Capitolo X

Il problema dei quattro colori

"I grandi matematici si sono basati sul principio: «Indovinate prima di dimostrare», ed è quasi certo che quasi tutte le scoperte importanti avvengono in questo modo".

E. KASNER

§ 1-X. In che consiste il problema

Una carta geografica viene generalmente stampata in più colori, in modo da permettere di distinguere a colpo d'occhio tra paesi diversi. D'acchito sembrerebbe preferibile assegnare a ciascun paese un colore diverso, ma, a ben considerare, questa soluzione è troppo costosa. Per ragioni di economia si è presa l'abitudine di utilizzare il minor numero possibile di colori, avendo però sempre cura di colorare diversamente paesi limitrofi.

La fig. 1 mostra la carta di un'isola divisa in due regioni. Essa necessita di tre colori: uno per il mare e due per le regioni.

La fig. 2 mostra ancora un'isola, ma divisa in tre regioni. Ciascuna regione è bagnata dal mare, quindi nessuna può essere colorata come questo (per il quale si usa di solito l'azzurro); e ciascuna confina con le altre due, perciò per esse occorrono tre colori diversi. Complessivamente, quindi, i colori necessari sono quattro.

La fig. 3 mostra una situazione in cui sono necessari quattro colori, anche a non tener conto del mare. E, d'altra parte, anche a tenerne conto, non è indispensabile superare il numero di quattro colori: basta usare l'azzurro del mare per colorare *anche* la regione interna, quella non bagnata.

La fig. 4 è più complessa delle precedenti e, tuttavia, tornano ad essere

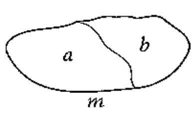


Fig. 1-X.

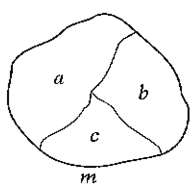


Fig. 2-X.

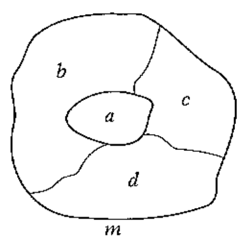


Fig. 3-X.

sufficienti tre soli colori, indicati con le lettere *a, b, c*.

La fig. 5 è la più complessa tra quelle esaminate, ma può essere stampata con quattro colori, che si tenga conto o no del mare (quest'ultimo può essere colorato con *a*).

Come si è visto, nei casi esaminati non abbiamo mai superato il numero di quattro colori.

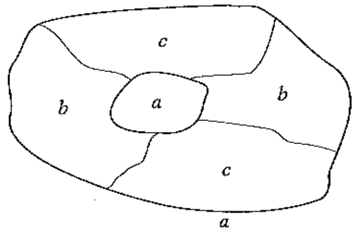


Fig. 4-X.

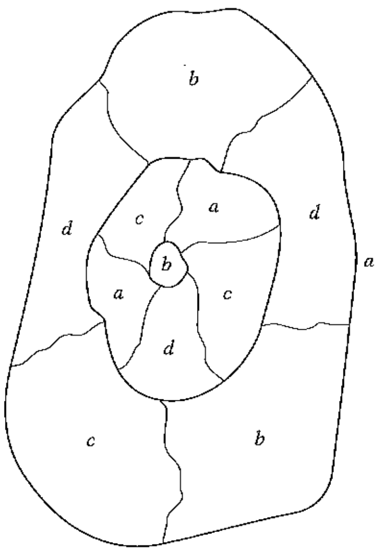


Fig. 5-X.

Tuttavia sembra del tutto naturale pensare che esistano o si possano ideare altre carte di maggiore complessità per le quali quattro colori non bastano. Ma carte di questo genere non sono mai state trovate: a detta dell'esperienza, *nessuna carta, per quanto grande sia la sua complessità, richiede più di quattro colori*.

Tuttavia questa è solo una constatazione empirica, che alla matematica non basta. Essa esige una dimostrazione rigorosa, in mancanza della quale la proprietà enunciata viene qualificata come una "congettura" che attende una prova o una smentita.

Abbiamo qui un altro esempio di problema facile a porsi e a capirsi anche da chi non ha una formazione matematica, ma di risoluzione così ardua da farlo resistere per più di un secolo agli assalti dei maggiori matematici del mondo.

Riassumiamo brevissimamente la vicenda.

Segnalata al mondo accademico verso il 1850, la congettura dei quattro colori fu, per così dire, "codificata" da Cayley [1] che, non riuscendo a dimostrarla né a costruire un esempio che la confutasse, presentò nel 1878 il problema alla London Mathematical Society. Circa un anno dopo A.B. Kempe, un avvocato membro della

---

[1] Arthur Cayley (1821-1895), matematico (ed avvocato) inglese, tenne cattedra di algebra nell'università di Cambridge. Famoso soprattutto per la sua teoria degli invarianti delle forme algebriche.

società, pubblicò un articolo col quale riteneva di aver dimostrato le giustezza della congettura. La dimostrazione fu in un primo tempo ritenuta per buona, ma nel 1890 fu rilevato un errore che la invalidava. Da allora e fino al 1976 il problema dei quattro colori è stato uno dei principali problemi matematici non risolti, che ha acquistato celebrità proprio per le impervie difficoltà e l'accanita resistenza opposta ad ogni tentativo di risoluzione.

§ 2-X. Lo ha risolto il computer. Ma...

Nel 1976 K. Appel e W. Haken hanno ripreso l'idea che era alla base della dimostrazione di Kempe e l'hanno portata a conclusione correttamente. Ciò ha però richiesto l'esame di migliaia di configurazioni particolari di complessità tale che solo l'impiego di un potente elaboratore elettronico lo ha reso possibile.

La dimostrazione pubblicata da Appel e Haken era corredata dai programmi dell'elaboratore e dagli output provenienti dai calcoli eseguiti secondo questi programmi. Essa presenta, quindi, un carattere che la differenzia da tutte le altre: vi interviene, *in modo essenziale*, l'elaboratore; non c'è dimostrazione se non c'è l'elaboratore, perché non è praticamente possibile controllarne "a mano" i risultati forniti. In altri termini, l'accettazione della dimostrazione non riposa soltanto sulla verificabile correttezza del ragionamento matematico, ma *anche sulla convinzione che l'elaboratore faccia quel che si ritiene che faccia*, quasi un nuovo postulato da aggiungere a quelli che stanno alla base della teoria matematica.

Potremmo anche dire che questa dimostrazione esige un *atto di fede* nell'elaboratore, ossia richiede un qualche cosa non richiesto dalle dimostrazioni tradizionali.

Per questi motivi alcuni filosofi della scienza ed alcuni matematici sono restii ad accettarla e sostengono che l'intervento dell'elaboratore implichi un indebolimento delle norme della dimostrazione matematica ed un cambiamento del concetto stesso di "teorema".

Sia come sia, ci pare indubitabile che l'irruzione dell'elaboratore nel processo dimostrativo cambi un po' le carte in tavola e introduca quest'altra questione:

Il problema dei quattro colori è risolto, ma non con i mezzi tradizionali della matematica; è possibile risolverlo anche con questi? Ossia: esso è *intrinsecamente* di tale complessità che non è possibile evitare il ricorso all'elaboratore o un matematico adeguatamente abile può risolverlo senza farne uso?

Insomma, è questione di abilità o di natura del problema?

Per chiarire, ci sembra lecito fare un paragone con il problema della quadratura del cerchio così come si presentò ai geometri greci. Questi aspiravano a risolverlo con il solo uso della riga e del compasso, ma, non riuscendovi, lo risolsero mediante la quadratrice di Ippia (v. §12-VI) ed altre curve quadratrici, andando così al di là di quelli che erano i loro mezzi tradizionali. Insoddisfatti, però, da questa soluzione, sia i greci che i geometri dei secoli successivi continuarono a cercarne una che fosse effettuabile con gli strumenti elementari.

Fino a che, dopo millenni di inutili tentativi, non è stato chiarito che la quadratura del cerchio è *intrinsecamente impossibile con riga e compasso*: chi la vuole deve *obbligatoriamente* far ricorso ad altri strumenti.

§ 3-X. Il teorema di Eulero

Per proseguire il nostro discorso sul problema della colorazione delle carte geografiche abbiamo bisogno del *teorema di Eulero*. Si tratta di un teorema che riguarda il numero dei vertici, delle facce e degli spigoli di un poliedro (per *poliedro* si intende un solido la cui superficie è costituita di facce poligonali). Esso trova applicazioni ben più importanti di quella che ne faremo qui ed ha interesse in sé. Val la pena di soffermarvisi un po'.

Prendete un *qualsiasi* poliedro convesso, contatene le facce, i vertici e gli spigoli. Addizionate il numero delle facce al numero dei vertici e sottraete alla somma il numero degli spigoli: otterrete come risultato 2.

In fig. 6 vedete un prisma a base esagonale; ha 8 facce, 12 vertici e 18 spigoli: $8 + 12 - 18 = 2$.

In fig. 7 vedete una piramide a base pentagonale; ha 6 facce, 6 vertici e 10 spigoli: $6 + 6 - 10 = 2$.

In fig. 8 vedete un ottaedro; ha 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli: $8 + 6 - 12 = 2$.

Potete continuare e considerare altri poliedri. Se indicate con F il

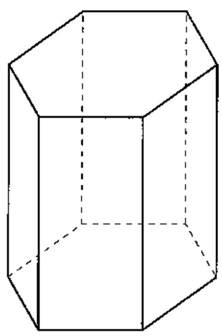


Fig. 6-X.

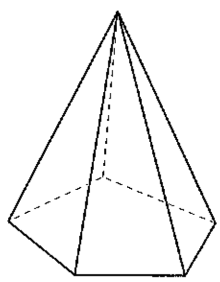


Fig. 7-X.

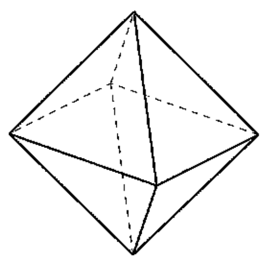


Fig. 8-X.

numero delle facce, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli avrete sempre:

(1) $\quad F + V - S = 2$ [2]

La (1) è una delle poche proprietà di geometria elementare che sia sfuggita agli antichi geometri greci [3]; essa fu scoperta da Cartesio e dimostrata da Eulero. Vediamone anche noi una dimostrazione.

Immaginiamo un poliedro cavo la cui superficie sia costituita da materiale elastico, come una gomma sottile. Agendo con forze opportune applicate ai lati di una faccia e dirette verso l'esterno potremo dilatare questa faccia tanto da far si che le altre finiscano per sovrapporsi ad essa in modo da formare un reticolato piano [4].

---

[2] Per i poliedri convessi la relazione (1) è sempre valida, ma vale anche per un poliedro come quello di fig. 9, che convesso non è. Invece per i poliedri che presentano dei *"buchi"* come quello di fig. 10 non vale. Se ad un cubo, su due facce opposte, applichiamo due tronchi di piramide (che, per semplicità, possiamo supporre uguali) dei quali le basi maggiori coincidano con le facce del cubo, otteniamo un poliedro convesso per il quale, quindi, vale la formula di Eulero (infatti $F = 14$, $V = 16$, $S = 28$; $14 + 16 - 28 = 2$). Ora in questo poliedro, perpendicolarmente alle basi dei tronchi, scaviamo una "galleria" di sezione uguale alle basi minori (fig. 10). Il poliedro "bucato" così ottenuto non è più euleriano. Infatti, praticando il buco, abbiamo aumentato il numero delle facce di 4 (le quattro facce interne della galleria) e lo abbiamo diminuito di 2 (le due basi minori dei tronchi non ci sono più); il numero dei vertici è rimasto invariato; il numero degli spigoli è aumentato di 4 (quelli della galleria). Ossia, con ovvio significato dei simboli:

$$F' = F + 4 - 2 = 16, \qquad V' = V = 16 \qquad S' = S + 4 = 32$$
$$\text{e} \qquad F' + V' - S' = 16 + 16 - 32 \neq 2.$$

Fig. 9-X.

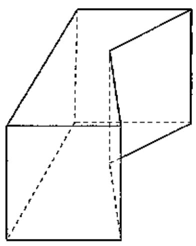
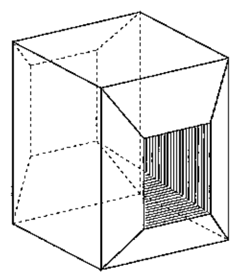


Fig. 10-X.



[3] Ma secondo alcuni storici è probabile che Archimede la conoscesse.

[4] Un esempio per chiarire. Il poliedro sia un cubo. Si supponga che questo cubo sia cavo e la sua superficie sia di un sottile strato di gomma. Applicando delle forze opportune lungo il perimetro della base ABCD, dirette verso l'esterno, si può fare in

Le facce, gli spigoli e i vertici del poliedro diventeranno le maglie, i lati e i nodi del reticolato. Il numero delle facce del poliedro supera di 1 il numero delle maglie, perché nell'operazione descritta la faccia dilatata è rimasta nascosta sotto il reticolato (ricordiamoci di questa osservazione, ci servirà verso la fine della nostra dimostrazione). Invece il numero dei vertici è uguale a quello dei nodi e il numero degli spigoli a quello dei lati. In altri termini, se indichiamo con F, V e S, rispettivamente, il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli del poliedro ed inoltre con M, N, L il numero delle maglie, dei nodi e dei lati del reticolato, valgono le relazioni:

$$F = M + 1, \quad V = N, \quad S = L$$

Proponiamoci ora di indagare sul valore dell'espressione

(2) $$X = M + N - L.$$

Più precisamente, cerchiamo di appurare se X varia al variare dei reticolati presi in considerazione o se, al contrario, rimane costante; e, in questa seconda ipotesi, quale sia il suo valore.

Un reticolato può presentare maglie con tre, quattro o più lati. Fissiamo l'attenzione su una maglia con quattro o più lati, per esempio la ABCD di fig. 12.

Tracciando la diagonale AC otteniamo un nuovo reticolato nel quale, rispetto al precedente, il numero delle maglie è aumentato di uno (dalla maglia ABCD abbiamo ricavato le due maglie ABC, ACD), il numero dei nodi è rimasto inalterato e il numero dei lati è aumentato di uno (la diagonale AC). Calcoliamo la (2) per questo nuovo reticolato. Abbiamo:

$$X' = (M + 1) + N - (L + 1) = M + N - L$$

Come si vede, $X' = X$, ossia l'espressione (2) ha lo stesso valore per i due reticolati.

---

modo che la base stessa si dilati tanto che le altre facce vadano a sovrapporsi ad essa. Nella deformazione rimane inalterato il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli. (Fig. 11).

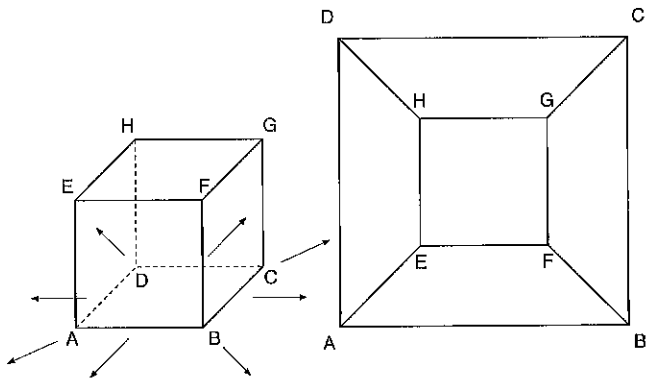


Fig. 11-X.

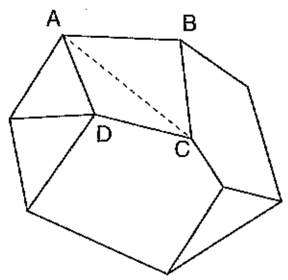


Fig. 12-X.

Sulla base di questo risultato possiamo trasformare il reticolato proveniente dal poliedro in un reticolato nel quale tutte le maglie siano triangolari senza che la (2) cambi. Allo scopo basterà tracciare le opportune diagonali delle maglie aventi quattro o più lati. In altri termini, possiamo ottenere risultati di validità generale fissando la nostra attenzione sui soli reticolati a maglie triangolari (fig. 13). In essi compariranno triangoli con un solo lato sul contorno, come, per esempio, ABC e triangoli con due lati sul contorno, come, per esempio, DEF. Vediamo che cosa accade della (2) se asportiamo uno di questi triangoli, separando i due casi. Asportando ABC il numero delle maglie diminuisce di 1, il numero dei nodi rimane inalterato, il numero dei lati diminuisce di 1. Quindi:

$$X' = (M - 1) + N - (L - 1) = M + N - L$$

di nuovo lo stesso valore precedente.

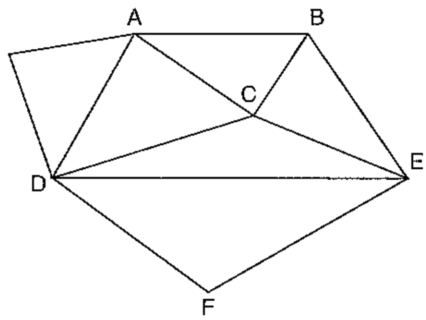


Fig. 13-X.

Asportando DEF il numero delle maglie diminuisce di 1, il numero dei nodi diminuisce di 1, il numero dei lati diminuisce di 2; quindi:

$$X' = (M - 1) + (N - 1) - (L - 2) = M + N - L.$$

Il risultato è sempre quello: l'asportazione dei triangoli periferici non fa mutare il valore della (2).

Reiterando le asportazioni quante volte è necessario riusciremo in ogni caso a ridurre il reticolato ad un solo triangolo, nel quale è $M = 1$, $N = 3$, $L = 3$, cosicché

$$X = 1 + 3 - 3 = 1$$

Possiamo allora concludere che:

"Per qualunque reticolato, addizionando il numero delle maglie al numero dei nodi e sottraendo dalla somma il numero dei lati si ottiene come risultato 1".

Ora è semplice passare all'analoga relazione per i poliedri: basta ricordare l'osservazione fatta all'inizio ($F = M + 1$, $V = N$, $S = L$) e si ottiene subito la (1), c.v.d.

Un'ultima osservazione che ci tornerà utile nel seguito: se sottoponiamo a trazioni, compressioni od altri sforzi un poliedro costruito con materiale elastico, esso si deforma, gli spigoli si incurvano, i vertici si allontanano o si avvicinano, ma la relazione di Eulero continua a valere (fig. 14). Analogamente, un reticolato piano può avere lati curvilinei e maglie non poligonali (fig. 15), senza che ciò invalidi la conclusione precedente.

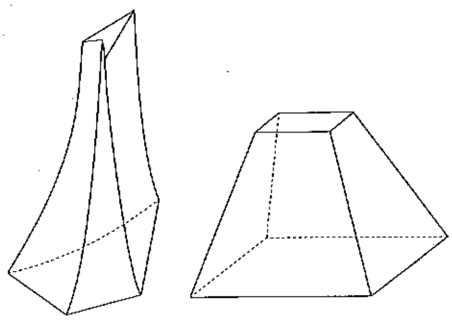


Fig. 14-X.

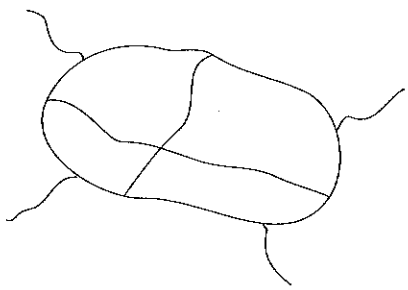


Fig. 15-X.

§ 4-X. Il teorema dei cinque colori

Il problema dei quattro colori, come abbiamo detto, ha richiesto per la sua risoluzione 150 anni di ricerche matematiche e l'intervento del computer. Ma già nel 1890 Heawood ha potuto dimostrare che tutte le carte geografiche possono essere stampate con *cinque colori*. Ossia si è stabilito abbastanza presto che cinque colori sono sufficienti, mentre è rimasta per lungo tempo aperta la questione se questo numero potesse ridursi a quattro, come suggeriva l'esperienza e come poi si è effettivamente stabilito. Per avere un'idea dei metodi di questa branca della matematica (la *topologia*), è molto interessante rivisitare la dimostrazione del teorema dei cinque colori, che ci accingiamo a presentare.

Innanzi tutto, alcune precisazioni: quando diciamo che una carta può essere colorata, ciò va inteso nel senso che due regioni confinanti non saranno mai dello stesso colore; tuttavia due regioni potranno avere lo stesso colore se si toccano in un vertice, come accade per due caselle entrambe scure (o entrambe chiare) della scacchiera. Inoltre, intendiamo per regione un'estensione di terra che formi un tutto unico e non una suddivisione politica formata da più parti.

Nella nostra dimostrazione ammetteremo che la carta studiata sia quella di un continente circondato dal mare. Se un continente ed il mare possono essere colorati con cinque colori, è evidente che una carta comprendente più continenti potrà ugualmente essere colorata con lo stesso numero di colori.

Preliminarmente osserviamo che è *sufficiente dimostrare la validità dell'assunto per le carte nelle quali i vertici sono comuni a tre sole regioni* (carte che vengono dette regolari)*: se cinque colori bastano per le carte regolari, bastano per qualsiasi carta.*

Consideriamo, infatti, una carta in cui compaiono vertici comuni a più di tre regioni (fig. 16*a*). Tracciamo attorno a questi vertici presi come centri, dei piccoli cerchi che "annettiamo" a una delle regioni limitrofe sopprimendo un arco (fig. 16*b*). In tal modo otteniamo una nuova carta nella quale i vertici in cui concorrono più di tre archi vengono sostituiti da un certo numero di vertici nei quali concorrono tre archi. Ossia la nuova carta, che contiene lo stesso numero di regioni dell'originale, è regolare. Se questa può essere colorata con non più di cinque colori lo stesso accade per l'altra: basta, infatti rimpicciolire i cerchi fino a farli diventare dei punti.

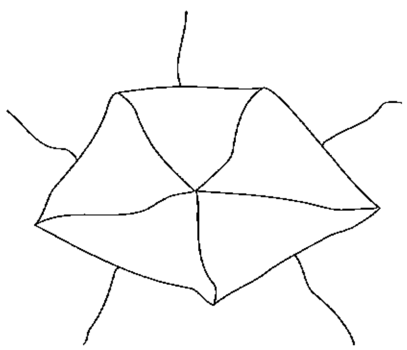


Fig. 16a-X.

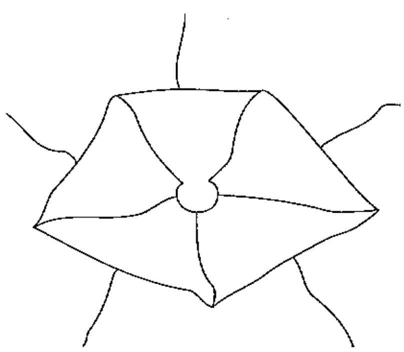


Fig. 16b-X.

Questa osservazione, dunque, ci autorizza a limitare la nostra indagine alle carte regolari.

Indichiamo con F_2 il numero delle regioni con 2 vertici, con F_3 il numero delle regioni con 3 vertici, ecc. Il numero totale F delle regioni sarà, dunque,

$$(3) \qquad F = F_2 + F_3 + F_4 + \dots$$

Le F_2 regioni a due vertici, hanno, ciascuna, due frontiere (fig. 17). Quindi, per esse, il totale delle frontiere è $2 \cdot F_2$. Le F_3 regioni a tre vertici, hanno, ciascuna, 3 frontiere (fig. 18). Quindi, per esse, il totale delle frontiere è $3 \cdot F_3$. E così di seguito. Ma, contando in questo modo, si arriva alla fine a contare due volte ogni frontiera: una volta come appartenente a una regione, un'altra come appartenente alla limitrofa. Abbiamo dunque (indicando con S il totale delle frontiere):

(4) $\quad 2S = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots$

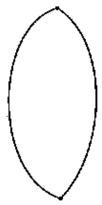


Fig. 17-X.

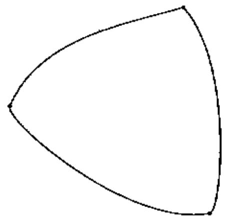


Fig. 18-X.

Con lo stesso metodo possiamo contare i vertici. Poiché essi sono comuni a tre regioni troveremo (indicando con V il totale dei vertici):

(5) $\quad 3V = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots$

Da (4) e (5) consegue:

(6) $\quad 3V = 2S.$

Facciamo intervenire, ora, l'uguaglianza di Eulero.

Moltiplicandone ambo i membri per 6 abbiamo:

$$6F + 6V - 6S = 12.$$

Eliminiamo da quest'ultima S tenendo conto della (6). Otteniamo:

$$6F - 3V = 12$$

che per la (3) e la (5) diventa:

$$6(F_2 + F_3 + F_4 + \ldots) - (2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots) = 12.$$

Eseguendo i calcoli e trasferendo a secondo membro le F_i dalla F_7 in poi, l'uguaglianza precedente può scriversi:

(7) $\quad 4F_2 + 3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + F_7 + 2F_8 + \ldots$

La (7) consente di concludere che in tutte le carte nelle quali i vertici sono comuni a tre regioni esiste almeno una regione avente meno di 6 vertici.

Infatti il secondo membro è maggiore o uguale a 12, quindi F_2, F_3, F_4 e F_5 non possono essere tutti nulli.

Tutto il discorso acquista probabilmente chiarezza se ci si esercita a verificare la validità della (7) in alcuni casi particolari, per esempio quelli delle figg. 19-20-21-22-23.

In nessuna compaiono regioni con più di 6 vertici, sicché F_7, F_8, ecc. sono tutti nulli ed il secondo membro della (7) vale quindi, per esse, 12.

Inoltre (attenzione, la parte esterna è il "mare" e va contata come una regione):

in fig. 19: $F_2 = 3$, $F_3 = 0$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0$
in fig. 20: $F_2 = 0$, $F_3 = 4$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0$
in fig. 21: $F_2 = 0$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 0$
in fig. 22: $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, $F_4 = 6$, $F_5 = 0$
in fig. 23: $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, $F_4 = 0$, $F_5 = 12$

Riprendiamo il nostro ragionamento. Abbiamo appena visto che una almeno delle regioni della nostra carta ha meno di 6 vertici. Dunque essa potrà averne 2, 3, 4 oppure 5. Esaminiamo queste diverse possibilità nell'ordine.

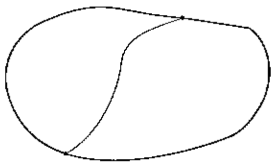


Fig. 19-X.

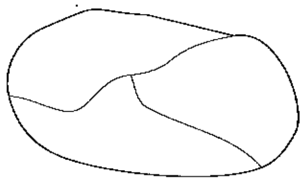


Fig. 20-X.

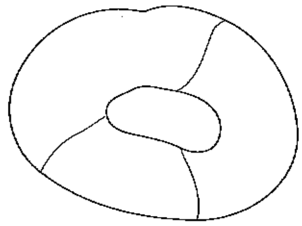


Fig. 21-X.

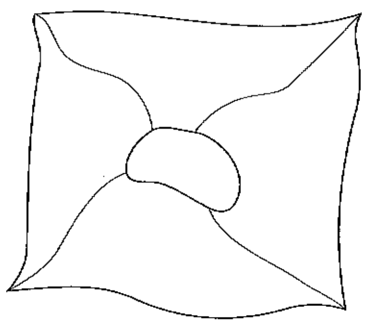


Fig. 22-X.

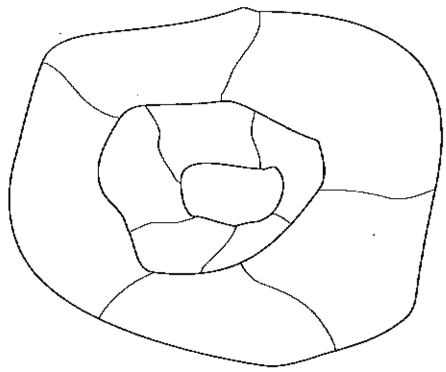


Fig. 23-X.

1) *C'è una regione a 2 vertici* (fig. 24*a*). Questa regione ha due confinanti. Immaginiamo di sopprimere una delle due frontiere (quella tratteggiata in fig. 24*b*). La carta che così si ottiene ha F–1 regioni (se F erano quelle iniziali). Ammettiamo che essa possa essere colorata con soli cinque colori e indichiamo con a quello assegnato alla regione formatasi con la soppressione della frontiera e con b quello assegnato alla seconda confinante; rimangono disponibili tre colori, chiamiamoli c, d ed e. Se rimettiamo al suo posto la frontiera e assegniamo il colore c alla regione a due vertici, la colorazione della carta iniziale non richiede l'introduzione di un

sesto colore In altri termini: se cinque colori bastano per la carta ad $F-1$ regioni, bastano anche per la carta iniziale ad F regioni.

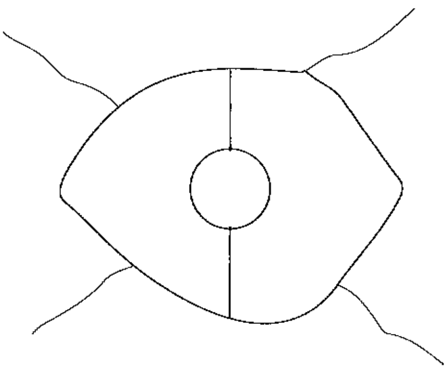


Fig. 24a-X.

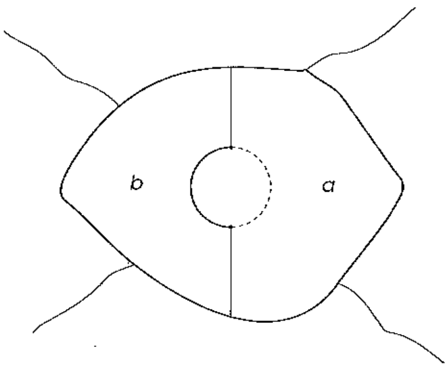


Fig. 24b-X.

2) *C'è una regione a tre vertici* (fig. 25). Sia R questa regione e siano R_1, R_2, R_3 le sue confinanti. Sopprimiamo una delle frontiere di R e supponiamo che la nuova carta ad $F-1$ regioni richieda non più di cinque colori. Se si ripristina la frontiera soppressa sarà sufficiente attribuire ad R uno dei colori differenti da quelli di R_1, R_2 ed R_3. Ossia, per R sono disponibili due colori.

3) *C'è una regione a quattro vertici.* Replicando il ragionamento dei casi precedenti, troveremo che, dopo il ripristino, resta disponibile per la regione R a quattro vertici almeno uno dei cinque colori, perché le sue quattro confinanti utilizzano quattro colori differenti. Tuttavia in questo caso può sorgere una difficoltà di tipo nuovo. Una regione R_2 può essere confinante con R su *due frontiere diverse*, come accade nella fig. 26. Sopprimendo una delle due frontiere dovremmo necessariamente sopprimere anche l'altra (non avrebbe senso una frontiera all'interno di una regione) ottenendo così una regione a forma di anello, con due frontiere completa-

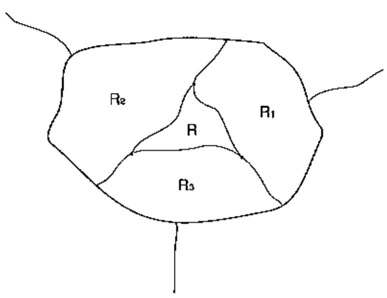


Fig. 25-X.

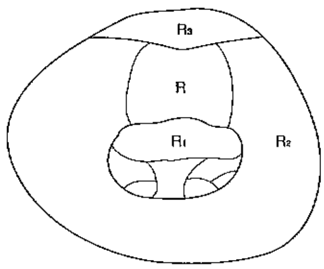


Fig. 26-X.

mente separate. Regioni di questo genere sono implicitamente escluse dal ragionamento col quale è stato stabilito il teorema di Eulero, su cui si fonda la dimostrazione che stiamo portando avanti. Ciò introdurrebbe una incoerenza logica. Possiamo, però, evitare la formazione di una regione ad anello: se l'unione di R ad R_2 forma un anello, le altre due frontiere di R devono appartenere a due regioni R_1 ed R_3 *separate* dall'anello.

Ne consegue che R_1 ed R_3 sono distinte e non hanno alcuna frontiera in comune e ciò permette di attribuire ad esse lo stesso colore. Sopprimiamo, allora, ambedue le frontiere che separano R da R_1 ed R_3, ottenendo così una nuova carta a F–2 regioni. Se è possibile colorarla con soli cinque colori, lo stesso accadrà per la carta iniziale, poiché R ha tre sole confinanti di cui due dello stesso colore. Ne restano quindi disponibili tre per R (fig. 27).

4) *C'è una regione a cinque vertici*. La stessa difficoltà precedente si può presentare in forma ancor più complessa. Una stessa regione può avere due frontiere differenti in comune con R (la R_2 in fig. 28), oppure due confinanti di R possono avere a loro volta una frontiera comune (come R_2 e R_4 in fig. 29). Nei due casi, R ha due diversi vicini che non confinano tra loro: R_1 ed R_3. Ciò è evidente, perché essi non possono tagliare l'anello formato da R e R_2 in fig. 28 e da R, R_2 e R_4 in fig. 29.

In definitiva, sia in questi due casi che in quelli più semplici in cui non c'è alcun anello, possiamo esser certi che esistono due regioni, R_1 ed R_3, limitrofe di R, che non confinano tra loro (fig. 30). Sopprimiamo, allora,

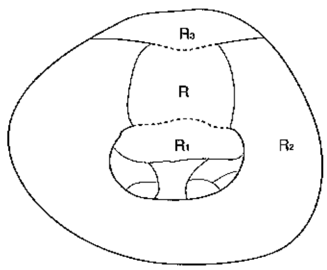


Fig. 27-X.

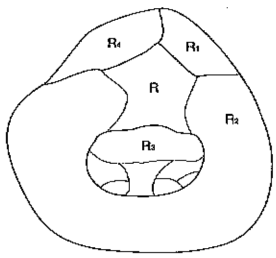


Fig. 28-X.

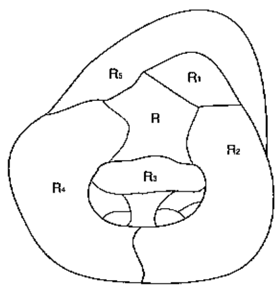


Fig. 29-X.

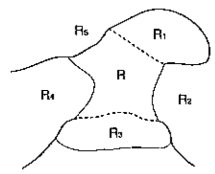


Fig. 30-X.

le frontiere che separano R da R_1 e da R_3 ottenendo una carta ad $F-2$ regioni. Supponiamo, ancora, che per questa siano sufficienti cinque colori e sia a il colore attribuito alla regione $R + R_1 + R_3$, b quello attribuito a R_2, c quello attribuito a R_4 e d, infine, quello attribuito a R_5. Sono stati così utilizzati quattro colori. Ripristinando le frontiere potremo utilizzare il quinto per colorare R_1.

Siamo ora in grado di trarre la conclusione: qualsiasi carta deve rientrare in uno dei quattro casi esaminati, quindi qualsiasi carta può essere semplificata mediante soppressione di una o di due frontiere, ottenendo, così, una carta con meno regioni. Se per questa bastano cinque colori, lo stesso accade per quella iniziale. Reiterando il processo di riduzione quante volte occorre si arriverà ad ottenere una carta con, al più, cinque regioni, per la quale bastano evidentemente cinque colori.

Ma lo stesso accade per ciascuna delle carte successivamente ottenute per riduzione e quindi anche per quella originale.

§ 5-X. Gli imprevisti della matematica: è più facile... il difficile!

Abbiamo dimostrato il teorema dei cinque colori per le carte tracciate su una superficie piana. La stessa dimostrazione, però, vale per le carte tracciate su una superficie sferica, come un globo rappresentante la superficie terrestre.

Le diverse tappe della nostra dimostrazione si possono ripetere pari pari nel caso del globo, perché nel nostro ragionamento non abbiamo mai utilizzato concetti come l'uguaglianza di segmenti o di angoli, né fatto intervenire alcun teorema o idea che non possa applicarsi nel caso della superficie sferica.

I soli concetti utilizzati concernono le posizioni relative di punti, di linee e di superficie, ossia quei concetti che i matematici chiamano *topologici*. E questi sono gli stessi sul piano e sulla sfera.

Non sarebbe la stessa cosa per una carta che fosse tracciata su una superficie a forma di ciambella.

Per fissare le idee, immaginiamo un pianeta non sferico, ma avente la forma di una ciambella di salvataggio, come potrebbero essere gli anelli di Saturno se essi costituissero una massa solida.

Su un tale pianeta sarebbe possibile l'esistenza di *sette regioni aventi, ciascuna, una frontiera in comune con le altre sei*. Per rappresentarle, gli abitanti sarebbero evidentemente costretti ad usare *sette* colori. Quattro colori non sarebbero sufficienti, e neanche cinque; le considerazioni svolte per dimostrare il teorema dei cinque colori non sono adattabili al caso di una superficie torica [5] (così si chiama in geometria la ciambella).

Per convincersene basti questa osservazione: se nel piano abbiamo una linea chiusa e due punti, l'uno interno e l'altro esterno, non è possibile andare dall'uno all'altro senza attraversare la linea (fig. 31). Ciò non è vero nel caso del toro. Se su di esso si traccia una linea chiusa *c* che circondi l'asse, *comunque* si prendano due punti A e B, si può sempre trovare il modo, camminando sopra la superficie torica, di andare da A a B senza attraversare *c* (fig. 32). Ciò rende inapplicabili al toro i ragionamenti fatti per dimostrare i casi 3) e 4) del precedente paragrafo.

Che sette colori siano necessari e sufficienti per stampare le carte toriche è un teorema pienamente dimostrato da tempo, ben prima di quello dei quattro colori per le carte piane e sferiche.

Analogamente è accaduto per altre superficie complicate, come il nastro di Moebius e la bottiglia di Klein (in questi due casi i colori occorrenti sono sei), cosicché si arriva alla constatazione paradossale che l'analisi di superficie geometriche complesse si è rivelata più facile di quella delle superficie semplici.

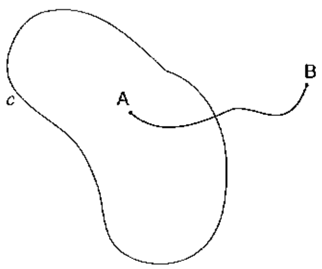


Fig. 31-X.

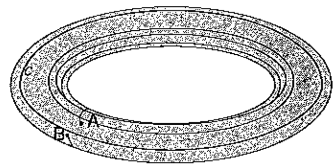


Fig. 32-X.

[5] Si definisce *toro* il solido descritto da un cerchio che ruota attorno ad una retta del suo piano che non l'attraversa. Tale retta è l'*asse* del toro (v. fig. di seguito).