

Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica

D'Errico Marco* D'Errico Bruna**

*IC Nino Cortese (Casoria – Na); marco.derrico1@posta.istruzione.it

**Liceo Gobetti (Genova); bruna.derrico@gmail.com



DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.054

Sunto: “Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani” (Indicazioni nazionali – 2012). In questo articolo, cercando di mettere insieme il pensare ed il fare, vengono illustrate esperienze didattiche sul teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado. Queste seguono principalmente un approccio basato sui lavori di didattica della matematica di Emma Castelnuovo.

Parole Chiave: Teorema di Pitagora, didattica, Emma Castelnuovo.

Abstract: *“Mathematical knowledge contributes to cultural formation of people and communities, developing the ability to put in a close relationship “thinking” and “doing” and offering tools suitable for perceiving, interpreting and linking natural phenomena, concepts and daily events” (Indicazioni nazionali – 2012). In this article didactic experiences concerning the “Pythagoras’s theorem” in lower secondary school are illustrated. These one are based on the Emma Castelnuovo works.*

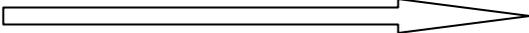
Keywords: *Pythagoras’s theorem, didactics, Emma Castelnuovo*

1 - Introduzione

L’articolo è frutto della presentazione tenuta durante il convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi? (Convegno Mathesis Napoli “A. Morelli” - AFSU Agerola, 8-10 settembre 2021).

In questo articolo vengono illustrate esperienze didattiche sul teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado. Queste seguono principalmente un approccio basato sui lavori di didattica della matematica di Emma Castelnuovo. Pertanto, si basano sul “fare matematica”: dapprima con materiali semplici e concreti, poi integrandoli gradualmente con gli strumenti offerti dalle tecnologie informatiche. In questo tipo di approccio anche gli alunni con disturbi specifici dell’apprendimento ed in generale gran parte degli alunni con bisogni educativi speciali riescono a sentirsi partecipi del proprio processo di apprendimento. Il teorema di Pitagora è il primo esempio di dimostrazione che gli alunni si trovano ad affrontare. Rappresenta quindi un punto fondamentale del percorso che insegnanti e studenti della scuola secondaria di I

TEMPO 

Argomenti...
Numeri irrazionali
Teorema di Pitagora
...
TEMPO 

2 - Chi era Pitagora? Cos'è un teorema?

Prima di iniziare dobbiamo chiarire cosa è un teorema e chi è Pitagora. Iniziamo con Pitagora. Chi era Pitagora di Samo (571/70-497/6 a.C.)? Di Samo? Che vuol dire? Beh, vuol dire che Pitagora è nato nella piccola isola di Samo, posta di fronte alle coste dell'Asia Minore (attuale Turchia).



La vedi Samo? E la vedi quella grossa freccia arancione che dall'Asia Minore conduce verso... Guarda bene! Già, conduce proprio verso il Sud Italia, dove allora sorgeva la Magna ("grande") Grecia.

Grandiosa, infatti, fu la storia delle colonie qui fondate dai greci.

Ne restano intatte gloriose testimonianze artistiche.

Ma, torniamo a Pitagora, il quale da Samo, si trasferì a Crotona (guarda la cartina).

Qui fonda una prestigiosa scuola filosofica... Filosofica? Sai cos'è la filosofia? Letteralmente significa "amore per il sapere", amore appassionato per il sapere.

E' proprio grazie a questo amore smodato che i filosofi possono insegnarci, ancora oggi, come si sta al mondo, rispondendo alle grandi domande della nostra esistenza (cosa è giusto e cosa è sbagliato, come si conosce, da dove veniamo, cosa è logico e cosa non lo è....)... domande che forse tu

ancora non ti poni... ma prima o poi, se rimani vivo, te le porrai eccome!

Pitagora fu un personaggio leggendario. Un mito vivente.

La sua dottrina gli sarebbe stata trasmessa dal suo dio protettore, Apollo, per bocca della sacerdotessa di Delfi, Temistoclea. Per questa ragione, Pitagora veniva considerato depositario di sapienza, cui i suoi discepoli dovevano rimanere fedeli.

La scuola pitagorica aveva delle particolari caratteristiche. Possiamo, infatti, paragonarla ad una setta. Sai cos'è una setta? Un gruppo di persone che seguono strane regole e che considerano quelle regole sacre.

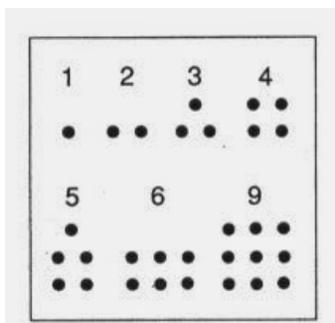
I pitagorici, ad esempio, non mangiavano carne (la commedia greca ce li rappresenta ironicamente come dei morti di fame). La scuola era basata su insegnamenti molto rigorosi che esigevano un lungo periodo di tirocinio da parte degli scolari prima di accedere ai segreti più profondi della setta (da qui la distinzione tra acusmatici e matematici). L'insegnamento di Pitagora era circondato da grande rispetto. Nella sua scuola gli acusmatici per cinque anni rispettavano il silenzio sacro (tu ci riusciresti? A stare zitto per cinque anni?).

Fatto notevole: nella scuola erano ammesse le donne.

Ad un certo punto, però, a Crotone ci fu una rivolta democratica e i pitagorici, considerati una setta di tendenze aristocratiche, furono costretti a fuggire. Pitagora stesso si diresse a Metaponto, dove si narra che si lasciò morire di digiuno nel tempio delle Muse.

Quali sono le dottrine più importanti della scuola pitagorica?

Essenzialmente, due: la dottrina dell'anima e la dottrina del numero. Tutta la realtà può essere interpretata attraverso i numeri che vengono rappresentati con dei sassolini.



Per Pitagora i numeri hanno anche un valore simbolico (ad esempio: 5= matrimonio, 4 e 9= giustizia). La potenza della mente umana è enorme, calcolando e ragionando sui numeri si possono acquisire conoscenze immense, non posso andare sul sole ma posso misurarne la distanza dalla terra. Questo sapere supremo possono raggiungerlo solo i migliori. Infine, i pitagorici non mangiavano carne perché credevano nella metempsicosi (significa reincarnazione). L'anima, dopo la morte, si reincarna in altri corpi (anche animali) per espiare le sue colpe.

Passiamo a capire cos'è un teorema. Un teorema in matematica è una proposizione (un'affermazione) dimostrata logicamente a partire da postulati o assiomi o da altre proposizioni derivate (da fatti che sono stati già verificati). In realtà devi sapere che quello che tutti ormai chiamano Teorema di Pitagora, era conosciuto già molto tempo prima che nascesse Pitagora. Già gli egiziani mille anni prima della nascita del filosofo-matematico lo conoscevano e lo

applicavano. Pitagora semplicemente lo enunciò. E da quel momento tutti hanno iniziato a chiamarlo “teorema di Pitagora”.

3. Il teorema di Pitagora ed esempi di dimostrazioni utilizzabili nella scuola secondaria di I grado

Partiamo proprio dagli egiziani.

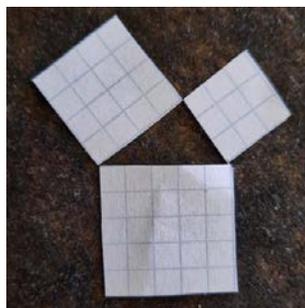
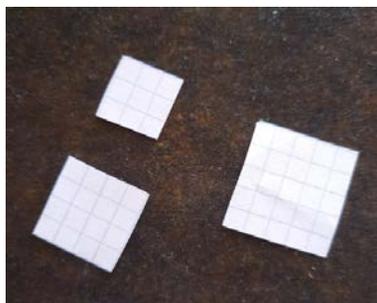
Immagina che tu debba costruire la base di una piramide come quelle che costruivano gli egiziani. Certo se non sei mai stato in Egitto non riesci a renderti conto di quanto possa essere grande la base di una piramide. La Piramide di Cheope ad esempio ha un'area di base pari a 53077 m^2 . Il lato quindi è di $230,36 \text{ m}$.

Le prime file di mattoni da posizionare dovevano rappresentare un quadrato di queste dimensioni. Ma hai imparato che il quadrato non ha solo i quattro lati uguali ma anche gli angoli. Pertanto bisognava costruire quattro angoli di 90° con lati di 230 metri circa.

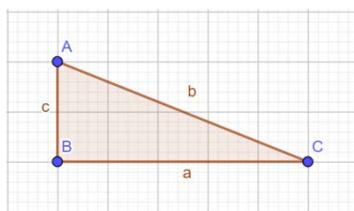
Gli egiziani prendevano una fune di una certa lunghezza, chiusa come fosse una collana e divisa in dodici parti uguali segnate da nodi. Poi fissavano a terra la fune usando tre pali, che ponevano in corrispondenza di tre nodi per comporre un triangolo con i lati composti rispettivamente di 3 , 4 e 5 parti. Sapevano, infatti, che un triangolo con i lati di 3 , 4 e 5 è un triangolo con un angolo retto.

Quindi non con tutte le terne di numeri naturali è possibile costruire un triangolo rettangolo.

Proviamo insieme. Disegna tre quadrati: uno di lato 3 quadratini, uno di lato 4 quadratini ed uno di lato 5 quadratini. Ritagliali. Con i tre quadrati, puoi costruire un triangolo rettangolo!



In questo tipo di triangolo inoltre si è soliti chiamare ipotenusa il lato più lungo opposto all'angolo retto e cateti gli altri due lati.

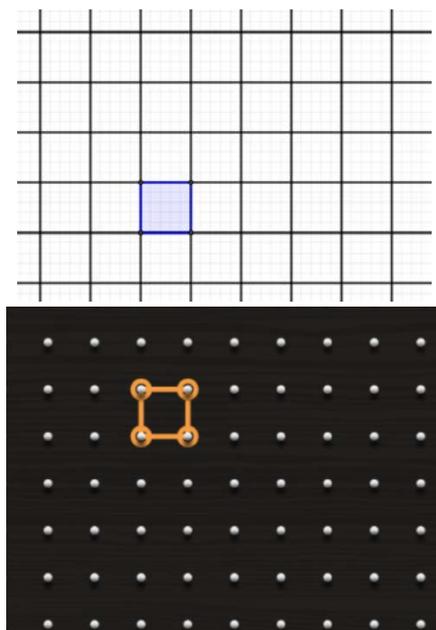


AB e BC si chiamano cateti; AC si chiama ipotenusa.

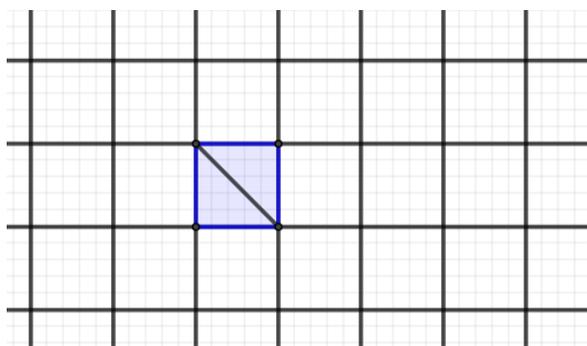
Si narra, ma pare sia leggenda, che Pitagora iniziò a riflettere su questo teorema partendo da osservazioni su un pavimento con mattonelle quadrate.

Prendi un geopiano ed iniziamo la riflessione.

Con lo spago disegna un quadrato unitario:

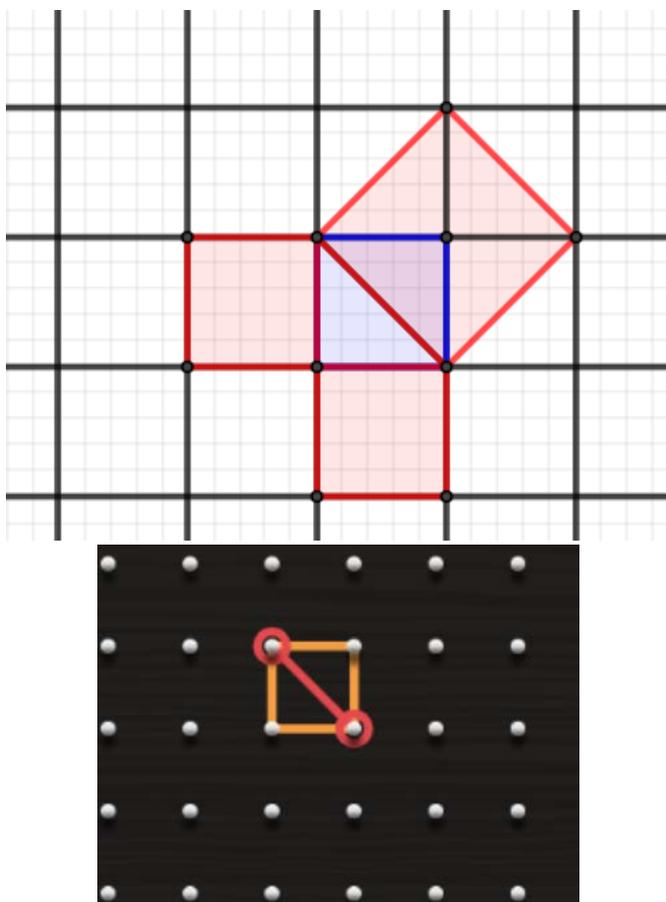


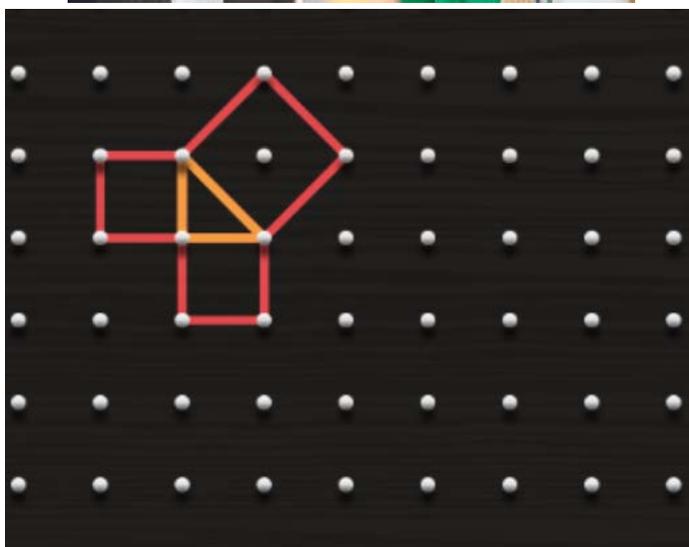
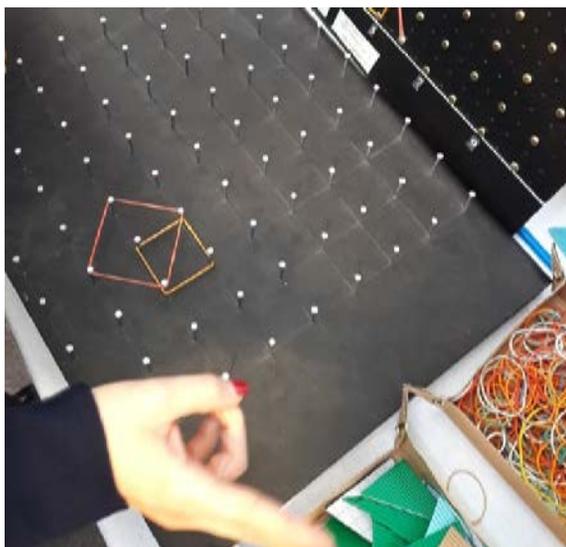
Pitagora ragionò sul fatto che si poteva:
-dividere il quadrato (la mattonella) in due triangoli rettangoli attraverso la diagonale del quadrato



-costruire un quadrato sulla diagonale (ipotenusa del triangolo rettangolo) che abbia l'area uguale alla somma delle

aree dei due quadrati (mattonelle) costruiti sui due cateti (quadrati rossi):





Questo è un caso particolare e Pitagora se ne rendeva conto bene: il triangolo è rettangolo ma anche isoscele. Bisognava appurare che per tutti i triangoli rettangoli valesse questa affermazione (un teorema fa questo: ti dimostra che una certa proprietà, affermazione vale per una data categoria di numeri,

figure etc. senza che ogni volta tu debba occuparti di controllare se sia vero o no). In pratica Pitagora si occupò di dimostrare non soltanto per se stesso ma per tutti noi che ogni volta che ci troviamo di fronte ad un triangolo rettangolo vale l'affermazione: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri due cateti (vedremo anche che il teorema si può enunciare in diversi modi).

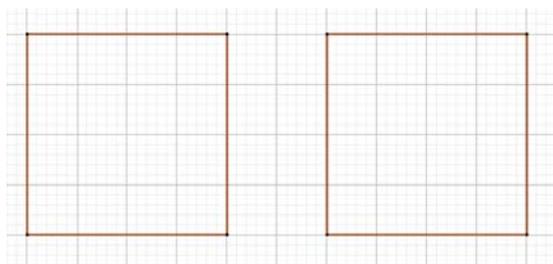
Quando prima abbiamo detto che gli egiziani erano avanti su questa questione era perché avevano notato che i numeri 3, 4 e 5 con cui costruivano i triangoli rettangoli godevano della seguente proprietà:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

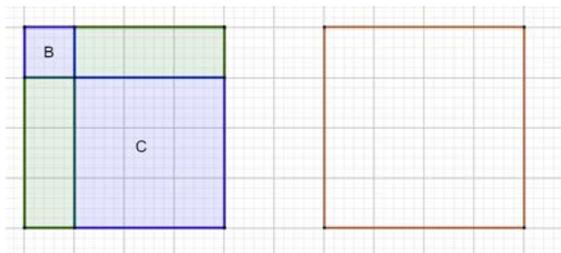
Ma tu adesso sai benissimo che un numero al quadrato rappresenta l'area di un quadrato (ricordi i numeri quadrati e la loro configurazione?).

In realtà anche i cinesi e gli indiani usavano terne di questo tipo per costruire triangoli rettangoli (oggi queste terne le chiamiamo terne pitagoriche).

Per cui quello che aveva notato Pitagora andava dimostrato per tutti i triangoli rettangoli. Oggi esistono diverse dimostrazioni del teorema. Noi ne faremo una pratica. Prendi dei cartoncini colorati. Partiamo col costruire due quadrati col cartoncino:

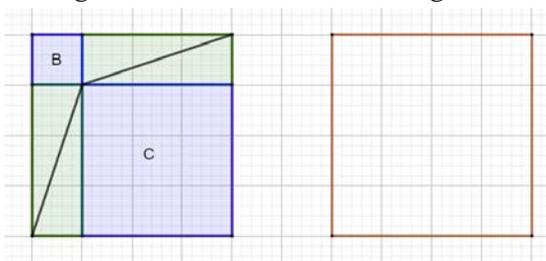


Dividiamolo in due rettangoli uguali e due quadrati B e C. Da un altro cartoncino ritaglia questi rettangoli ed i due quadrati e poggiali sul primo quadrato che hai ritagliato:

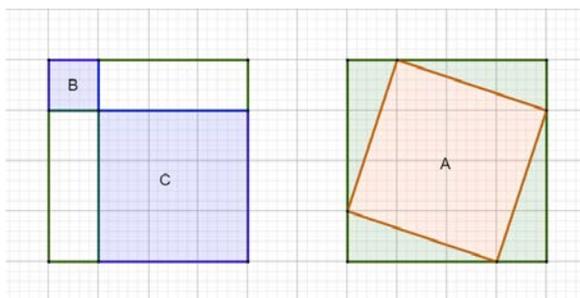


Chiaramente l'area dei due quadrati B e C e dei due rettangoli equivale all'area del quadrato grande.

Adesso con del cartoncino taglia in due i due rettangoli verdi lungo la diagonale come indicato in figura:



Adesso toglì i quattro triangoli dal primo quadrato e portali sul secondo. Cosa resta nel primo quadrato? Resta $B+C$.



Adesso se togli i quattro triangoli dal secondo quadrato grande resta il quadrato A.

Quindi al primo quadrato grande togliendo i quattro triangoli resta B+C. Al secondo quadrato grande se togli i quattro triangoli rettangoli resta solo il quadrato A.

Quindi l'area di A è uguale all'area di B più l'area di C:

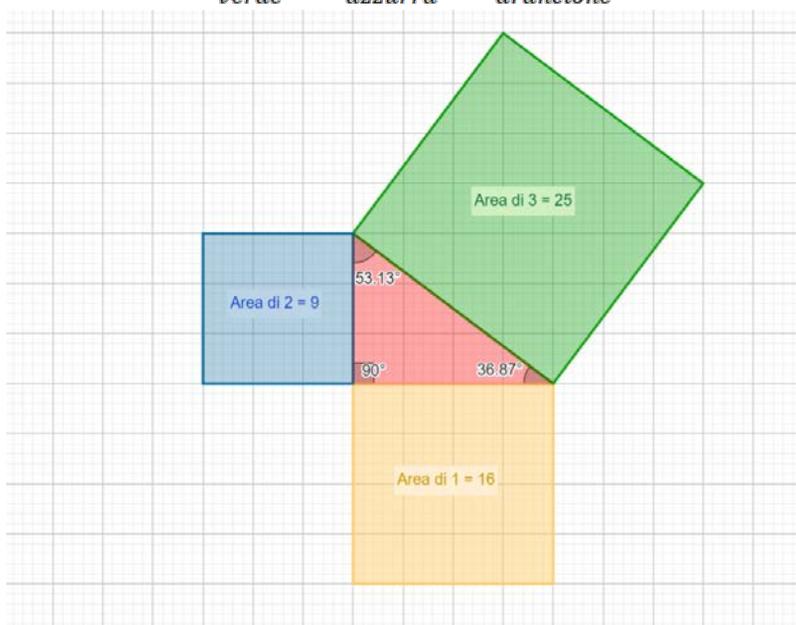
$$A = B + C$$

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

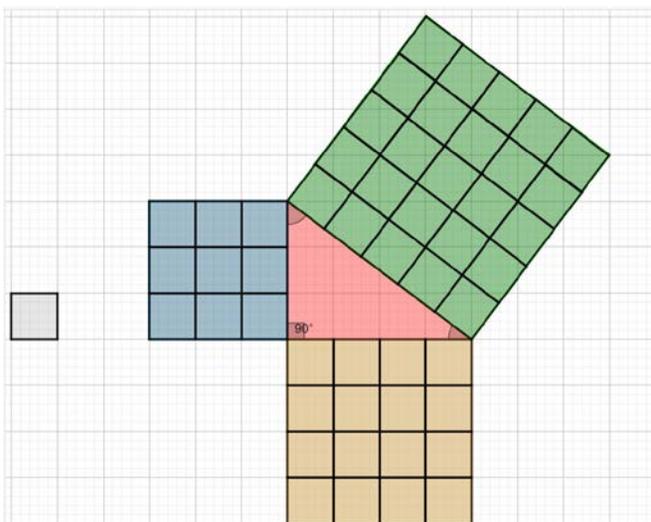
Ricorda che equivalente vuol dire avere la stessa area.

Quindi nel caso di questa figura avremo che:

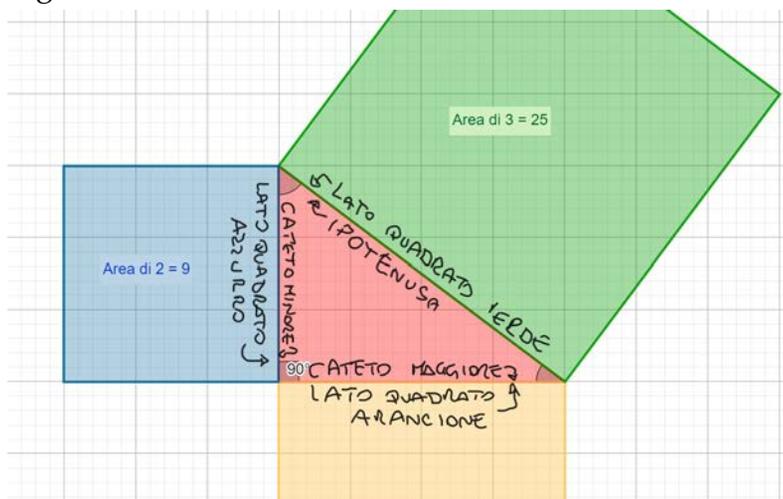
$$A_{verde} = A_{azzurra} + A_{arancione}$$



Se stabiliamo che l'unità di misura è un quadrato di 1cm^2 , guarda quante volte l'unità di misura entra nelle tre figure:



Osserva: il lato di un quadrato coincide con un lato del triangolo:



Ma l'area di un quadrato si trova elevando il lato alla seconda.

Pertanto l'area del quadrato azzurro si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato azzurro. Ma il lato del quadrato

coincide con il cateto minore (c_m) del triangolo. Quindi l'area del quadrato azzurro possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{azzurro}} = c_m^2$$

L'area del quadrato arancione si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato arancione. Ma il lato del quadrato coincide con il cateto minore (c_M) del triangolo. Quindi l'area del quadrato arancione possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{arancione}} = c_M^2$$

L'area del quadrato verde si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato verde. Ma il lato del quadrato coincide con l'ipotenusa (i) del triangolo. Quindi l'area del quadrato verde possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{verde}} = i^2$$

Quindi possiamo scrivere l'enunciato del teorema così:

$$i^2 = c_M^2 + c_m^2$$

Da cui possiamo ricavare due enunciati inversi:

$$c_M^2 = i^2 - c_m^2 \text{ ed anche } c_m^2 = i^2 - c_M^2$$

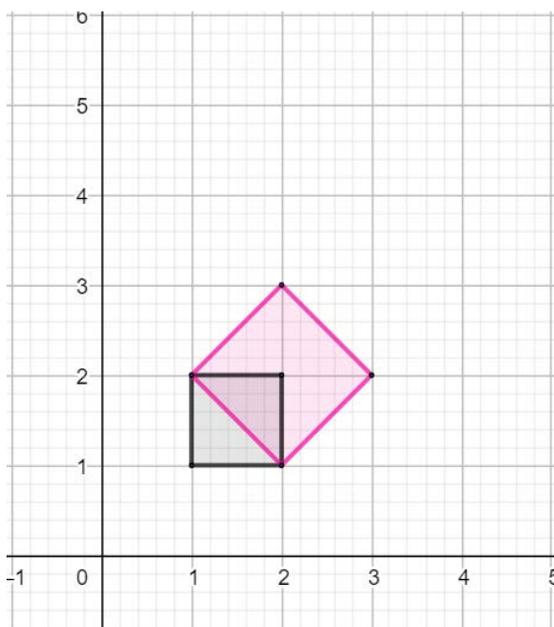
Se vogliamo ricavare esattamente quanto valgono i lati dei quadrati (quindi cateti o ipotenusa) dobbiamo estrarre la radice quadrata che è appunto l'operazione inversa della potenza:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{c_M^2 + c_m^2} \\ c_M &= \sqrt{i^2 - c_m^2} \\ c_m &= \sqrt{i^2 - c_M^2} \end{aligned}$$

4. Riflessioni ed applicazioni

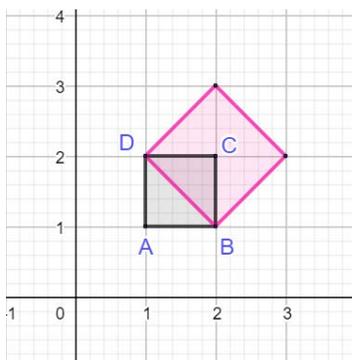
Abbiamo visto che si può raddoppiare l'area di un quadrato a partire dalla sua diagonale. Ricordi?

Raddoppiamo l'area di un quadrato di area 1cm^2 . Quanto misura lato del nuovo quadrato?



Possiamo calcolare quanto vale la diagonale del quadrato nero che poi è anche il lato del quadrato rosa?

Il quadrato nero è diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli. Possiamo allora applicare il teorema di Pitagora al triangolo ABD: sappiamo che i due cateti valgono 1 cm.

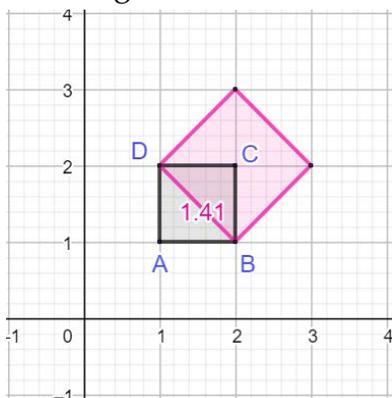


$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2}$$

$$DB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Che come sai possiamo approssimare a 1,4

Se usi la funzione di geogebra che ti indica la lunghezza dei segmenti, ti dice che la diagonale vale 1,41:

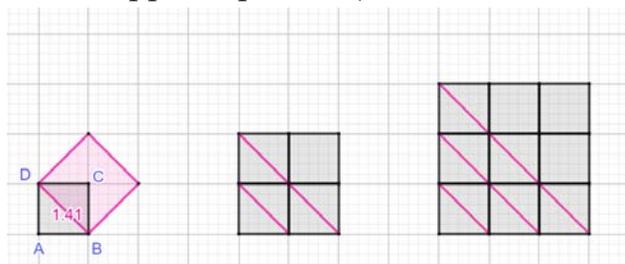


Abbiamo detto quando abbiamo parlato dei numeri irrazionali che $\sqrt{2}$ non si può scrivere come il rapporto tra due numeri (quindi non è un numero razionale).

Abbiamo anche raccontato che questa scoperta sconvolse la scuola Pitagorica (quindi se sconvolge anche te, sei in ottima compagnia).

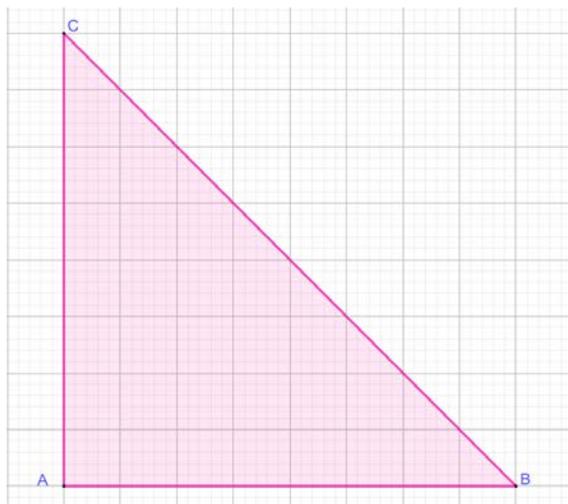
Il fatto che la $\sqrt{2}$ sia rappresentata da un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola, la fa sembrare un numero irraggiungibile. Adesso ci troviamo con un segmento (la diagonale del quadrato) che ha la lunghezza che è proprio pari a questo numero decimale illimitato non periodico. Come se non potessimo mai definire la sua lunghezza con esattezza (a meno di dire che misura $\sqrt{2}$ che però non troviamo ancora sul righello). Eppure sta lì. Disegnata. Con un suo inizio ed una sua fine. Questo fatto vuol dire che $\sqrt{2}$ è incommensurabile con il lato del quadrato. Ovvero le due grandezze (omogenee) non ammettono un sottomultiplo (segmento) in comune.

Se raddoppiamo, triplichiamo ... il lato del quadrato, anche la diagonale raddoppia, triplica ... ($2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; ...)

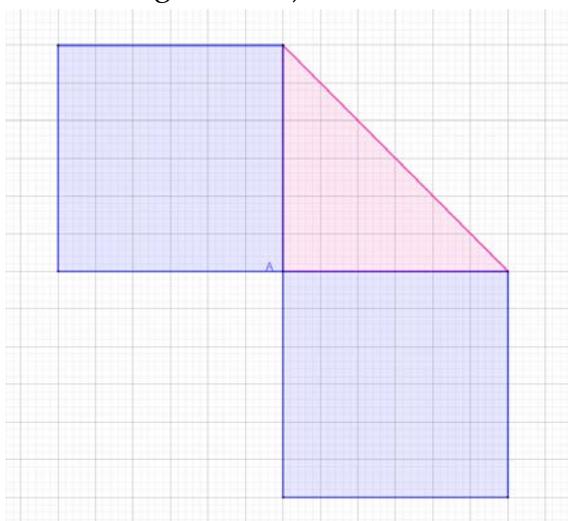


Quindi se il lato è 2 la diagonale è $2\sqrt{2}$; se il lato è 3 la diagonale è $3\sqrt{2}$; se il lato è 4 la diagonale è $4\sqrt{2}$; se il lato è n la diagonale è $n\sqrt{2}$.

Adesso ti chiedo di costruire un triangolo rettangolo isoscele con lati di 3 cm (3 cm sul tuo quaderno a quadretti corrispondono alla somma dei lati di 6 quadretti perché ogni cm corrisponde a due quadretti):

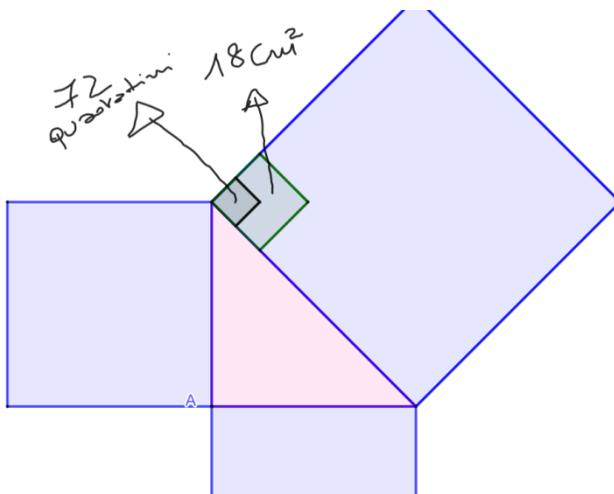


Sui due cateti dobbiamo costruire adesso due quadrati. Prendiamo un altro foglio a quadretti per costruirli, ritagliarli e appoggiarli sui cateti del triangolo. Da quanti quadratini del quaderno saranno composti? Se il cateto del triangolo è fatto da 6 quadratini, allora le aree dei due quadrati dovranno essere composte da 36 quadratini (basta costruire due quadrati con il lato lungo 3 cm...).

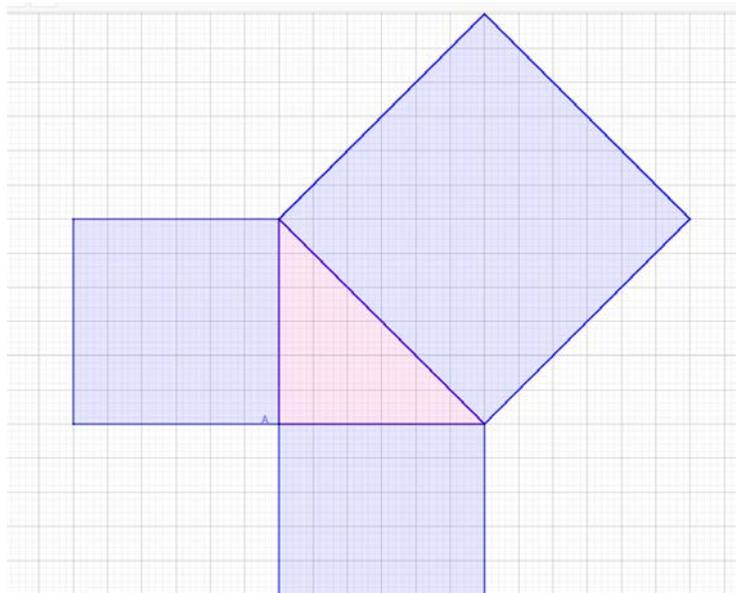


Adesso dobbiamo costruire il quadrato da appoggiare sull'ipotenusa.

La misura dell'ipotenusa non è nota. Potremmo calcolarla con il teorema di Pitagora; ma in realtà noi sappiamo quanto dovrà misurare l'area del quadrato da costruire sull'ipotenusa. Senza passare per il calcolare l'ipotenusa. Infatti se le aree costruite sui cateti misurano ciascuna 9 cm^2 (36 quadratini), l'area da costruire sull'ipotenusa dovrà misurare $(9 + 9) \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$. Ovvero $36 + 36 = 72$ quadratini. Ogni 4 quadratini corrispondono ad 1 cm^2



Essendo i lati di questi quadratini corrispondenti alle diagonali dei quadratini del quaderno, avresti potuto contarne 72 anche mantenendo la griglia del tuo quaderno:



Se conti, nel quadrato costruito sull'ipotenusa ci sono 72 quadratini, ovvero 18 cm^2

Allora abbiamo verificato il teorema di Pitagora.

Se adesso ti chiedessi quello che non ti ho chiesto prima? Ovvero: quanto misura l'ipotenusa? Se troviamo la sua misura (possiamo farlo applicando il teorema di Pitagora e confrontando la misura ottenuta con quella che possiamo prendere direttamente col righello) e la eleviamo al quadrato, dovrà risultare proprio 18 (oppure, se vogliamo ragionare in termini di quadratini dobbiamo moltiplicarla per 2 e poi elevarla al quadrato).

Proviamo?

$$i = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4,242640687119285 \dots$$

Oppure con i quadratini:

$$i = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8,48528137423857 \dots$$

È palese che si tratta di due numeri irrazionali. Per quanto li approssimiamo con tante cifre, moltiplicandoli per se stessi non otterremo mai 72.

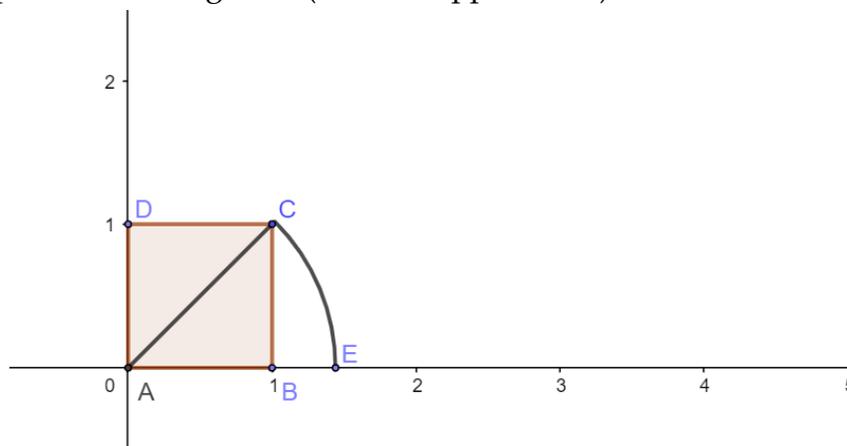
Hai provato a misurare col righello l'ipotenusa? Che numero ti viene? Se lo elevi al quadrato ti viene 18?

Sembra che la costruzione geometrica del problema confermi il teorema di Pitagora e quella aritmetica lo smentisca. In realtà essendo l'ipotenusa fatta dalla somma delle diagonali dei quadretti del quaderno, ed essendo questi pezzetti tutti numeri irrazionali, risulta che l'ipotenusa sia incommensurabile con i cateti. Infatti se non trasformi i numeri irrazionali in numeri decimali, ottieni che

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{18} = 18$$

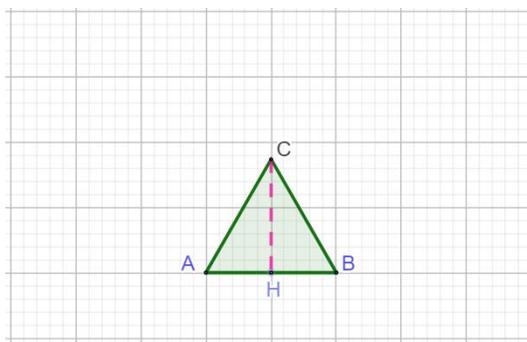
Adesso abbiamo gli strumenti per capire come fare a posizionare il numero irrazionale $\sqrt{2}$ sulla retta dei numeri.

Costruiamo un quadrato unitario sulla retta. Con un compasso con la punta sul vertice A e la matita sul vertice C, riportiamo la diagonale (che vale appunto $\sqrt{2}$) sulla retta:



Il punto è sarà la rappresentazione sulla retta dei numeri di $\sqrt{2}$.

Consideriamo adesso un triangolo equilatero di lato 2cm e poniamoci l'obiettivo di calcolare la sua altezza.



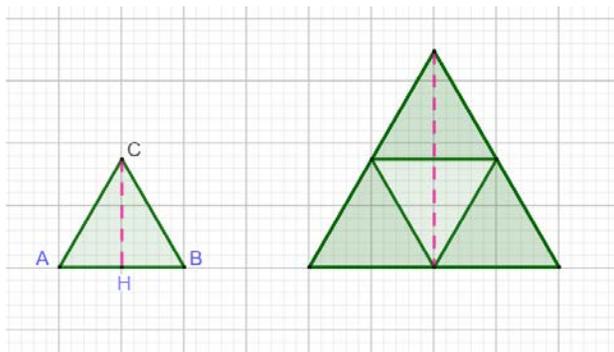
Come vedi l'altezza divide il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli.

Concentriamoci, ad esempio, sul triangolo AHC. Possiamo applicare il teorema di Pitagora a questo triangolo per trovare CH che ne rappresenta il cateto maggiore e sapendo che AH è la metà di AB e quindi misura 1 cm:

$$CH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Un altro irrazionale. Pare che siano più comuni di quello che pensavamo ☺

Come abbiamo visto per la diagonale del quadrato, anche in questo caso se raddoppia il lato del triangolo, raddoppia l'altezza, se triplica il lato triplica l'altezza e così via.

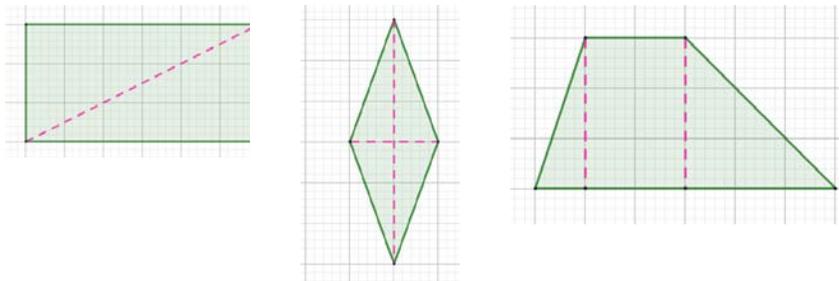


Quindi in generale se il lato del triangolo equilatero lo chiamiamo l avremo che l'altezza h :

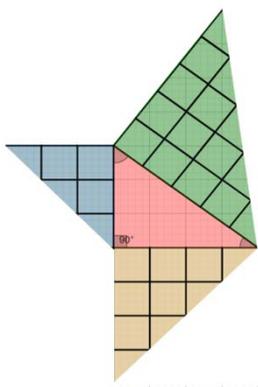
$$h = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Il teorema di Pitagora possiamo applicarlo in molti contesti.

Se ad esempio vogliamo trovare la diagonale di un rettangolo possiamo procedere come abbiamo fatto con la diagonale del quadrato. Se vogliamo trovare la diagonale di un rombo possiamo considerare che le diagonali sono perpendicolari e quindi formano 4 triangoli rettangoli. Se consideriamo il trapezio, se disegniamo le altezze dividiamo la figura in due triangoli rettangoli ed un rettangolo:



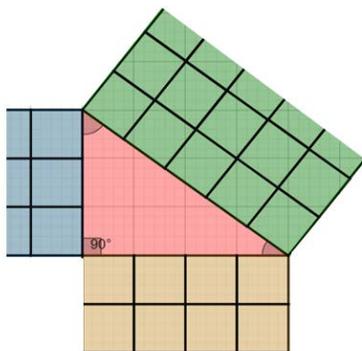
Cosa accade al teorema di Pitagora quando dimezziamo ogni quadrato costruito sui cateti e sull'ipotenusa? Il teorema è ancora valido?



Semberebbe di sì. Possiamo dare allora anche il seguente enunciato del teorema:

in un triangolo rettangolo l'area del triangolo rettangolo isoscele costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei triangoli rettangoli isosceli costruiti sui cateti.

Ma il quadrato può anche essere dimezzato facendolo diventare un rettangolo:

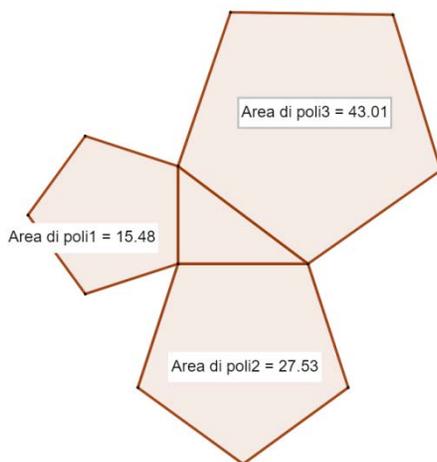


Possiamo dare allora anche il seguente enunciato del teorema:

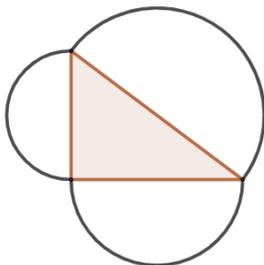
in un triangolo rettangolo l'area del rettangolo costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei rettangoli costruiti sui cateti.

Questa cosa vale anche se sostituiamo i quadrati con pentagoni, esagoni, ottagoni... semicirconferenze?

Con geogebra lo possiamo verificare facilmente con la funzione calcola l'area.

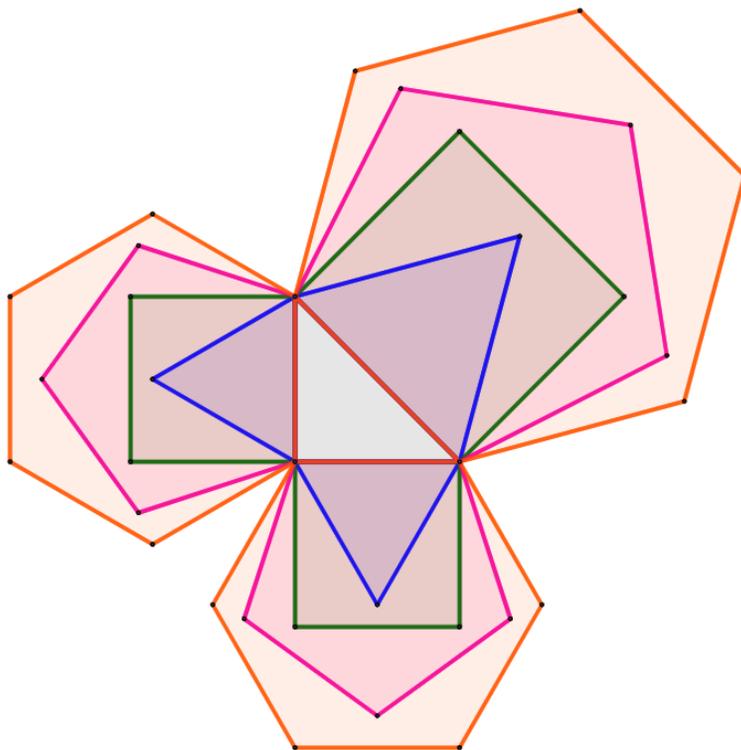


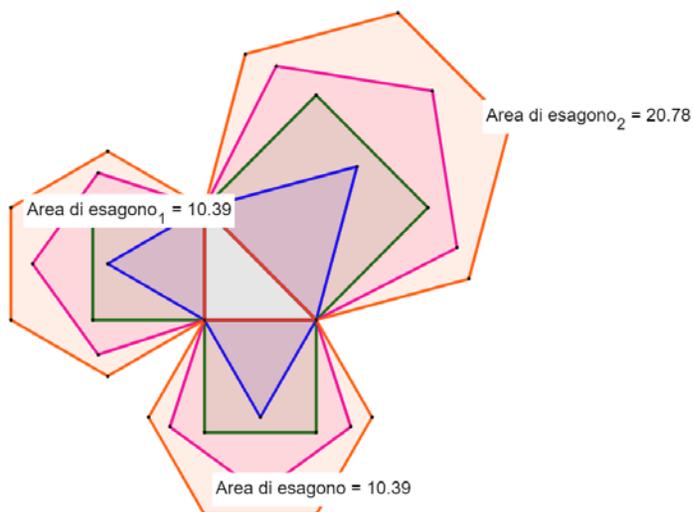
Fino ad arrivare ai semicerchi:



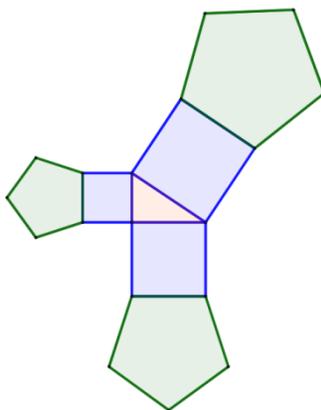
Allora possiamo enunciare il teorema anche in questo modo:

in un triangolo rettangolo l'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei semicerchi costruiti sui cateti.





Sono diverse poi le applicazioni. Alcune puoi divertirti a realizzarle con geogebra:



4. Conclusioni

Concludendo, si può dire che il percorso che è stato illustrato sul teorema di Pitagora consente di riflettere sui seguenti punti:

Si da all'alunno un primo approccio con le dimostrazioni geometriche;

Il teorema di Pitagora è usato anche come pretesto per fare storia della matematica, storia e geografia (riferimenti alla scuola pitagorica), educazione civica (importanza della donna nella scuola pitagorica), scoprire il patrimonio culturale del nostro paese.

Rappresenta l'opportunità per lavorare prima manualmente con materiali poveri e quindi trasportare questi lavori su software di geometria dinamica.

Bibliografia

AA.VV. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.

AA.VV. (2001). Matematica 2001.

E. Castelnuovo (1979). La matematica, La nuova Italia.

E. Castelnuovo (2017). Didattica della matematica, UTET.

B. D'Amore (1999). Elementi di didattica della matematica, Bologna: Pitagora.

A.B. Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini (2016). Didattica della matematica, Milano: Mondadori.

G. Israel e A. M. Gasca (2012). Pensare in matematica, Bologna: Zanichelli.

<https://federazionemathesis.it/link-alle-relazioni-presentazioni-in-formato-pdf>.