Capitolo IX
La geometria delle api

"Dio geometrizza sempre".
PLATONE

§ 1-IX. Le celle apiarie

Ci sono insetti "geometri". Vengono così chiamati perché nella costruzione delle loro celle "risolvono" problemi di geometria.

La cella, tra le sue varie funzioni, ha anche quella di ricevere l'uovo, che si trasforma gradualmente nell'insetto perfetto ed assicura così la discendenza, la continuità della specie. Alcuni degli insetti geometri edificano le loro costruzioni individualmente, ciascuno per sé; altri, come le api, vivono e costruiscono in società.

Ci occuperemo qui del problema che le api risolvono nella costruzione delle loro celle. Si tratta di un problema di "minimo", cioè del tipo di quelli che noi oggi risolviamo utilizzando prevalentemente *l'analisi infinitesimale*, quella branca della matematica che veniva un tempo denominata *calcolo sublime*. È, dunque, almeno in un certo senso, un problema di *alta matematica* e lascia pensosi e meravigliati la constatazione che l'istinto delle api lo risolva con tanta precisione.

Vediamo di capire in che consiste.

Se osserviamo un'arnia preparata da un apicoltore, vediamo che internamente sono predisposti dei telai che le api completano costruendovi i favi di cera. Ogni favo è composto da alcune migliaia di celle. Queste (fig. 1) orizzontali e fissamente aderenti lateralmente le une alle altre,

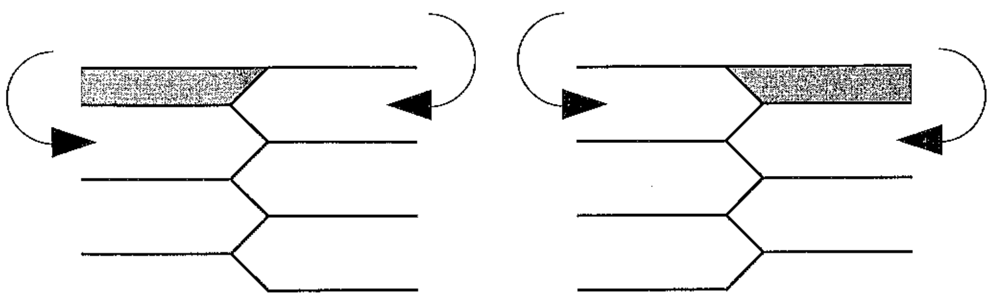


Fig. 1-IX.

sono disposte in due strati, coi fondi combacianti nell'interno e le bocche aprentesi all'esterno da parti opposte. La fig. 1 mostra schematicamente, in sezione, due favi separati da un interspazio nel quale transitano le api. Vi si possono osservare alcune celle a fondi opposti e il modo in cui questi aderiscono.

Nei favi il numero delle celle è di circa 400 per ogni decimetro quadrato, parliamo delle celle per le api operaie, di gran lunga le più numerose (oltre a queste, vi sono nei favi le *celle reali*, destinate alle api regine, *le grandi celle* per i maschi, e le *celle di transizione*, che hanno la funzione di raccordare senza disordine le grandi alle piccole).

La sezione trasversale di una cella è un *esagono regolare*. Come vedremo, questa forma della sezione consente alle api di realizzare una triplice economia: di *spazio*, di *materiale* (la cera necessaria per la costruzione) e di *lavoro*.

L'uovo depositato sul fondo di una cella si schiude tre giorni dopo la deposizione e ne esce la larva; questa cresce rapidamente dal quinto al nono giorno, nutrendosi del particolare cibo messo a sua disposizione dalle api e si costruisce un bozzolo per racchiudervisi e completare la metamorfosi. Le operaie, intanto, chiudono l'imboccatura della cella con un opercolo costituito da un leggero strato di cera mista a polline, molto poroso. Dentro il bozzolo la larva si trasforma in ninfa e questa, infine in insetto perfetto, che, al ventunesimo giorno, si libera del bozzolo, fora l'opercolo ed esce.

La forma grosso modo cilindrica della ninfa e dell'insetto sembrerebbe consigliare, per la cella, la sezione circolare; e questa probabilmente sarebbe stata la scelta se l'ape non fosse un insetto *sociale*. Ma, viceversa, essa vive in comunità di migliaia di individui e ciò rende antieconomica la sezione circolare. Per convincersene basta osservare la fig. 2: un raggruppamento di celle cilindriche lascerebbe degli interspazi inutilizzati fra cella e cella; inoltre, celle contigue non potrebbero avere pareti in comune, con conseguente spreco di spazio, di cera, di lavoro.

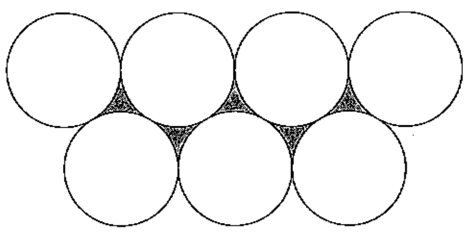


Fig. 2-IX. Se l'ape avesse scelto di costruire celle cilindriche, si sarebbero creati degli interspazi inutili (ombreggiati in figura). Inoltre, due celle contigue aderirebbero solo in minima parte.

Scartata, dunque, la sezione circolare, non rimangono che le sezioni poligonali, ed è anche evidente che queste debbono essere *regolari* [1].

Ora, le sezioni poligonali regolari che possono essere messe l'una adiacente all'altra senza lasciare inutili vuoti sono soltanto tre: quella triangolare, quella quadrata e quella esagonale (fig. 3).

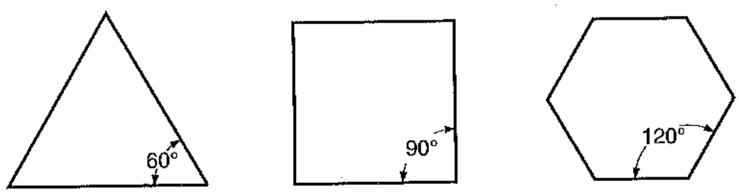


Fig. 3-IX. Le tre sezioni poligonali tra le quali deve cadere la scelta dell'ape.

Le figure 4, 5 e 6 mostrano come, con questi poligoni, si possa *tassellare* perfettamente il piano. La condizione fondamentale è che gli angoli dei poligono possano saturare lo spazio circostante ad un vertice. E questa può essere soddisfatta da sei triangoli equilateri (che hanno angoli di 60°: 6x60°=360°), da quattro quadrati (che hanno angoli di 90°: 4x90°=360°) e da tre esagoni (che hanno angoli di 120°: 3x120°=360°).

In altre parole, l'angolo del poligono regolare che si sceglie per tassellare deve essere sottomultiplo dell'angolo giro, ma nessun poligono diverso dai tre detti possiede questa proprietà [2].

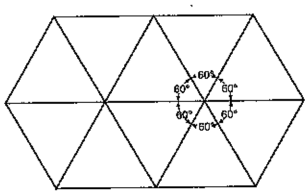


Fig.4-IX.

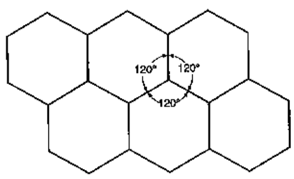


Fig.6-IX.

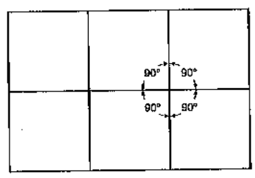


Fig.5-IX.

---

(1) Vedi, più oltre, la nota 3 alla pag. 132

(2) Infatti, la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è n–2 angoli piatti. Pertanto l'ampiezza, in gradi, dell'angolo di un poligono regolare di n lati è $[(n-2)\cdot 180°]/n$.

Se questa è sottomultipla dell'angolo giro, il quoziente

$$360° : [(n-2)\cdot 180°]/n = 2n/(n-2)$$

deve essere un numero intero. Posto $n-2 = k$, il precedente quoziente può scriversi

$$[2\cdot(k+2)]/k = 2 + 4/k$$

ed è evidente che quest'ultima espressione è un intero solo per $k = 1$ ($n = 3$, triangolo), $k = 2$ ($n = 4$, quadrato) e $k = 4$ ($n = 6$, esagono).

Se si adottasse, per esempio, la sezione pentagonale, inevitabilmente si dovrebbero creare degli interspazi indesiderati (fig. 7). In effetti, l'angolo interno del pentagono è di 108° e la somma di tre angoli concorrenti nello stesso vertice è, quindi, di $3 \cdot 108° = 324°$, inferiore all'angolo giro: mancano 36° per arrivare a questo. In conclusione, la scelta delle api deve restringersi a tre sole alternative: la sezione triangolare, quella quadrata e quella esagonale.

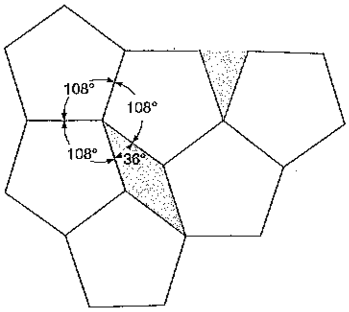


Fig. 7-IX.

Ma di queste tre quale è la migliore?

Dobbiamo tener presente che la cella dovrà contenere il miele prodotto, quindi conviene che, *a parità di superficie* (e quindi di cera e di lavoro impiegato), essa abbia la massima capacità interna possibile. Ricordando che, per un prisma, il volume si ottiene moltiplicando l'*area* di base per l'altezza e l'area laterale moltiplicando il *perimetro* di base per l'altezza, è facile dedurre che la sezione più conveniente è quella che, *a parità di perimetro*, presenta la *massima area*. Indicando con $2p$ il perimetro comune alle tre sezioni tra le quali va operata la scelta, con facili calcoli si ottiene:

$$\text{Area triangolo} = (2p/3)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1/4 = \sqrt{3}/9 \cdot p^2 \simeq 0{,}1924\, p^2$$
$$\text{Area quadrato} = (2p/4)^2 = 1/4 \cdot p^2 \simeq 0{,}2500\, p^2$$
$$\text{Area esagono} = 2p \cdot p\sqrt{3}/6 \cdot 1/2 = \sqrt{3}/6 \cdot p^2 \simeq 0{,}2886\, p^2$$

Dunque, è l'esagono che ha l'area maggiore!

È improbabile che le api abbiano fatto questi calcoli per decidere l'adozione della sezione esagonale. Tuttavia la loro scelta è in accordo con la nostra razionalità!

Che fosse l'esagono il maggiore dei tre poligoni considerati l'avremmo potuto dedurre da un teorema stabilito da Zenodoro [3], senza operare

---

[3] Zenodoro, geometra greco vissuto nel terzo (o forse nel secondo) secolo avanti Cristo, autore di uno scritto *sugli isoperimetri*, nel quale, oltre al teorema enunciato nel testo, stabilì che *se due poligoni piani hanno ugual perimetro ed uno di essi è regolare, questo ha l'area maggiore*.
Ciò giustifica perché la sezione della cella apiaria debba essere regolare (v. pag. 131).
Pare che Zenodoro si sia dedicato al problema degli isoperimetri nel desiderio di sradicare l'errata opinione (allora diffusa, ma forse ancor oggi!) che perimetri uguali racchiudano egual area.
Osserviamo, anche, che in base ai teoremi di Zenodoro, il cerchio è la figura piana di massima area tra tutte quelle di dato perimetro.

alcun calcolo. Questo teorema afferma che *di due poligoni regolari di egual perimetro ha maggior area quello che ha maggior numero di lati.*

§ 2-IX. Un particolare costruttivo proprio delle celle apiarie

Ma la scelta della sezione esagonale non è esclusiva delle api. Anche altri insetti sociali l'adottano, e per gli stessi scopi. Ciò che, invece, rappresenta un particolare costruttivo proprio delle celle apiarie consiste nella conformazione del fondo: la cella prismatica non è terminata e chiusa da una base piana, perpendicolare agli spigoli, bensì da un sistema di tre rombi uguali ed ugualmente inclinati rispetto alle facce, come mostra la fig. 8.

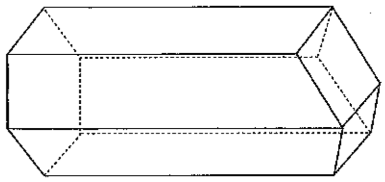
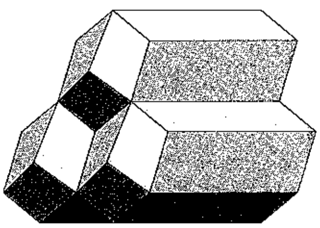


Fig. 8-IX.

In definitiva, quindi, una cella apiaria è formata da sei trapezi che ne costituiscono la superficie laterale e da tre rombi che ne costituiscono il fondo; l'ingresso è un esagono. Nel seguito chiameremo *parte prismatica* la superficie laterale e *parte piramidale* il fondo.



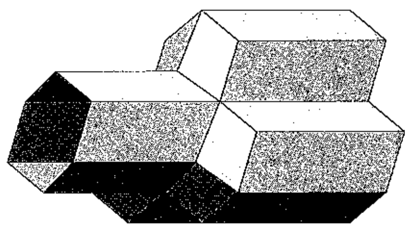


Fig. 9-IX. *Fig. 10-IX.*

Osserviamo, ora, in fig. 9, un gruppo di tre celle delle quali gli ingressi si trovano a destra. Si vede un incavo piramidale formato da tre rombi appartenenti a celle diverse, nel quale può penetrare perfettamente, senza cioè lasciare inutili interspazi, il fondo piramidale prominente, a tre rombi, della cella di fig. 8, il cui ingresso, quindi, si collocherà a sinistra, come poi si vede in fig. 10. È chiaro che l'asse della cella di sinistra sta sulla stessa retta dello spigolo comune alle tre celle di destra.

Un effetto di questo mirabile sistema di incastro delle prominenze piramidali di un lato del favo nelle cavità dell'altro e viceversa è l'estrema solidità della costruzione. Ma non c'è solo questo. La conformazione del fondo, così come l'abbiamo descritta, risolve quello che, per antonomasia, è chiamato il *problema delle api*.

§ 3-IX. Il problema delle api

La fig. 11 mostra un prisma esagonale visto dall'alto. Congiungendo il centro O dell'esagono ABCDEF con i vertici alterni A, C, E, la base superiore del prisma resta divisa in tre rombi uguali, aventi per lato il raggio r dell'esagono e per diagonale maggiore il lato del triangolo equilatero ACE, iscritto nello stesso cerchio che circoscrive l'esagono; quindi, questa diagonale misura $r\sqrt{3}$.

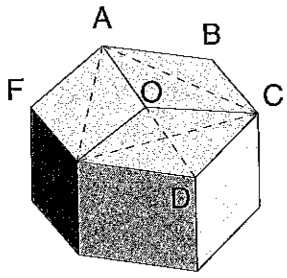


Fig. 11-IX.

Ciò premesso, immaginiamo di segare il prisma mediante tre piani passanti, nell'ordine, per i lati AC, CE, EA del triangolo equilatero ACE. I tre piani siano egualmente inclinati rispetto alla base del prisma; per il resto, l'inclinazione sia del tutto arbitraria (fig. 12). Verranno in tal modo tagliati dal prisma tre tetraedri uguali, aventi per base metà del rombo OABC ed un'altezza, che indichiamo con x, dipendente dall'inclinazione scelta per i piani secanti (fig. 13).

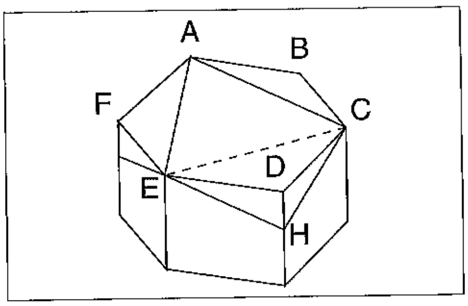


Fig. 12-IX.
Un piano passante per EC ed arbitrariamente inclinato rispetto alla base del prisma stacca da questo il tetraedro di base ECD ed altezza DH = x.
Analogamente, i piani passanti per AC ed AE staccano altri due tetraedri uguali a quello considerato.

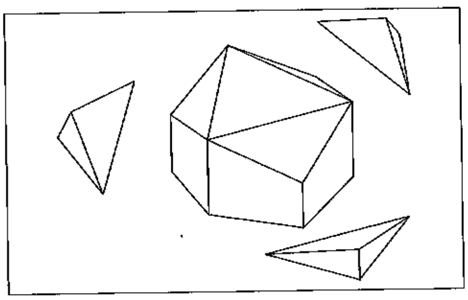


Fig. 13-IX.

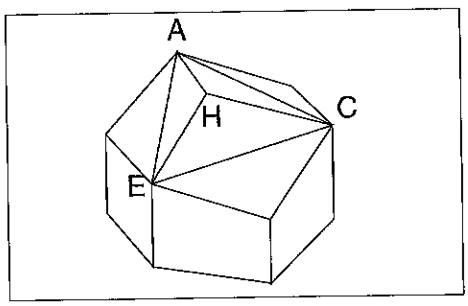


Fig. 14-IX.

Prendiamo, ora, i tre tetraedri ritagliati dal prisma e ricollochiamoli sopra a questo in modo che essi formino una piramide avente per base il triangolo ACE (fig. 14). Il complesso che così si ottiene è un poliedro che ha la stessa configurazione della cella apiaria.

Osserviamo subito che questo poliedro (la cella apiaria) ha lo stesso volume del prisma: operando nel modo descritto abbiamo solo spostato delle parti del prisma da una posizione ad un'altra, quindi il volume complessivo è rimasto invariato. Più precisamente, il risultato finale è quello stesso che si ottiene ruotando di mezzo giro i tetraedri intorno ai lati del triangolo ACE.

Assodato, dunque, che il volume e perciò la capacità interna della cella apiaria è uguale a quello del corrispondente prisma, proponiamoci di stabilire se, nell'operazione descritta, è rimasta uguale anche l'area o se è variata.

Ricordiamo che la superficie del nostro poliedro-cella è composta da sei trapezi e tre rombi; per determinarla dovremo quindi trovare l'area di un trapezio e moltiplicarla per sei e aggiungere al prodotto l'area di un rombo moltiplicata per tre. Riferiamoci alle notazioni di fig. 15 ed osserviamo che, per i trapezi, l'altezza è uguale al lato dell'esagono, quindi a r e le basi sono h e $h-x$ (h = altezza del prisma; x = altezza del tetraedro tagliato). Dunque:

$$\text{Area trapezi} = 6 \cdot r[h + (h - x)]/2 = 3r(2h - x)$$

Per uno dei rombi, la cui area è data dal semiprodotto delle diagonali, osserviamo che una diagonale è $r\sqrt{3}$ indipendentemente dall'inclinazione del piano secante, mentre l'altra possiamo determinarla come ipotenusa del triangolo rettangolo ABC del quale il cateto AB è r ed il cateto BC è $2x$. Quindi:

$$AC = \sqrt{r^2 + (2x)^2} = \sqrt{r^2 + 4x^2}$$

E allora:

$$\text{Area rombi} = 3 \cdot [(r\sqrt{3}) . \sqrt{r^2 + 4x^2}]/2$$

In definitiva, l'area S del nostro poliedro-cella risulta:

$$(4)\ S = 3r(2h - x) + (3 \cdot r\sqrt{3} \cdot \sqrt{r^2 + 4x^2})/2$$

Come si vede, contrariamente a quel che avviene per il volume, l'area dipende dall'altezza x a cui viene operato il taglio del prisma e varia con questa.

Se immaginiamo che le api abbiamo un'intelligenza di tipo e livello umano, dopo questa constatazione esse si porranno immediatamente il problema di determinare la x nel modo più conveniente. Ossia si proporranno di *trovare, fra tutte le celle esagonali a fondo piramidale, quella di minima superficie.*

È chiaro quanto sia importante per le api adottare per i tre rombi di chiusura l'inclinazione corrispondente alla minima superficie: ciò consente la massima economia possibile di cera e di lavoro senza alcuna riduzione del volume esterno e quindi della capacità interna della cella.

La risoluzione matematica del problema enunciato richiede qualche conoscenza di analisi infinitesimale e ciò va oltre i limiti che ci siamo imposti. Chi conosce il calcolo delle derivate troverà facilmente che la superficie minima si ottiene per $x = (r\sqrt{2})/4$, a cui corrisponde un'ampiezza di 109° 28' dell'angolo maggiore del rombo.

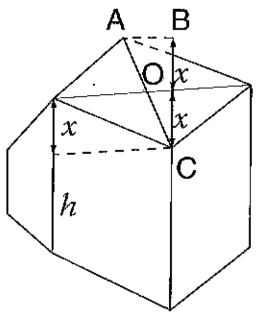


Fig. 15-IX.

§ 4-IX. Un po' di storia

Per quanto ci è noto, il primo matematico che si sia occupato delle celle apiarie fu Pappo [4].

Ecco quel che scriveva Pappo della «previdenza geometrica» delle api:

«Dio, o valentissimo Megezio, diede agli uomini una conoscenza altissima e perfettissima della scienza e delle matematiche, ma ne distribuì una parte anche agli animali irragionevoli. Egli provvide dunque che gli uomini ragionevoli eseguissero ogni cosa per mezzo di ragionamenti e di dimostrazioni, mentre a ciascuno dei rimanenti animali privi di ragione, concesse di ottenere per mezzo di una disposizione naturale, quello che è opportuno e utile alla vita. E si potrebbe apprendere che questo è stato provveduto in altre numerosissime specie di animali, ma non minimamente nelle api; nelle quali infatti se è mirabile la disciplina e l'obbedienza verso le regine, è assai più mirabile la diligenza e la pulizia nel raccolto del miele, la sua custodia, la previdenza e l'economia. Persuase infatti, come a me sembra, dagli dei, a preparare per gli uomini esperti nelle arti liberali un saggio dell'ambrosia, esse non vorrebbero disperderlo nella terra o nel legno o in qualche altra deforme e disordinata materia: ma tra i più dolci fiori della terra raccolti i più belli, preparano da questi le celle destinate ad accogliere il miele, chiamate alveoli, tutte tra loro uguali, simili e aderenti, aventi la figura di un esagono.

[4] Pappo di Alessandria, matematico greco vissuto nel terzo secolo dopo Cristo, autore di una preziosa raccolta di disparati argomenti di aritmetica, geometria e meccanica.

Ma vediamo che esse fanno questo secondo una certa previdenza geometrica. Le api di fatto, ritenevano assolutamente di dover comporre e collegare tra loro le figure secondo i lati, in modo che corpi eterogenei, cadendo negli interstizi non guastassero i loro lavori. E tre figure potevano soddisfare a questa condizione. Regolari, dico, equilatere ed equiangole: le irregolari non andavano a genio alle api. Dunque il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono, senza supplementi, potevano connettersi secondo lati comuni. [omissis] E le api seppero soltanto questo, utile per esse, cioè che l'esagono è maggiore del triangolo e del quadrato e può contenere più miele, a parità di materia impiegata per il dispositivo, ma noi che riteniamo di possedere una parte di sapienza maggiore di quella delle api, ricercheremo qualche cosa di più sottile. Infatti delle figure piane aventi ugual perimetro, equilatere ed equiangole, è sempre maggiore quella che ha più angoli, e massima tra tutte il cerchio, quando abbia lo stesso perimetro».

Come risulta da questo scritto, Pappo studia il problema delle api prendendo in considerazione soltanto le sezioni delle celle. Sembra da ciò che egli non conosca la forma piramidale del fondo e consideri le celle esclusivamente prismatiche e limita a queste forme la classe di figure tra le quali si deve scegliere la più conveniente.

Osserva che le sezioni considerate devono fornire una divisione del piano in poligoni regolari uguali, quindi si possono avere soltanto triangoli equilateri, quadrati o esagoni regolari. Infine, giustifica la scelta dell'esagono come quella che consente la massima capacità della cella.

La forma completa delle celle apiarie fu studiata da Maraldi [5] nel 1712. Egli descrisse per primo la parte piramidale del fondo e misurò gli angoli dei rombi.

La misurazione sopra pareti di cera non può consentire l'esattezza di una misurazione fatta, per esempio, su un diedro cristallino. Inoltre, una costruzione geometrica eseguita da un organismo vivente potrà presentare una regolarità mirabile e, tuttavia, mai assoluta. Ciononostante Maraldi, attraverso un numero grandissimo di misurazioni, arrivò ad un risultato stupefacente: l'angolo maggiore del rombo risultò di 109° 28' che, con l'arrotondamento ai primi, è proprio il risultato che l'uomo ottiene attraverso calcoli astrusi e complicati.

Ma procediamo con ordine.

Reaumur [6], sulla base delle misurazioni del Maraldi, e intuendo come

---

(5) Giacomo Filippo Maraldi (1665-1729), naturalista ed astronomo.

6) Antonio Renato Reaumur (1683-1757), fisico e naturalista francese. Come fisico è celebre per aver adottato la scala ottantigrada del termometro, come naturalista per aver scritto una *Memoria relativa alla storia degli insetti*, che gli valse l'appellativo di *Plinio degli insetti* (in riferimento a *Plinio il Vecchio*, che scrisse una *Storia Naturale* in 37 libri).

l'aver le api adottato quella inclinazione per tutte le celle dovesse corrispondere ad una esigenza di economia, propose la questione a matematici del suo tempo. Ma leggiamo cosa scrisse Reaumur in proposito: «Le api sembra abbiano risolto un problema che concentra condizioni tali da farlo riguardare come di difficile soluzione a fior di geometri. Esso può essere enunciato così: "Essendo data una quantità di cera, formarne delle celle uguali, di capacità determinata, ma la più grande possibile in rapporto alla quantità di materia impiegata, e le celle siano disposte in modo tale da occupare nell'arnia il minimo spazio possibile".

Per soddisfare quest'ultima condizione (occupare nell'arnia il minimo spazio possibile) le celle devono confinare in modo che non resti tra esse alcun spazio angolare, alcun vuoto da riempire. Le api vi hanno soddisfatto e nello stesso tempo hanno soddisfatto alla prima condizione, costruendo dei cannelli a sei facce uguali, dei cannelli esagonali. Esse avrebbero potuto fare delle celle con sole tre facce uguali o delle celle con sole quattro facce uguali, fare, cioè, delle celle la cui sezione trasversale fosse stato un triangolo equilatero o un quadrato, o anche delle celle in parte triangolari e in parte quadrate; ma queste che, come quelle esagonali, sarebbero state a facce uguali e non avrebbero lasciato alcun vuoto tra esse, se avessero avuto, ciascuna, la stessa capacità di ciascuna cella esagonale, non avrebbero potuto essere costruite con una altrettanto piccola quantità di cera. Cosa, questa, conosciuta da gran tempo e che ha fatto ammirare a Pappo, geometra di rango elevato tra gli antichi, la determinazione delle api di adottare la configurazione esagonale».

Dopo altre considerazioni di varia natura, Reaumur così conclude:

«Ma al fine di risparmiare spazio e materia le api hanno fatto qualche altra cosa ancora: hanno composto i loro favi su due strati di alveoli girati verso lati opposti (in modo da mettere in comune anche il fondo). Se convenisse alle api che il fondo di ciascuna cella fosse piatto, che ciascuna cella fosse esattamente un cannello esagonale aperto ad una estremità e chiuso dall'altra, niente sarebbe più semplice della disposizione dei due strati di celle [...]. Ma diremo subito che questi fondi piatti, come è dimostrato, non s'accordano al maggior risparmio possibile di cera [...]. D'altro canto, gli usi ai quali le celle sono destinate richiederebbero che esse fossero, ciascuna, a fondo più stretto del resto, richiederebbero la terminazione a punta. È la parte più difficile del problema, che è stato risolto per esse da Colui che le ha così bene istruite. Ogni cella è un cannello esagonale posto su una base piramidale. Il fondo di ciascuna cella è un angolo solido formato dalla riunione di tre parti, di tre lamelle quadrilatere di cera [...]. Convinto che le api adottano il fondo piramidale che merita di essere preferito, ho supposto che il motivo, o uno dei motivi, che le ha determinate era il risparmio di cera; che tra le celle della stessa capacità ed a fondo piramidale quella che poteva essere costruita con il minor quantitativo di cera era quella in cui ciascun rombo avesse due angoli di circa 110° e due angoli di circa 70°. Senza alcun accenno all'ampiezza di questi angoli, dopo aver fatto osservare la disposizione dei rombi a M. Koenig, degno allievo in Matematica e in Filosofia dei Bernoulli e di Volf, gli proposi di risolvere il seguente problema:

Tra tutte le celle [di dato volume] *esagonali* [con parte prismatica di data base], *a fondo piramidale composto di tre rombi uguali, determinare quella che può essere costruita con il minimo di materiale*».

Koenig risolse il problema con i metodi dell'analisi infinitesimale, ma, per non aver spinto abbastanza avanti il suo calcolo, diede per l'angolo ottuso del rombo il valore di 109° 26', cioè con errore di due primi rispetto al valore esatto (109° 28').

Il problema fu proposto anche ad altri matematici, tra i quali Mac Laurin [7] che rilevò e corresse l'errore di Koenig, trovando, con sole considerazioni di geometria elementare [8] il valore di 109° 28' 16",... che arrotondato ai primi, corrisponde esattamente alle misurazioni di Maraldi.

Da notare che anche Mac Laurin, in un primo tempo, aveva ottenuto 109° 26'. Ma questo risultato non lo convinceva: era persuaso che avessero ragione le api con i loro 109° 28' e torto lui con i suoi 109° 26'. Nella vicenda si inserì un particolare da romanzo: in quei giorni una nave era andata a urtare contro certi scogli ed era colata a picco. Dal naufragio si era salvato, insieme ad altri, l'ufficiale di rotta, che dovette però rendere conto dell'errore di aver segnato per la nave la rotta sbagliata, conducendola alla catastrofe. Ma i calcoli dell'ufficiale, esaminati da un'apposita commissione, risultarono esatti. Ovviamente, il caso suscitò scalpore. La conclusione era paradossale: calcoli esatti, ma nave a picco!

Ci doveva pur essere una causa della contraddizione. E la causa fu trovata: erano errate le tavole dei logaritmi che l'ufficiale di rotta aveva usato per i suoi calcoli. Quando Mac Laurin, che seguiva con curiosità lo svolgersi del processo, venne a sapere di queste tavole controllò quelle da lui utilizzate per calcolare l'angolo delle api e scoprì che erano le stesse dello sfortunato ufficiale. Subito munitosi di altre tavole, questa volta esatte, rifece i calcoli e trovò che avevano ragione le api: il risultato giusto era proprio 109° 28'.

---

(7) Colin Mac Laurin (1698-1746), scozzese, allievo di Newton. Al suo nome è intitolata una celebre serie che si incontra in analisi matematica.

(8) La bella risoluzione sintetica di Mac Laurin, per chi voglia gustarla, si trova esposta in: Italo Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, Milano, Hoepli, 1967, p. 559 e segg.