della sfera geodetica del tipo che stiamo considerando.

Nei seguenti disegni sono presentate alcune "semisfere" geodetiche. In tal caso le facce triangolari sono $10m^2$.

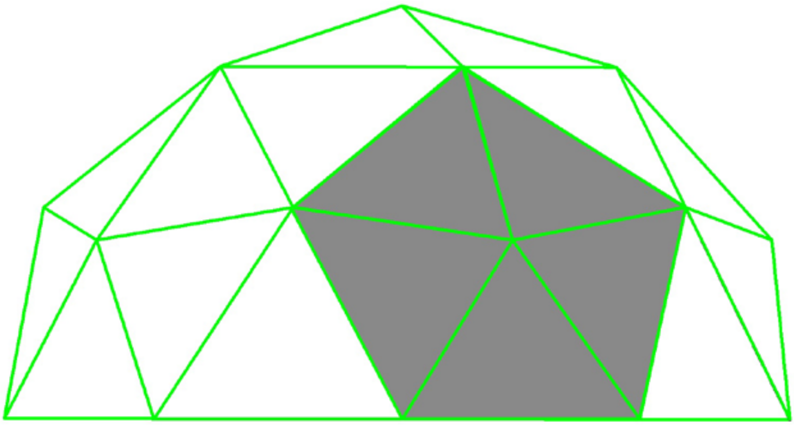

Figura 13. Semisfera geodetica 2v

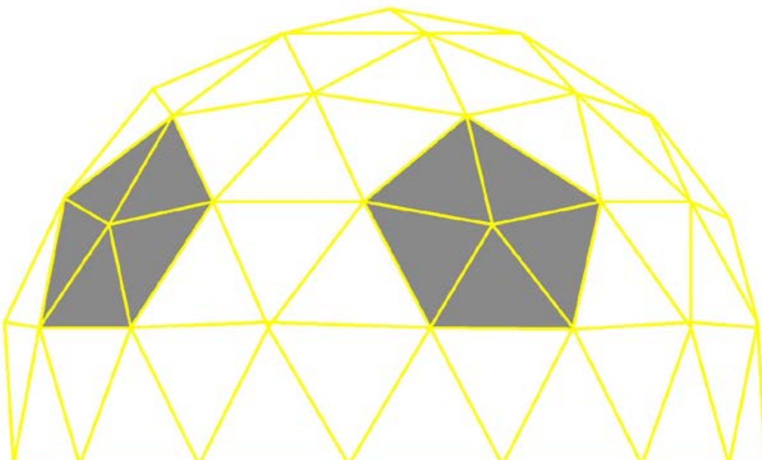

Figura 14. Semisfera geodetica 3v

Notiamo che la cupola geodetica 3v corrisponde a quella ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato (vedi la figura 6)

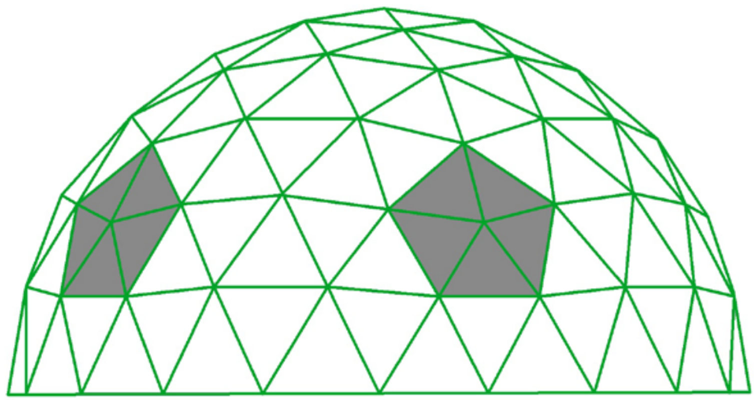

Figura 15. Semisfera geodetica 4v

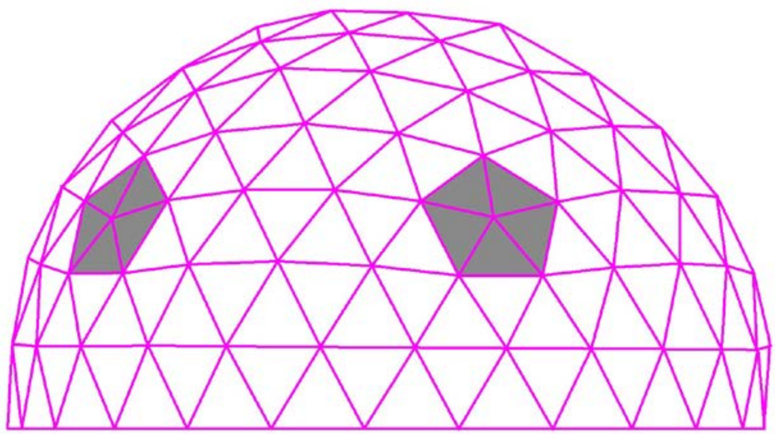

Figura 16. Semisfera geodetica 5v

Nel Parco de la Villette a Parigi si trova il **Géode**, una grande sfera geodetica d’acciaio di 36 metri di diametro, realizzata nel 1985 dall’architetto Adrien Fainsilbe. Al suo interno si trova una sala di 400 posti, dotata di uno schermo semisferico. La parte esterna della sfera ha un’altezza di circa

30 metri. Si tratta di una sfera geodetica di tipo 20v, perciò la parte esterna è formata da circa 6600 triangoli.

La Biosphère a Montreal (Canada) è la cupola geodetica[7] che Richard Buckminstrer Fuller ha progettato come Padiglione degli Stati Uniti per l'Esposizione Universale del 1967. Essa è di tipo 16v. È circa i 4/5 di una sfera di diametro 76,2 metri; perciò è alta circa 60,96 metri ed è formata da circa 4096 triangoli (vedi anche Barone e altri, 2017).

Figura 17. Semisfera geodetica di Fuller a Spoleto[8]

---

[7] Furono due ex studenti di Fuller, Jeffrey Lindsay e Don Richter, a progettare nel 1950 il prototipo della cupola che venne realizzata a Montreal, usando il metodo che hanno chiamato "della griglia regolare".

[8] Di Manuelarosi - Opera propria, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45968494

Buckminstrer Fuller nel 1967 ha donato alla città di Spoleto, in occasione del X Festival dei Due Mondi, una semisfera geodetica chiamata Spoletosfera.

Essa è formata da elementi metallici, misura 21 metri di diametro ed è di tipo 3v. Coprendo con un telo questa struttura, essa può essere utilizzata per organizzare conferenze, mostre, spettacoli.

4 – Conclusioni

Abbiamo mostrato l'importanza degli strumenti geometrici nella progettazione delle cupole geodetiche, che sono strutture molto importanti per i vantaggi che esse comportano, come, ad esempio, la sua resistenza che aumenta proporzionalmente alla dimensione della struttura, la rigidezza delle maglie triangolari, la distribuzione uniforme dei pesi e la sua reazione ai fenomeni sismici.

Abbiamo notato l'importanza della matematica quando, ad esempio, riusciamo a calcolare il numero totale delle facce triangolari misurando semplicemente il numero delle aste che si trovano fra due vertici di grado 5 vicini fra loro.

Il calcolo degli elementi geometrici che compongono una cupola geodetica (lunghezze delle aste, angoli delle facce, angoli diedri, etc.) una volta era lungo e difficile, anche tenendo conto del fatto che i lati delle facce triangolari non sono tutti uguali.

Con l'avvento dei computer questi calcoli sono diventati più semplici; inoltre, esistono diversi software realizzati per determinare le misure delle entità geometriche della struttura, i quali sono di grande aiuto nella progettazione delle cupole geodetiche.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la Dottoressa Margherita Lori per il lavoro svolto con dedizione e competenza nella realizzazione delle immagini presenti in questo articolo.

Bibliografia

Barone V., Bianucci P. (2017). *L'infinita curiosità: Breve viaggio nella fisica contemporanea,* Edizioni Dedalo, Bari.

Brusotti L. (1955). *Poligoni e poliedri.* Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II – Parte 1[a], Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.

Conti G., Trotta A., Conti F. (2018). *A Journey into the Polyhedrons World,* Science & Philosophy, Vol. 6, n. 1, pp. 67-92.

Johnson N. (1966). *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of Mathematics, 18, pp. 169–200.

Vasari G. (1991). *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architetti,* Newton Compton Editori, Roma.

Wenninger J. M. (1979). *Sferical models,* Cambridge University Press.