

# Periodico di Matematica

**PER  
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVI - Serie IV – volume III (3-4)  
dicembre 2021**

A cura di

**Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

Edizioni



AFSU



## *Обращение к российскому народу*

Трагические события войны на Украине и быстрая реакция всех миролюбивых сил мира доказывают, что ожидания и воля народа — очень далёки от решений, принятых теми людьми, которые угнетают других, пользуясь своей политической властью.

Нам было приятно узнать, что многие граждане России мужественно высказались против этой несправедливой войны: в частности, так поступили российские учёные и академики, подписавшие обращение, опубликованное на Веб-сайте «Троицкий Вариант» 24-ого февраля сего года (info@trv-science.ru).

Оппозиция к любой форме войны, которую выражают российские деятели культуры и учёные, подтверждает дух международного сотрудничества, который всегда вдохновлял культуру вообще, и науку в частности, так как она не признаёт никаких разделений — ни этнических, ни языковых, ни национальных.

Мы хотим выразить нашу поддержку тем российским учёным и научным журналистам, которые в эти дни выразили своё несогласие со вторжением на Украину.

Важно, чтобы российский народ тоже понял то, что на самом деле происходит, чтобы он всеми силами противостоял правительственным решениям, которые могут погубить и сам российский народ, и всю планету, если война примет мировой масштаб.

Пусть Бог спасёт Россию и всех нас!

Инженер Лука Никотра

Ответственный редактор журнала «Periodico di Matematica»

(«Журнал Математики»).

Председатель Ассоциации «Искусство и Наука».

## *Appello al popolo russo*

I tragici eventi della guerra in Ucraina e le pronte reazioni di tutto il mondo pacifico dimostrano quanto lontane, da scelte operate da chi detiene in maniera oppressiva il potere politico, siano le aspettative e volontà del popolo. Apprendiamo con soddisfazione delle coraggiose prese di posizione contro questa guerra ingiusta da parte di molti russi e in particolare degli intellettuali e accademici russi nell'appello pubblicato sul sito Troickij variant lo scorso 24 febbraio (info@trv-science.ru).

L'opposizione, ad ogni forma di guerra, da parte degli intellettuali e della comunità scientifica della Russia conferma lo spirito di collaborazione internazionale che è sempre stata l'anima della cultura e della scienza in particolare, che non conosce divisioni né etniche né linguistiche né nazionali. Desideriamo esprimere la nostra vicinanza agli scienziati e giornalisti scientifici russi che in questi giorni hanno fermamente espresso il loro dissenso verso l'invasione dell'Ucraina. È importante che anche il popolo russo comprenda quanto realmente sta accadendo, affinché si opponga con tutta la sua forza a scelte governative che possono portare alla sua rovina e a quella dell'intero pianeta, ove il conflitto assumesse dimensioni mondiali.

Dio salvi la Russia e tutti noi.

Dr. Ing. Luca Nicotra

Direttore responsabile del «Periodico di Matematica»

Presidente di A.P.S. "Arte e Scienza"

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

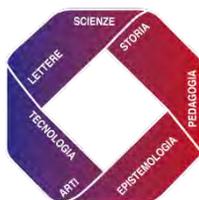
# PERIODICO DI MATEMATICA

PER  
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Fondato da Davide Besso nel 1886,  
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri  
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVI - Serie IV - Volume III (3-4)  
Dicembre 2021



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

### **Comitato Direttivo**

Franco Eugeni  
Ferdinando Casolaro  
Giovanni Catalani  
Antonio Lungo  
Antonio Maturo  
Luca Nicotra  
Renata Santarossa  
Alberto Trotta

### **Comitato Scientifico**

Giuseppe Anichini (Firenze)  
Gian Italo Bischi (Urbino)  
Giordano Bruno (Roma)  
Buonocore Aniello (Napoli)  
Ferdinando Casolaro, (Napoli)  
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)  
Mauro Cerasoli (L'Aquila)  
Giuseppe Conti (Firenze)  
Fernando Di Gennaro (Teramo)  
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)  
Giangiacomo Gerla (Napoli)  
Stefano Innamorati (L'Aquila)  
Antonio Lungo (Napoli)  
Raffaele Mascella (Teramo)  
Antonio Maturo (Chieti)  
Fabrizio Maturo (Caserta)  
Mario Mandrone (Napoli)  
Pietro Nastasi (Palermo)  
Luca Nicotra (Roma)  
Canio Noce (Salerno)  
Nicla Palladino (Perugia)  
Salvatore Rao (Napoli)  
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)  
Renata Santarossa (Napoli)  
Ezio Sciarra (Chieti)  
Salvatore Sessa (Napoli)  
Massimo Squillante (Benevento)  
Luca Tallini (Teramo)  
Alberto Trotta (Salerno)  
Ugo Vaccaro (Salerno)

### **Copertina e progetto grafico**

Luca Nicotra

### **Direzione e redazione**

*Direttore responsabile:*

Luca Nicotra

*Direttori di redazione:*

Franco Eugeni  
Via Lucania 1 l.  
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)  
cell. 338 9644305  
[eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com).  
Ferdinando Casolaro  
Via Camaldolilli n. 1B  
80128 Napoli- cell. 347 1960693  
[ferdinando.casolaro@unina.it](mailto:ferdinando.casolaro@unina.it)  
Luca Nicotra  
Via Michele Lessona 5  
00134 Roma- cell. 340 5065616  
[luca.nicotra1949@gmail.com](mailto:luca.nicotra1949@gmail.com).

*Rivista di proprietà di:*

Accademia di Filosofia delle  
Scienze Umane - Zona Industriale  
Colleranese - 65021 Giulianova  
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2021 Edizioni AFSU -  
Teramo - ISSN Online: 2612-6745  
® Reg. Versione online n.695/2019  
del 19 luglio 2019 e Versione  
cartacea n.695/2021 del 3 giugno  
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati  
Gli scritti apparsi sulla Rivista  
possono essere pubblicati altrove  
purché se ne dichiarino la fonte.

*Segreteria di redazione:*

Giovanna Della Vecchia (Napoli)  
[giovanna.dellavecchia@gmail.com](mailto:giovanna.dellavecchia@gmail.com)

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) [giovanna.dellavecchia@gmail.com](mailto:giovanna.dellavecchia@gmail.com). Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, ([eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com)) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. ([www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/](http://www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/)).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito [www.afsu.it](http://www.afsu.it).

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale edita dall'AFSU e distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



## PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

## AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

[https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template\\_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc](https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc)

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

## SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

## AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

## INDICE

### *Articoli*

Editoriale	7
Luca Nicotra	11
<i>Il nuovo corso del «Periodico di Matematica»: origini e riflessioni</i>	
Mariarosaria Cuomo	17
<i>La città di Agerola</i>	
Ferdinando Casolaro	19
<i>Quali conoscenze di geometria nella scuola di oggi?</i>	
Andrea Bertoni	37
<i>Imparare la matematica giocando</i>	
Loredana Biacino	55
<i>Successioni geometriche e dintorni</i>	
Giuseppe Conti, Raffaella Paoletti, Alberto Trotta	79
<i>La Geometria delle Cupole Geodetiche</i>	
Marco e Bruna D'Errico	99
<i>L'insegnamento dei numeri naturali nella scuola secondaria di I grado</i>	
Ferdinando Di Martino, Salvatore Sessa	131
<i>L'uso dello spreadsheet nell'insegnamento della geom. analitica</i>	
Franco Eugeni, Raffaele Mascella	153
<i>La geometria: rileggiamone i fondamenti. Parte I</i>	
Antonio Fontana	177
<i>Variazioni sul teorema di Pitagora</i>	
Giangiaco Gerla	199
<i>Ma i punti esistono?</i>	

Veronica Bitonti, Francesco Laudano <i>L' utilità della geometria euclidea</i>	221
Nicla Palladino, Giulia Betani <i>Spirografo, simmetrie, moti composti</i>	237
Bonaventura Paolillo <i>Incommensurabilità angolare in classe: un nuovo approccio didattico</i>	255
Carlo Toffalori <i>La geometria in Dante Alighieri</i>	271
Luigi Tomasi <i>Dalle congetture alle dimostrazioni in geometria</i>	281
 <i>Profili biografici degli autori</i>	 299

## *Editoriale*

A cura del Direttivo della Mathesis Napoli "Aldo Morelli" e  
della Direzione dell'AFSU

Il presente fascicolo, volume doppio n. 3-4 dicembre 2021, raccoglie una prima parte dei lavori organizzati e svolti nell'anno solare 2021 dall'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" in collaborazione con l'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU) e l'associazione Mathesis Abruzzo.

Causa pandemia, le attività della nostra associazione sono state limitate al Convegno sull'insegnamento della Geometria svoltosi in due fasi: un primo incontro a luglio in modalità online ed un secondo incontro a settembre in doppia modalità online-presenza, ospitati nella cittadina di Agerola al Campus Principe di Napoli, la Prima Università Gastronomica in Italia e Centro di Alta Formazione Universitaria.

In particolare, tra le altre iniziative saltate, non è stato possibile concludere la XIII edizione dei Giochi matematici per la Scuola, Premio "Aldo Morelli" e di conseguenza non si è potuto espletare l'annuale Convegno a Castellammare di Stabia "Studenti in cattedra, docenti nei banchi", nel cui ambito sono premiati i vincitori dei Giochi.

L'attività è ripresa regolarmente per il corrente anno scolastico 2021-2022 e si concluderà con il Convegno per la Premiazione dei vincitori nell'ultima settimana del mese di maggio, come di consueto, a Castellammare di Stabia.

Relativamente al Convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?”, durante le due fasi di luglio e settembre sono intervenuti in qualità di relatori 35 docenti che hanno inviato il proprio contributo cartaceo ai fini della pubblicazione agli atti per un totale di circa 600 pagine. Pertanto si è ritenuto opportuno suddividere la raccolta in due fascicoli, una prima parte nel presente ed una seconda parte che sarà pubblicata nel prossimo numero.

A tal proposito, il nostro contratto con l’editore prevede la pubblicazione di due numeri cartacei che i nostri soci riceveranno per posta ordinaria e due numeri online, dei quali si può chiedere anche il contenuto cartaceo direttamente all’editore.

Di seguito le attività già approvate dal Consiglio direttivo per l’anno 2022, a cui si aggiungeranno altre iniziative in itinere:

1. *“Due giorni per la Scuola su Matematica, Filosofia e Letteratura”* all’ITIS “Galileo Ferraris” di Napoli, sede legale dell’associazione Mathesis Napoli “Aldo Morelli”, nei giorni 18-19 febbraio 2022.

2. *XIV° Edizione dei Giochi matematici per la Scuola “Premio Aldo Morelli”*, a cura dell’associazione “Mathemare” di Castellammare di Stabia. I Giochi si svolgeranno con una prima fase selettiva, che si terrà il 18 febbraio all’interno della propria scuola ed una seconda fase venerdì 18 marzo. La Premiazione dei vincitori delle gare si terrà all’interno dell’annuale Convegno “Studenti in cattedra, docenti nei banchi” dal 27 al 29 maggio 2022.

3. *VIII° Simposio “Bellezza e fascino della Matematica” sul tema “Dati e Previsioni nell’istruzione STEM”* a cura

dell'associazione "Matematica e Natura" di L'Aquila, che si terrà dal 7 al 10 aprile 2022, presso la Sala Consiliare di Roccaraso, con il patrocinio dello stesso Comune. Il Simposio sarà anche Corso di Formazione per i docenti della Scuola secondaria di II grado, certificato da APAV (ente accreditato al MIUR).

4. *II° Convegno AFSU-Mathesis Napoli*, in continuità con la I° edizione "Quale Geometria per la Scuola di oggi?" tenutosi nel 2021 ad Agerola (Na), a cura dell'associazione "Aldo Morelli" di Napoli e dell'accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU) di Teramo. Come per il 2021, il Convegno si svolgerà in due fasi - metà luglio e metà settembre 2022 - presso la Sala Consiliare di Roccaraso con il patrocinio dello stesso Comune, su tema da definire.

5. Collaborazione all'organizzazione del *IV° Congresso nazionale della Federazione Italiana Mathesis* che si svolgerà a novembre 2022 in sede da destinarsi.



Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli"  
Associazione Mathesis Abruzzo



AFSU Accademia Filosofia e Scienze Umane

## I CONVEGNO AFSU-MATHESIS NAPOLI A. MORELLI

# Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?

14-15 luglio 2021

8-9-10 settembre 2021

Un omaggio al prof. Franco Eugeni in occasione dell'ottantesimo compleanno

La domanda/ titolo rappresenta il nodo centrale del convegno. Essa potrebbe essere riformulata al seguente modo  
*quali proposte si possono avanzare per quel che riguarda l'insegnamento della geometria di domani?*

- La stessa domanda si scompone in:
- che cosa insegnare in geometria?
  - come insegnare la geometria?
  - quali relazioni stabilire tra la geometria, le altre parti della matematica e le altre discipline?
  - quale formazione è richiesta agli insegnanti?

### Relatori

Andrea Bertoni	Loredana Biacino
Luigi Boscaïno	Primo Brandi
Ferdinando Casolaro	Onofrio Casoria
Giuseppe Conti	Marco D'Errico
Carlo De Michele	Giovanna Della Vecchia
Ferdinando Di Martino	Franco Eugeni
Antonio Fontana	Giangiacoïno Gerla
Cesare Labianca	Francesco Laudano
Domenico Lenzi	Antonio Maturo
Pierpaolo Palka	Nicla Palladino
Luna Pisa	Alessandra Rotunno
Salvatore Sessa	Roberta Salata
Anna Salvadori	Carlo Toffalori
Alberto Trotta	Ilaria Veronesi
Bitonti Veronica	Gianni Vincenzi

### Comitato organizzatore

Loredana Biacino  
Rosa Buonanno  
Aniello Buonocore  
Ferdinando Casolaro  
Mariarosaria Cuomo  
Marco D'Errico  
Ferdinando Di Martino  
Giangiacoïno Gerla  
Antonio Maturo  
Alessandra Rotunno  
Umberto Salzano  
Renata Santarossa  
Salvatore Sessa



Con il Patrocinio del Comune di Agerola e del Dip. DEMM dell'Università del Sannio  
Con il contributo della Colonia Montana "Principe di Napoli" di Agerola

# *Il nuovo corso del «Periodico di Matematica»: origini e riflessioni*

Luca Nicotra\*

\*Ingegnere. Presidente dell'Associazione "Arte e Scienza", Direttore responsabile di: «Periodico di Matematica», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «ArteScienza»;  
[luca.nicotra1949@gmail.com](mailto:luca.nicotra1949@gmail.com).



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.048

Desidero anzitutto ringraziare gli organizzatori del Convegno per l'invito rivoltomi e mi scuso per non poter essere presente a causa di problemi familiari.

Mi sia concesso porgere un saluto a tutti i presenti e in particolare al carissimo amico Franco Eugeni che, precedendomi di otto anni nel «cammin di nostra vita», è per me anche un luminoso faro sotto molti punti di vista: *in primis* quello umano e non da meno quello scientifico e di uomo non di "un sol libro", volendo utilizzare una felice espressione del compianto caro amico prof. Piero Trupia, per indicare l'uomo non fossilizzato nella sua disciplina professionale, ma aperto a una più gratificante visione interdisciplinare e olistica.

Il mio invito al Convegno è certamente giustificato dalla mia carica di direttore responsabile del «Periodico di Matematica» e pertanto spenderò soltanto qualche parola su questa felice iniziativa editoriale, presa assieme a Franco e al caro Ferdinando Casolaro.

Come è ben noto, le forme tradizionali di comunicazione scientifica sono state le pubblicazioni edite dalle accademie o i libri stampati (nell'Antichità classica preceduti dai rotoli di papiro). Spesso, però, gli scienziati hanno avvertito la necessità di una comunicazione più dinamica e interattiva, che consentisse la discussione, lo scambio di idee, a volte un aiuto per il prosieguo di una ricerca giunta a un punto di stallo. In tal senso vanno considerati gli scambi epistolari fra scienziati, di cui è ricca la storia della scienza, anche nell'Antichità classica (un esempio eclatante sono le epistole di Archimede). A queste due forme l'avvento della Rivoluzione industriale, che aveva aumentato l'attenzione verso i progressi delle conoscenze scientifico-tecnologiche, aggiunse la creazione di circoli e riunioni scientifiche nei paesi più progrediti d'Europa. In particolare in Italia, prima ancora nell'unificazione nazionale, si ebbe la creazione dell'«Unione degli Scienziati Italiani», i quali tennero la loro prima riunione nel 1839 a Pisa e proseguirono negli anni successivi con cadenza annuale fino alla nona del 1847 a Venezia e poi, successivamente alla proclamazione del Regno d'Italia, per terminare con la dodicesima nel 1875 a Palermo, dove fu stabilito che sarebbero continuate nell'ambito della costituzione della «Società Italiana per il Progresso delle Scienze». A queste forme di comunicazione scientifica si aggiunsero, nella prima metà del secolo XIX, varie riviste

scientifiche, sulle quali non mi soffermo, rivolte a un pubblico di scienziati, quindi a livello di ricerca. La prima rivista, invece, dedicata alla didattica della matematica, ma a livello universitario, è certamente il glorioso «Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiane», fondato a Napoli nel 1863 da Giuseppe Battaglini, in collaborazione con Vincenzo Janni e Nicola Trudi, tutti dell'Università "Federico II". L'unificazione nazionale del nostro Paese accentuò la percezione, già emersa nella Riunione degli Scienziati Italiani del 1845 a Napoli, della necessità di scambi di esperienze e idee a livello didattico e pedagogico fra professori di scuole secondarie di diverse parti d'Italia. Nacque così una nuova interessante forma di giornalismo matematico a carattere elementare, inaugurata nel giugno del 1873 con il primo numero del «Periodico di Scienze Matematiche e Naturali per l'Insegnamento Secondario», curato da Angelo Armenante, Eugenio Bertini, Davide Besso, Enrico De Montel, Luigi Pinto, Francesco Rodriguez, Leone De Sanctis. A questa Rivista ne seguirono altre: «Rivista di Matematica Elementare» di Giovanni Massa, «Il piccolo Pitagora» di Alberto Cavezzali e il «Periodico di Matematica» fondato a Roma da Davide Besso nel 1866, l'anno dopo la cessata pubblicazione della «Rivista di Matematica Elementare», di cui ereditò le medesime finalità. A Besso si affiancò Aurelio Lugli (1853-1896), che ne sarà l'effettivo direttore e proprietario dal 1891 al 1896, anno della sua morte. Gli successe nella direzione Giulio Lazzeri (1861-1935) dal 1896 al 1918, anno XXXIII e anche ultimo della Rivista con la serie III. Nel 1921, come è ben noto, Federigo Enriques riprese la pubblicazione, ma cambiando leggermente

il titolo nella nuova testata «Periodico di Matematiche». Credo sia superfluo ricordare ai presenti l'importanza che tale Rivista ha avuto nell'ambito della didattica delle matematiche elementari e della formazione dei docenti di matematica. Fra l'altro, nel 1896, all'interno del «Periodico di Matematica», comparve per la prima volta il «Bollettino dell'Associazione Mathesis», fondata l'anno precedente, nel 1895, con gerente responsabile Giovanni Frattini e presidente Rodolfo Bettazzi. Il «Periodico di Matematica» diventò così l'organo ufficiale della Mathesis.

Dopo la pubblicazione, nella rivista «ArteScienza» (numero 10, dicembre 2018) della prima parte del mio saggio *Federigo Enriques: tra filosofia e matematica* e del saggio *Cinquant'anni di attività della Mathesis tra evoluzione politica e sviluppo scientifico: dal 1959 al 2008* di Ferdinando Casolaro e Luca Cirillo, dove si accenna al «Periodico di Matematiche» e alla sua precedente testata, l'amico Franco Eugeni, volendo contrapporre all'attuale gestione del «Periodico di Matematiche», da molti notoriamente contestata, una parallela rivista che già nel nome rappresentasse tale contrapposizione, ebbe la felice idea di riprendere l'originaria testata «Periodico di Matematica». Essendo stata, quest'ultima, di proprietà della Zanichelli, mi rivolsi al prof. Lorenzo Enriques, nipote di Federigo e attuale amministratore delegato della Zanichelli assieme al fratello Federico (coi quali da diversi anni sono in amichevole contatto), per avere conferma della cessazione di quella testata.

Così a distanza di 100 anni, nel 2019, l'antico «Periodico di Matematica» è risorto come anno XXXIV e serie IV, per opera di Franco Eugeni, dello scrivente e di Ferdinando Casolaro,

con il fine di allargare il mondo culturale dei docenti di scuola secondaria secondo una impostazione più in linea con i tempi attuali. Il campo che si apre è quello, già indicato da Federigo Enriques, delle “Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore”, ampliato alla “Fisica Elementare da un Punto di Vista Superiore” unitamente alla divulgazione sia delle conoscenze astronomiche sia delle nuove frontiere della fisica quantistica. In tempi come gli attuali, dominati in tutti gli strati della società dagli strumenti e servizi informatici, è parso doveroso estendere il dominio di applicazione del rinnovato «Periodico di Matematica» anche all’“Informatica Elementare da un Punto di Vista Superiore”, con particolare attenzione alla tematica della protezione dell’informazione e alle sue molteplici applicazioni alla vita sociale e produttiva dell’uomo. Relativamente a tutte queste discipline occorre comprendere anche la critica dei fondamenti, l’epistemologia e la storia.

Le tematiche che il nuovo corso del «Periodico di Matematica» intende affrontare sono pertanto molto più ambiziose di quelle dell’antica testata, travalicando abbondantemente i confini propri della matematica in senso stretto. Già l’Enriques nel 1921, con la sua straordinaria apertura interdisciplinare, aveva avvertito la necessità di andare un po’oltre i temi affrontati nel vecchio «Periodico di Matematica», dandone un segno visibile nel cambiamento del titolo della rivista in «Periodico di Matematiche», per includere anche le applicazioni della matematica.

In verità, per il nuovo corso del «Periodico di Matematica» da noi voluto e curato (la serie IV), la vecchia denominazione risulterebbe alquanto impropria o quanto meno inadatta. Mi

preme evidenziare ciò, facendo presente che soltanto per i motivi anzidetti che hanno portato alla decisione di far rinascere l'antica testata, ne è giustificabile l'utilizzo, ma non per il carattere della nuova rivista che "non vuole e non deve" essere esclusivamente matematico in senso stretto. Soltanto in tale spirito ho accettato la direzione della rivista, in armonia con la mia mentalità e cultura interdisciplinare. Ho voluto soffermarmi su questi punti, per evitare che il ben più ampio dominio applicativo del nuovo «Periodico di Matematica» sia ignorato, continuando esclusivamente, o quasi, a rimanere entro i vecchi confini. Il mio è quindi un monito ma anche un invito a collaborare con la nuova Rivista con articoli che coprano le ben più vaste tematiche dichiarate. Grazie a tutti per la cortese attenzione e buon proseguimento dei lavori.

# LA CITTÀ DI AGEROLA

## Cenni storici

Mariarosaria Cuomo\*

\*Liceo Pascal Pompei; mari.cuomo@yahoo.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.049



Università degli  
Studi del  
Sannio  
DEMM



Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli"  
Mathesis Abruzzo



AFSU Accademia Filosofia e Scienze Umane



## I CONVEGNO AFSU-MATHESIS NAPOLI "A.MORELLI AGEROLA, 8-9-10 SETTEMBRE 2021

### Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?

Un omaggio al prof. Franco Eugeni in occasione dell'ottantesimo compleanno.

*“L'aria, la terra, il verde, la natura incontaminata  
conservata dal lavoro e dall'amore degli abitanti fanno di  
questo posto un giardino incantato dove la mente,  
congiungendosi con l'istinto, la sensualità e la saggezza,  
trova riparo dai legacci dell'effimero e dalle illusioni virtuali  
del nostro tempo”.*

Tommaso Cuomo  
Sindaco di Agerola dal 1997 al 2006

L'armonioso intreccio dell'atmosfera frizzante dei rilievi e di quella marina dei litorali, fa di Agerola un balcone fiorito sulla costa amalfitana. Situata a 678 m sul mare, offre ai suoi

abitanti un'aria salubre e un paesaggio incantevole, caratteristico per i suoi sentieri, alcuni dei quali erano covo, nel 1600, dei famigerati Briganti.

La storia di Agerola pare abbia origini antiche, sembra che fosse nota già agli antichi Romani. Il suo nome deriva da "ager" che significa "campo", per via del fatto che i primi abitanti dissodarono piccoli campi fra le fitte foreste che rivestivano il territorio. Nell'area venutasi a creare, si sviluppò nei secoli il centro urbano. La sua storia è strettamente legata agli avvenimenti che coinvolsero Amalfi, fino a che, il Generale Avitabile, nel 1844, ottenne la scissione di Agerola dalla provincia di Salerno per aggregarla a quella di Napoli.

Nel corso dei secoli il Paese ha ospitato personaggi illustri, tra i quali Giustino Fortunato, Salvatore Di Giacomo, Roberto Bracco, Emilio Scaglione, Francesco Cilea.

Oggi Agerola è nota anche per la sua pregiata gastronomia, basata su ingredienti genuini di cui è ricco il territorio.

Già in epoca romana, essa veniva celebrata dal medico latino Galeno per la prelibatezza del suo latte, da cui il nome di Lactaria Montes (Monti Lattari) ai monti che la circondano.

La purezza dell'aria e la gastronomia non sono, comunque, gli unici ingredienti che attirano un turismo -in continua espansione- di visitatori di ogni parte del mondo.

Chi viene ad Agerola può usufruire di un ostello per la gioventù con campeggio ed accoglienti chalet per famiglie, di strutture alberghiere e agriturismi con vista sul mare della costiera amalfitana, di prestigiosi operatori della ristorazione locale, di una ricca sentieristica per vivere in pieno le bellezze della natura, nonché delle varie manifestazioni, previste in particolare nel periodo estivo.

# Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?

*Al prof. Franco Eugeni in occasione  
dell'ottantesimo compleanno*

Ferdinando Casolaro\*

\*Direttore di Redazione Periodico di Matematica  
ferdinando.casolaro@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.050

**Sunto:** Si dettaglia sulle tematiche presentate al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?" che si è svolto in due fasi: in modalità online nei giorni 14-15 luglio 2021 e in doppia modalità, online-presenza, nei giorni 08-09-10 settembre 2021.

**Parole Chiave:** Geometria euclidea, Geometrie non euclidee, Geometrie non archimedee, Geometrie finite

**Abstract:** Here we write the summary. Max 800 characters including spaces. Details of the topics presented at the conference "What knowledge of geometry in today's school?" which took place in two phases: in online mode on 14-15 July 2021 and in dual mode, online-presence, on 08-09-10 September 2021.

**Keywords:** Euclidean geometry, non-Euclidean geometries, non-Archimedean geometries, Finite Geometries

## 1 - Introduzione

L'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", in collaborazione con l'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU), per l'anno solare 2021, ha dedicato gran parte della propria attività allo studio della Geometria, con particolare attenzione all'insegnamento nelle Scuole di ogni ordine e grado. A tal proposito, ha organizzato ed espletato un importante Convegno in cui, visto l'ampia richiesta di contributi, ha distribuito la presentazione dei lavori in due periodi. I due incontri, dedicati al prof. Franco Eugeni in occasione del compimento dell'ottantesimo compleanno, si sono svolti in modalità online nei giorni 14-15 luglio 2021 e in doppia modalità, online-presenza nella cittadina di Agerola, nei giorni 08-09-10 settembre 2021.

Il tema in discussione, *Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?*, pur non trascurando i nodi essenziali del Modello euclideo, ha visto la presentazione e l'analisi delle varie geometrie sviluppatasi negli ultimi due secoli, con particolare riferimento agli aspetti didattici che da esse si possono estrarre per lo studio dell'evoluzione del mondo fisico.

Per ogni sessione è stato stabilito un tempo dedicato agli interventi dei docenti che hanno partecipato e seguito i lavori, sia in modalità online che in presenza.

Il dibattito è stato centrato sulle seguenti domande:

- Cosa insegnare in geometria e come insegnare la geometria?
- Quali relazioni stabilire tra geometria, altre parti della matematica e le altre discipline?

- Come affinare le competenze chiavi richieste per i docenti?

Il Comitato scientifico-organizzatore è stato costituito dai seguenti docenti: Loredana Biacino, Rosa Buonanno, Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro, Giuseppe Conti, Mariarosaria Cuomo, Marco D'Errico, Ferdinando Di Martino, Giangiacomo Gerla, Antonio Maturo, Alessandra Rotunno, Umberto Salzano, Renata Santarossa, Salvatore Sessa, Maria Talamo, Alberto Trotta.

## **2 - Descrizione degli argomenti trattati nel primo incontro svoltosi nei giorni 14-15 luglio 2021**

I lavori del primo incontro, in modalità online, sono stati introdotti dalla prof.ssa Renata Santarossa coadiuvata dal Presidente dell'Associazione "Aldo Morelli", prof. Aniello Buonocore, che ha invitato gli ospiti, di seguito indicati, a portare il saluto della propria istituzione di appartenenza:

Massimo Squillante, Presidente Associazione Mathesis Sannio-Irpinia e Direttore del Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio che ha patrocinato l'iniziativa.

Saverio Petitti, Dirigente Scolastico ITIS "Galileo Ferraris" di Napoli, sede legale dell'associazione Mathesis "Aldo Morelli".

Successivamente, i professori Ferdinando Casolaro, in rappresentanza dell'AFSU e dell'associazione "Aldo Morelli" e Antonio Maturo, Presidente dell'associazione Mathesis "Abruzzo", hanno esposto le motivazioni che hanno spinto ad organizzare un Convegno sul tema "Geometria", oggi trascurato da gran parte dei docenti nell'insegnamento della

matematica. Casolaro e Maturo hanno poi delineato la figura del prof. Franco Eugeni, presente ai lavori, a cui è dedicato il convegno. I temi affrontati sono stati divisi in quattro sessioni.

La prima sessione, presieduta dalla prof.ssa Maria Talamo sul tema *La Geometria euclidea: una rivisitazione in chiave moderna con le tecnologie*, è stata aperta dalla conferenza del prof. Luigi Tomasi *Dalle congetture alle dimostrazioni in geometria; un percorso didattico con l'uso del software di matematica*, seguita poi dal prof. Francesco Laudano in collaborazione con la studentessa Veronica Bitonti, *L'utilità dell'insegnamento della Geometria euclidea*.

Tomasi, nel passaggio dalla geometria intuitiva e sperimentale a quella ipotetico deduttiva, ha presentato un software di geometria dinamica proponendone l'uso ai docenti, come previsto anche dalle Indicazioni nazionali e Linee guida per la Scuola secondaria.

Laudano ha voluto sottolineare l'importanza della geometria per la formazione degli studenti, evidenziando la possibilità di introdurre alcuni concetti geometrici mediante un approccio ludico-operativo, che renda lo studio di questa disciplina più stimolante e concreto.

Nella seconda sessione, presieduta dal prof. Antonio Maturo, è stato affrontato il tema *La Geometria ... oltre Euclide*. Hanno relazionato i proff.ri Giangiacomo Gerla, Loredana Biacino, Domenico Lenzi. Il lavoro di Gerla, *I punti esistono?*, ha come oggetto di indagine la nozione di punto sia dal punto di vista storico (Euclide, Aristotele) che per quanto riguarda alcune ricerche attuali in cui si mira a fondare la geometria sulla sola nozione primitiva di corpo solido mentre la nozione di punto, retta, superficie sono definite. Tale lavoro suggerisce

un'attività interdisciplinare a cavallo tra geometria e filosofia che potrebbe coinvolgere facilmente studenti delle superiori.

La prof.ssa Loredana Biacino col suo intervento, *Il supporto dell'intuizione geometrica nello studio delle somme delle successioni finite e infinite di numeri*, ha evidenziato come si possono dominare con l'intuizione geometrica gli andamenti illimitati di alcune successioni sia finite che infinite, avvalendosi anche di esempi di carattere storico. Biacino si è poi riferita al tema che rappresenta il pilastro del Convegno, facendo presente che a lungo la geometria euclidea, seguendo la tradizione kantiana, è stata considerata uno strumento di conoscenza assoluto, precedente l'esperienza e da essa inscindibile. Questa assolutezza è stata messa in crisi all'inizio del 'Novecento' con l'emergere della teoria della relatività prima e con le teorie quantistiche poi. Ma, conclude, l'intuizione geometrica dello spazio è tuttora uno dei capisaldi della scienza cognitiva.

La sessione si è chiusa con la conferenza del prof. Domenico Lenzi *Collegamento tra alcune proprietà di geometria vettoriale e la teoria dei gruppi*. Col suo intervento, Lenzi ha voluto evidenziare come nell'insegnamento moderno non si può fare a meno del collegamento della geometria classica ai risultati delle teorie emerse nell'ultimo secolo.

La terza sessione, presieduta dal prof. Franco Eugeni, è stata dedicata all'insegnamento de *la Geometria nel Primo Ciclo* con gli interventi dei proff.ri Andrea Bertoni, *Imparando la Matematica giocando*, e Luna Pisa, *La geometria per aprire la mente*.

Bertoni ha presentato un'attività sperimentata in classe dove, con l'utilizzo del gioco come pretesto, si riesce a

coinvolgere gli studenti a ripassare, introdurre o approfondire argomenti matematici e formulare ipotesi utili alla risoluzione dei problemi. Anche Pisa, docente precaria, ha evidenziato con alcuni esempi l'importanza dell'utilizzo di moderni giocattoli di costruzioni magnetiche, con i quali è possibile formare diverse figure. Si è soffermata poi sull'introduzione del sistema di misura sessagesimale attraverso le lancette dell'orologio, tenendo conto della corrispondenza biunivoca tra il sistema di misura degli angoli ed il sistema di misura del tempo.

Nella quarta sessione, *La Geometria nelle applicazioni*, presieduta dalla prof.ssa Renata Santarossa, sono intervenuti i professori: Giuseppe Conti *La geometria delle cupole geodetiche*, Luigi Boscaino *Visita virtuale ai luoghi attraverso Geogebra*, Ferdinando Di Martino *L'insegnamento della Geometria con l'utilizzo del foglio elettronico* e l'ing. Carlo De Michele *La geometria e l'agricoltura di precisione*.

Conti, in collaborazione con Raffaella Paoletti e Alberto Trotta, ha descritto la costruzione di una cupola geodetica - poliedro convesso con facce triangolari, inscrivibile in una sfera - i cui lati giacciono approssimativamente su cerchi massimi della sfera circoscritta al poliedro. Un poliedro di questo tipo fu progettato da Michelangelo Buonarroti per il coronamento della lanterna della cupola della Sagrestia Nuova a Firenze e fu disegnato da Leonardo da Vinci nel libro di Luca Pacioli *Divina Proportione*.

Boscaino ha presentato la costruzione di luoghi geometrici servendosi del software di geometria dinamica Geogebra, con cui ha disegnato alcune forme geometriche 3D estemporanee: le conche come sezione di un cono rotondo indefinito, il

Paraboloide e l'Iperboloide a una falda e a due falde. Successivamente ha realizzato le seguenti costruzioni geometriche: la parabola e la circonferenza descritte come luoghi a partire da un'omotetia di triangoli rettangoli (inedito), la trisettrice di Mac Laurin e la versiera di Agnesi.

Di Martino si è soffermato sull'utilizzo del foglio di calcolo come strumento a supporto dello studio della geometria analitica. Obiettivo dell'intervento è stato quello di mostrare, mediante l'uso di semplici esempi, l'adattabilità e l'utilità del foglio di calcolo per la costruzione di soluzioni a problemi di geometria analitica e alla visualizzazione analitica e grafica delle soluzioni. Sono stati mostrati esempi relativi alla costruzione della tangente ad una parabola in un punto, alla determinazione degli eventuali punti di intersezione tra parabole e all'impiego del metodo di Newton-Raphson per il calcolo degli zeri di una funzione.

De Michele, partendo da alcune semplici applicazioni e casi pratici, ha mostrato come le tecniche che si basano sulla geometria analitica sono fondamentali per il monitoraggio, da remoto, del paesaggio agricolo e per la costruzione di sistemi informativi geografici. È seguita poi la *Discussione*, coordinata dal Prof. Aniello Buonocore, nella quale sono intervenuti i partecipanti, sia con domande ai relatori che con brevi interventi ad integrazione delle tematiche affrontate. Particolarmente significativo l'intervento del prof. Franco Eugeni che ha ringraziato gli organizzatori e i presenti per la gradita dedica al suo compleanno. Eugeni si è poi soffermato sull'importanza di alcune geometrie, indicate come *geometrie finite* e *geometrie non archimedee*, che in letteratura non sono riportate in alcun testo a livello scolastico, ma trattate da egli

stesso con il prof. Raffaele Mascella in due articoli nel n. 1/2 del 2019 di questa rivista. Nella conclusione Buonocore ha ringraziato i partecipanti e i relatori per il significativo contributo ed ha dato appuntamento alla seconda fase di settembre 2021.

### **3 - Descrizione degli argomenti trattati nel secondo incontro svoltosi nei giorni 08-09-10 settembre 2021**

La seconda fase del Convegno si è svolta in doppia modalità “presenza-online” nel Campus Principe di Napoli, la Prima Università Gastronomica e Centro di Alta Formazione Universitaria, situata nella cittadina di Agerola.

Ha introdotto i lavori la prof.ssa Mariarosaria Cuomo che ha invitato il dott. Luca Mascolo, sindaco di Agerola, a portare il saluto della comunità che amministra. Di seguito sono intervenuti per un saluto i professori: Aniello Buonocore, Presidente Associazione Mathesis Napoli “Aldo Morelli”; Silvana Bianchini, Consigliere della Federazione Italiana Mathesis e Presidente dell’associazione Mathesis di Firenze; Massimo Squillante, Presidente Associazione Mathesis Sannio-Irpinia e Direttore del Dipartimento DEMM dell’Università del Sannio che ha patrocinato l’iniziativa; Saverio Petitti, Dirigente Scolastico ITIS “Galileo Ferraris” di Napoli, sede legale dell’associazione Mathesis “Aldo Morelli”.

La Prima sessione *Geometria nello spazio*, presieduta dal prof. Umberto Salzano, ha riscontrato gli interventi dei proff.ri Luigi Tomasi e Nicla Palladino. Tomasi nel suo intervento,

*Percorsi didattici di geometria dello spazio con l'uso di un software di geometria dinamica*, ha presentato diversi temi di geometria dello spazio, a volte purtroppo trascurati nella scuola secondaria, che possono essere proposti con l'uso di un software di geometria dinamica 3D, che permette facilmente di rappresentare figure e problemi nello spazio in attività di scoperta e laboratoriali.

Palladino, sul tema *Dallo spirografo alle simmetrie ai moti composti*, ha presentato uno strumento, lo "spirografo", che permette di disegnare particolari curve piane. L'oggetto, la cui versione giocattolo fu sviluppata nel 1965, si ispira alla "Penna geometrica" di Giambattista Suardi che permetteva di tracciare una grande varietà di curve sulla combinazione di tre parametri fondamentali: velocità angolare delle ruote, rapporto tra i raggi e verso dei moti.

La seconda sessione *La Geometria oltre il modello euclideo*, presieduta dalla prof.ssa Maria Talamo, ha registrato gli interventi dei proff. Alessandra Rotunno *Oltre gli "Elementi": La Geometria Proiettiva si può ancora ignorare nell'insegnamento di oggi?*, Ferdinando Casolaro *Le geometrie non euclidee nel mondo reale*, Antonio Maturo *Geometria Join e misure di incertezza*, Onofrio Casoria *Fisica e Geometria: un inseparabile binomio*.

Rotunno ha ricordato che già nel periodo a cavallo tra gli anni 'Ottanta' e 'Novanta', con l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI,...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso, il M.P.I. introdusse e portò avanti un Progetto per l'inserimento della Geometria Proiettiva nell'insegnamento secondario, al fine di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della Geometria su cui si basano le nuove

tecniche, cioè la Geometria Proiettiva. Rotunno ha concluso con l'auspicio che queste tematiche vengano riproposte, essendo anche inserite nelle Indicazioni nazionali per i licei e nelle Linee guida per gli Istituti tecnici. Sulla stessa linea si è inserito Casolaro che, dopo un sintetico excursus storico sull'evoluzione della geometria dall'antichità ad oggi, ha esposto una presentazione elementare per l'introduzione della geometria nello spazio curvo, secondo il Modello di Riemann, indispensabile a comprendere l'universo geometrico su cui si basa la fisica moderna, in particolare la Teoria della Relatività.

Maturo ha presentato la teoria delle iperstrutture algebriche, con le Geometrie Join che forniscono un'utile generalizzazione della Geometrie Euclidea e della Geometria Proiettiva, mettendo in risalto analogie fra diverse Geometrie che permettono di individuare una importante unificazione dei concetti algebrici e geometrici.

Casoria, nel chiudere i lavori della sessione, ha fatto notare come gli interventi che lo hanno preceduto dimostrano che lo studio della Fisica si basa principalmente sulle conoscenze matematiche. A tal proposito, ha presentato alcuni esempi di applicazione della matematica a rappresentare i fenomeni fisici, applicazioni che ha sperimentato nelle classi di un Istituto per geometri in cui è afferente.

Nella terza sessione *Geometria e Letteratura*, presieduta dalla prof.ssa Loredana Biacino, sono intervenuti i proff.ri Carlo Toffalori *La Geometria in Dante Alighieri*, Ilaria Veronesi *La regina Didone: geometrie artistiche, musicali e matematiche*, Giovanna Della Vecchia *La divina proporzione "vera ispiratrice di bellezza"*, Roberta Salata *Logica e geometria*.

Toffalori ha esposto, con la consueta eleganza, il ruolo della Geometria nella cultura ai tempi di Dante che la vede, insieme all'Aritmetica, come ancella dell'Astronomia. Particolarmente apprezzata la citazione all'affresco di Andrea di Bonaiuto situato nel Cappellone degli Spagnoli nella chiesa di Santa Maria Novella a Firenze.

Veronesi ha proposto un percorso transdisciplinare sviluppato attorno ad una figura femminile che ha ispirato nei secoli eminenti studiosi dei vari ambiti del sapere: la regina Didone. Veronesi si è soffermata inizialmente sui principali dipinti che la vedono protagonista attraverso lo studio delle geometrie degli spazi e delle prospettive, per passare poi a studiare le simmetrie e trasformazioni matematiche all'interno delle opere musicali liriche dedicate alla protagonista.

Della Vecchia, nel suo intervento, illustra un percorso didattico realizzato nella scuola secondaria di secondo grado sul "numero aureo"  $\phi$ , quel famoso numero irrazionale che tanta importanza ha avuto nel definire i canoni della bellezza e dell'armonia dalla Grecia classica ai giorni nostri e che, per il suo particolare valore esoterico, affascina ancora oggi studiosi di ogni campo. Il percorso è articolato con il forte intento di provocare e suscitare stupore negli studenti e coinvolgerli in situazioni ludiche in grado di risvegliare interessi e passioni spesso sopiti tra i banchi di scuola. Ciò per sottolineare quanto la motivazione ad apprendere ed il coinvolgimento emotivo siano fattori essenziali, ineludibili del processo di insegnamento/apprendimento.

Salata ha proposto una riflessione sulla geometria e sulla logica insegnate alla scuola superiore. La geometria razionale

può essere un perfetto campo di applicazione della logica e può farci capire che non esistono verità assolute, ma solo verità relative ai punti di partenza, cioè gli assiomi.

Nella Quarta sessione *La Geometria euclidea nella didattica del Primo e del Secondo Ciclo*, presieduta dalla prof.ssa Rosa Buonanno, sono intervenuti i proff.ri Vincenzo Romagnuolo *Piani e solidi su supporto digitale tramite la Geometria Orientata «L'intuizione dei giovani studenti»*, Gianni Vincenzi *Sulla (In)commensurabilità delle diagonali dei poligoni regolari*, Bonaventura Paolillo *Incommensurabilità angolare in classe: un nuovo approccio didattico*, Antonio Fontana *Variazioni sul teorema di Pitagora*, Diana Cipressi *Forme simili e omotetiche nel laboratorio del pantografo*, Marco D'Errico, Bruna D'Errico *Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica*.

Romagnuolo, ha presentato il software RilArch che permette di disegnare figure complesse con il solo uso di coordinate 3D per la rappresentazione di Punti, Linee e PoliLinee. Tale percorso è stato sperimentato in collaborazione con il prof. Pierpaolo Palka, nell'Istituto Comprensivo Benedetto Croce di Pescara con gli alunni del primo e secondo anno della Scuola media.

Paolillo ha presentato un'attività laboratoriale sulla incommensurabilità tra due angoli sperimentata dagli allievi del Liceo Scientifico alla Seconda Giornata Internazionale della Matematica Pi-Day 2021. Nell'esposizione ha lamentato l'assenza del tema nella prassi didattica, dove non sono affrontate adeguatamente semplici domande relative alle misure in gradi sessagesimali di angoli di un triangolo, in

quanto i teoremi classici di trigonometria ed i software come Geogebra non forniscono risposte adeguate. La risposta è invece legata al Teorema di Niven di cui il relatore fornisce una semplice dimostrazione in un articolo di recente pubblicazione. Anche Vincenzi si è soffermato sulla incommensurabilità con significative osservazioni sulle diagonali dei poligoni regolari.

Fontana ha introdotto il suo intervento indicandolo nella prospettiva di un successivo svolgimento laboratoriale in una classe di Scuola secondaria di secondo grado, prevedibilmente all'ultimo anno, con l'obiettivo di proporre argomenti classici come spunti per un'attività a cavallo tra geometria ed aritmetica. Inoltre, fa osservare come nel laboratorio il teorema di Pitagora all'interno della geometria si collega in modo naturale non solo all'algebra, ma all'arte, all'architettura, alla storia del pensiero e della cultura, oltre alla programmazione di algoritmi.

D'Errico ha illustrato esperienze didattiche sul teorema di Pitagora nella Scuola secondaria di Primo grado con l'utilizzo di materiali semplici e concreti, integrandoli poi gradualmente con gli strumenti offerti dalle tecnologie informatiche. L'approccio è basato sul "fare matematica", ispirandosi ai lavori ed alle metodologie di Emma Castelnuovo.

Cipressi ha presentato un'esperienza realizzata in una classe seconda della Scuola secondaria di Primo grado con il pantografo, una macchina composta da quattro aste rigide articolate, che ingrandiscono o rimpiccoliscono un dato disegno. L'obiettivo del lavoro è quello di ricercare un legame tra teoria e pratica, con l'idea di individuare uno strumento utile per affrontare un problema di vita reale che permette di

“esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano in natura e nelle creazioni dell’uomo”, come esplicitato nelle Indicazioni Nazionali.

Nella quinta sessione, *Geometria & Realtà*, presieduta dal prof. Alberto Trotta, sono intervenuti i proff.ri Carmen Talia *Viaggio nel mondo di Escher: Le trasformazioni geometriche tra arte e didattica*, Cesare Labianca *I punti isodinamici di un triangolo*, Anna Salvadori *Lungo la "via maestra" parte prima*, Primo Brandi *Lungo la "via maestra" parte seconda*.

Talia ha presentato un’esperienza vissuta in compresenza con la docente di “Educazione all’immagine” in una quarta ginnasiale. L’obiettivo, che ha trovato significativo riscontro tra gli studenti, era quello di consentire ad essi di giungere ad una comprensione più completa e formale delle trasformazioni geometriche attraverso un lavoro tratto dalle opere di Escher.

Labianca, nel suo intervento *I punti isodinamici di un triangolo*, ha suggerito un’esperienza didattica di Geometria, che consiste nell’ampliare le conoscenze relative allo studio dei triangoli, rispetto ai contenuti tradizionali presenti sui libri di testo, mostrando una particolare proprietà delle bisettrici interne ed esterne di un triangolo, che porta alla costruzione di tre particolari circonferenze che si intersecano in due punti detti punti isodinamici del triangolo.

I professori Anna Salvadori e Primo Brandi, con due conferenze dal titolo *Lungo la "via maestra"*, hanno proposto un percorso fra Matematica e Realtà nel corso della storia sul tema delle geodetiche, sia spaziali (percorsi più corti) che temporali (percorsi più brevi). L’argomento ha un carattere fortemente interdisciplinare e si presta anche come

approfondimento per gli studenti maturandi in vista dell'elaborato per l'esame di stato.

Dopo le conferenze dei proff. Anna Salvadori e Primo Brandi, che hanno aperto i lavori nella mattinata di sabato 10 settembre, è iniziata la *Discussione*, coordinata dal Prof. Aniello Buonocore, nella quale sono intervenuti i partecipanti, sia con domande ai relatori che con brevi interventi ad integrazione delle tematiche affrontate.

La discussione è stata aperta dagli *interventi introduttivi* delle prof.sse Serafina Ippolito e Renata Santarossa, Dirigenti Scolastici che hanno contribuito alla scelta delle tematiche affrontate durante i lavori.

Ippolito, ricordando la sua esperienza di docente di matematica prima e di dirigente scolastico poi, si interroga sul senso del convegno e di ogni altra iniziativa per la diffusione e divulgazione della cultura scientifico-matematica e della geometria in particolare:

*Il problema principale è la difficoltà a far veicolare tra i docenti le metodiche innovative, le buone pratiche, i valori di una didattica efficace ed accattivante, gli scambi di esperienze significative. Spesso il tutto si conclude ed esaurisce nei convegni senza ricadute utili. In generale vi è poco dialogo tra i docenti specie nella programmazione inter-pluri-disciplinare. Ritornando al tema del convegno, ho notato scarsa presenza dell'insegnamento dei temi della geometria, in particolare nella scuola secondaria di secondo grado, mentre nella primaria, ove i docenti lavorano anche meglio in equipe, la geometria viene meglio valorizzata ed insegnata.*

Santarossa, quasi a voler stimolare i docenti che intervengono nel dibattito a portare la discussione sulle

motivazioni che hanno spinto il Comitato organizzatore a trattare il tema “Geometria”, ha evidenziato le principali criticità che, in qualità di dirigente scolastico, ha maturato nel rapporto con le scolaresche che ha diretto. Di seguito la conclusione:

*È sotto gli occhi di tutti che la Scuola Italia stia vivendo un periodo di profondo declino, così come è indubbio che la geometria venga insegnata sempre meno in qualunque ordine di scuola. Eppure, da più di vent'anni - continua la dirigente - si parla di affrontare contenuti scientifici che abbiano riscontro nella realtà, con l'obiettivo di migliorare l'apprendimento della matematica. Lo studio della geometria, da sempre, è stato ed è importante per conoscere il mondo fisico e lo spazio che ci circonda. A tal proposito, nel XX secolo Einstein ha descritto lo spazio-tempo e la forza gravitazionale in termini geometrici, ma questo sembra che non interessi. Ricordiamo che dall'infanzia il bambino comincia a conoscere la geometria e quindi ad avere la percezione dello spazio, attraverso le prime esperienze motorie e sensoriali, poi, crescendo, passa alle misurazioni che oggi si possono compiere con i mezzi tecnologici sempre più moderni. La geometria delle immediate vicinanze, che ci permette di avere una visione locale e globale del mondo che ci circonda è Euclidea. Nella nostra scuola purtroppo la geometria resta relegata a pochi risultati che molto difficilmente esulano dal campo della geometria euclidea. Ma se vogliamo ampliare lo sguardo oltre il visibile, è indispensabile studiare lo spazio fisico (basterebbe trattare lo studio astronomico delle galassie), allora la geometria euclidea non è sufficiente, sono necessarie le geometrie non euclidee.*

Sono seguiti poi vari interventi dei partecipanti con osservazioni e proposte significative. Il prof. Buonocore ha invitato coloro che sono intervenuti ad inviare il proprio

contribuito ed a partecipare alle future attività in modo da dare continuità - in itinere - alla collaborazione all'interno della nostra comunità matematica.

## **4 - Conclusioni**

Il Convegno si è chiuso con le conclusioni dei professori Ferdinando Casolaro, componente della Direzione dell'AFSU, e Aniello Buonocore, Presidente dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli". Casolaro ha manifestato grande soddisfazione per la numerosa presenza (anche da remoto) di docenti da tante parti del territorio italiano, presenza che non è stata solo passiva, visto gli innumerevoli e significativi interventi nel dibattito finale. Nella sua conclusione, Casolaro ha puntato l'accento sulla esigenza di dare continuità alla promozione e valorizzazione dei contatti culturali tra docenti di Scuole diverse dell'intero territorio nazionale. A tal proposito si è soffermato su due punti essenziali:

1. La partecipazione delle Scuole ai Giochi matematici "Premio Aldo Morelli", unica attività delle nostre associazioni che ha per destinatari gli studenti. Contrariamente alle altre organizzazioni di Olimpiadi di Matematica, che sono destinati alle eccellenze, i Giochi Premio "Aldo Morelli" presentano quesiti semplici, ma significativi dal punto di vista logico, perché destinati a tutti gli alunni con l'obiettivo di motivare quegli studenti meno attratti dalla matematica. Infatti, negli anni scorsi, non sono state rare le sorprese di alunni, inizialmente non motivati e con giudizi negativi da parte dei loro docenti, che hanno conseguito ottimi risultati ai Giochi;

qualcuno ha addirittura continuato gli studi nel Corso di laurea in Matematica.

2. Periodico di Matematica. Casolaro ha illustrato le finalità della rivista ed ha invitato i partecipanti, in particolare coloro che sono ancora in servizio e quindi aggiornati sulla realtà attuale della Scuola, a proporre contributi da pubblicare su tematiche che ritengono significative per l'insegnamento.

Buonocore ritiene che il convegno abbia fornito una conferma che il mondo della Scuola, inteso nell'accezione più generale possibile, possiede in sé un'enorme ricchezza. I relatori, chi con le proprie ricerche, chi con l'esplorazione delle tecnologie digitali, chi con le esperienze svolte sul campo, ne sono stati un'effettiva controprova e a loro vanno i più sentiti ringraziamenti dell'intero comitato organizzatore. E questo lo incoraggia a formulare la seguente conclusione: senza rincorrere modelli che tra l'altro sono anche di difficile trasposizione culturale, potrebbe essere sufficiente trattenere il nocciolo fondazionale dell'attuale modello educativo, sfrondarlo delle pratiche che oggettivamente sono non più attuabili proficuamente e aprirsi, da parte dei docenti, alla possibilità di incamminarsi su sentieri nuovi ma già battuti da esploratori motivati, appassionati e competenti.

## **Bibliografia**

I riferimenti bibliografici sono a calce dei singoli articoli pubblicati nel presente volume, strutturato come numero doppio - 3/4 del 2021 - che raccoglie le tematiche presentate durante i lavori del Convegno.

# *Imparare la matematica giocando*

Andrea Bertoni\*

\*Docente di matematica e scienze presso l'Istituto Comprensivo di Rivanazzano Terme (PV) – Componente del Consiglio Direttivo dell'associazione Mathesis Pavia; aerdnab87@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.051

**Sunto:** *Nel presente articolo vengono descritte alcune parti del progetto, realizzato durante l'anno scolastico 2020-2021 nella classe prima della scuola secondaria di primo grado, relativo all'utilizzo del gioco nell'insegnamento della matematica. In particolare, si fa riferimento ad alcune attività di geometria utilizzate per ripassare, introdurre o approfondire alcuni dei principali argomenti creando, attraverso il gioco, un ambiente di apprendimento coinvolgente e stimolante per gli alunni.*

**Parole Chiave:** *gioco, argomentazione, geometria, creatività*

**Abstract:** *This article describes some parts of a project, addressed to the first class of secondary school during school year 2020-2021, about the use of the game in the teaching of mathematics. In particular, I describe some geometry activities used to review, introduce or study in depth some of the main topics creating, through the game, an engaging and stimulating learning environment for the students.*

**Keywords:** *game, argumentation, geometry, creativity*

## 1 - Introduzione

Il presente articolo nasce a seguito di un progetto portato avanti nell'anno scolastico 2020-2021, nella classe prima della scuola secondaria di primo grado dell'Istituto Comprensivo di Rivanazzano Terme.

Durante il primo ciclo d'istruzione, al fine di incrementare le competenze matematiche, è necessario ricreare ambienti di apprendimento stimolanti in modo da garantire agli studenti la possibilità di vivere esperienze di apprendimento significative.

Come indicato nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, due sono gli aspetti importanti: il primo è il ruolo ricoperto dal laboratorio, inteso «sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte [...]» (AA. VV. 2012); il secondo aspetto è rappresentato dalla componente ludica che ricopre un ruolo cruciale nell'educazione al rispetto delle regole, al miglioramento delle abilità comunicative e all'elaborazione di strategie adatte a differenti contesti.

Il progetto, realizzato con la collaborazione del Dott. Andrea Maffia dell'Università degli Studi di Pavia, si ispira al famoso gioco, di origini americane, delle escape room in cui ci si ritrova rinchiusi all'interno di una stanza e l'obiettivo è quello di risolvere una serie di enigmi per fuggire da questa. Sul modello di tale gioco, il suddetto progetto si basa sulla risoluzione di enigmi di ambito matematico presenti all'interno del libro *“Destinazione Bellatrix”*. Come nella

classica escape room, la collaborazione tra tutti i partecipanti al gioco è un fattore fondamentale e gli obiettivi principali dell'attività sono quelli di stimolare la logica, l'intuito, le capacità argomentative ed educare alla creatività e al pensiero divergente; quest'ultimo, in contrapposizione con la rigidità tipica del pensiero degli adulti, rappresenta la capacità di prendere decisioni razionali, ma al contempo fantasiose ed imprevedibili, grazie alla rottura di vincoli e al collegamento degli elementi attraverso associazioni inusuali.

Oltre alla semplice risoluzione degli esercizi, agli alunni è stato richiesto di esplicitare, con le proprie parole, il ragionamento ed il procedimento messo in atto, al fine di migliorare le proprie abilità argomentative e confrontare le diverse strategie risolutive, rendendo in questo modo gli alunni consapevoli di come uno stesso problema possa essere affrontato da diversi punti di vista.

Infine, per quanto riguarda gli enigmi di geometria, sono state create delle attività di approfondimento con il software di geometria dinamica "GeoGebra" che hanno permesso agli alunni di attuare una manipolazione diretta delle costruzioni fatte ed osservare come alcune proprietà geometriche restino valide, pur variando la posizione di punti e rette nello spazio.

## **2 - Il pensiero divergente**

Fin da Aristotele, la logica è stata esaltata come l'unico strumento in grado di trarre frutto dall'intelletto, ma le nuove idee, per il loro carattere imprevedibile, stanno ad indicare che non sono il risultato di un ragionamento logico. Di conseguenza, si rileva l'esistenza di un diverso procedimento

intellettivo, riconoscibile soprattutto quando riesce a formulare risposte semplici che appaiono ovvie solo dopo la loro formulazione. Per convenzione, si è soliti utilizzare l'espressione *pensiero verticale* per indicare il metodo logico e l'espressione *pensiero laterale o divergente* in riferimento all'uso della creatività.

Il pensiero laterale non è una nuova formula magica, ma semplicemente un più creativo modo di servirsi dell'intelletto.

Una disciplina che fa un buon uso del pensiero laterale è la matematica moderna, la quale, scartati i rigidi schemi entro cui nel passato si presentava, fornisce allo studente la possibilità di accostarsi ad essa con scelte deliberate dando il gusto dell'acquisizione personale.

Questa metodologia di lavoro incoraggia l'alunno a considerare un problema da diversi punti di vista e a prendere coscienza delle svariate vie che possono essere percorse al fine di giungere alla soluzione del quesito, garantendo un miglioramento più rilevante della duttilità intellettuale dell'allievo.

Il pensiero creativo è da considerarsi come una competenza trasversale, che costituisce un elemento che va oltre l'apprendimento e la formazione generale, perché ha come obiettivo lo sviluppo sia cognitivo che sociale dell'alunno, attraverso cui le abilità acquisite sono applicabili in diversi contesti della vita quotidiana.

Il pensiero laterale o divergente è caratterizzato dalla capacità di generare soluzioni differenti e ingegnose per uno stesso problema. Si tratta di una concentrazione mentale spontanea, fluida e non lineare che spinge a considerare il

problema da diversi punti di vista, portando, così, a diverse soluzioni.

Secondo gli studiosi Löwenfeld e Brittain l'intelligenza e la creatività vengono spesso confuse tra loro. La creatività non per forza ha a che fare con l'intelligenza: un ragazzo con un alto quoziente intellettivo può ottenere ottimi risultati nei test di creatività, ma anche no. I test d'intelligenza enfatizzano il pensiero convergente, dove la risposta è già stata determinata a priori. Al contrario, i test di creatività tentano di misurare il pensiero divergente, dove la risposta corretta non è mai unica.

Il sistema scolastico, solitamente, tende ad enfatizzare particolarmente l'intelligenza, il pensiero convergente, che conduce gli alunni a pensare ad un'unica risposta corretta o ad una soluzione che gode di approvazione generale. Le attività creative, invece, danno importanza e stimolano il pensiero divergente, nel quale non ci sono risposte esatte, ma situazioni che permettono più vie di sviluppo, come nel caso delle domande a soluzione aperta (Löwenfeld & Brittain, 1984).

### **3 - Alcune attività di geometria**

Il libro *"Destinazione Bellatrix"*, scritto dal Dott. Andrea Maffia, è stato il punto di partenza di tutte le attività affrontate. L'autore narra una storia fantastica che funge da filo conduttore tra gli svariati enigmi che riguardano i principali argomenti di aritmetica e geometria trattati durante il primo anno della scuola secondaria di primo grado. In particolare, relativamente alla geometria, le attività riguardano la capacità di misurare lunghezze ed angoli anche

attraverso l'utilizzo appropriato degli strumenti, le unità di misura, la posizione reciproca di rette complanari, i triangoli e la loro classificazione e i poligoni regolari.

La storia narra della navicella spaziale “Numerion” che sta trasportando un carico prezioso verso Bellatrix, stella della costellazione di Orione, quando tutto d'un tratto, si perde ogni forma di comunicazione con il capitano. Lo scopo della missione è scoprire cosa sia successo al capitano e far arrivare la navicella a destinazione.

Nei successivi sottoparagrafi vengono descritte due delle principali attività di geometria affrontate durante il progetto.

### **3.1 - La misura di un angolo e l'uso del goniometro**

Uno dei primi quesiti di geometria che gli alunni hanno dovuto affrontare ha riguardato la misura degli angoli e l'utilizzo appropriato del goniometro.

L'enigma di fronte al quale ci si trova raffigura una stanza le cui pareti sono ricoperte da specchi: su una parete ci sono 3 emettitori laser e sulle altre pareti ci sono 6 ricevitori (Fig. 1). Quando il laser colpisce la parete, il raggio incidente viene riflesso formando un angolo pari all'angolo di incidenza; nel caso in cui viene colpito un ricevitore, questo si illumina.

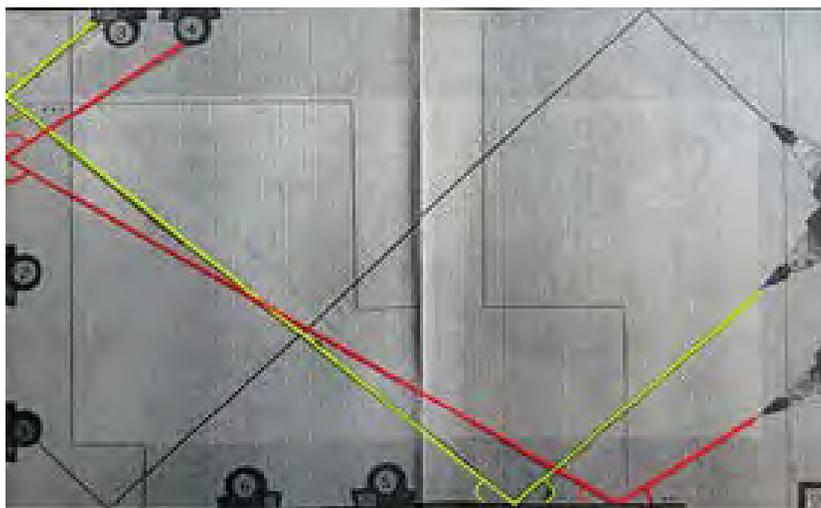
L'obiettivo dell'attività è capire quali ricevitori verranno colpiti dai raggi laser ricostruendone il percorso fatto.



**Fig. 1 - Rappresentazione della stanza**

La presente attività è stata affrontata in classe fornendo ad ogni alunno una fotocopia dell'enigma e chiedendo loro di provare a risolvere, in circa 20 minuti, il quesito e di descrivere brevemente il ragionamento fatto. Durante l'attività alcuni alunni hanno iniziato subito a mostrare le prime difficoltà non ricordando come utilizzare in maniera corretta il goniometro. Per alcuni, la difficoltà principale è stata quella di capire come posizionare in maniera corretta lo strumento e, di conseguenza, misurare l'ampiezza di un angolo; altri, seppur fossero in grado di misurare l'ampiezza dell'angolo di incidenza, hanno avuto difficoltà nel riprodurre il corrispondente angolo riflesso.

Al contrario, la maggior parte della classe non ha avuto alcuna difficoltà nel portare a termine il lavoro utilizzando in maniera corretta il goniometro, anche grazie al fatto che, pochi mesi prima, il suo utilizzo era stato ripassato durante le lezioni pratiche di tecnologia (Fig. 2).

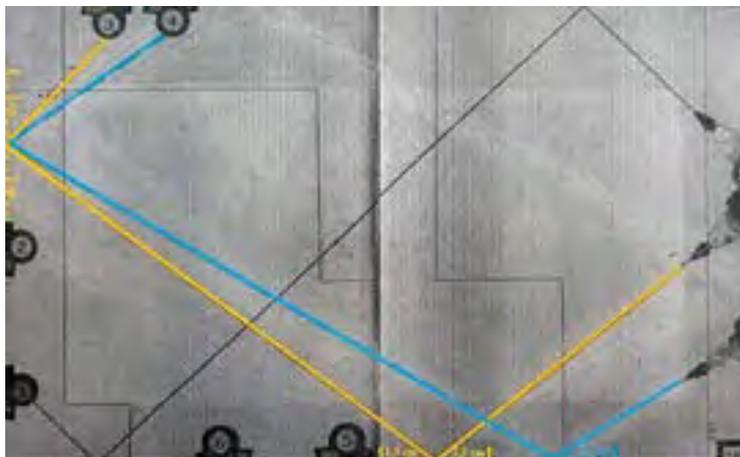


**Fig. 2 – Esempio di risoluzione dell'enigma con l'uso del goniometro**

Infine, un solo alunno ha risolto l'attività senza l'utilizzo del goniometro, ma semplicemente usando il righello. Nella descrizione il ragazzo sostiene di aver preso alcuni punti di riferimento nel disegno e di «aver misurato la distanza orizzontale tra il punto di riferimento considerato e il punto in cui il raggio laser impatta sulla parete»; successivamente ha riportato, solo orizzontalmente, tale misura dall'altra parte e, di conseguenza ha disegnato il raggio riflesso cercando di mantenere la stessa inclinazione di quello incidente (Fig. 3). Inconsapevolmente il ragazzo ha introdotto l'idea di pendenza di una retta seppur in maniera non del tutto corretta.

A seguito di questa strategia risolutiva è stato spiegato alla classe il concetto di pendenza o inclinazione di una retta rispetto ad una linea orizzontale di riferimento, presentandola come il rapporto tra uno spostamento verticale e uno orizzontale, cioè il rapporto tra la variazione verticale ed

orizzontale che separa due punti appartenenti alla retta presa in esame.



**Fig. 3 – Risoluzione dell'attività senza l'uso del goniometro**

In questo modo l'alunno ha modificato e corretto il proprio lavoro considerando sia la distanza orizzontale tra il punto in cui il raggio laser impattava sulla parete e il punto di riferimento scelto, sia la distanza verticale tra quest'ultimo e il raggio laser, riportando infine le due misure, in maniera corretta, nel lato opposto.

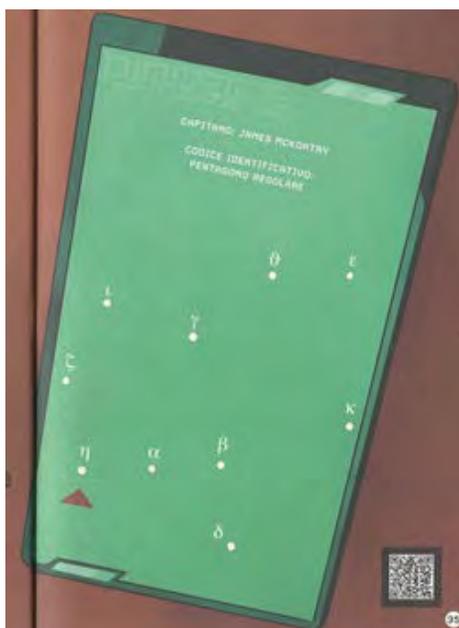
Grazie a questa attività gli alunni hanno potuto osservare come lo stesso quesito sia stato risolto in due modi differenti, in un caso utilizzando il goniometro e nell'altro, rifacendosi al concetto di pendenza di una retta, attraverso l'uso del righello.

### **3.2 - I poligoni**

Un altro quesito di geometria affrontato ha riguardato i poligoni regolari. Esso ha rappresentato sia la prosecuzione di

un'attività svolta con GeoGebra, inerente ai triangoli, sia il punto di partenza per approfondire alcuni concetti e proprietà riguardanti i poligoni.

In questo caso, gli alunni si sono trovati di fronte ad un enigma in cui era presente il tesserino identificativo del capitano della navicella spaziale (Fig. 4), sul quale era riportata la seguente scritta: «codice identificativo: PENTAGONO REGOLARE».



**Fig. 4 – Tesserino del capitano**

L'obiettivo dell'attività era di riuscire a disegnare un pentagono regolare partendo dal vertice indicato con la freccia rossa e collegando tra loro alcuni dei punti indicati.

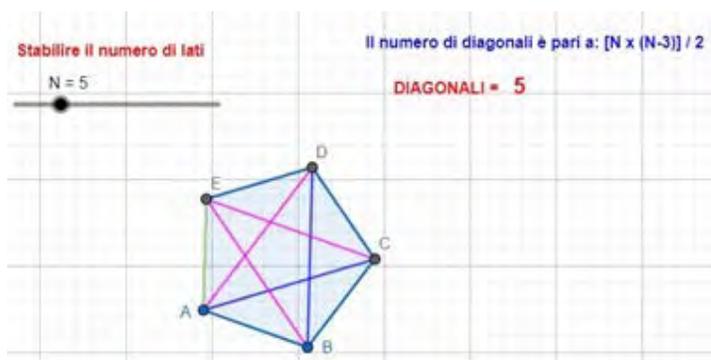
Anche in questo caso, agli alunni è stata fornita una fotocopia del quesito ed è stato richiesto di provare a risolverlo in circa 10-15 minuti. Quasi tutti gli alunni della classe sono riusciti a disegnare un pentagono, ma nessuno di

loro lo ha disegnato nel modo richiesto: tutte le loro figure erano poligoni convessi con 5 vertici, ma nessuna era regolare. Dalla discussione che ne è scaturita, i ragazzi hanno sottolineato che la principale difficoltà riscontrata è stata rappresentata dal fatto che il poligono fosse leggermente ruotato e non avesse la base “orizzontale”, rappresentazione dei poligoni che sono soliti vedere durante la scuola primaria.

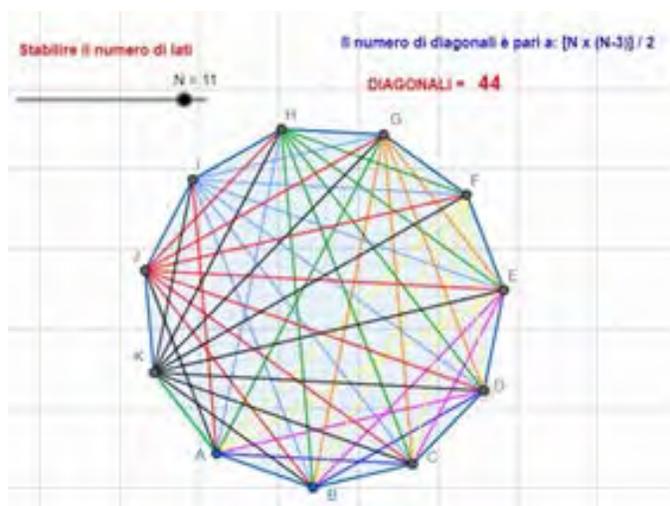
Dopo essere arrivati ad una soluzione condivisa dell'enigma, l'attività è stata utilizzata come punto di partenza per attuare degli approfondimenti sui poligoni. In primo luogo, è stato affrontato il concetto di diagonale di un poligono ed è stato richiesto agli studenti di provare a tracciare le diagonali in un triangolo, in un quadrilatero, nel pentagono appena costruito e in un esagono. Analizzando i risultati trovati, attraverso la discussione gli alunni sono stati condotti a ricavare la regola che permette di calcolare il numero delle diagonali di un poligono conoscendo il numero di lati:

$$n. \text{ diagonali} = \frac{[n \cdot \text{lati} + (n \cdot \text{lati} - 3)]}{2}$$

A supporto dei risultati ottenuti, l'attività è stata riprodotta attraverso il software GeoGebra (Fig. 5 e Fig. 6), che ha permesso agli alunni di rappresentare poligoni con un numero elevato di lati, non semplici da disegnare sul quaderno, di osservare le corrispondenti diagonali e di verificare la veridicità della relazione precedentemente ottenuta.



**Fig. 5 – Esempio di rappresentazione con GeoGebra delle diagonali di un poligono con 5 lati**



**Fig. 6 – Esempio di rappresentazione con GeoGebra delle diagonali di un poligono con 11 lati**

Un ulteriore approfondimento ha riguardato lo studio della somma degli angoli interni di un poligono. Alcuni mesi prima, attraverso l'uso di GeoGebra, sono state ricreate due attività al fine di dimostrare e far comprendere meglio agli alunni che la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo è sempre pari a  $180^\circ$ . Nella prima attività è stato costruito un triangolo ed è stata misurata l'ampiezza degli

angoli nei suoi vertici, osservando che la loro somma è  $180^\circ$ , valore che resta invariato anche muovendo i vertici del triangolo e variando l'ampiezza dei suoi angoli (Fig. 7).

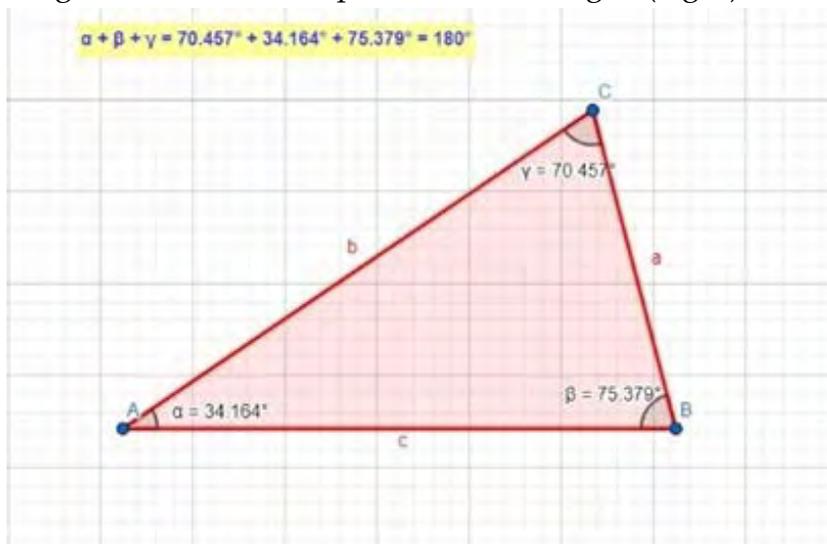
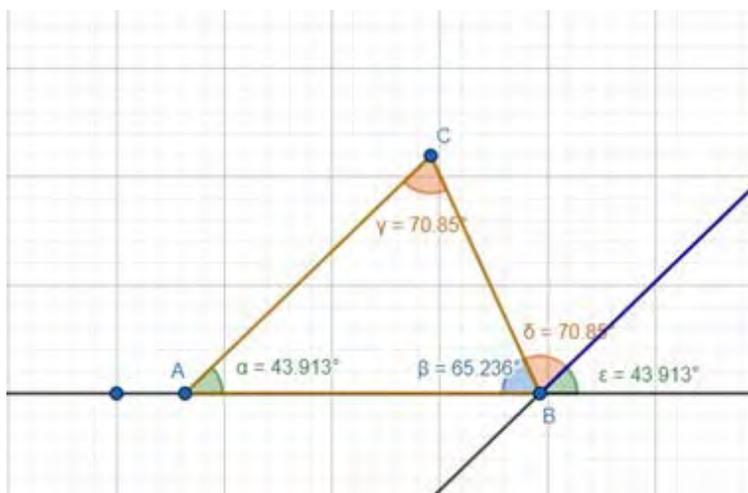


Fig. 7 – Attività 1 relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo

La seconda attività ha previsto la costruzione di un triangolo e successivamente di una retta parallela al lato  $\overline{AC}$  e passante per il vertice  $\overline{B}$  (Fig. 8).



**Fig. 8 – Attività 2 relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo**

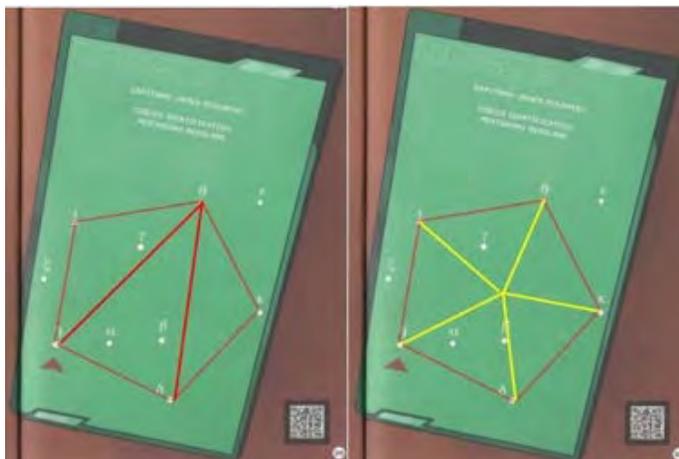
In questo modo è stato possibile fare le seguenti osservazioni: l'angolo  $\delta \cong \gamma$ , in quanto angoli alterni interni e l'angolo  $\alpha \cong \varepsilon$ , poiché angoli corrispondenti. Ne consegue che i tre angoli  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\varepsilon$  formano un angolo piatto, dimostrando nuovamente che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a  $180^\circ$ .

Ritornando all'enigma sul pentagono regolare, agli alunni è stato chiesto di trovare un modo per calcolare la somma degli angoli interni del pentagono. Dopo aver lasciato loro un po' di minuti per pensare, alcuni ragazzi hanno ipotizzato di tracciare due diagonali dividendo il pentagono in 3 triangoli; in questo modo, sapendo che la somma degli angoli interni nei triangoli è di  $180^\circ$ , hanno ricavato velocemente la somma degli angoli nel pentagono.

La discussione è proseguita considerando un'ulteriore strategia che ha previsto la divisione della figura in 5 triangoli aventi un vertice in comune al centro del poligono.

In questo modo la somma degli angoli interni del pentagono è stata ottenuta moltiplicando  $180^\circ$  per il numero di triangoli e sottraendo l'angolo giro formatosi al centro della figura (Fig. 9).

Dopo aver vagliato le due costruzioni, gli studenti sono stati condotti a ricavare le due relazioni che permettono di calcolare la somma degli angoli interni di un qualsiasi poligono. Le relazioni ottenute sono le seguenti:

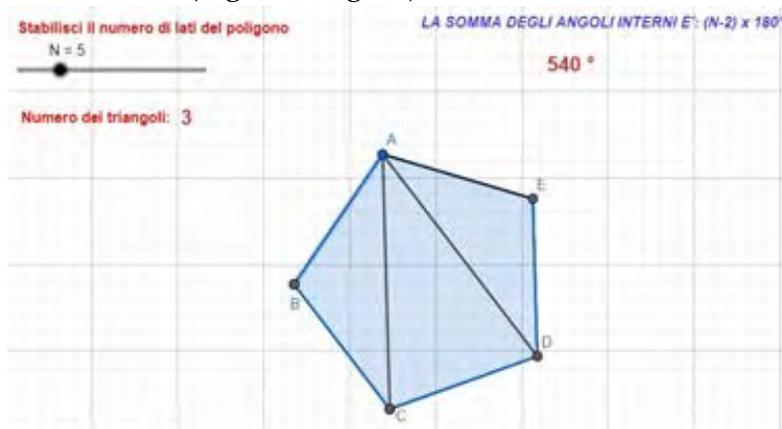


**Fig. 9 – Rappresentazione delle due strategie per il calcolo della somma degli angoli interni del pentagono**

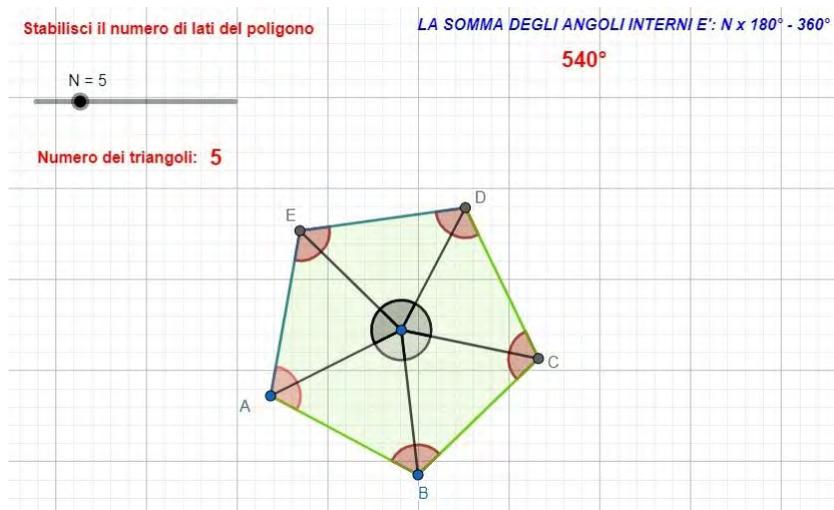
1° costruzione  $\text{somma angoli} = (n.\text{lati} - 2) * 180^\circ$

2° costruzione  $\text{somma angoli} = n.\text{lati} * 180^\circ - 180^\circ$

L'intera attività si è conclusa andando a ricreare le due costruzioni con GeoGebra al fine di osservare come varia la somma degli angoli interni di un poligono al variare del numero dei lati (Fig. 10 e Fig. 11).



**Fig. 10 – Rappresentazione con GeoGebra della prima strategia per il calcolo della somma degli angoli interni del pentagono**



**Fig. 11 – Rappresentazione con GeoGebra della seconda strategia per il calcolo della somma degli angoli interni del pentagono**

## 4 - Osservazioni e conclusioni

Come ricorda il fisico e matematico francese Jules Henri Poincaré «creare, inventare consiste proprio nel non costruire le combinazioni scontate, ripetitive, ma costruire unicamente quelle originali e innovative [...]».

I ragazzi hanno bisogno di avvalersi dell'impiego del pensiero divergente, che deve essere costantemente stimolato, al fine di poter osservare le cose da differenti prospettive e saper affrontare le svariate situazioni andando a combinare tra loro le conoscenze, le abilità e le competenze possedute.

Dalle osservazioni effettuate durante il progetto è stato possibile riscontrare grande entusiasmo e serietà da parte

degli alunni nell'affrontare le diverse attività. In particolare, la richiesta costante di esporre ed argomentare le proprie strategie risolutive ha permesso un notevole miglioramento delle abilità argomentative e dell'utilizzo di un linguaggio specifico; inoltre, il costante confronto ha portato gli alunni ad un incremento delle proprie capacità di gestire una conversazione, rispettando i tempi altrui e accettando le eventuali osservazioni fatte dai compagni di classe.

L'utilizzo del software di geometria dinamica "GeoGebra", oltre a creare percorsi di approfondimento agli enigmi di geometria affrontati, ha permesso agli alunni una miglior visualizzazione e comprensione di alcune proprietà geometriche, attraverso la diretta manipolazione delle costruzioni fatte, garantendo così il raggiungimento di un apprendimento più significativo rispetto al semplice studio teorico che, in alcuni casi, diventa mnemonico e privo di una vera comprensione.

L'aspetto più significativo di tale attività è stato l'inclusione, all'interno del gruppo classe, di quegli alunni che mostravano qualche debolezza in matematica o con bisogni educativi speciali (BES), i quali, in un contesto di questo tipo, completamente slegato da qualsiasi forma di valutazione, in cui chiunque era libero di poter esprimere la propria idea, sono riusciti ad interagire in maniera costruttiva con l'intero gruppo classe al fine di risolvere gli enigmi proposti, apportando il proprio contributo, in alcuni casi con idee vincenti.

In conclusione, un'attività di questo tipo, in cui la componente ludica è un pretesto per ripassare, introdurre o approfondire alcuni argomenti matematici, è una metodologia

didattica che, oltre a mantenere alto l'interesse e l'attenzione degli alunni, permette di stimolare la creatività ed il pensiero divergente. Tali pratiche dovrebbero affiancare costantemente la "didattica classica", al fine di incrementare tale competenza trasversale e indurre gli studenti a conoscere ed essere consapevoli delle proprie potenzialità.

### **Bibliografia (sono riportati alcuni esempi)**

AA. VV. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.

AA. VV. (2018). Indicazioni Nazionali e nuovi scenari.

Antoninetti A. (2011). La creatività s'impara. Metodi e tecniche per lo sviluppo del pensiero divergente a scuola. Giunti Editore.

De Bono E. (1969). Il pensiero laterale. Come produrre idee sempre nuove. BUR Rizzoli.

Löwenfled V., Brittain W. L. (1984). *Creatività e sviluppo mentale*. Giunti Barbera.

Maffia A. (2020). Destinazione Bellatrix. Esplora, risolvi e impara la matematica. Erickson.

Poincaré J. H. (1997). *Scienza e metodo*. Einaudi.

# Successioni geometriche e dintorni

Loredana Biacino\*

\*\*Già Professore Associato Università Federico II Napoli;

[loredana.biacino@libero.it](mailto:loredana.biacino@libero.it)



10.53159/PdM(IV).v3n3-4.052

**Sunto:** Il lavoro è indirizzato a studenti delle scuole secondarie di secondo grado ed è relativo allo studio informale della somma dei primi termini delle progressioni geometriche ed al passaggio dal caso finito al caso delle serie infinite: sia in un caso che nell'altro sono riportati esempi.

**Parole Chiave:** Somma dei primi termini di una progressione geometrica finita; somma della serie geometrica.

**Abstract:** The paper is addressed to upper secondary school's students. An informal study of the passage from the sum of the first terms of a geometric series to the sum of the whole infinite series is exposed. Many examples are given in both cases.

**Keywords:** Sum of the first terms of a geometric progression; sum of the geometric series.

## 1 - Introduzione

A lungo la geometria euclidea, seguendo la tradizione kantiana, è stata considerata uno strumento di conoscenza assoluto, determinante l'esperienza e da essa inscindibile. Questa assolutezza è stata messa in crisi all'inizio del '900 con l'emergere della teoria della relatività prima e poi con le teorie quantistiche. Ma l'intuizione geometrica dello spazio è tuttora uno dei capisaldi della scienza cognitiva. La mia proposta consiste nel cercare di provare come essa possa essere usata come supporto per attività in cui generalmente non è presente.

La relazione è rivolta a studenti delle scuole secondarie di secondo grado ed è relativa ad un insegnamento che si può dispiegare in un lungo intervallo di tempo, il periodo in cui gli studenti sono posti di fronte al problema dell'infinito. Problema che, attraversando gran parte dell'insegnamento della matematica, emerge da subito, quando si cominciano a scrivere gli sviluppi decimali dei razionali periodici o degli irrazionali. La differenza dei due casi è fondamentale perché ci troviamo di fronte a due andamenti illimitati di carattere totalmente diverso; nel primo caso, il solo su cui ci soffermeremo, c'è un andamento regolare, che si può facilmente dominare, come vedremo, con l'intuizione geometrica.

Per affrontare l'argomento in modo graduale, ci soffermeremo inizialmente sullo studio di alcune successioni finite e sulle loro somme, proponendo un'interpretazione di carattere geometrico delle formule e poi, con lo stesso sistema passeremo al caso di successioni infinite, facendo leva sull'intuizione geometrica dello spazio: per questo ci

avvarremo di esempi di carattere storico che si presentano ancora interessanti e adatti ad attirare l'attenzione dei ragazzi. Il passaggio al caso infinito trae vantaggio dall'inquadramento storico, che permette di evidenziare le procedure in maniera informale, e prepara il campo all'introduzione del calcolo differenziale. L'articolo si conclude con un'applicazione della teoria precedente all'insieme di Cantor e alla determinazione della sua dimensione frattale.

## 2 - Somma dei primi termini di una serie geometrica

Tutti gli studenti del triennio conoscono la formula, relativa alla somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di primo termine 1 e ragione  $a \neq 1$ :

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}. \quad (*)$$

Essa è immediata per  $n = 1$ , caso in cui si riduce a  $1 = 1$ , e per  $n = 2$ , essendo:  $1 + a = \frac{1-a^2}{1-a}$ .

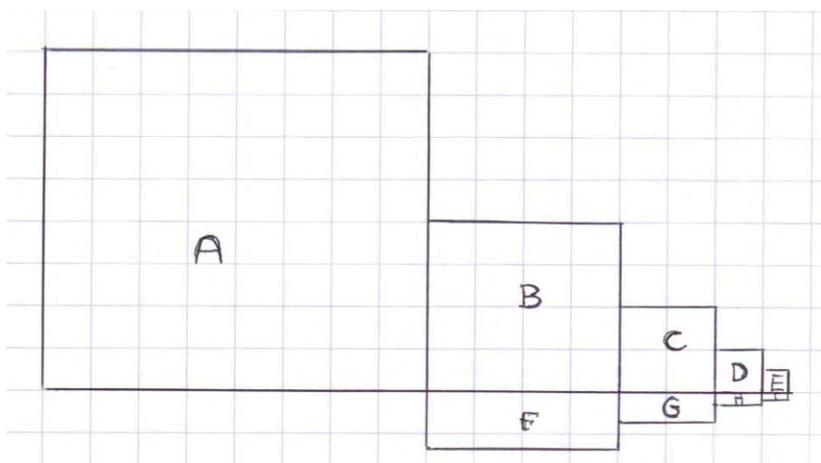
In generale ci sono vari modi per stabilirla; il più semplice è eseguire la moltiplicazione

$$\begin{aligned} (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) &= 1 + a + a^2 + \dots \\ &+ a^{n-1} - a - a^2 \dots - a^n = 1 - a^n; \end{aligned}$$

ma si può procedere pure per induzione. Si può anche effettuare la divisione di  $a^n - 1$  per  $a - 1$  con la regola di Ruffini etc....

La regola precedente la troviamo già enunciata e dimostrata negli Elementi di Euclide (Proposizione IX, 35) scritti circa nel 300 a.C. ; Archimede poi la dimostra nel caso particolare che sia  $a = 1/4$  quando, non molto tempo dopo, scrive la *Quadratura della parabola*.

La sua dimostrazione è la seguente: immaginiamo un



quadrato  $A$ , accanto a questo un quadrato  $B$  il cui lato è la metà del lato di  $A$ , poi un quadrato  $C$  il cui lato è la metà del lato di  $B$ , un quadrato  $D$  che ha il lato metà del lato di  $C$ , un quadrato  $E$  il cui lato è la metà del lato di  $D$  e così via. Accanto a  $B$  consideriamo un rettangolo  $F$  che è la terza parte di  $B$ , accanto a  $C$  un rettangolo  $G$  terza parte di  $C$ , accanto a  $D$  un rettangolo  $H$  terza parte di  $D$ , accanto ad  $E$  un rettangolo  $I$  terza parte di  $E$  e così via.

Si osserva che:

$$B+F = B + \frac{B}{3} = \frac{4B}{3} = \frac{A}{3}; \quad C+G = C + \frac{C}{3} = \frac{4C}{3} = \frac{B}{3}; \quad D+H = D + \frac{D}{3} \\ = \frac{4D}{3} = \frac{C}{3}; \quad E+I = E + \frac{E}{3} = \frac{4E}{3} = \frac{D}{3}.$$

Sommiamo membro a membro le relazioni ottenute, indicando con le stesse lettere le aree delle figure considerate:

$$B + C + D + E + F + G + H + I = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3}$$

e osserviamo che:

$$F + G + H = \frac{B}{3} + \frac{C}{3} + \frac{D}{3};$$

quindi, sommando  $A$  ad ambo i membri, si ottiene:

$$A + B + C + D + E + I = \frac{4A}{3},$$

cioè

$$A + B + C + D + E = \frac{4A}{3} - I.$$

Ora

$$\frac{4A}{3} - I = \frac{4A}{3} - \frac{E}{3} = \frac{4}{3} \left( A - \frac{E}{4} \right) = \frac{A - \text{primo termine escluso}}{1 - \frac{1}{4}};$$

pertanto:

$$A + B + C + D + E = \frac{A - \text{primo termine escluso}}{1 - \frac{1}{4}},$$

cioè la regola, ponendo  $A = 1$ :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}. \quad (**)$$

Archimede non trova soltanto questa proprietà, ma osserva che il primo termine escluso diventa sempre più piccolo al crescere delle iterazioni della procedura, se allora noi vogliamo conoscere la somma di tutti gli infiniti termini del tipo di quelli presenti a primo membro di (\*\*), basta considerare nullo il primo termine escluso, ottenendo:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 4/3. \quad (***)$$

Qui abbiamo fatto veramente un passo gigantesco: siamo passati da una somma finita a una infinita! Da una somma come  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$  o una somma come  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$  a una che ha infiniti addendi. La prima ha come risultato  $\frac{21}{16}$ , la seconda  $\frac{85}{64}$ , ma per il valore della somma degli infiniti addendi abbiamo usato (\*\*), e semplicemente abbiamo messo 0 al posto di  $\frac{1}{4^n}$ . Ciò sembra lecito perché  $\frac{1}{4^n}$  assume valori piccoli quanto si vuole dando a  $n$  valori opportunamente grandi. La procedura seguita ci convince quindi intuitivamente, ma solo con il concetto di limite diverrà teoricamente inattaccabile.

Chiamiamo serie geometrica di ragione  $\frac{1}{4}$  un'espressione come quella che compare a primo membro di (\*);  $4/3$  è la somma della serie (\*\*).

Se i termini sono moltiplicati per un numero  $b$ ,  $b$  è detto primo termine. La somma di una serie geometrica di primo termine  $b$  e ragione  $-1 < a < 1$  è data da:

$$b + ba + ba^2 + ba^3 + \dots + ba^n + \dots = \frac{b}{1-a}.$$

Un caso particolare della regola (\*) lo troviamo nel papiro di Rhind: fu scritto da uno scriba di nome Ahmes al tempo del regno di un re degli Hyksos in un periodo dal 1788 al 1580 a.C. Non si sa se si trattasse di un'opera minore o importante, un compendio per studiosi, un manuale per sacerdoti o semplicemente il libro di uno scolaro. Tra i problemi che vi si trovano figura il n. 79, di difficile traduzione. Una interpretazione è la seguente:

*Somma la progressione geometrica di 5 termini, di cui il primo è 7 e la ragione è 7.*

*La somma secondo la regola. Moltiplica 2801 per 7.*

- 1	2801
- 2	5602
- 4	11204
Totale	19607

*La somma per addizione*

case	7
gatti	49
topi	343
spighe grano	2401
hecat	16807
Totale	19607

Si osservi che 2801 per 7 equivale a

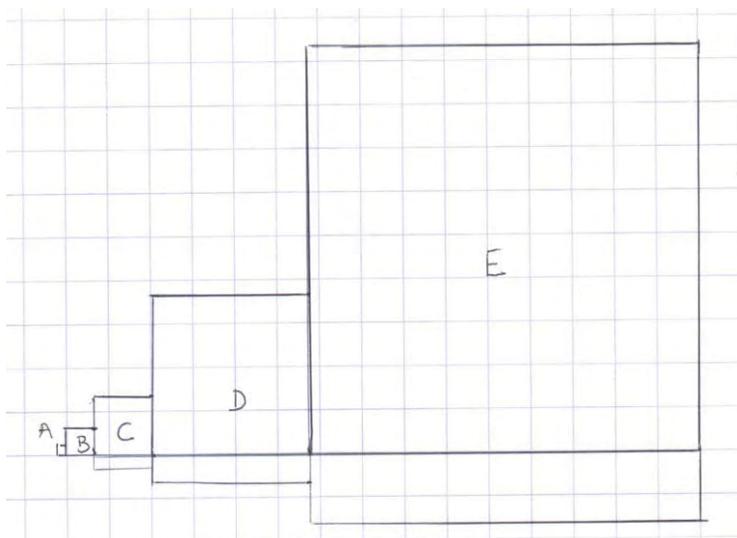
$$\frac{7^6-7}{7-1} = 7 \times \frac{7^5-1}{6} = 7 \times \frac{16806}{6} = 7 \times 2801 = 19607.$$

Quindi il risultato dato da Ahmes corrisponde alla regola (\*) nel caso che sia  $a = 7$  ed  $n = 5$ . Mentre poteva avere un significato pratico sapere il numero degli hecat (misura di

volume) di grano che i gatti potevano mettere al riparo dai topi, non aveva nessuna importanza conoscere il numero di tutte le disomogenee quantità che poi sono state sommate: possiamo immaginare che una curiosità di carattere matematico abbia spinto l'autore del problema ad un'indagine di questo tipo.

Riproponiamo lo schema di Archimede anche in questo caso: consideriamo un quadrato  $A$  di area  $7$ , poi uno  $B$  di area  $7^2$ , poi uno  $C$  di area  $7^3$ , uno  $D$  di area  $7^4$ , uno  $E$  di area  $7^5$  e infine uno  $F$  di area  $7^6$ . Se accanto a ognuno di tali quadrati poniamo un rettangolo equivalente alla sesta parte del quadrato allora, procedendo in modo simile a quanto fatto in precedenza, otteniamo:

$$A + \frac{A}{6} = \frac{B}{6}; \quad B + \frac{B}{6} = \frac{C}{6}; \quad C + \frac{C}{6} = \frac{D}{6}; \quad D + \frac{D}{6} = \frac{E}{6}; \quad E + \frac{E}{6} = \frac{F}{6}.$$



Sommando membro a membro abbiamo:

$$A+B +C +D + E = \frac{F-A}{6};$$

che è lo stesso risultato ottenuto da Ahmes:

$$\begin{aligned} 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 &= \frac{7^6-7}{6} = 7 \times \frac{7^5-1}{6} = 7 \times \frac{16806}{6} \\ &= 7 \times 2801 = 19607. \end{aligned}$$

E se procediamo all'infinito? Se consideriamo cioè la serie infinita:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + \dots?$$

Dobbiamo allora tenere presente che  $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n = 7 \times \frac{7^n-1}{6}$  in corrispondenza di ogni naturale  $n$ .

L'ultima espressione si differenzia da quella presente in (\*\*) per il fatto che mentre in essa compare  $\frac{1}{4^n}$ , che è un termine che diventa sempre più piccolo al crescere di  $n$ , adesso abbiamo il termine  $7^n$  che invece diventa più grande di ogni numero assegnato. Di conseguenza la serie

$$7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n + \dots$$

ha un comportamento completamente diverso.

Se la ragione di una serie geometrica  $a$  è minore di 1 (in valore assoluto) allora nell'espressione della somma parziale  $n$ -sima (\*)  $a^n$  tende a zero quando si fa crescere illimitatamente  $n$  e quindi la somma della serie geometrica è il numero finito  $1/(1-a)$ . Se la ragione è maggiore di 1 allora  $a^n$  tende all'infinito e lo stesso succede per la somma parziale  $n$ -sima come appare evidente da (\*). Anche la somma della serie è allora infinita.

Su questa straordinaria proprietà delle potenze di base maggiore di 1 di crescere con enorme rapidità si basa un racconto molto significativo. Una volta un faraone apprese con suo gran diletto il gioco degli scacchi dall'ambasciatore persiano: tale fu il suo entusiasmo che volle ricompensare il dignitario straniero esaudendo un suo desiderio. L'ambasciatore disse allora che voleva che gli fosse data una quantità di grano ottenuta così:

*Metti un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, 2 sulla seconda, 4 sulla terza, 8 sulla quarta e prosegui in questo modo raddoppiando fino a completare le 64 caselle.*

Il faraone accondiscese ma ben presto si rese conto che non solo il grano di tutti i granai dell'Egitto ma nemmeno quello prodotto nel mondo intero sarebbe bastato ad esaudire la richiesta e che l'ambasciatore si era preso gioco di lui. Infatti il numero di chicchi che si ottiene con la precedente procedura è pari a:  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ , che è un numero a venti cifre pari a circa 18 miliardi di miliardi di chicchi di grano pari a loro volta a circa 1.800.000 milioni di tonnellate di grano (produzione media annua odierna 600 milioni di tonnellate).

Ci rendiamo allora facilmente conto del motivo per cui gli esperti, per stroncare l'epidemia di covid richiedono che l'indice di contagiosità della malattia (cioè il numero medio di casi generati da un malato infetto in un determinato intervallo di tempo) sia inferiore a 1. Infatti supponendo ad esempio che malauguratamente esso sia 2 ci ritroveremmo che in media una persona ne infetta 2 (ad esempio nell'arco di una settimana) dopo due settimane sono infettate altre 4 persone,

dopo tre settimane altre 8 etc.. con un effetto simile al caso della scacchiera detto prima.

### 3 - La somma di una serie geometrica

Quanto vale la somma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$ ?

Oresme vescovo di Lisieux, studioso francese alla metà del '300 trattava la questione con semplicità. Considerava un'asticella lunga 2, la divideva a metà, una delle due metà la divideva di nuovo a metà, la parte rimanente la divideva ancora a metà ed iterava il procedimento finché gli era praticamente impossibile procedere oltre.

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
---	---------------	---------------	---------------	-----

Si rendeva così conto che mai avrebbe superato il numero 2 e che si sarebbe avvicinato a 2 in modo che la differenza fosse impercettibile. La somma dei primi  $n+1$  addendi è infatti:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2;$$

la differenza

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 2 - 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n}$$

si può rendere piccola quanto si vuole se  $n$  è abbastanza grande. Infatti se effettuiamo i calcoli per valori via via

crescenti di  $n$ , ci rendiamo conto che dopo pochi passaggi il valore (approssimato) della frazione  $\frac{1}{2^n}$  è zero e quindi se si procedesse all'infinito non potremmo ottenere altro che zero.

Ebbene tutto questo è sottointeso scrivendo:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 2.$$

Oresme nel *De Configurationibus* (Clagett, 1968) fornisce un esempio di carattere cinematico della precedente proprietà. Osserva infatti:

*Si supponga che un mobile si muova per un giorno lungo una semiretta con una certa velocità, il giorno successivo prosegua il suo moto con velocità che è metà della velocità del giorno precedente, il terzo giorno si muova ancora con velocità uguale alla metà della velocità del giorno precedente e così via, mai nell'eternità attraverserebbe il doppio dello spazio che ha percorso nel primo giorno. Però attraverserebbe una quantità di spazio maggiore di ogni dato spazio minore dello spazio che ha attraversato il primo giorno.*

Ma Oresme, accanto al valore della somma precedente, servendosi sempre dell'intuito geometrico, calcola anche la somma della seguente serie:

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots$$

A tale proposito egli immagina di collocare infinite asticelle eguali a quella della figura precedente una sull'altra. Nella seconda però non prende in considerazione la prima metà,

nella seconda oltre alla prima metà non prende in considerazione nemmeno il quarto successivo, nella terza oltre alla prima metà e al quarto successivo non prende in considerazione nemmeno l'ottavo successivo e così di seguito indefinitamente. Se si sommano i valori sulle asticelle prese in verticale si ottiene proprio la somma che stiamo cercando. Se invece la somma la effettuiamo considerando le asticelle in orizzontale, cioè sommando i termini segnati sulla prima asta e a questo risultato si sommano i termini segnati sulla seconda, poi quelli della terza e così di seguito si trova il valore

$$\begin{aligned}
 & 2 \text{ (somma dei termini segnati sulla prima asta)} \\
 & + 1 \text{ (somma dei termini sulla seconda asta)} \\
 & + \frac{1}{2} \text{ (somma dei termini sulla terza asta)} \\
 & + \frac{1}{2^2} \text{ (somma dei termini sulla quarta asta)} \\
 & + \dots \\
 & = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 4.
 \end{aligned}$$

Si conclude che  $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots = 4$ .

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...
			$\frac{1}{8}$	...
				...
				...

Si osservi che i numeri razionali sono riducibili a successioni geometriche al seguente modo. Ad esempio:  $\frac{1}{2} = 0,5 = 5[\frac{1}{10}]$  si ottiene moltiplicando il numero 5 per la successione geometrica con primo termine  $\frac{1}{10}$  e ragione 0.

Ancora:

$$2/3 = 0,666 \dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = 6 \left[ \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right],$$

si ottiene moltiplicando il numero intero 6 per una serie geometrica di primo termine  $\frac{1}{10}$  e ragione  $\frac{1}{10}$ .

Talvolta ci si trova di fronte a casi più complicati dei precedenti. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} &= 0,285714 \ 285714 \ 285714 \dots = \\ &= 285714 \left[ \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{6+6}} + \frac{1}{10^{6+12}} + \dots \right] \end{aligned}$$

si ottiene moltiplicando il numero intero 285714 per la serie geometrica il cui primo termine è  $\frac{1}{10^6}$  e la ragione è  $\frac{1}{10^6}$ .

Se nell'espansione decimale compare l'antiperiodo si può procedere al seguente modo:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{1}{10} + 6 \left[ \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^{2+1}} + \frac{1}{10^{2+2}} \dots \right].$$

Si può concludere che:

*Un numero è razionale se e solo se si ottiene sommando ad una frazione che ha per numeratore un numero intero e per denominatore una potenza di dieci una quantità che si ottiene moltiplicando un numero intero per una serie geometrica il cui primo termine è una potenza di  $\frac{1}{10}$  e la ragione è a sua volta una potenza di  $\frac{1}{10}$ .*

## 4 - L'insieme di Cantor

A Cantor si deve la descrizione di un insieme (Cantor 1884) chiuso, avente la potenza del continuo, privo di punti interni, cioè tale che nessun intervallo è incluso in esso, e di misura lineare nulla; questo insieme si allontana da quanto intuitivamente pensiamo possa essere un insieme di numeri reali ed è all'origine di molti esempi e controesempi nella teoria della misura.

Si consideri l'intervallo  $[0,1]$  e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza  $\frac{1}{3} < 1$ , si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza  $(\frac{1}{3})^2$ , eliminando quindi due intervalli di lunghezza complessiva  $2(\frac{1}{3})^2$ ; poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti si elimini un intervallo aperto di ampiezza  $(\frac{1}{3})^3$ , eliminando quattro intervalli di lunghezza complessiva  $4(\frac{1}{3})^3$ ; si proceda allo stesso modo indefinitamente.

L'intervallo di Cantor è quello che rimane dopo aver effettuato queste infinite sottrazioni.



L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con  $E$ , è data da:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 \dots + 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \dots = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots \right] \\ & = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}$$

Quindi la misura di  $E$  vale 1 e pertanto l'insieme di Cantor  $C = [0,1] - E$  è un insieme di misura nulla, chiuso, privo di punti interni, cioè non esiste nessun intervallo che possa esservi incluso. Alcuni per questo motivo lo chiamano polvere di Cantor, perché è un insieme composto da granelli. Ma pur essendo di misura complessiva nulla, tali granelli si può dimostrare che sono tanti quanti i punti dell'intervallo  $[0,1]$ . Cerchiamo di argomentare tale affermazione.

Si noti che aver eliminato l'intervallo centrale significa che alla fine della procedura otterremo solo i numeri tali che nella loro rappresentazione in base 3 la prima cifra è 0 oppure 2; analogamente, supposto che la prima cifra sia zero, la seconda potrà essere di nuovo 0 o 2; lo stesso se la prima cifra è 2 la seconda potrà essere 0 oppure 2 e così di seguito; procedendo indefinitamente otterremo tutti gli sviluppi in base 3 in cui compaiono solo le cifre 0 e 2; ma tali sviluppi sono tanti quanti tutti gli sviluppi in base 2, cioè tanti quanti i numeri dell'intervallo  $[0,1]$ .

Uno dei fondatori della topologia moderna, F. Hausdorff (1868-1942), si rese conto che con insiemi non usuali, non confrontabili cioè con le ben note figure geometriche, il concetto di dimensione doveva essere modificato. Egli infatti introduce un concetto di dimensione frattale in modo molto complesso. Il punto di partenza consiste nel fatto che oltre a figure geometriche di dimensione intera, possono esserci insiemi lineari di dimensione compresa tra 0 e 1, curve

limitate non rettificabili cioè di lunghezza infinita, che hanno una dimensione maggiore di 1 e minore o eguale a 2, superfici con dimensione superiore a 2 e minore o eguale a 3 e così via. Il matematico russo A. Besicovitch (1891-1970) avrebbe successivamente elaborato la definizione di Hausdorff e dato grandi contributi alla teoria della dimensione topologica, sviluppandone alcuni interessanti problemi. Qui daremo un'applicazione del calcolo della dimensione frattale in una forma estremamente semplificata, dimostrando che l'insieme di Cantor ha dimensione  $\log_3 2$ , cioè un numero strettamente compreso tra 0 e 1. Altre definizioni elementari di dimensione frattale si possono trovare in (Devlin, 1999) e (Mandelbrot, 1987).

Cominciamo con l'osservare che, dato il segmento unitario, lo possiamo ricoprire con  $3^n$  segmenti tutti della stessa lunghezza  $3^{-n}$ . Ognuno di questi segmenti può essere pensato, introdotto un parametro  $\delta$ , come se avesse un peso  $3^{-n\delta}$ . Quindi nel valutare la somma totale dei pesi troviamo il valore

$$\frac{3^n}{3^{n\delta}} \quad (*)$$

Tale somma per  $\delta < 1$  tende a  $+\infty$ , mentre per  $\delta > 1$  tende a 0. Quindi, conformemente alla nostra concezione di dimensione, possiamo dire che la dimensione, data da  $\delta = 1$ , si presenta come elemento di separazione di due insiemi separati, il primo costituito dai  $\delta < 1$  per cui (\*) tende a  $+\infty$  e il secondo costituito dai valori  $\delta > 1$  per cui (\*) tende a 0.

Consideriamo ora l'insieme di Cantor e usiamo lo stesso metodo. Al primo passo lo possiamo ricoprire con 2 segmenti che pesano ognuno  $3^{-\delta}$ . Al passo successivo ognuno di questi 2 segmenti dà luogo ad altri due segmenti che pesano  $3^{-2\delta}$ , per

un contributo complessivo di  $2^{2^3-2^\delta}$ . Ripetiamo la stessa procedura in tutti i passaggi successivi, al passo  $n$  avremo  $2^n$  segmenti ognuno dei quali pesa  $3^{-n\delta}$ , per un contributo complessivo di  $\left(\frac{2}{3^\delta}\right)^n$ . Tale quantità tende a 0 se  $2 < 3^\delta$ , cioè  $\delta > \log_3 2$ , tende a  $+\infty$  se  $0 < \delta < \log_3 2$ . Ne segue che la dimensione dell'insieme di Cantor non è intera, ma è eguale a  $\log_3 2$ , numero compreso tra 0 e 1.

Possiamo in generale considerare tutta una classe di insiemi del tipo Cantor al seguente modo: si consideri l'intervallo  $[0,1]$  e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza  $\sigma < 1$ , si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza  $\sigma^2$ , e poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza  $\sigma^3$  e si proceda allo stesso modo indefinitamente. L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con E, è data da

$$\sigma + 2\sigma^2 + \dots + 2^n \sigma^{n+1} + \dots = \frac{\sigma}{1-2\sigma}.$$

Se  $\sigma > 1/3$  è evidente che  $[0,1]-E$  si riduce all'insieme vuoto, ma se  $0 < \sigma < 1/3$ , allora  $\frac{\sigma}{1-2\sigma} < 1$ , quindi il complemento  $C_\sigma = [0,1]-E$  è un insieme chiuso, tale che nessun intervallo possa esservi incluso, la cui misura vale  $1 - \frac{\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$ , che è un numero positivo.

Questi insiemi hanno ovviamente potenza del continuo, in quanto hanno più punti dell'insieme di Cantor C e ovviamente meno punti dell'intervallo  $[0,1]$ .

Consideriamo in particolare il caso  $\sigma = 1/4$ . Chiamiamo isole gli intervalli che via via si considerano e che qui abbiamo sottratto all'intervallo  $[0,1]$  e arcipelago la loro unione  $E$ . In tal caso l'arcipelago ha misura  $\frac{1}{2}$  e quindi il nostro insieme  $C_\sigma$  ha misura  $\frac{1}{2}$ . Esso coincide con la completa frontiera dell'insieme  $E$ ; ne deduciamo che l'arcipelago  $E$  ha frontiera di misura positiva secondo Lebesgue e quindi, nonostante il nome suggestivo, non è misurabile secondo Peano-Jordan al pari di  $C_\sigma$ . Questo rende l'insieme controintuitivo: infatti l'intuizione ci porterebbe a credere che la misura di  $E$  anche in tal caso, come nel caso del complemento dell'insieme di Cantor (ottenuto per  $\sigma = 1/3$ ) sia eguale a 1 e quindi la misura di  $C_\sigma$  sia 0.

Con l'insieme di Cantor, a mio parere, arriviamo al limite estremo cui può spingersi la nostra intuizione geometrica nell'immaginare un insieme. È naturale pensare che la frontiera di un insieme ben fatto, un insieme che possiamo disegnare, abbia misura nulla. La frontiera di misura positiva ci fa pensare che essa presenti delle nebulosità e delle sfumature che mal si adattano alla nostra quotidiana esperienza degli oggetti e delle figure della geometria tradizionale, che, fatte alcune particolarissime eccezioni, hanno tutte un ben preciso contorno (nei problemi tradizionali ci sono magari piramidi e cerchi, ma sono esclusi gas in estensione, spugne, nuvole etc ...). È allora il passaggio dalla classe degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan alla classe dei misurabili secondo Lebesgue il passo che ci porta dal mondo dell'intuizione geometrica ad un rigoroso universo dove tutte le proprietà della teoria della misura e

dell'integrazione trovano la loro giusta collocazione, e che necessita di un più raffinato tipo di intuizione matematica per essere indagato.

Sul ruolo positivo che gioca l'intuizione in matematica si sofferma Salomon Feferman nel suo saggio *Mathematical intuition vs. Mathematical monsters*, dove il mostro rappresenta la possibilità di percorsi alternativi. Paladino dell'inaffidabilità dell'intuizione è invece Hans Hahn, che in (Hahn, 1933) osserva che l'asserzione di Kant secondo la quale lo spazio è una delle forme dell'intuizione pura mentre poteva avere una sua motivazione nel Settecento, periodo dominato dalla fisica newtoniana e da una matematica di carattere geometrico, alla luce dei recenti studi di fisica, con l'apparizione della teoria della relatività di Einstein, e della matematica astratta, dove sono state introdotte entità che non trovano alcuna giustificazione a livello intuitivo, si è dimostrata del tutto inattendibile.

Fatto interessante: gli insiemi generalizzati di Cantor considerati in precedenza per valori positivi di  $\sigma < 1/3$  hanno tutti dimensione 1. Infatti si vede subito che gli spazi fra due isole consecutive allo stesso passo della costruzione sono eguali e dopo il primo passo ci sono due spazi a lato dell'isola centrale di ampiezza  $b_1 = \frac{1}{2}(1-\sigma)$ , dopo il secondo passo ci sono 4 spazi eguali di ampiezza  $b_2 = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2]$ , dopo il terzo passo ci sono 8 spazi eguali di ampiezza  $b_3 = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2]-\sigma^3\}$ , dopo il quarto passo ci sono 16 spazi eguali di ampiezza

$$b_4 = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-4\sigma^3-8\sigma^4}{2^4}$$

e in generale dopo  $n$  passi ci sono  $2^n$  spazi eguali di ampiezza ciascuno:

$$b_n = \frac{1 - \sigma - 2\sigma^2 - \dots - 2^{n-1}\sigma^n}{2^n} = \frac{1 - 3\sigma + \sigma(2\sigma)^n}{2^n(1 - 2\sigma)}.$$

Poiché l'unione di tali spazi ricopre  $C_\sigma$  la somma da considerare al fine del calcolo della sua dimensione è:

$$2^n \left( \frac{1 - 3\sigma + \sigma(2\sigma)^n}{2^n(1 - 2\sigma)} \right) \delta. \quad (**)$$

Se  $0 < \sigma < 1/3$  tale quantità tende a  $+\infty$  se  $\delta < 1$  e tende a zero se  $\delta > 1$ . Ne segue che in tali casi la dimensione frattale di  $C_\sigma$  è 1. Si noti che da (\*\*\*) nel caso  $\sigma = 1/3$  riotteniamo il valore  $\log_3 2$  per la dimensione che presenta quindi una discontinuità quando  $\sigma$  passa dai valori compresi tra 0 e  $1/3$ , in corrispondenza dei quali essa vale 1, al valore  $1/3$  in corrispondenza del quale essa assume il valore  $\log_3 2$ : ciò appare coerente con il fatto che se  $0 < \sigma < 1/3$  la misura di  $C_\sigma$  è positiva, mentre è nulla per  $\sigma = 1/3$  (ma la misura varia con continuità). Si osservi ancora che per  $\delta = 1$  il limite di (\*\*\*) fornisce la misura di  $C_\sigma$ , eguale a  $\frac{1 - 3\sigma}{1 - 2\sigma}$ , valore già determinato per altra via in precedenza.

Possiamo considerare un insieme piano, costruito nello stesso ordine di idee dell'insieme di Cantor al seguente modo: dato il quadrato  $Q = [0,1] \times [0,1]$ , si divida  $Q$  in nove quadrati mediante i segmenti di equazione  $x = \frac{i}{3}$   $i = 1, 2$  e  $y = \frac{i}{3}$   $i = 1, 2$ . Si elimini il quadrato centrale. Si divida ognuno degli 8 quadrati rimasti in 9 quadrati eguali di lato  $1/9$  con lo stesso

procedimento e si elimini poi il quadrato centrale. Si iteri indefinitamente il procedimento. L'insieme di Cantor del piano  $C_2$  è ciò che si ottiene eliminando successivamente tutti i quadrati così ottenuti. Si verifica subito che la misura di  $C_2$  è zero.

Per il calcolo della dimensione, poiché l'insieme è dato nel piano, ora lo ricopriremo con quadrati (o con cerchi) in modo opportuno: osserviamo che  $C_2$  può essere ricoperto da 8 quadrati di lato  $1/3$ , 64 quadrati di lato  $1/9$ , in generale  $8^n$  quadrati di lato  $1/3^n$  che, al fine del calcolo della dimensione frattale, danno un contributo pari a  $\frac{8^n}{3^{n\delta}}$ , valore che tende a 0 se  $8 < 3^\delta$  cioè se  $\delta > \log_3 8$  e tende a  $+\infty$  se  $\delta < \log_3 8$ , da cui si trae che la dimensione frattale di  $C_2$  è  $\log_3 8$ . Si può ripetere il ragionamento precedente in dimensione 3 e si ottiene una polvere  $C_3$  simile alla spugna di Menger, dal nome del matematico austriaco Karl Menger (1902-1985) che per primo la definì. La spugna qui definita ha misura tridimensionale nulla e dimensione frattale  $\log_3 26$ . Quindi:

$$\dim C < 1 < \dim C_2 < 2 < \dim C_3 < 3.$$

## Bibliografia

Archimede. *Opere*. A cura di A. Frajese, Classici U.T.E.T, 1974.

Cantor G. (1884). De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, Vol. 4, 381-396.

Clagett M. (1968). *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on uniformity and difformity of*

*intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* Madison, The University of Wisconsin Press.

Delvin K. (1999). *Dove va la matematica*, Bollati Boringhieri.

Hahn H. (1933). The crisis in intuition, *The Word of Mathematics* by James R. Newman, New York, 1956-1976.

Hausdorff F. (1919). Dimension und äusseres Mass, *Mathematische Annalen*, LXXIX, 157-79.

Mandelbrot B.B. (1987). *Gli oggetti frattali*, Biblioteca Einaudi (Prima edizione 1975).



\*\*\*\*\*

## La bellezza in matematica

*I modelli di un matematico, come quelli di un pittore o di un poeta, devono essere "belli": le idee, come i colori o le parole, devono legarsi in modo armonioso. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto per la matematica brutta. (Godfrey Harold Hardy, Apologia di un matematico, Bari: De Donato, 1969, p. 60)*

## ... e nella fisica teorica

*Il ricercatore, nel suo sforzo di esprimere matematicamente le leggi fondamentali della Natura, deve mirare soprattutto alla bellezza matematica. Deve prendere ancora in considerazione la semplicità, ma subordinandola alla bellezza (Einstein, per esempio, nello scegliere una legge di gravità, prese quella più semplice compatibile con il suo "continuum" spazio-temporale, ed ebbe successo). Accade spesso che i requisiti di semplicità e bellezza coincidano, ma laddove entrino in conflitto, il secondo deve avere la precedenza. (Paul A. M. Dirac, La bellezza come metodo, Milano: Raffaello Cortina, 2019, p. 63).*

*Per Dirac valeva il motto rinascimentale «pulchritudo splendor veritatis», ovvero per lo scopritore dell'antimateria laddove c'è bellezza c'è verità.[...] I formalismi matematici, per Dirac, sono tanto più eleganti quanto più "invarianti" offrono, intendendosi per "invarianti" tutte quelle entità o quantità che non cambiano quando si effettuano trasformazioni geometriche (come per es. una rotazione) o quando si cambia sistema di riferimento. E quanti più invarianti ci sono in una equazione, tanto maggiori sono la bellezza della teoria fisica su di essa basata e la possibilità della sua esattezza. Ma perché la bellezza, e quindi l'invarianza, risulta essere garante della verità di una teoria fisica? La risposta è concettualmente semplice: l'invarianza rispetto a una trasformazione (geometrica o di sistema di riferimento) è la prova più convincente dell'esistenza di un oggetto. (Luca Nicotra, "L'ideale estetico nell'opera dello scienziato", in Nello specchio dell'altro, riflessi della bellezza fra arte e scienza, a cura di L. Nicotra e R. Salina Borello, UniversItalia, 2011, pp. 42-43).*

# La Geometria delle Cupole Geodetiche

Giuseppe Conti\* Raffaella Paoletti\*\*

Alberto Trotta\*\*\*

\* Giuseppe Conti, Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia. giuseppe.conti@unifi.it

\*\* Raffaella Paoletti, Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia. raffaella.paoletti@unifi.it

\*\*\* Alberto Trotta, IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno, Italia. albertotrotta@virgilio.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.053

**Sunto:** *Una cupola geodetica è un poliedro convesso, di solito con facce triangolari, i cui lati giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera circoscritta al poliedro. La prima cupola geodetica fu costruita da Walther Bauersfeld nel 1922 a Jena in Germania. Tuttavia, fu l'architetto Richard Buckminster Fuller che, a partire dal 1948, dette un notevole impulso a questa tipologia di costruzioni; a lui si devono le cupole geodetiche più note, come, ad esempio, la famosa cupola realizzata per l'Expo di Montreal del 1967. In questa nota studieremo le cupole geodetiche dal punto di vista geometrico, mostrando alcuni esempi di queste realizzazioni architettoniche. È interessante notare che le molecole di alcuni virus hanno la forma di cupole geodetiche.*

**Parole Chiave:** *Poliedro, poliedro convesso, poliedro regolare, formula di Eulero per i poliedri.*

**Abstract:** *A geodesic dome is a convex polyhedron, usually with triangular faces, such that their sides lie approximately on maximum circles of the sphere*

*circumscribed by the polyhedron. Walther Bauersfeld built the first geodesic dome in 1922 in Jena in Germany, but the architect Richard Buckminster Fuller, starting from 1948, gave a significant boost to this type of construction; to him we owe the best known geodesic domes, such as, for example, the famous dome built for the 1967 Montreal Expo. In this article we will study geodesic domes from a geometric point of view, showing some examples of these architectural achievements. Interestingly, the molecules of some viruses have the shape of geodesic domes.*

**Keywords:** Polyhedron, convex polyhedron, regular polyhedron, Euler's formula for polyhedra.

## 1 - Generalità

Una cupola geodetica è un poliedro a facce triangolari, detto anche poliedro geodetico, inscritto in una sfera i cui lati giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera e i cui vertici hanno grado<sup>1</sup> 5 oppure 6. Talvolta si chiama cupola geodetica anche una parte di questo poliedro, come, ad esempio, quello che corrisponde a una semisfera o, più in generale, a una calotta sferica. Poiché una cupola geodetica approssima una sfera, talvolta essa viene chiamata anche sfera geodetica.

La scelta delle facce triangolari è una conseguenza di un importante teorema dovuto a Augustin-Louis Cauchy, che pubblicò la relativa dimostrazione nel 1813. Tale risultato afferma che un poliedro convesso è indeformabile (come struttura spaziale) se le sue facce, che sono figure piane, sono rigide; sappiamo che le facce triangolari, formate dalle travi

---

<sup>1</sup> Si chiama grado di un vertice il numero degli spigoli del poliedro che hanno quel vertice come estremo.

di una cupola geodetica, sono poligoni indeformabili, anche se sono semplicemente incernierate ai loro estremi; non lo sarebbero, invece, nel caso in cui le travi incernierate formassero facce poligonali con più di tre lati. Si possono costruire anche cupole geodetiche con facce non triangolari; tuttavia, in tal caso, le facce devono essere rigide e tale fatto può complicare la costruzione di queste cupole.

Usando il teorema delle tre perpendicolari si dimostra che il segmento, avente per estremi il circocentro di una generica faccia triangolare  $T$  di una di una cupola geodetica e il centro della sfera circoscritta ad essa, è perpendicolare alla faccia  $T$ .

Notiamo che gli spigoli delle cupole geodetiche hanno l'importante proprietà di distribuire gli sforzi locali sull'intera struttura. Inoltre, la cupola geodetica è una costruzione la cui resistenza aumenta in maniera proporzionale alle sue dimensioni.

Il procedimento più diffuso per costruire le cupole geodetiche inizia dall'icosaedro regolare: si suddividono le sue facce triangolari regolari in triangoli equilateri più piccoli tramite opportune regole che presenteremo in seguito; si proiettano, successivamente, i vertici di questi triangoli dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro sulla sfera stessa. In ogni vertice del poliedro così ottenuto concorrono 5 o 6 spigoli, perciò sono di grado 5 o 6 rispettivamente.

Da questo consegue che i poliedri duali delle cupole geodetiche (a facce triangolari) sono poliedri con facce esagonali oppure pentagonali, dunque sono poliedri di Goldberg<sup>2</sup>. Alcuni autori chiamano fullereni i poliedri di

---

<sup>2</sup> Un poliedro di Goldberg è un poliedro convesso formato da esagoni e pentagoni. Furono introdotti nel 1937 da Michael Goldberg. Essi sono

Goldberg. Notiamo che, per la proprietà della dualità, i duali dei poliedri di Goldberg sono i poliedri geodetici.

Detto parole semplici, il duale di un poliedro  $P$  è il poliedro  $Q$  ottenuto da  $P$  scambiando i ruoli dei vertici e delle facce. Tuttavia, nel caso di un poliedro  $P$  con certe regolarità, se vogliamo che il suo duale  $Q$  mantenga qualche regolarità, possiamo dare delle definizioni un po' diverse.

Nel caso che  $P$  sia un poliedro regolare, il suo duale  $Q$  è il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di  $P$  e gli spigoli sono i segmenti che hanno per estremi i centri di due facce adiacenti del poliedro  $P$ . La stessa definizione vale per poliedri le cui facce sono poligoni regolari, ma che non sono necessariamente poliedri regolari; questi solidi sono anche chiamati poliedri di Johnson (Johnson, 1966).

Se il poliedro  $P$  è circoscrittibile a una sfera, come nel caso dei poliedri di Catalan<sup>3</sup>, il poliedro duale  $Q$  di  $P$  ha per vertici i punti di tangenza della sfera con le facce di  $P$  e per spigoli di  $Q$  sono i segmenti che hanno per estremi i punti di contatto con la sfera di due facce adiacenti di  $P$ .

Nel caso in cui il poliedro  $P$  sia inscrittibile in una sfera, ad esempio nei poliedri archimedei<sup>4</sup> (Brusotti, 1955, pp. 316-318),

---

definiti da tre proprietà: ogni faccia è un pentagono o un esagono, in ogni vertice si incontrano esattamente tre facce, hanno le stesse simmetrie rotazionali dell'icosaedro, che sono: l'applicazione identica, 12 rotazioni di  $72^\circ$ , 12 rotazioni di  $144^\circ$ , 20 rotazioni di  $120^\circ$ , 15 rotazioni di  $180^\circ$ .

<sup>3</sup> Dal nome del matematico belga Eugène Charles Catalan (1814-1894) che li descrisse nel 1865.

<sup>4</sup> Notiamo che i poliedri di Catalan sono i duali dei poliedri archimedei; tuttavia, mentre le facce dei poliedri archimedei sono poligoni regolari, le facce dei poliedri di Catalan non sono poligoni regolari.

il poliedro  $Q$  duale di  $P$  ha le facce tangenti alla sfera nei vertici del poliedro  $P$ .

Si dimostra facilmente, usando la relazione di Eulero sui poliedri convessi, che il numero delle facce pentagonali di un poliedro di Goldberg è sempre 12, mentre il numero  $F_6$  delle facce esagonali è dato dalla seguente formula:  $F_6 = \frac{V}{2} - 10$ , dove  $V$  è il numero dei vertici (Conti e altri, 2018, p. 90).

Da questo segue che i vertici di gradi 5 di una cupola geodetica sono sempre 12, mentre il numero di quelli di grado 6 sono  $V/2 - 10$ .

Se  $V = 20$ , allora il poliedro di Goldberg non ha facce esagonali ma soltanto 12 facce pentagonali (si ottiene, in tal caso, il dodecaedro regolare).

Se il numero dei vertici è 60, allora si ottiene l'icosaedro troncato, detto anche buckminsterfullerene, oppure buckyball, che è la forma del poliedro che approssima il pallone da calcio (Conti e altri, 2018, p. 82).



**Figura 1. Icosaedro troncato (pallone da calcio)**

Notiamo che l'icosaedro troncato ha la stessa forma di una delle molecole  $C_{60}$  (la più stabile), nella quale i 60 atomi di carbonio si trovano nei vertici di questo poliedro; la suddetta molecola fu individuata nel 1985 dai chimici H. Kroto, R. Curl e R. Smalley; per questa scoperta essi ricevettero nel 1996 il Premio Nobel per la Chimica.

Dalle proprietà dei poliedri di Goldberg segue che i suoi spigoli sono tutti congruenti; inoltre, i dodici pentagoni sono tutti regolari, mentre gli esagoni sono equilateri, ma non equiangoli, a parte il caso dell'icosaedro troncato.

## 2 - Primi esempi di cupole geodetiche

La prima cupola geodetica fu costruita da Walther Bauersfeld nel 1922 a Jena in Germania, come superficie per il proiettore dello *Zeiss Planetarium*.



**Figura 2.** Cupola geodetica di Jena

Il termine buckminsterfullerene deriva dal nome di Richard Buckminster Fuller (1895 - 1983), l'architetto statunitense che per primo sviluppò in maniera sistematica l'idea di cupola geodetica a partire dal 1948 e che costruì i primi edifici con questa forma. Una delle cupole geodetiche più famose progettate da Fuller è quella realizzata per l'Expo di Montreal del 1967. Vedremo in seguito le caratteristiche geometriche di questa cupola.

Un'interessante cupola geodetica si ottiene a partire dal dodecaedro regolare, costruendo su ogni sua faccia una piramide retta a base pentagonale, in modo che i vertici di queste piramidi appartengano tutti alla sfera circoscritta al dodecaedro; tale poliedro fa parte della famiglia dei pentacisdodecaedri. Notiamo che le facce delle piramidi che formano questa cupola geodetica sono triangoli isosceli.

Un poliedro di questo tipo fu progettato da Michelangelo Buonarroti per il coronamento della lanterna della cupola della Sagrestia Nuova della chiesa di San Lorenzo a Firenze. Quasi sicuramente questa "palla", come la chiama Michelangelo, è inscrittibile in una sfera<sup>5</sup>.

L'esecuzione di questa sfera geodetica, formata di due pezzi non saldati fra loro, fu opera dell'orafo e scultore fiorentino Giovanni di Baldassarre (1460 -1536), specializzato nelle opere di metallo e soprannominato il Piloto.

---

<sup>5</sup> Il Papa Leone X, il figlio di Lorenzo il Magnifico, aveva commissionato nel 1520 a Michelangelo i lavori della Sagrestia Nuova di San Lorenzo. In una lettera del 1525, indirizzata al Papa Clemente VII, il figlio di Giuliano de' Medici, ucciso durante la congiura dei Pazzi, Michelangelo scriveva: *Facciàn fare la palla, che viene alta circha un braccio: e io ò pensato, per variarla dall'altre, di farla a faccie, che credo che arà gratia; e chosì si fa.*

Un pentacisdodecaedro fu disegnato da Leonardo da Vinci nel libro di Luca Pacioli *Divina Proportione*<sup>6</sup>; tuttavia il poliedro di Leonardo non è inscrittibile in una sfera, poiché le facce delle piramidi regolari, aventi per base le facce del dodecaedro, sono dei triangoli equilateri; di conseguenza esso è un po' diverso da quello di Michelangelo.

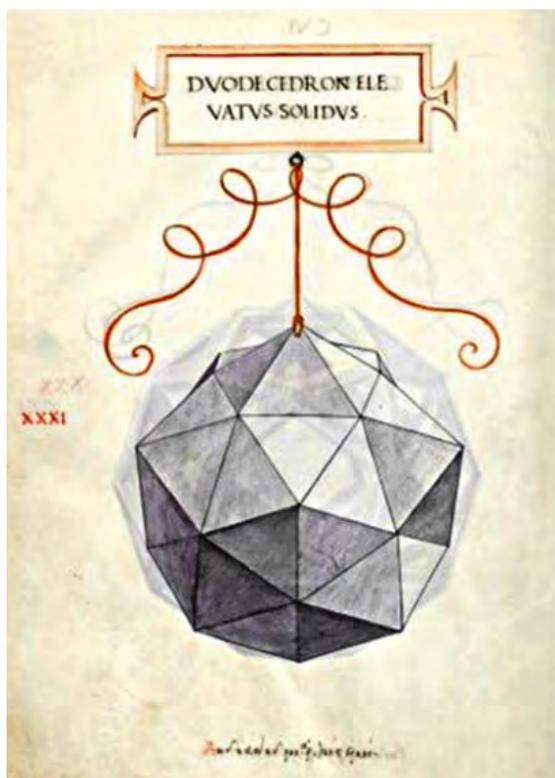


**Figura 3. Il poliedro posto a coronamento della lanterna della Sagrestia Nuova di San Lorenzo a Firenze**

Naturalmente le facce di un pentacisdodecaedro sono 60; per motivi che ci sfuggono, Giorgio Vasari afferma che esse sono 72 (Vasari, 1991, p. 1223)!

---

<sup>6</sup> Il *De divina proportione*, stampato a Venezia nel 1509, è diviso in tre parti; la terza parte è ripresa quasi integralmente dal libro di Piero della Francesca: *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1482-1492).



**Figura 4. Il poliedro di Leonardo**

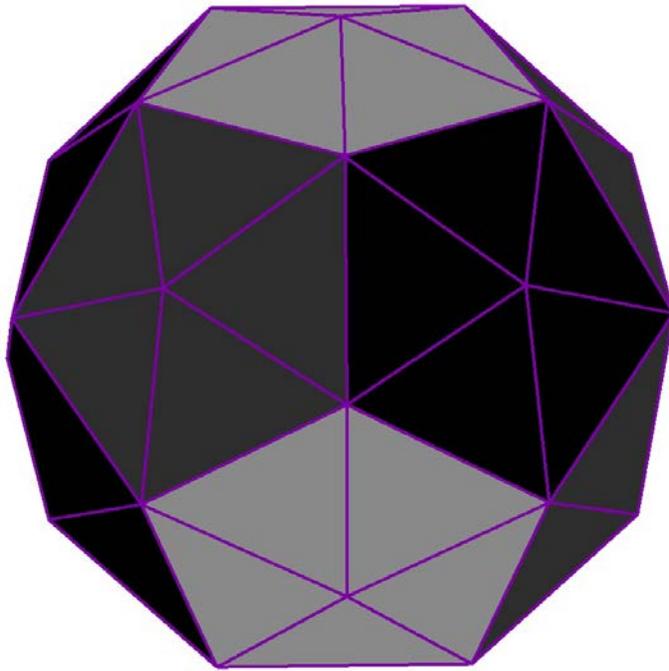
Esiste anche il pentaisododecaedro circoscrittibile ad una sfera, il cui duale è proprio l'icosaedro troncato, che è un solido archimedeo; perciò si tratta di un poliedro di Catalan.

Si dimostra che il rapporto fra il lato obliquo e la base dei triangoli isosceli (tutti uguali fra loro) che formano il pentaisododecaedro di Catalan è circa 0,887057998; il loro angolo al vertice è circa  $68^{\circ} 37' 07''$ .

Nel caso del pentaisododecaedro inscritto in una sfera, si ha che il rapporto fra il lato obliquo e la base dei triangoli

isosceli (facce del poliedro) è circa 0,897999085; il loro angolo al vertice è circa  $67^{\circ}40' 07''$ .

Poiché le differenze fra i due pentacisdodecaedri (quello inscritto e quello circoscritto) sono minime, resta difficile sapere con certezza quale sia quello di Michelangelo. Noi pensiamo che, per questioni realizzative, l'artista abbia pensato a quello inscritto.



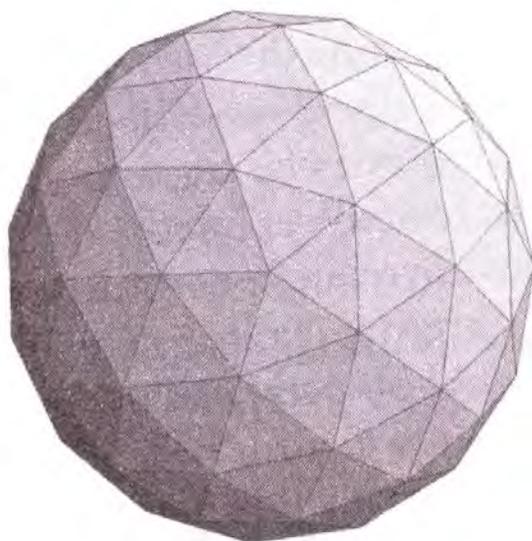
**Figura 5. Pentacisdodecaedro**

Analogamente a quanto fatto per la costruzione geometrica del pentacisdodecaedro inscritto nella sfera, con un procedimento simile si può costruire una cupola geodetica a facce triangolari anche a partire dall'icosaedro troncato.

Per fare questo, proiettiamo dal centro della sfera circoscritta al poliedro i centri dei suoi pentagoni ed esagoni regolari sulla sfera stessa; osserviamo che si tratta di una proiezione ortogonale dal centro della sfera su ciascuna faccia dell'icosaedro troncato. Questa costruzione geometrica (innalzamento dei centri dei poligoni dell'icosaedro troncato sulla sfera circoscritta) si chiama anche *twinning* e può essere estesa a un poliedro qualunque avente per facce dei poligoni regolari. Nel caso dell'icosaedro troncato tale procedimento dà luogo a 12 piramidi a base pentagonale e a 20 piramidi a base esagonale.

Notiamo che si può ottenere lo stesso poliedro geodetico per mezzo di un'altra costruzione geometrica, basata su una particolare tassellazione delle facce di un icosaedro.

(<https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml>).



**Figura 6. Cupola geodetica ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato**

Otteniamo in tal modo una cupola geodetica con 180 facce, 92 vertici e 270 spigoli; è interessante notare che si tratta della forma del poliedro del virus della poliomielite. A questo proposito è da sottolineare che le strutture geodetiche si possono trovare anche nelle capsule proteiche che contengono l'acido nucleico dei virus.

Osserviamo che alcuni studiosi chiamano cupole geodetiche anche i poliedri di Goldberg, i quali, come già osservato, si chiamano anche fullereni. Noi pensiamo che questo non sia corretto; infatti, gli unici fullereni inscrittibili in una sfera sono il dodecaedro e l'icosaedro troncato; inoltre, per quanto già rilevato, le cupole geodetiche traggono un notevole vantaggio, sia statico che costruttivo, proprio dal fatto che le loro facce sono triangolari.

### **3 - Costruzioni geometriche di sfere geodetiche**

Uno dei metodi più diffusi per costruire le cupole geodetiche in modo che queste abbiano la maggiore regolarità possibile, consiste nel considerare un icosaedro e suddividere i lati delle sue facce in  $m$  segmenti congruenti, con  $m$  numero naturale. Unendo i punti così ottenuti con segmenti paralleli ai lati di ciascuna faccia, si ottiene per ognuna di queste una tassellazione formata da  $m^2$  triangoli equilateri congruenti fra loro, come si può vedere dalle figure seguenti.

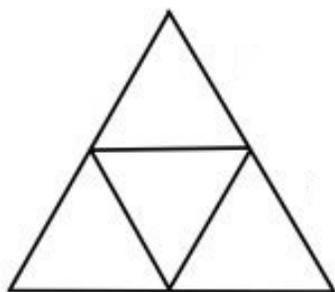
Notiamo che nel caso  $m = 1$  non si ha alcuna tassellazione delle facce dell'icosaedro.

Si usa anche la seguente notazione: se ciascun lato dell'icosaedro è suddiviso in  $m$  segmenti, si dice che la

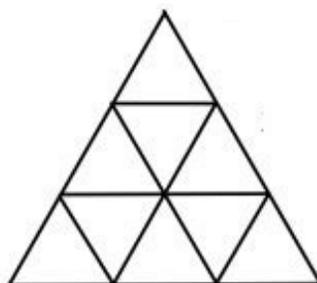
suddivisione ha frequenza  $mv$ , oppure è di tipo  $mv$ . Questo modo di dividere le facce dell'icosaedro in triangoli equilateri si chiama anche ripartizione alternata.

Notiamo che esistono altri modi per costruire una cupola geodetica a partire da un icosaedro, il quale è quasi sempre il poliedro di partenza; tali metodi saranno presentati in una prossima pubblicazione.

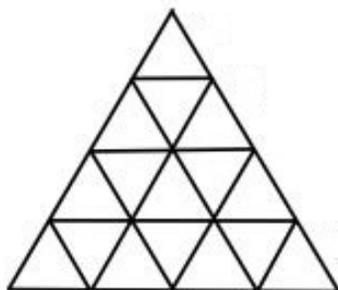
Proiettiamo dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro



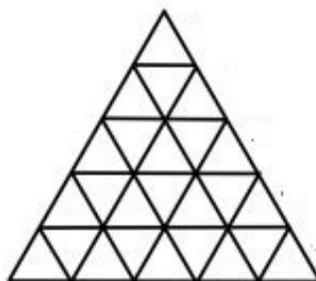
**Figura 7. Frequenza 2v**



**Figura 8. Frequenza 3v**



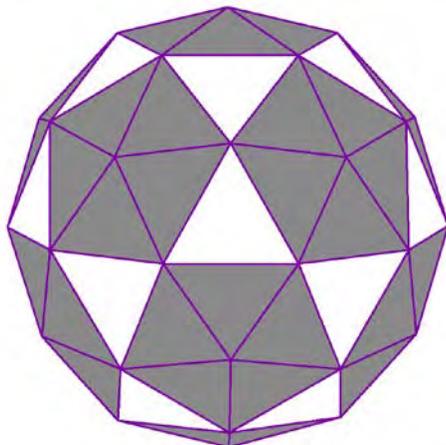
**Figura 9. Frequenza 4v**



**Figura 10. Frequenza 5v**

i vertici dei triangoli, determinati da questa tassellazione, sulla sfera stessa, eccetto, naturalmente, i vertici dell'icosaedro che appartengono già alla sfera circoscritta; otteniamo in tal modo una sfera geodetica a facce triangolari.

La sfera geodetica  $2v$  ha 80 facce, 42 vertici (12 di grado 5 e 30 di grado 6) e 120 spigoli.



**Figura 11. Sfera geodetica  $2v$**

Notiamo che il poliedro di Goldberg, duale della sfera geodetica  $2v$ , è il triacontaedro rombico troncato, che ha 80 vertici, 120 spigoli e 42 facce: 30 esagonali e 12 pentagonali.

Per la sua forma simile all'icosaedro troncato, questo poliedro è anche chiamato *super pallone da calcio* (per una lista di cupole geodetiche e dei loro duali, vedi: Wenninger, 1979).



**Figura 12. Triacontaedro rombico troncato**

Una costruzione analoga, cioè la suddivisione delle facce di un poliedro in triangoli e la successiva proiezione dei loro vertici sulla sfera, può essere fatta anche a partire da altri poliedri regolari. Tuttavia, gran parte delle cupole geodetiche si ottengono partendo dall'icosaedro, essendo questo il poliedro regolare che approssima una sfera meglio degli altri.

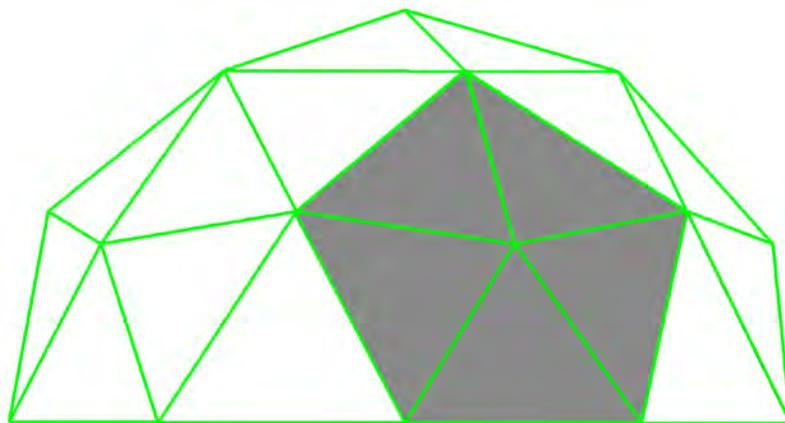
Abbiamo visto che, data una cupola geodetica di frequenza  $mv$ , il numero dei triangoli in cui si scompone ciascuna faccia dell'icosaedro, su cui essa si basa, è  $m^2$ ; di conseguenza, il numero delle facce triangolari della cupola geodetica, ottenuta con questa costruzione, è  $20m^2$ .

È importante notare che, anche se la tassellazione delle facce dell'icosaedro è formata da triangoli equilateri, le facce della sfera geodetica ottenuta con questa costruzione non sono triangoli equilateri, eccetto alcuni, ma triangoli isosceli e non tutti uguali fra loro. Ad esempio, nella cupola geodetica  $3v$  ci sono tre diverse lunghezze di spigoli; in quella  $5v$  ci sono nove lunghezze differenti.

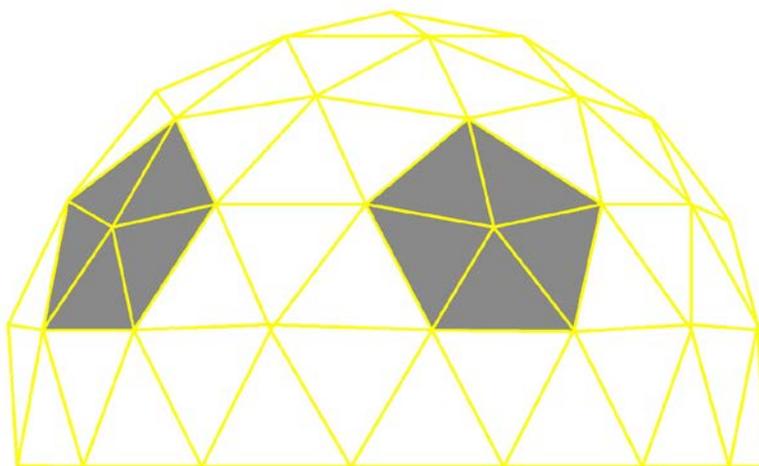
Osserviamo che la frequenza di una cupola geodetica si determina considerando due vertici "vicini" di grado  $5$ , che corrispondono agli estremi di uno spigolo dell'icosaedro su cui è basata la sua costruzione; poi si contano i segmenti che uniscono tali centri, che corrispondono alla suddivisione dei lati delle facce dell'icosaedro di partenza.

Quindi, tenendo conto del fatto che il numero delle facce è  $20m^2$ , si ha immediatamente il numero delle facce della sfera geodetica del tipo che stiamo considerando.

Nei seguenti disegni sono presentate alcune "semisfere" geodetiche. In tal caso le facce triangolari sono  $10m^2$ .



**Figura 13. Semisfera geodetica 2v**



**Figura 14. Semisfera geodetica 3v**

Notiamo che la cupola geodetica 3v corrisponde a quella ottenuta dall'innalzamento dell'icosaedro troncato (vedi la figura 6)

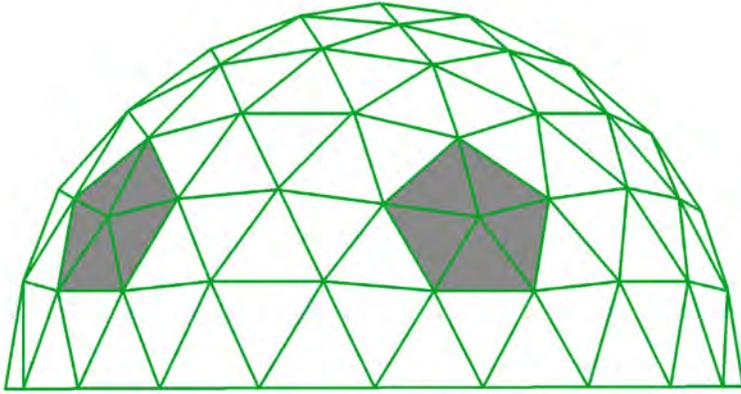


Figura 15. Semisfera geodetica 4v

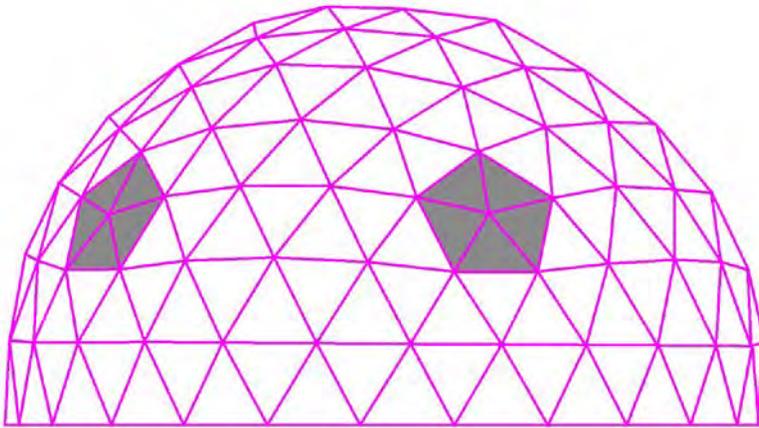


Figura 16. Semisfera geodetica 5v

Nel Parco de la Villette a Parigi si trova il **Géode**, una grande sfera geodetica d'acciaio di 36 metri di diametro, realizzata nel 1985 dall'architetto Adrien Fainsilbe. Al suo interno si trova una sala di 400 posti, dotata di uno schermo semisferico. La parte esterna della sfera ha un'altezza di circa

30 metri. Si tratta di una sfera geodetica di tipo 20v, perciò la parte esterna è formata da circa 6600 triangoli.

La Biosphère a Montreal (Canada) è la cupola geodetica<sup>7</sup> che Richard Buckminster Fuller ha progettato come Padiglione degli Stati Uniti per l'Esposizione Universale del 1967. Essa è di tipo 16v. È circa  $\frac{4}{5}$  di una sfera di diametro 76,2 metri; perciò è alta circa 60,96 metri ed è formata da circa 4096 triangoli (vedi anche Barone e altri, 2017).



**Figura 17. Semisfera geodetica di Fuller a Spoleto<sup>8</sup>**

---

<sup>7</sup> Furono due ex studenti di Fuller, Jeffrey Lindsay e Don Richter, a progettare nel 1950 il prototipo della cupola che venne realizzata a Montreal, usando il metodo che hanno chiamato "della griglia regolare".

<sup>8</sup> Di Manuelarosi - Opera propria, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45968494>

Buckminster Fuller nel 1967 ha donato alla città di Spoleto, in occasione del X Festival dei Due Mondi, una semisfera geodetica chiamata Spoletosfera.

Essa è formata da elementi metallici, misura 21 metri di diametro ed è di tipo 3v. Coprendo con un telo questa struttura, essa può essere utilizzata per organizzare conferenze, mostre, spettacoli.

## **4 - Conclusioni**

Abbiamo mostrato l'importanza degli strumenti geometrici nella progettazione delle cupole geodetiche, che sono strutture molto importanti per i vantaggi che esse comportano, come, ad esempio, la sua resistenza che aumenta proporzionalmente alla dimensione della struttura, la rigidità delle maglie triangolari, la distribuzione uniforme dei pesi e la sua reazione ai fenomeni sismici.

Abbiamo notato l'importanza della matematica quando, ad esempio, riusciamo a calcolare il numero totale delle facce triangolari misurando semplicemente il numero delle aste che si trovano fra due vertici di grado 5 vicini fra loro.

Il calcolo degli elementi geometrici che compongono una cupola geodetica (lunghezze delle aste, angoli delle facce, angoli diedri, etc.) una volta era lungo e difficile, anche tenendo conto del fatto che i lati delle facce triangolari non sono tutti uguali.

Con l'avvento dei computer questi calcoli sono diventati più semplici; inoltre, esistono diversi software realizzati per determinare le misure delle entità geometriche della

struttura, i quali sono di grande aiuto nella progettazione delle cupole geodetiche.

## Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la Dottoressa Margherita Lori per il lavoro svolto con dedizione e competenza nella realizzazione delle immagini presenti in questo articolo.

## Bibliografia

Barone V., Bianucci P. (2017). *L'infinita curiosità: Breve viaggio nella fisica contemporanea*, Edizioni Dedalo, Bari.

Brusotti L. (1955). *Poligoni e poliedri*. Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II - Parte 1<sup>a</sup>, Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.

Conti G., Trotta A., Conti F. (2018). *A Journey into the Polyhedrons World*, Science & Philosophy, Vol. 6, n. 1, pp. 67-92.

Johnson N. (1966). *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of Mathematics, 18, pp. 169-200.

Vasari G. (1991). *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architetti*, Newton Compton Editori, Roma.

Wenninger J. M. (1979). *Spherical models*, Cambridge University Press.

# *Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica*

D'Errico Marco\* D'Errico Bruna\*\*

\*IC Nino Cortese (Casoria – Na); [marco.derrico1@posta.istruzione.it](mailto:marco.derrico1@posta.istruzione.it)

\*\*Liceo Gobetti (Genova); [bruna.derrico@gmail.com](mailto:bruna.derrico@gmail.com)



DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.054

**Sunto:** *“Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani” (Indicazioni nazionali – 2012). In questo articolo, cercando di mettere insieme il pensare ed il fare, vengono illustrate esperienze didattiche sul teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado. Queste seguono principalmente un approccio basato sui lavori di didattica della matematica di Emma Castelnuovo.*

**Parole Chiave:** *Teorema di Pitagora, didattica, Emma Castelnuovo.*

**Abstract:** *“Mathematical knowledge contributes to cultural formation of people and communities, developing the ability to put in a close relationship “thinking” and “doing” and offering tools suitable for perceiving, interpreting and linking natural phenomena, concepts and daily events” (Indicazioni nazionali – 2012). In this article didactic experiences concerning the “Pythagoras’s theorem” in lower secondary school are illustrated. These one are based on the Emma Castelnuovo works.*

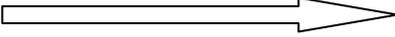
**Keywords:** *Pythagoras’s theorem, didactics, Emma Castelnuovo*

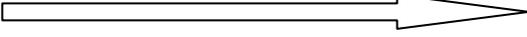
## 1 - Introduzione

L’articolo è frutto della presentazione tenuta durante il convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi? (Convegno Mathesis Napoli “A. Morelli” - AFSU Agerola, 8-10 settembre 2021).

In questo articolo vengono illustrate esperienze didattiche sul teorema di Pitagora nella scuola secondaria di I grado. Queste seguono principalmente un approccio basato sui lavori di didattica della matematica di Emma Castelnuovo. Pertanto, si basano sul “fare matematica”: dapprima con materiali semplici e concreti, poi integrandoli gradualmente con gli strumenti offerti dalle tecnologie informatiche. In questo tipo di approccio anche gli alunni con disturbi specifici dell’apprendimento ed in generale gran parte degli alunni con bisogni educativi speciali riescono a sentirsi partecipi del proprio processo di apprendimento. Il teorema di Pitagora è il primo esempio di dimostrazione che gli alunni si trovano ad affrontare. Rappresenta quindi un punto fondamentale del percorso che insegnanti e studenti della scuola secondaria di I



**TEMPO** 

<i>Argomenti...</i>
<i>Numeri irrazionali</i>
<i>Teorema di Pitagora</i>
...
<b>TEMPO</b> 

## 2 - Chi era Pitagora? Cos'è un teorema?

Prima di iniziare dobbiamo chiarire cosa è un teorema e chi è Pitagora. Iniziamo con Pitagora. Chi era Pitagora di Samo (571/70-497/6 a.C.)? Di Samo? Che vuol dire? Beh, vuol dire che Pitagora è nato nella piccola isola di Samo, posta di fronte alle coste dell'Asia Minore (attuale Turchia).



La vedi Samo? E la vedi quella grossa freccia arancione che dall'Asia Minore conduce verso... Guarda bene! Già, conduce proprio verso il Sud Italia, dove allora sorgeva la Magna ("grande") Grecia.

Grandiosa, infatti, fu la storia delle colonie qui fondate dai greci.

Ne restano intatte gloriose testimonianze artistiche.

Ma, torniamo a Pitagora, il quale da Samo, si trasferì a Crotona (guarda la cartina).

Qui fonda una prestigiosa scuola filosofica... Filosofica? Sai cos'è la filosofia? Letteralmente significa "amore per il sapere", amore appassionato per il sapere.

E' proprio grazie a questo amore smodato che i filosofi possono insegnarci, ancora oggi, come si sta al mondo, rispondendo alle grandi domande della nostra esistenza (cosa è giusto e cosa è sbagliato, come si conosce, da dove veniamo, cosa è logico e cosa non lo è....)... domande che forse tu

ancora non ti poni... ma prima o poi, se rimani vivo, te le porrai eccome!

Pitagora fu un personaggio leggendario. Un mito vivente.

La sua dottrina gli sarebbe stata trasmessa dal suo dio protettore, Apollo, per bocca della sacerdotessa di Delfi, Temistoclea. Per questa ragione, Pitagora veniva considerato depositario di sapienza, cui i suoi discepoli dovevano rimanere fedeli.

La scuola pitagorica aveva delle particolari caratteristiche. Possiamo, infatti, paragonarla ad una setta. Sai cos'è una setta? Un gruppo di persone che seguono strane regole e che considerano quelle regole sacre.

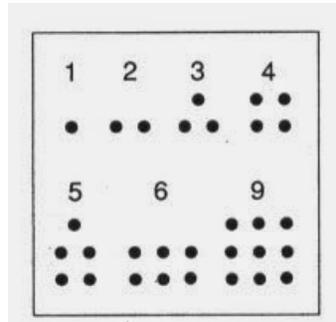
I pitagorici, ad esempio, non mangiavano carne (la commedia greca ce li rappresenta ironicamente come dei morti di fame). La scuola era basata su insegnamenti molto rigorosi che esigevano un lungo periodo di tirocinio da parte degli scolari prima di accedere ai segreti più profondi della setta (da qui la distinzione tra acusmatici e matematici). L'insegnamento di Pitagora era circondato da grande rispetto. Nella sua scuola gli acusmatici per cinque anni rispettavano il silenzio sacro (tu ci riusciresti? A stare zitto per cinque anni?).

Fatto notevole: nella scuola erano ammesse le donne.

Ad un certo punto, però, a Crotone ci fu una rivolta democratica e i pitagorici, considerati una setta di tendenze aristocratiche, furono costretti a fuggire. Pitagora stesso si diresse a Metaponto, dove si narra che si lasciò morire di digiuno nel tempio delle Muse.

Quali sono le dottrine più importanti della scuola pitagorica?

Essenzialmente, due: la dottrina dell'anima e la dottrina del numero. Tutta la realtà può essere interpretata attraverso i numeri che vengono rappresentati con dei sassolini.



Per Pitagora i numeri hanno anche un valore simbolico (ad esempio: 5= matrimonio, 4 e 9= giustizia). La potenza della mente umana è enorme, calcolando e ragionando sui numeri si possono acquisire conoscenze immense, non posso andare sul sole ma posso misurarne la distanza dalla terra. Questo sapere supremo possono raggiungerlo solo i migliori. Infine, i pitagorici non mangiavano carne perché credevano nella metempsicosi (significa reincarnazione). L'anima, dopo la morte, si reincarna in altri corpi (anche animali) per espiare le sue colpe.

Passiamo a capire cos'è un teorema. Un teorema in matematica è una proposizione (un'affermazione) dimostrata logicamente a partire da postulati o assiomi o da altre proposizioni derivate (da fatti che sono stati già verificati). In realtà devi sapere che quello che tutti ormai chiamano Teorema di Pitagora, era conosciuto già molto tempo prima che nascesse Pitagora. Già gli egiziani mille anni prima della nascita del filosofo-matematico lo conoscevano e lo

applicavano. Pitagora semplicemente lo enunciò. E da quel momento tutti hanno iniziato a chiamarlo “teorema di Pitagora”.

### **3 - Il teorema di Pitagora ed esempi di dimostrazioni utilizzabili nella scuola secondaria di I grado**

Partiamo proprio dagli egiziani.

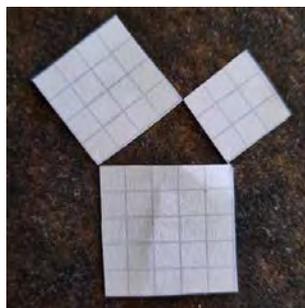
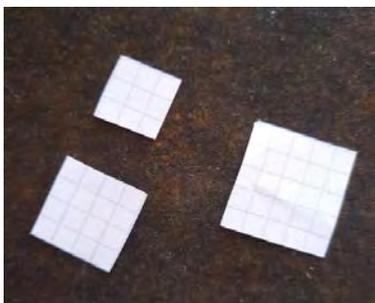
Immagina che tu debba costruire la base di una piramide come quelle che costruivano gli egiziani. Certo se non sei mai stato in Egitto non riesci a renderti conto di quanto possa essere grande la base di una piramide. La Piramide di Cheope ad esempio ha un'area di base pari a  $53077 \text{ m}^2$ . Il lato quindi è di  $230,36 \text{ m}$ .

Le prime file di mattoni da posizionare dovevano rappresentare un quadrato di queste dimensioni. Ma hai imparato che il quadrato non ha solo i quattro lati uguali ma anche gli angoli. Pertanto bisognava costruire quattro angoli di  $90^\circ$  con lati di  $230$  metri circa.

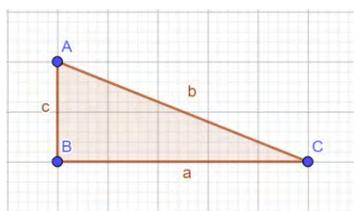
Gli egiziani prendevano una fune di una certa lunghezza, chiusa come fosse una collana e divisa in dodici parti uguali segnate da nodi. Poi fissavano a terra la fune usando tre pali, che ponevano in corrispondenza di tre nodi per comporre un triangolo con i lati composti rispettivamente di  $3$ ,  $4$  e  $5$  parti. Sapevano, infatti, che un triangolo con i lati di  $3$ ,  $4$  e  $5$  è un triangolo con un angolo retto.

Quindi non con tutte le terne di numeri naturali è possibile costruire un triangolo rettangolo.

Proviamo insieme. Disegna tre quadrati: uno di lato 3 quadratini, uno di lato 4 quadratini ed uno di lato 5 quadratini. Ritagliali. Con i tre quadrati, puoi costruire un triangolo rettangolo!



In questo tipo di triangolo inoltre si è soliti chiamare ipotenusa il lato più lungo opposto all'angolo retto e cateti gli altri due lati.

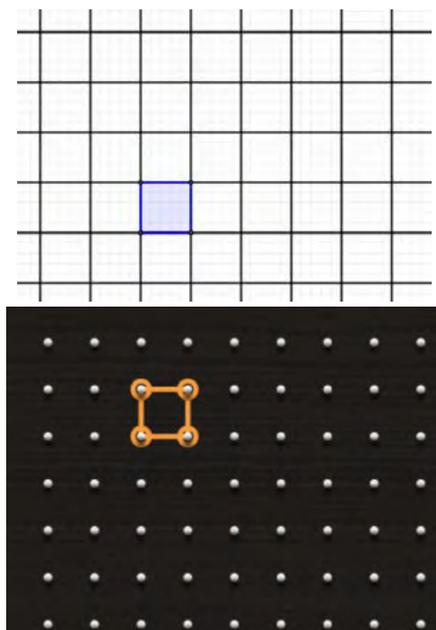


AB e BC si chiamano cateti; AC si chiama ipotenusa.

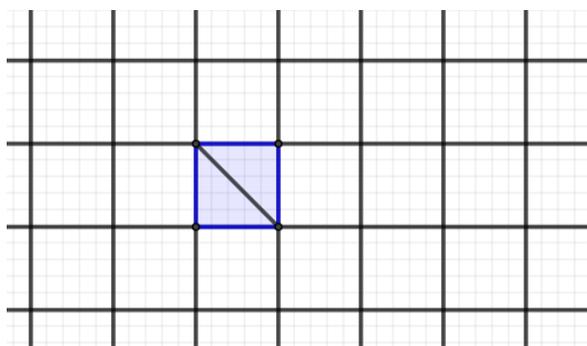
Si narra, ma pare sia leggenda, che Pitagora iniziò a riflettere su questo teorema partendo da osservazioni su un pavimento con mattonelle quadrate.

Prendi un geopiano ed iniziamo la riflessione.

Con lo spago disegna un quadrato unitario:

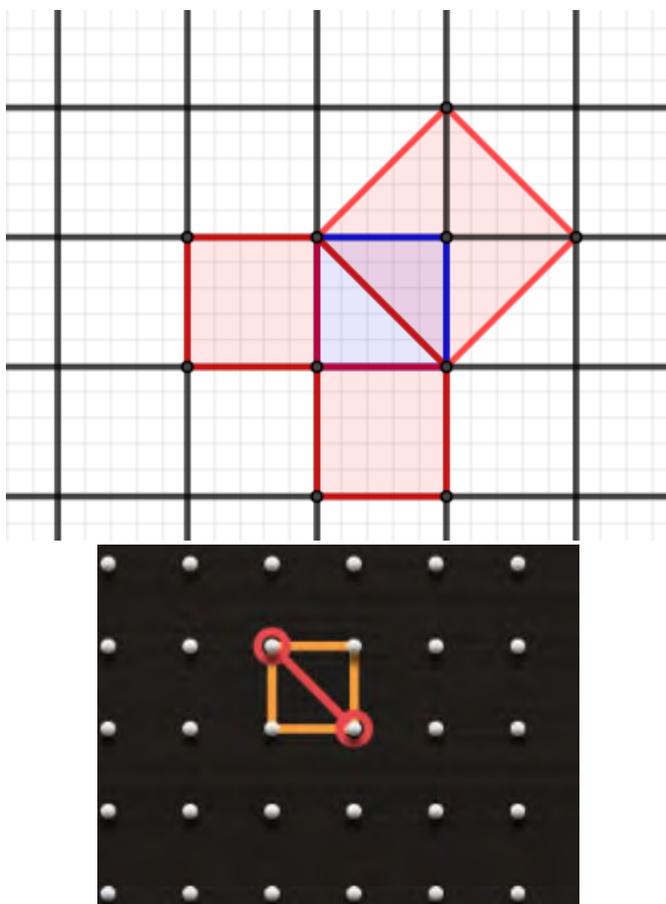


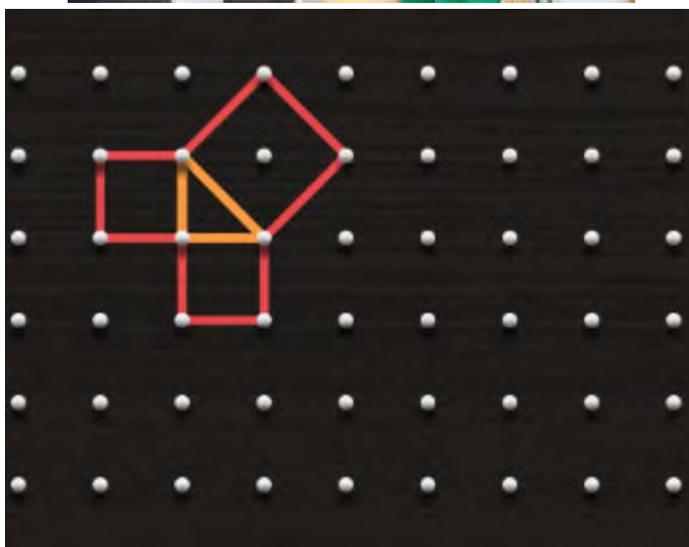
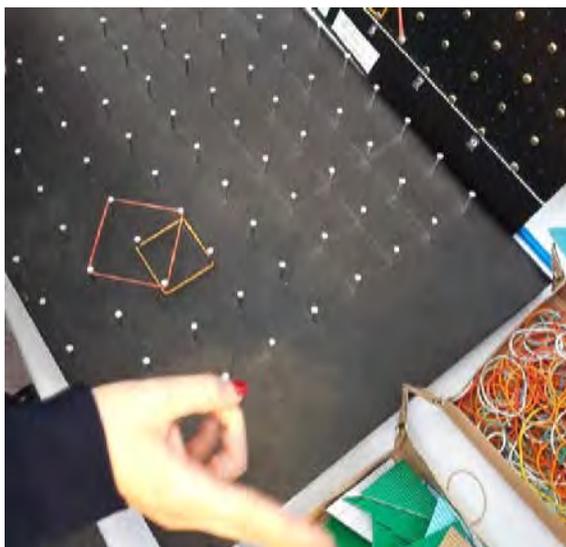
Pitagora ragionò sul fatto che si poteva:  
-dividere il quadrato (la mattonella) in due triangoli rettangoli attraverso la diagonale del quadrato



-costruire un quadrato sulla diagonale (ipotenusa del triangolo rettangolo) che abbia l'area uguale alla somma delle

aree dei due quadrati (mattonelle) costruiti sui due cateti (quadrati rossi):





Questo è un caso particolare e Pitagora se ne rendeva conto bene: il triangolo è rettangolo ma anche isoscele. Bisognava appurare che per tutti i triangoli rettangoli valesse questa affermazione (un teorema fa questo: ti dimostra che una certa proprietà, affermazione vale per una data categoria di numeri,

figure etc. senza che ogni volta tu debba occuparti di controllare se sia vero o no). In pratica Pitagora si occupò di dimostrare non soltanto per se stesso ma per tutti noi che ogni volta che ci troviamo di fronte ad un triangolo rettangolo vale l'affermazione: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri due cateti (vedremo anche che il teorema si può enunciare in diversi modi).

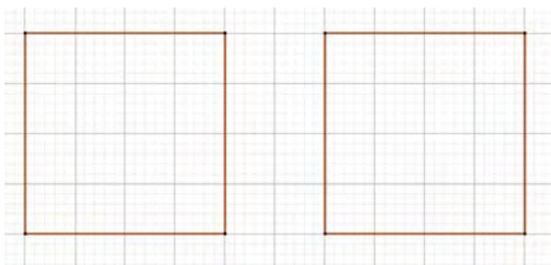
Quando prima abbiamo detto che gli egiziani erano avanti su questa questione era perché avevano notato che i numeri 3, 4 e 5 con cui costruivano i triangoli rettangoli godevano della seguente proprietà:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

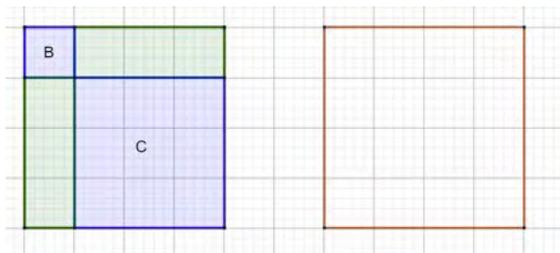
Ma tu adesso sai benissimo che un numero al quadrato rappresenta l'area di un quadrato (ricordi i numeri quadrati e la loro configurazione?).

In realtà anche i cinesi e gli indiani usavano terne di questo tipo per costruire triangoli rettangoli (oggi queste terne le chiamiamo terne pitagoriche).

Per cui quello che aveva notato Pitagora andava dimostrato per tutti i triangoli rettangoli. Oggi esistono diverse dimostrazioni del teorema. Noi ne faremo una pratica. Prendi dei cartoncini colorati. Partiamo col costruire due quadrati col cartoncino:

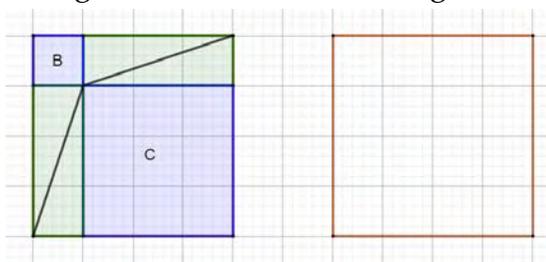


Dividiamolo in due rettangoli uguali e due quadrati B e C.  
 Da un altro cartoncino ritaglia questi rettangoli ed i due quadrati e poggiagli sul primo quadrato che hai ritagliato:

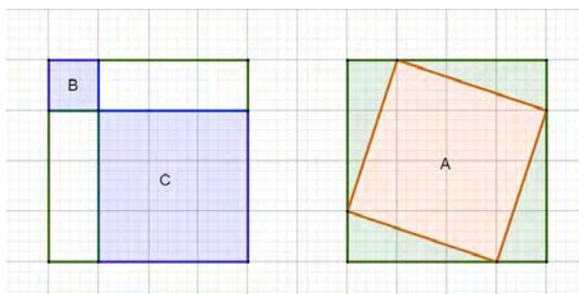


Chiaramente l'area dei due quadrati B e C e dei due rettangoli equivale all'area del quadrato grande.

Adesso con del cartoncino taglia in due i due rettangoli verdi lungo la diagonale come indicato in figura:



Adesso toglì i quattro triangoli dal primo quadrato e portali sul secondo. Cosa resta nel primo quadrato? Resta B+C.



Adesso se togli i quattro triangoli dal secondo quadrato grande resta il quadrato A.

Quindi al primo quadrato grande togliendo i quattro triangoli resta B+C. Al secondo quadrato grande se togli i quattro triangoli rettangoli resta solo il quadrato A.

Quindi l'area di A è uguale all'area di B più l'area di C:

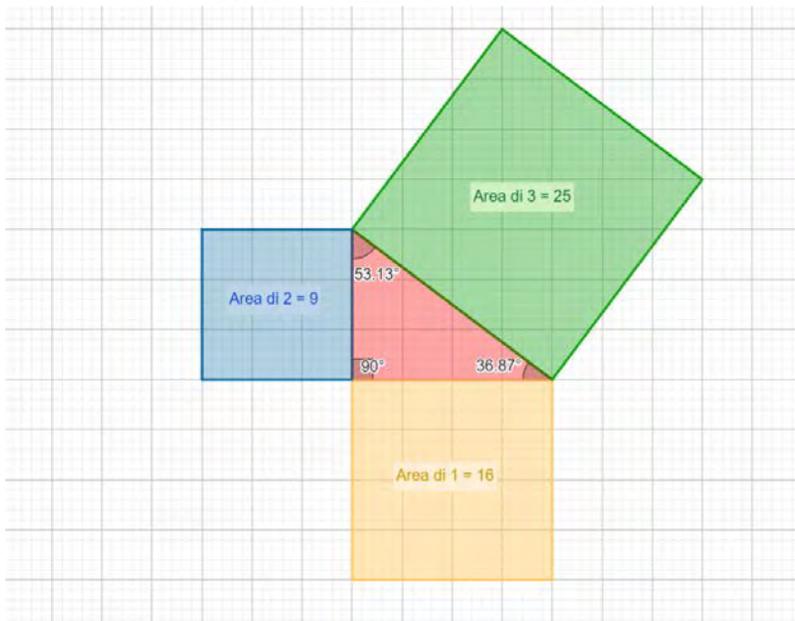
$$A = B + C$$

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

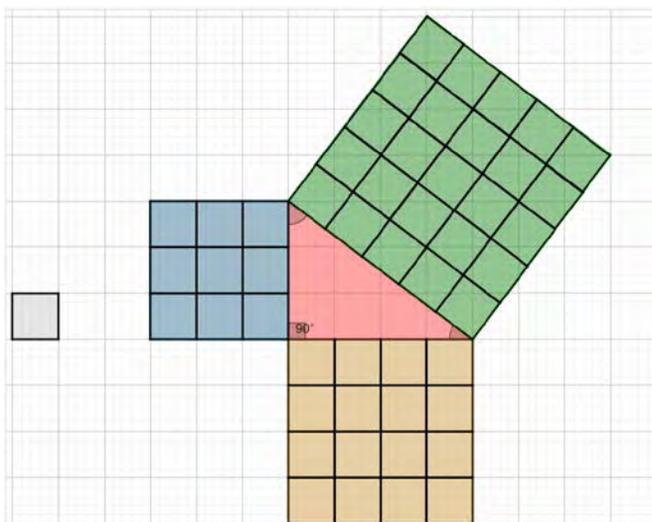
Ricorda che equivalente vuol dire avere la stessa area.

Quindi nel caso di questa figura avremo che:

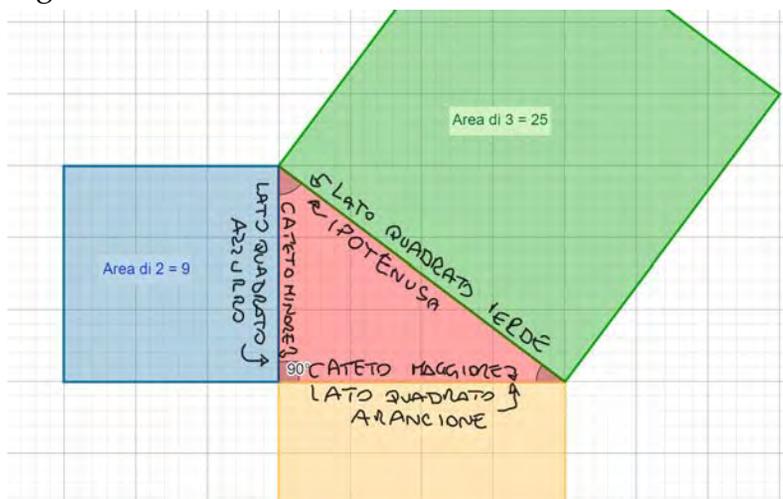
$$A_{verde} = A_{azzurra} + A_{arancione}$$



Se stabiliamo che l'unità di misura è un quadrato di 1cm<sup>2</sup>, guarda quante volte l'unità di misura entra nelle tre figure:



Osserva: il lato di un quadrato coincide con un lato del triangolo:



Ma l'area di un quadrato si trova elevando il lato alla seconda.

Pertanto l'area del quadrato azzurro si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato azzurro. Ma il lato del quadrato

coincide con il cateto minore ( $c_m$ ) del triangolo. Quindi l'area del quadrato azzurro possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{azzurro}} = c_m^2$$

L'area del quadrato arancione si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato arancione. Ma il lato del quadrato coincide con il cateto minore ( $c_M$ ) del triangolo. Quindi l'area del quadrato arancione possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{arancione}} = c_M^2$$

L'area del quadrato verde si calcola elevando al quadrato il lato del quadrato verde. Ma il lato del quadrato coincide con l'ipotenusa ( $i$ ) del triangolo. Quindi l'area del quadrato verde possiamo calcolarla così:

$$A_{\text{verde}} = i^2$$

Quindi possiamo scrivere l'enunciato del teorema così:

$$i^2 = c_M^2 + c_m^2$$

Da cui possiamo ricavare due enunciati inversi:

$$c_M^2 = i^2 - c_m^2 \text{ ed anche } c_m^2 = i^2 - c_M^2$$

Se vogliamo ricavare esattamente quanto valgono i lati dei quadrati (quindi cateti o ipotenusa) dobbiamo estrarre la radice quadrata che è appunto l'operazione inversa della potenza:

$$i = \sqrt{c_M^2 + c_m^2}$$

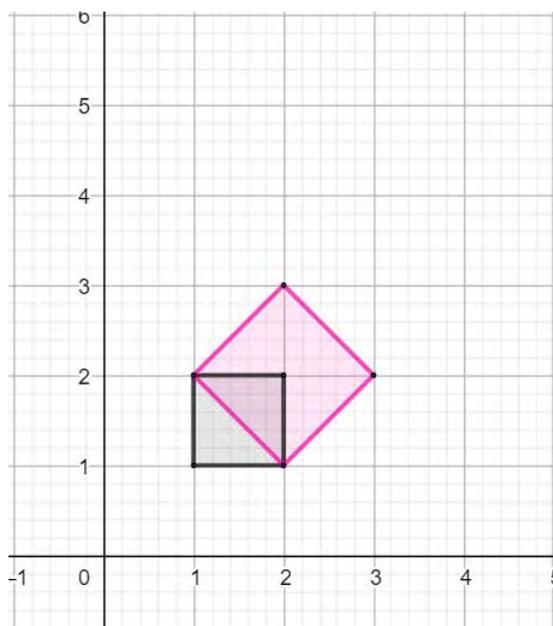
$$c_M = \sqrt{i^2 - c_m^2}$$

$$c_m = \sqrt{i^2 - c_M^2}$$

## 4 - Riflessioni e applicazioni

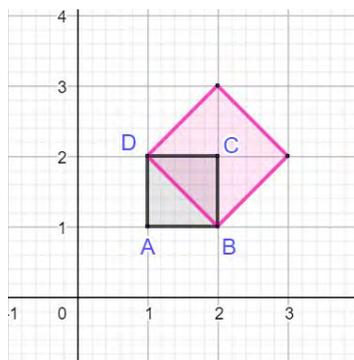
Abbiamo visto che si può raddoppiare l'area di un quadrato a partire dalla sua diagonale. Ricordi?

Raddoppiamo l'area di un quadrato di area  $1\text{cm}^2$ . Quanto misura lato del nuovo quadrato?



Possiamo calcolare quanto vale la diagonale del quadrato nero che poi è anche il lato del quadrato rosa?

Il quadrato nero è diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli. Possiamo allora applicare il teorema di Pitagora al triangolo ABD: sappiamo che i due cateti valgono 1 cm.

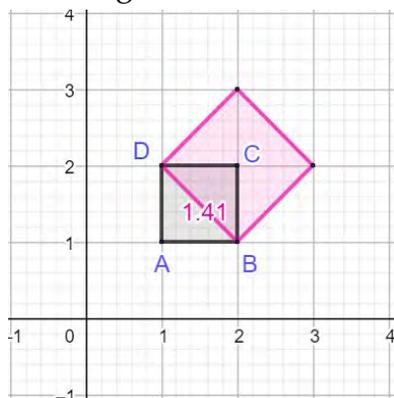


$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2}$$

$$DB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Che come sai possiamo approssimare a 1,4

Se usi la funzione di geogebra che ti indica la lunghezza dei segmenti, ti dice che la diagonale vale 1,41:

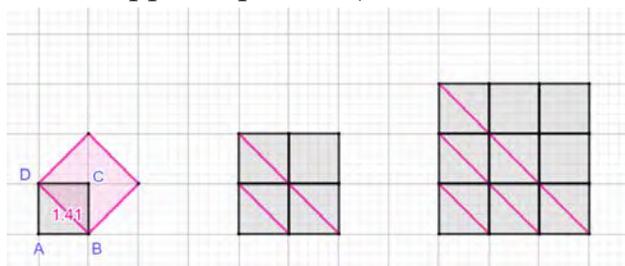


Abbiamo detto quando abbiamo parlato dei numeri irrazionali che  $\sqrt{2}$  non si può scrivere come il rapporto tra due numeri (quindi non è un numero razionale).

Abbiamo anche raccontato che questa scoperta sconvolse la scuola Pitagorica (quindi se sconvolge anche te, sei in ottima compagnia).

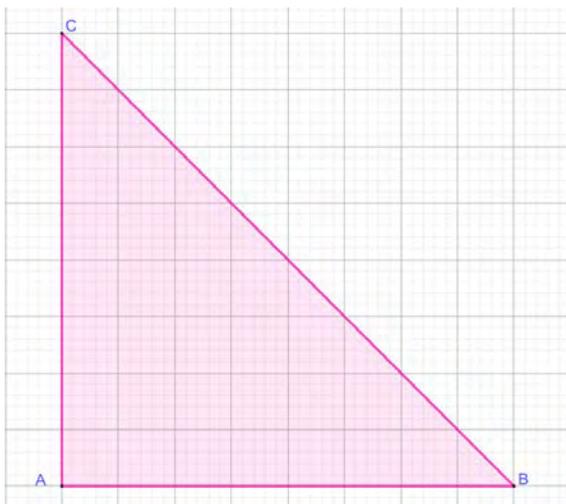
Il fatto che la  $\sqrt{2}$  sia rappresentata da un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola, la fa sembrare un numero irraggiungibile. Adesso ci troviamo con un segmento (la diagonale del quadrato) che ha la lunghezza che è proprio pari a questo numero decimale illimitato non periodico. Come se non potessimo mai definire la sua lunghezza con esattezza (a meno di dire che misura  $\sqrt{2}$  che però non troviamo ancora sul righello). Eppure sta lì. Disegnata. Con un suo inizio ed una sua fine. Questo fatto vuol dire che  $\sqrt{2}$  è incommensurabile con il lato del quadrato. Ovvero le due grandezze (omogenee) non ammettono un sottomultiplo (segmento) in comune.

Se raddoppiamo, triplichiamo ... il lato del quadrato, anche la diagonale raddoppia, triplica ... ( $2\sqrt{2}$ ;  $3\sqrt{2}$ ; ...)

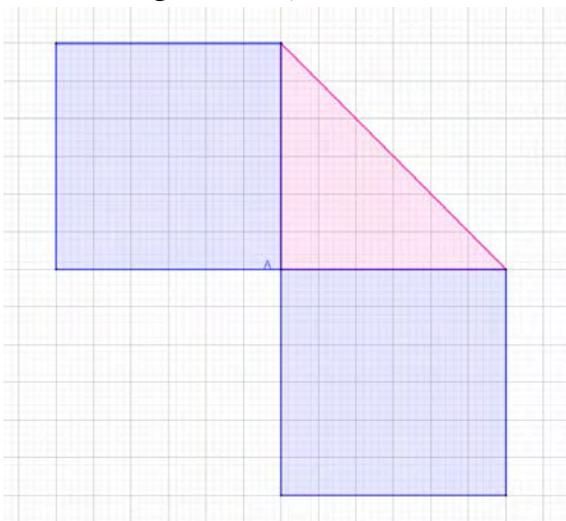


Quindi se il lato è 2 la diagonale è  $2\sqrt{2}$ ; se il lato è 3 la diagonale è  $3\sqrt{2}$ ; se il lato è 4 la diagonale è  $4\sqrt{2}$ ; se il lato è n la diagonale è  $n\sqrt{2}$ .

Adesso ti chiedo di costruire un triangolo rettangolo isoscele con lati di 3 cm (3 cm sul tuo quaderno a quadretti corrispondono alla somma dei lati di 6 quadretti perché ogni cm corrisponde a due quadretti):

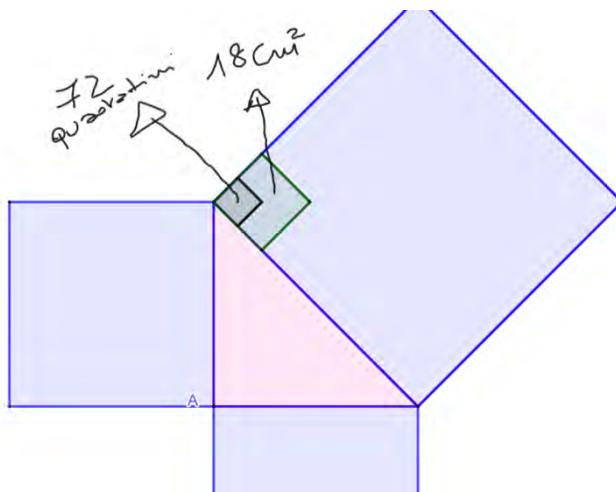


Sui due cateti dobbiamo costruire adesso due quadrati. Prendiamo un altro foglio a quadretti per costruirli, ritagliarli e appoggiarli sui cateti del triangolo. Da quanti quadratini del quaderno saranno composti? Se il cateto del triangolo è fatto da 6 quadratini, allora le aree dei due quadrati dovranno essere composte da 36 quadratini (basta costruire due quadrati con il lato lungo 3 cm...).

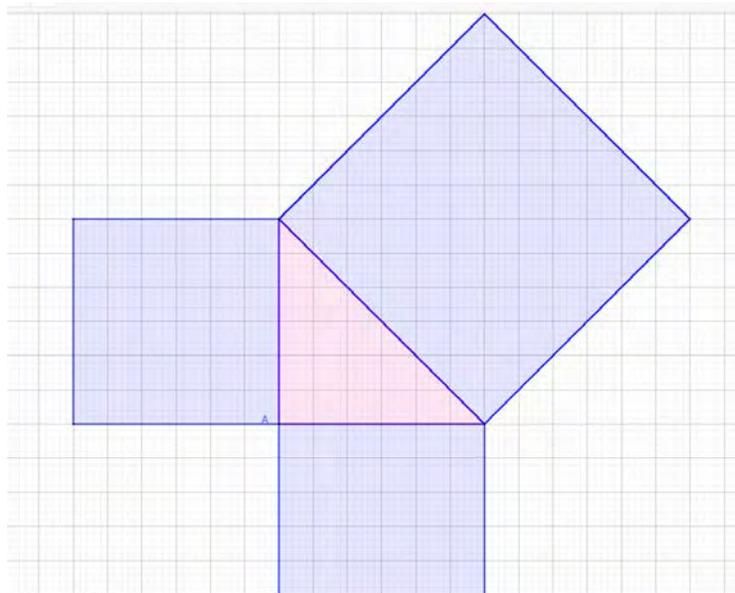


Adesso dobbiamo costruire il quadrato da appoggiare sull'ipotenusa.

La misura dell'ipotenusa non è nota. Potremmo calcolarla con il teorema di Pitagora; ma in realtà noi sappiamo quanto dovrà misurare l'area del quadrato da costruire sull'ipotenusa. Senza passare per il calcolare l'ipotenusa. Infatti se le aree costruite sui cateti misurano ciascuna  $9 \text{ cm}^2$  ( $36$  quadratini), l'area da costruire sull'ipotenusa dovrà misurare  $(9 + 9) \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$ . Ovvero  $36 + 36 = 72$  quadratini. Ogni  $4$  quadratini corrispondono ad  $1 \text{ cm}^2$



Essendo i lati di questi quadratini corrispondenti alle diagonali dei quadratini del quaderno, avresti potuto contarne  $72$  anche mantenendo la griglia del tuo quaderno:



Se conti, nel quadrato costruito sull'ipotenusa ci sono 72 quadratini, ovvero  $18 \text{ cm}^2$

Allora abbiamo verificato il teorema di Pitagora.

Se adesso ti chiedessi quello che non ti ho chiesto prima? Ovvero: quanto misura l'ipotenusa? Se troviamo la sua misura (possiamo farlo applicando il teorema di Pitagora e confrontando la misura ottenuta con quella che possiamo prendere direttamente col righello) e la eleviamo al quadrato, dovrà risultare proprio 18 (oppure, se vogliamo ragionare in termini di quadratini dobbiamo moltiplicarla per 2 e poi elevarla al quadrato).

Proviamo?

$$i = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4,242640687119285 \dots$$

Oppure con i quadratini:

$$i = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8,48528137423857 \dots$$

È palese che si tratta di due numeri irrazionali. Per quanto li approssimiamo con tante cifre, moltiplicandoli per se stessi non otterremo mai 72.

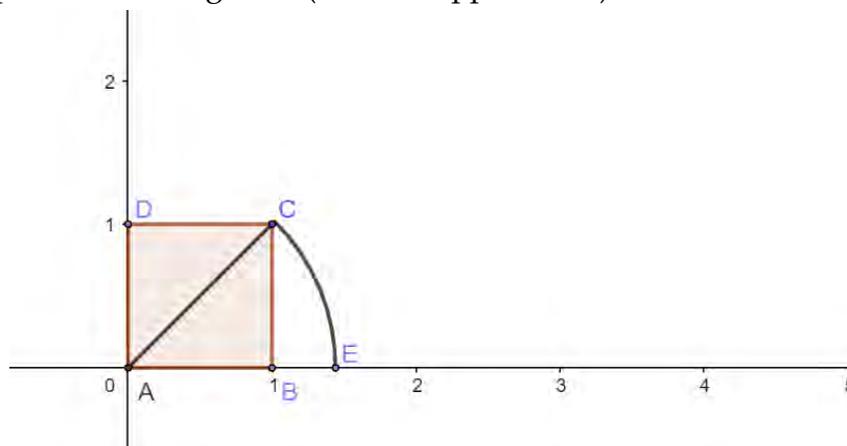
Hai provato a misurare col righello l'ipotenusa? Che numero ti viene? Se lo elevi al quadrato ti viene 18?

Sembra che la costruzione geometrica del problema confermi il teorema di Pitagora e quella aritmetica lo smentisca. In realtà essendo l'ipotenusa fatta dalla somma delle diagonali dei quadretti del quaderno, ed essendo questi pezzetti tutti numeri irrazionali, risulta che l'ipotenusa sia incommensurabile con i cateti. Infatti se non trasformi i numeri irrazionali in numeri decimali, ottieni che

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{18} = 18$$

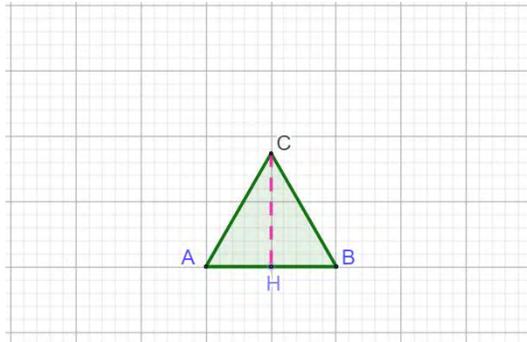
Adesso abbiamo gli strumenti per capire come fare a posizionare il numero irrazionale  $\sqrt{2}$  sulla retta dei numeri.

Costruiamo un quadrato unitario sulla retta. Con un compasso con la punta sul vertice A e la matita sul vertice C, riportiamo la diagonale (che vale appunto  $\sqrt{2}$ ) sulla retta:



Il punto è sarà la rappresentazione sulla retta dei numeri di  $\sqrt{2}$ .

Consideriamo adesso un triangolo equilatero di lato 2cm e poniamoci l'obiettivo di calcolare la sua altezza.



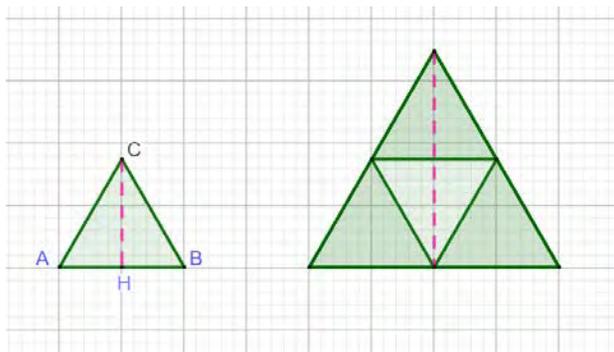
Come vedi l'altezza divide il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli.

Concentriamoci, ad esempio, sul triangolo AHC. Possiamo applicare il teorema di Pitagora a questo triangolo per trovare CH che ne rappresenta il cateto maggiore e sapendo che AH è la metà di AB e quindi misura 1 cm:

$$CH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Un altro irrazionale. Pare che siano più comuni di quello che pensavamo ☺

Come abbiamo visto per la diagonale del quadrato, anche in questo caso se raddoppia il lato del triangolo, raddoppia l'altezza, se triplica il lato triplica l'altezza e così via.

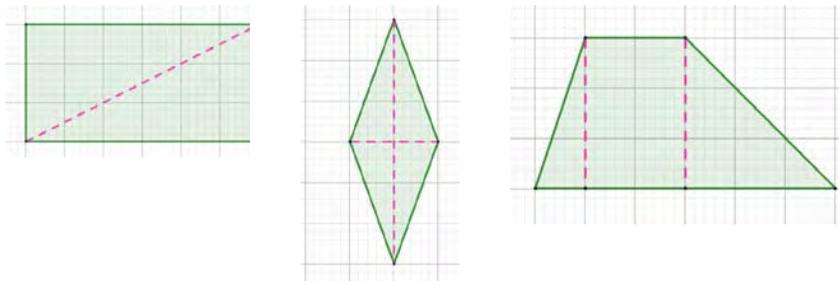


Quindi in generale se il lato del triangolo equilatero lo chiamiamo  $l$  avremo che l'altezza  $h$ :

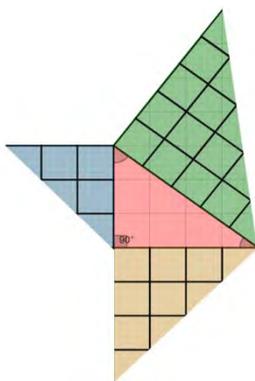
$$h = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Il teorema di Pitagora possiamo applicarlo in molti contesti.

Se ad esempio vogliamo trovare la diagonale di un rettangolo possiamo procedere come abbiamo fatto con la diagonale del quadrato. Se vogliamo trovare la diagonale di un rombo possiamo considerare che le diagonali sono perpendicolari e quindi formano 4 triangoli rettangoli. Se consideriamo il trapezio, se disegniamo le altezze dividiamo la figura in due triangoli rettangoli ed un rettangolo:



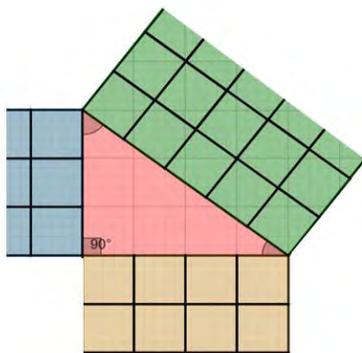
Cosa accade al teorema di Pitagora quando dimezziamo ogni quadrato costruito sui cateti e sull'ipotenusa? Il teorema è ancora valido?



Semberebbe di si. Possiamo dare allora anche il seguente enunciato del teorema:

in un triangolo rettangolo l'area del triangolo rettangolo isoscele costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei triangoli rettangoli isosceli costruiti sui cateti.

Ma il quadrato può anche essere dimezzato facendolo diventare un rettangolo:

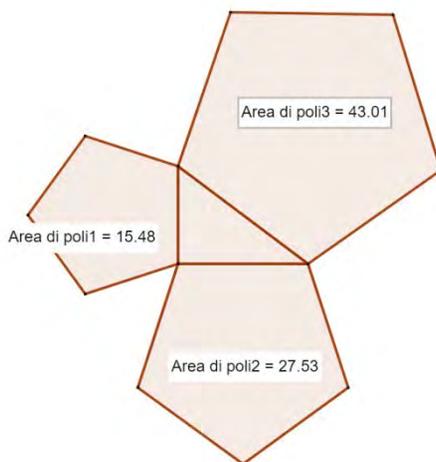


Possiamo dare allora anche il seguente enunciato del teorema:

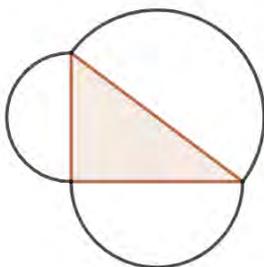
in un triangolo rettangolo l'area del rettangolo costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei rettangoli costruiti sui cateti.

Questa cosa vale anche se sostituiamo i quadrati con pentagoni, esagoni, ottagoni... semicirconferenze?

Con geogebra lo possiamo verificare facilmente con la funzione calcola l'area.

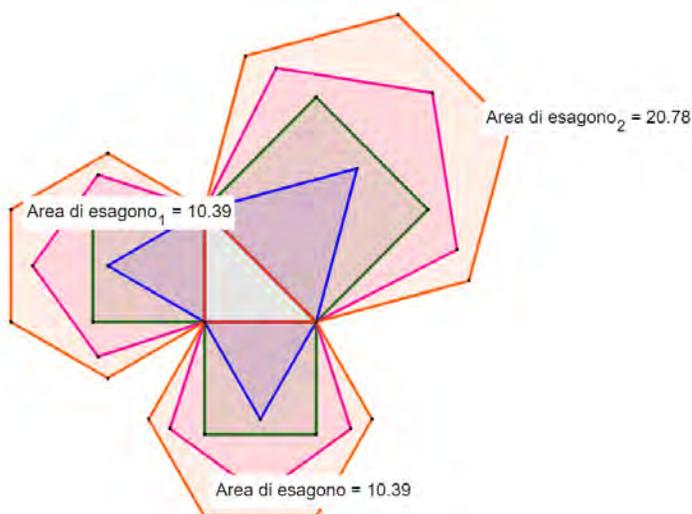


Fino ad arrivare ai semicerchi:

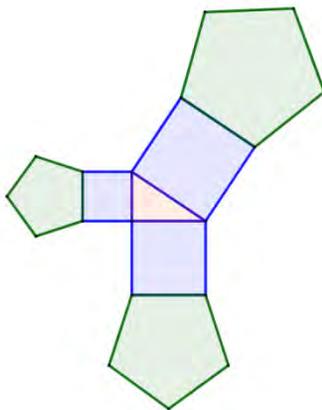


Allora possiamo enunciare il teorema anche in questo modo:

in un triangolo rettangolo l'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei semicerchi costruiti sui cateti.



Sono diverse poi le applicazioni. Alcune puoi divertirti a realizzarle con geogebra:



## 5 - Conclusioni

Concludendo, si può dire che il percorso che è stato illustrato sul teorema di Pitagora consente di riflettere sui seguenti punti:

Si da all'alunno un primo approccio con le dimostrazioni geometriche;

Il teorema di Pitagora è usato anche come pretesto per fare storia della matematica, storia e geografia (riferimenti alla scuola pitagorica), educazione civica (importanza della donna nella scuola pitagorica), scoprire il patrimonio culturale del nostro paese.

Rappresenta l'opportunità per lavorare prima manualmente con materiali poveri e quindi trasportare questi lavori su software di geometria dinamica.

## Bibliografia

AA.VV. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.

AA.VV. (2001). Matematica 2001.

E. Castelnuovo (1979). La matematica, La nuova Italia.

E. Castelnuovo (2017). Didattica della matematica, UTET.

B. D'Amore (1999). Elementi di didattica della matematica, Bologna: Pitagora.

A.B. Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini (2016). Didattica della matematica, Milano: Mondadori.

G. Israel e A. M. Gasca (2012). Pensare in matematica, Bologna: Zanichelli.

<https://federazionemathesis.it/link-alle-relazioni-presentazioni-in-formato-pdf>.

\*\*\*\*\*



\*\*\*\*\*

# *L'uso dello spreadsheet nell'insegnamento della geometria analitica*

Ferdinando Di Martino<sup>1,2</sup> Salvatore Sessa<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di  
Architettura

<sup>2</sup>Centro Interdipartimentale di Ricerca Calza Bini  
Via Toledo 402, 80134 Napoli, Italy  
([fdimarti@unina.it](mailto:fdimarti@unina.it), [sessa@unina.it](mailto:sessa@unina.it))



DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.055

**Sunto:** *In questo lavoro mostriamo l'utilità del tool Microsoft Excel come strumento di supporto degli studenti delle scuole superiori di II grado nello studio della geometria analitica e nella verifica di soluzioni di problemi di geometria analitica. La duttilità e l'usabilità del tool, oltre alle potenzialità dello spreadsheet e alla vastità di funzioni e operatori matematici disponibili, rendono Excel adattabile per determinare soluzioni approssimate in una vasta gamma di problemi di geometria analitica. In questo articolo sono presentati tre esempi connessi alla determinazione della retta tangente a una parabola in un punto, alla ricerca di eventuali punti di tangenza tra due parabole, e all'applicazione del metodo di Newton-Raphson per la determinazione di zeri di funzione. Gli esempi mostrati evidenziano i vantaggi dell'utilizzo di Microsoft Excel come strumento di supporto nello studio della geometria analitica, senza nessuna conoscenza pregressa di linguaggi di programmazione.*

**Parole Chiave:** *Geometria analitica, Soluzioni approssimate, Microsoft Excel, Spreadsheet*

**Abstract:** *In this work we show the usefulness of the Microsoft Excel tool as a support tool for secondary school students in the study of analytical geometry and in the verification of solutions of analytic geometry problems. The ductility and usability of this tool, in addition to the potential of the spreadsheet and the breadth of mathematical functions and operators available, make Excel adaptable to determine approximate solutions in a wide range of analytical geometry problems. This article presents three examples related to the determination of the tangent line to a parabola at a point, to the search for any points of tangency between two parabolas, and to the application of the Newton-Raphson method for the determination of function zeros. The examples shown highlight the advantages of using Microsoft Excel as a support tool in the study of analytical geometry, without any previous knowledge of programming languages.*

**Keywords:** *Analytical Geometry, Approximate Solutions, Microsoft Excel, Spreadsheet*

## 1 - Introduzione

Nell'ultimo decennio tool software sempre più completi e sofisticati sono disponibili a supporto dello studio dell'algebra, dell'analisi, della statistica e della geometria nelle scuole. Alcuni di essi, pur non essendo stati progettati per scopi didattici, ma per scopi professionali, possiedono caratteristiche di estrema utilità per l'apprendimento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado.

Uno di essi è il tool Microsoft Excel contenuto nella suite Microsoft Office (Webster, 2021).

Oltre ad offrire tutte le potenzialità di uno spreadsheet, Excel è dotato di un insieme completo di funzioni matematiche e di calcolo (Banner, 2007; Bluttman, 2014; Michaloudis, 2019) e permette in maniera assai semplice e dinamica di realizzare grafici e disegnare e proiettare figure

geometriche. Le potenzialità di calcolo e la facilità con la quale si possono realizzare elementi grafici rende Excel uno strumento assai duttile e adatto a supportare l'alunno nello studio di problemi di geometria analitica (Gerber, 2009).

Nel capitolo successivo saranno trattati tre esempi di problematiche di geometria analitica:

1. la determinazione e la visualizzazione grafica della retta tangente a una parabola al variare del punto di tangenza in un intervallo;
2. la determinazione e la visualizzazione grafica degli eventuali punti di intersezione tra due parabole;
3. la determinazione e la visualizzazione grafica degli zeri di una funzione applicando il metodo di Newton-Raphson o delle tangenti.

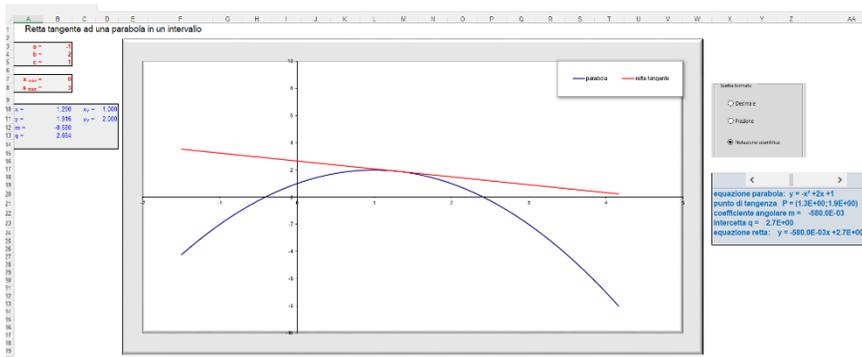
Nel capitolo successivo questi esempi saranno trattati in dettaglio, mostrando la semplicità della loro costruzione e del loro utilizzo e i benefici per lo studente nella verifica delle soluzioni approssimate, il confronto con le soluzioni analitiche determinate, il calcolo dell'errore dell'approssimazione, la visualizzazione grafica dei risultati

Gli esempi proposti fanno riferimento a problematiche tra loro diverse, mostrando quanto sia vasto l'insieme dei problemi che possono essere trattati con l'ausilio del tool.

## 2 – Analisi della variazione della retta tangente a una parabola in un intervallo

Questo esempio realizzato con Excel mostra dinamicamente allo studente dinamicamente sul grafico come cambia la retta tangente ad una parabola in un punto, al variare del punto di tangenza in un intervallo della retta reale.

In figura 1 è mostrato il foglio Excel in cui è realizzata l'esercitazione.



**Fig. 1** Foglio Excel con la visualizzazione della retta tangente alla parabola al variare del punto di tangenza in un intervallo.

Se l'asse della parabola è parallelo all'asse delle ordinate, l'equazione della parabola assume la forma esplicita:

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

con  $a \neq 0$ .

È sempre possibile compiere una trasformazione di una parabola in cui il suo asse è parallelo all'asse delle ordinate,

per cui considereremo come equazione della parabola l'equazione esplicita data dalla (1).

Lo studente inserisce cinque parametri: i tre coefficienti dell'equazione di secondo grado della parabola e gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo della retta reale in cui variare i punti di tangenza sulla parabola.

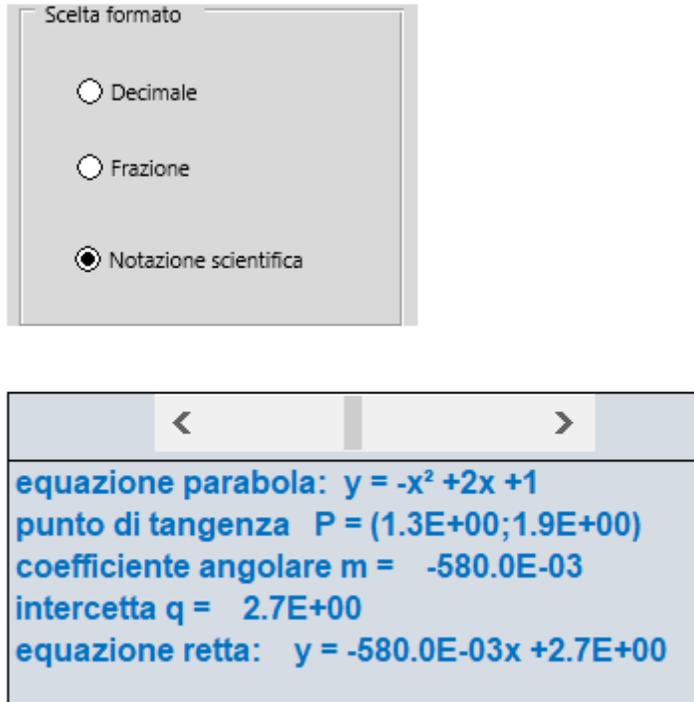
I cinque parametri sono selezionati sul foglio evidenziati in rosso (Fig. 2). I parametri  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  sono, rispettivamente, gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo della retta reale da considerare.

2		
3	a =	-1
4	b =	2
5	c =	1
6		
7	$x_{\min}$ =	0
8	$x_{\max}$ =	3
9		

**Fig. 2 Parametri di input da inserire.**

Inoltre, lo studente può variare a piacimento il punto di tangenza della parabola, manovrando una slide bar sul foglio di calcolo connessa all'intervallo di valori  $[x_{\min}, x_{\max}]$ .

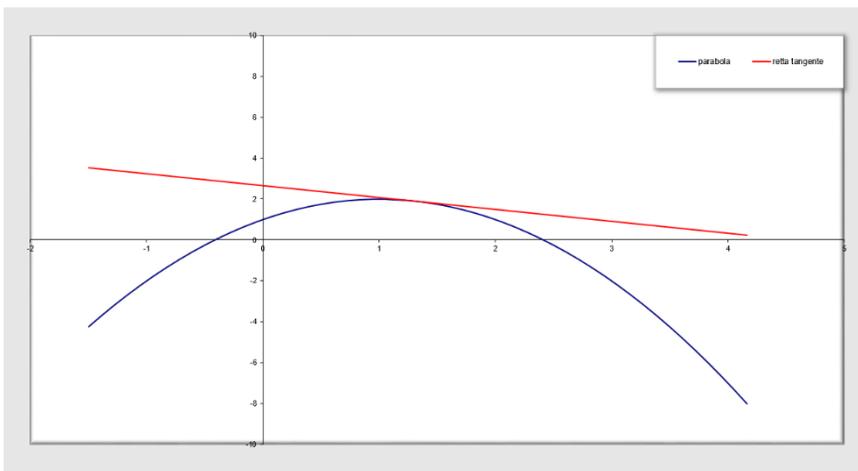
In Fig.3 è mostrata la slidebar che può essere usata per variare il punto di tangenza. In basso compaiono sia l'equazione della parabola che i valori del punto di tangenza selezionato e l'equazione della retta tangente. L'option button costruita in alto consente di modificare il formato di visualizzazione numerico scegliendo tra quello decimale, quello frazionario e quello con notazione scientifica.



**Fig. 3** Sidebar utilizzata per la scelta del punto di tangenza e visualizzazione dell'equazione della parabola, dei valori del punto di tangenza e della retta tangente.

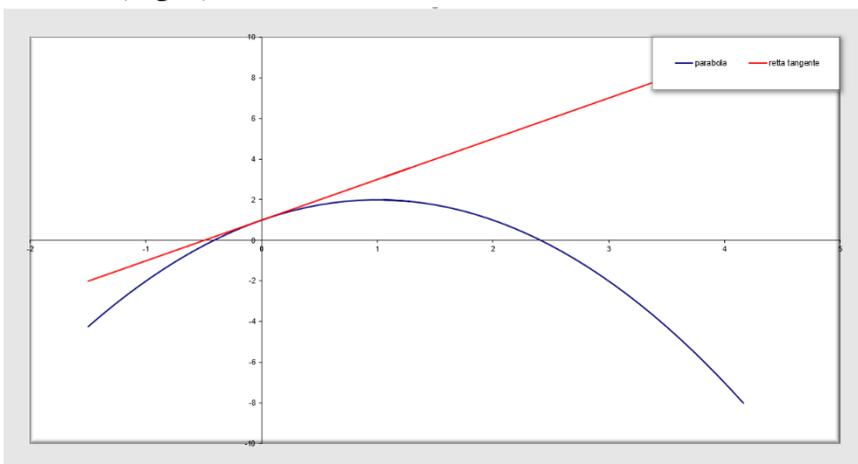
La *option button* in Fig. 3 permette di selezionare la modalità con cui visualizzare i coefficienti delle equazioni di retta e parabola e dei valori del punto di tangenza, del coefficiente angolare e dell'intercetta, scegliendo tra una notazione decimale con troncamento all'ennesima cifra decimale, frazione troncata all'ennesima cifra o notazione scientifica.

Il grafico a dispersione in Fig. 4 mostra la parabola e la retta tangente nel punto di tangenza. Esso da una immediata comprensione visiva di come varia la retta tangente al variare del punto di tangenza e di come cambia la sua angolazione.

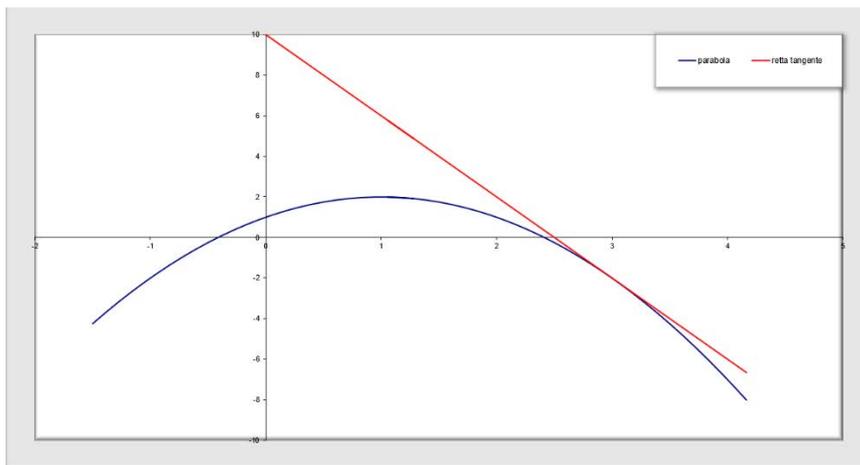


**Fig. 4** Grafico a dispersione con la visualizzazione della parabola e della retta tangente nel punto di tangenza selezionato.

Le due figure successive mostrano la retta tangente nel punto di tangenza (0,1) corrispondente a  $x_{\min} = 0$  (Fig. 5), e la retta tangente nel punto di tangenza (3,-2) corrispondente a  $x_{\max} = 3$  (Fig. 6).

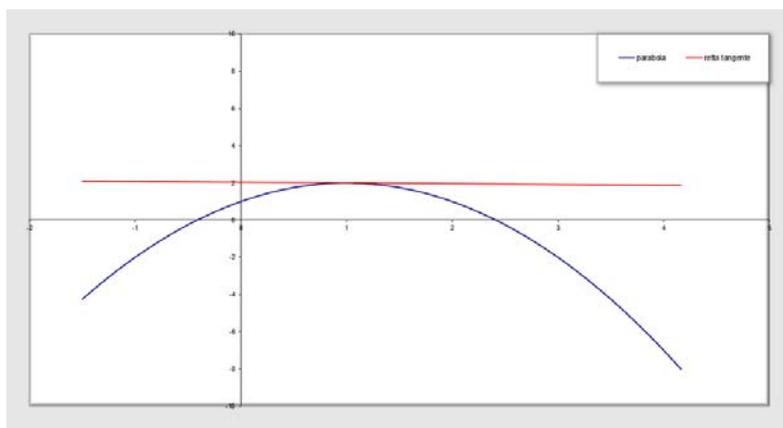


**Fig. 5** Grafico a dispersione con la visualizzazione della parabola e della retta tangente nel punto di tangenza (0,1).



**Fig. 6 Grafico a dispersione con la visualizzazione della parabola e della retta tangente nel punto di tangenza (3,-2).**

Lo studente può analizzare visivamente molti risultati dedotti analiticamente dal calcolo e studiati in geometria e analisi. Ad esempio, la parabola analizzata  $y(x) = -x^2 + 2x + 1$  ha una tangente orizzontale  $y(x) = 2$  nel punto (1,2) (Fig. 7). Esso corrisponde esattamente al punto di massimo della parabola che lo studente ricava derivando  $y(x)$ , ponendo uguale a zero la derivata  $y'(x) = -2x + 2$  e osservando che la derivata prima è positiva a sinistra di  $x = 1$  e negativa a destra.



**Fig. 7** Retta orizzontale tangente nel punto di massimo della parabola.

### 3 - Determinazione degli eventuali punti di tangenza tra due parabole

Questo esempio costruito in Excel permette allo studente di avere una dimostrazione visiva dei risultati che deduce analiticamente studiando quali sono i punti di contatto tra due parabole.

Consideriamo due parabole di equazioni in forma esplicita:

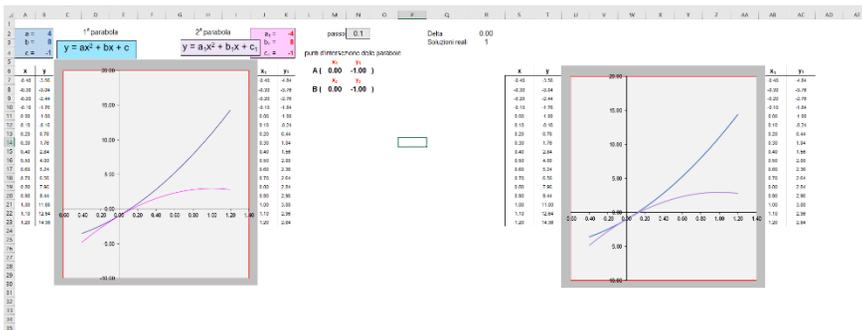
$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad y_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad (2)$$

Lo studente sa bene che per determinare gli eventuali punti di tangenza deve porre  $y(x) = y_1(x)$  ottenendo l'equazione algebrica di secondo grado:

$$(a - a_1)x^2 + (b - b_1)x + c - c_1 = 0 \quad (3)$$

I punti di tangenza sono in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione (3). Essi sono due se le due soluzioni della (3) sono reali, ovvero il discriminante è positivo, una se il discriminante è nullo, zero se il discriminante è negativo.

In Fig. 8 è mostrato il foglio Excel in cui è costruito l'esempio di visualizzazione degli eventuali punti di tangenza delle due parabole.



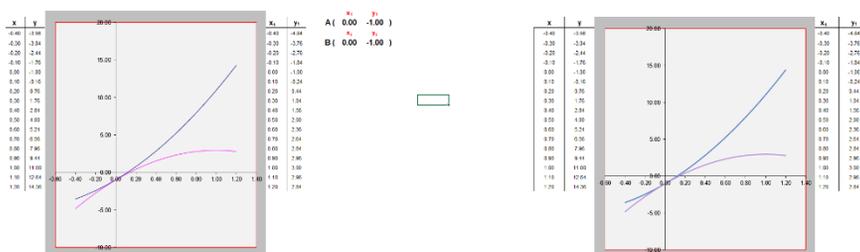
**Fig. 8 Foglio Excel con la visualizzazione delle due parabole di cui si chiede di determinare gli eventuali punti di tangenza.**

I parametri che deve selezionare lo studente sono i coefficienti nelle equazioni in forma esplicita delle due parabole, visualizzati in Fig. 9.



**Fig. 9 I valori dei coefficienti delle due parabole che lo studente deve editare nelle rispettive celle del foglio Excel.**

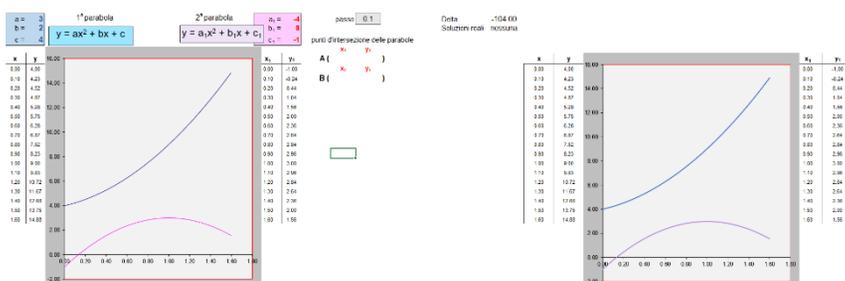
La Figura 10 mostra i due grafici a dispersione in cui sono evidenziate le due parabole  $y(x) = 4x^2 + 8x - 1$  e  $y_1(x) = 4x^2 + 8x - 1$  in corrispondenza dei due punti di tangenza calcolati, A e B.



**Fig. 10** Grafici a dispersione mostranti le due parabole in corrispondenza dei punti di tangenza e i valori dei punti di tangenza.

Lo studente può analizzare visivamente sui due grafici l'andamento delle curve corrispondenti alle due parabole nella vicinanza dei due punti di tangenza.

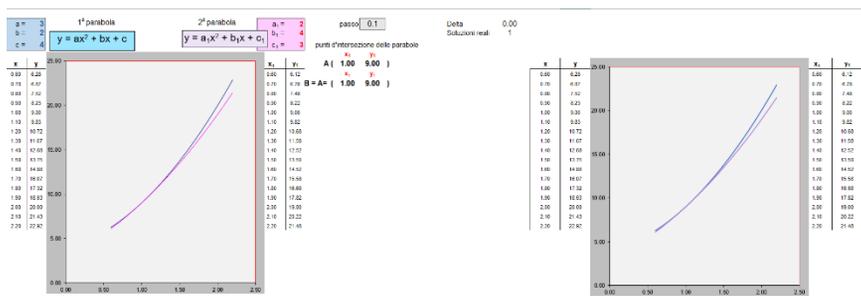
Nell'altro esempio in figura 11 le due parabole  $y(x) = 3x^2 + 2x + 4$  e  $y_1(x) = 4x^2 + 8x - 1$  non si intersecano e il discriminante dell'equazione di secondo grado (3) è negativo.



**Fig. 11** Esempio con visualizzazione di due parabole non intersecanti.

I valori dei punti di tangenza calcolati sono vuoti.

Nell'ultimo esempio, mostrato in Fig.12, le due parabole  $y(x) = 3x^2 + 2x + 4$  e  $y_1(x) = 2x^2 + 4x + 3$  si incontrano in un solo punto, il punto di coordinate (1,9). I due grafici sono identici; essi mostrano l'andamento delle due parabole in prossimità del punto di tangenza



**Fig. 12 Esempio con visualizzazione di due parabole intersecanti in un unico punto.**

Questo esempio è d'ausilio allo studente per avere una visualizzazione immediata dei punti di tangenza tra due parabole che egli può determinare analiticamente.

Naturalmente, l'estrema duttilità e usabilità del tool MS Excel permette facilmente di estendere questo esempio allo studio di punti di contatto tra altri tipi di curve, ad esempio due curve algebriche le cui equazioni sono costituite da polinomi, rispettivamente, di grado n e m.

## 4 – Applicazione del metodo di Newton-Raphson per determinare zeri di funzioni

Il metodo di Newton-Raphson o delle tangenti è un ben noto metodo iterativo che permette di ottenere con approssimazione fissata gli zeri di una funzione in un intervallo  $[a,b]$  compreso nel loro dominio di definizione.

Il metodo è applicabile a quelle funzioni  $f(x)$  continue e doppiamente derivabili nell'intervallo  $[a,b]$ .

Consideriamo l'equazione della tangente a  $f(x)$  in un punto  $(a, f(a))$  con  $a$  scelto casualmente nell'intervallo  $[a,b]$  e tale che la derivata nel punto  $a$ ,  $f'(a)$ , sia non nulla. Essa è:

$$t_0: y(x) = (x - a)f'(a) + f(a) \quad (4)$$

La retta tangente incontrerà l'asse delle ascisse nel punto  $(x_0, 0)$ , con:

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (5)$$

Ora prendiamo in considerazione la tangente a  $f(x)$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ , data da:

$$t_1: y(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) \quad (6)$$

La retta tangente  $t_1$  incontrerà l'asse delle ascisse nel punto  $(x_1, 0)$ , con:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (7)$$

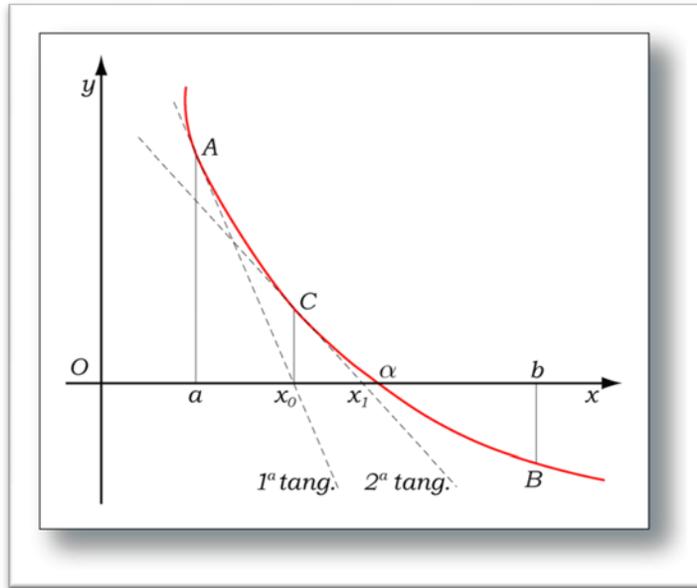
Il processo è iterato, ottenendo, dopo  $k$  iterazioni:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (8)$$

dove  $(x_{k+1}, 0)$  è il punto di incontro della tangente a  $f(x)$  nel punto  $(x_k, f(x_k))$  con l'asse delle ascisse.

Si può dimostrare che la successione  $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$  converge velocemente a uno zero  $\alpha$  della funzione.

La figura successiva mostra graficamente come nelle iterazioni il punto  $x_k$  si avvicina allo zero  $\alpha$ .



**Fig. 13** Visualizzazione grafica dell'uso del metodo di Newton-Raphson.

L'algoritmo termina se risulta

$$|x_{k+1} - x_k| < \delta \quad (9)$$

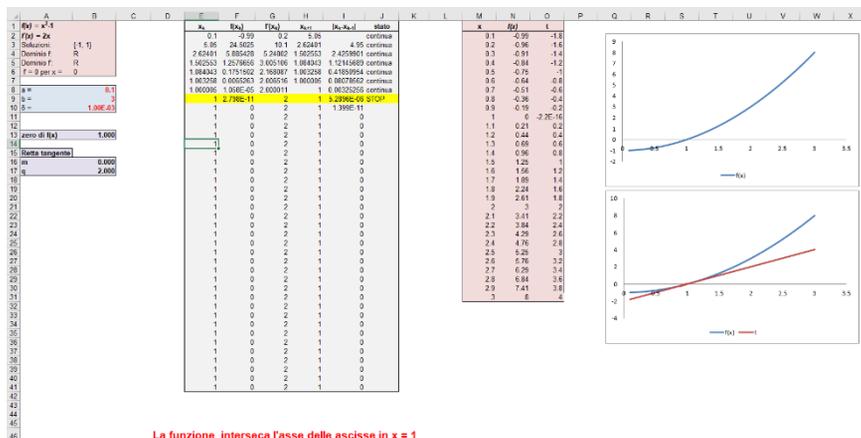
con  $\delta$  valore di soglia di fine iterazione fissata a priori.

Lo zero della funzione è approssimato con il valore  $x_{k+1}$ ,

In Fig. 14 è mostrato il foglio Excel predisposto per l'applicazione del metodo di Newton Raphson. La funzione nell'esempio è la parabola  $f(x) = x^2 - 1$ .

Lo studente inserisce i tre parametri costituiti dagli estremi inferiore e superiore dell'intervallo  $[a,b]$  e dalla soglia di fine iterazione  $\delta$ . Egli conosce analiticamente le due soluzioni -1 e

1 dell'equazione  $f(x) = 0$ . La soluzione attesa nell'intervallo  $[0.1, 3]$  è  $\alpha = 1$ .



**Fig. 14** Foglio Excel con l'applicazione del metodo di Newton-Raphson.

Come si può notare dalla figura 15, nel foglio Excel, a partire dal valore iniziale  $x_0 = a = 0.1$ , ad ogni iterazione sono calcolati  $x_{k+1}$  e l'errore  $|x_{k+1} - x_k|$ .

In giallo è evidenziata la riga con la soluzione determinata  $x_{k+1} = 1$  con un errore pari a  $5.2896 \cdot 10^{-6}$ . In basso sono calcolate anche coefficiente angolare e intercetta della tangente alla funzione nello zero calcolato.

$f(x) = x^2 - 1$ $f'(x) = 2x$ Soluzioni: $\{-1, 1\}$ Dominio f: $\mathbb{R}$ Dominio f': $\mathbb{R}$ $f = 0$ per $x = 0$	<table border="1"> <tr> <td>a =</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td>b =</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>\delta =</math></td> <td>1.00E-03</td> </tr> </table>	a =	0.1	b =	3	$\delta =$	1.00E-03
a =	0.1						
b =	3						
$\delta =$	1.00E-03						
<table border="1"> <tr> <td>zero di <math>f(x)</math></td> <td>1.000</td> </tr> </table>	zero di $f(x)$	1.000					
zero di $f(x)$	1.000						
<table border="1"> <tr> <td>Retta tangente</td> <td></td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>0.000</td> </tr> <tr> <td>q</td> <td>2.000</td> </tr> </table>	Retta tangente		m	0.000	q	2.000	
Retta tangente							
m	0.000						
q	2.000						

$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$	$ x_k - x_{k+1} $	stato
0.1	-0.99	0.2	5.05		continua
5.05	24.5025	10.1	2.62401	4.95	continua
2.62401	5.885428	5.24802	1.502553	2.4259901	continua
1.502553	1.2576656	3.005106	1.084043	1.12145689	continua
1.084043	0.1751502	2.168087	1.003258	0.41850954	continua
1.003258	0.0065263	2.006516	1.000005	0.08078562	continua
1.000005	1.058E-05	2.000011	1	0.00325256	continua
1	2.798E-11	2	1	5.2896E-06	STOP
1	0	2	1	1.399E-11	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	
1	0	2	1	0	

Fig. 15 Approssimazione dello zero  $\alpha = 1$  della funzione  $f(x) = x^2 - 1$ .

La figura 16 mostra gli andamenti della funzione  $f(x)$  e della sua tangente  $t$  nello zero trovato (1,0).

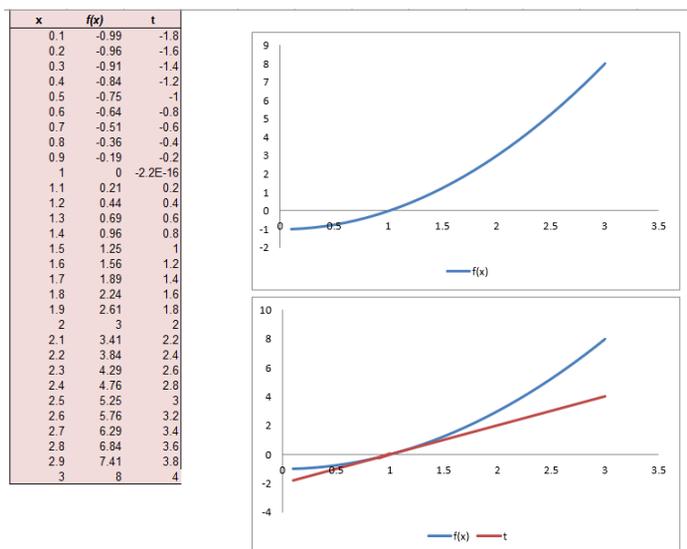
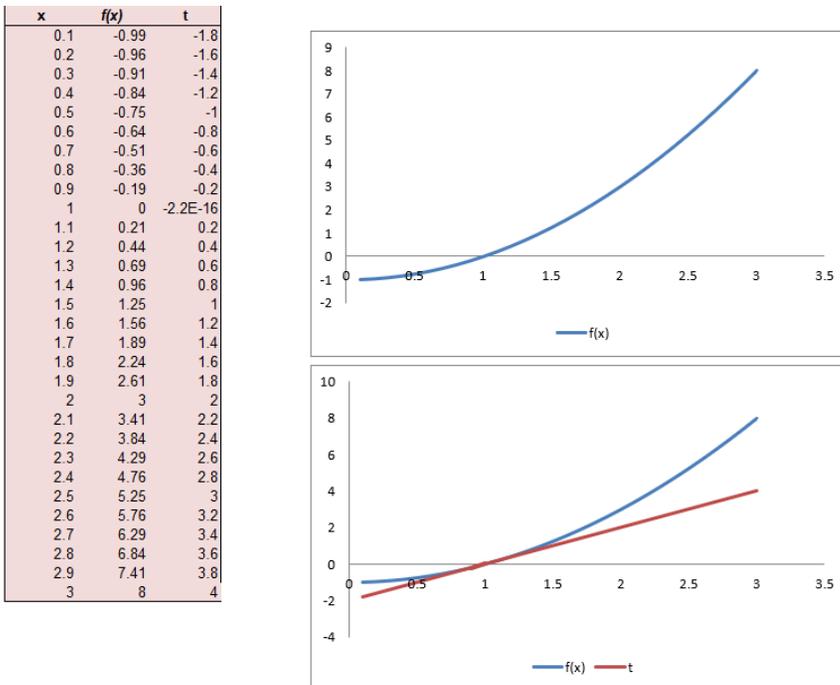


Fig. 16 Andamento della funzione  $f(x) = x^2 - 1$  e della sua tangente  $t$  nello zero determinato.



In giallo è evidenziata la riga con la soluzione  $x_{k+1} = 1.711346$  con un errore pari a  $1.38 \cdot 10^{-5}$ .

In Fig. 18 sono mostrati il grafico della funzione e la sua retta tangente nello zero  $(1.711346, 0)$ .



**Fig. 18** Andamento della funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 6$  e della sua tangente nello zero determinato.

In questo ultimo esempio è utilizzato una funzione non algebrica  $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ . Lo studente può verificare facilmente che questa funzione ha uno zero in  $x = 0$  ed è definita in  $(-1,1)$ .

Nell'esempio è scelto un intervallo  $[a,b] = [-0.9, 0.9]$  ed una soglia d'errore  $\delta = 1 \cdot 10^{-4}$ .

In Fig. 19 sono mostrati i risultati ottenuti applicando il metodo di Newton Raphson

$f(x) = \log [ 1 / (1-x^2) ]$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$	$ x_k - x_{k-1} $	stato
$f'(x) = -2x / (1-x^2)$	-0.9	0.721246	-9.47368	-0.82387		continua
Soluzioni: {0}	-0.82387	0.493169	-5.12929	-0.72772	0.076132	continua
Dominio f: (-1, 1)	-0.72772	0.327512	-3.0939	-0.62186	0.096148	continua
Dominio f: R-{-1,1}	-0.62186	0.212337	-2.02797	-0.51716	0.105857	continua
f = 0 per x = 0	-0.51716	0.135165	-1.41195	-0.42143	0.104704	continua
	-0.42143	0.084919	-1.02488	-0.33857	0.095729	continua
a = -0.9	-0.33857	0.052876	-0.76482	-0.26944	0.082857	continua
b = 0.9	-0.26944	0.032731	-0.58106	-0.21311	0.069135	continua
$\delta = 1.00E-04$	-0.21311	0.020185	-0.44649	-0.1679	0.056331	continua
	-0.1679	0.012419	-0.34554	-0.13196	0.045209	continua
zero di f(x) 0.000	-0.13196	0.007629	-0.26859	-0.10356	0.03594	continua
	-0.10356	0.004682	-0.20936	-0.08119	0.028404	continua
Retta tangente	-0.08119	0.002872	-0.16346	-0.06362	0.022366	continua
m 0.000	-0.06362	0.001761	-0.12775	-0.04983	0.017572	continua
q -0.001	-0.04983	0.00108	-0.09991	-0.03902	0.013786	continua
	-0.03902	0.000662	-0.07817	-0.03056	0.010807	continua
	-0.03056	0.000406	-0.06117	-0.02392	0.008467	continua
	-0.02392	0.000249	-0.04788	-0.01873	0.006632	continua
	-0.01873	0.000152	-0.03747	-0.01466	0.005194	continua
	-0.01466	9.34E-05	-0.02933	-0.01148	0.004067	continua
	-0.01148	5.72E-05	-0.02296	-0.00899	0.003184	continua
	-0.00899	3.51E-05	-0.01798	-0.00704	0.002493	continua
	-0.00704	2.15E-05	-0.01407	-0.00551	0.001952	continua
	-0.00551	1.32E-05	-0.01102	-0.00431	0.001528	continua
	-0.00431	8.08E-06	-0.00862	-0.00338	0.001196	continua
	-0.00338	4.95E-06	-0.00675	-0.00264	0.000936	continua
	-0.00264	3.03E-06	-0.00529	-0.00207	0.000733	continua
	-0.00207	1.86E-06	-0.00414	-0.00162	0.000574	continua
	-0.00162	1.14E-06	-0.00324	-0.00127	0.000449	continua
	-0.00127	6.98E-07	-0.00254	-0.00099	0.000352	continua
	-0.00099	4.28E-07	-0.00199	-0.00078	0.000275	continua
	-0.00078	2.62E-07	-0.00155	-0.00061	0.000216	continua
	-0.00061	1.61E-07	-0.00122	-0.00048	0.000169	continua
	-0.00048	9.85E-08	-0.00095	-0.00037	0.000132	continua
	-0.00037	6.04E-08	-0.00075	-0.00029	0.000103	continua
	-0.00029	3.7E-08	-0.00058	-0.00023	8.1E-05	STOP
	-0.00023	2.27E-08	-0.00046	-0.00018	6.34E-05	
	-0.00018	1.39E-08	-0.00036	-0.00014	4.96E-05	
	-0.00014	8.52E-09	-0.00028	-0.00011	3.88E-05	
	-0.00011	5.22E-09	-0.00022	-8.6E-05	3.04E-05	

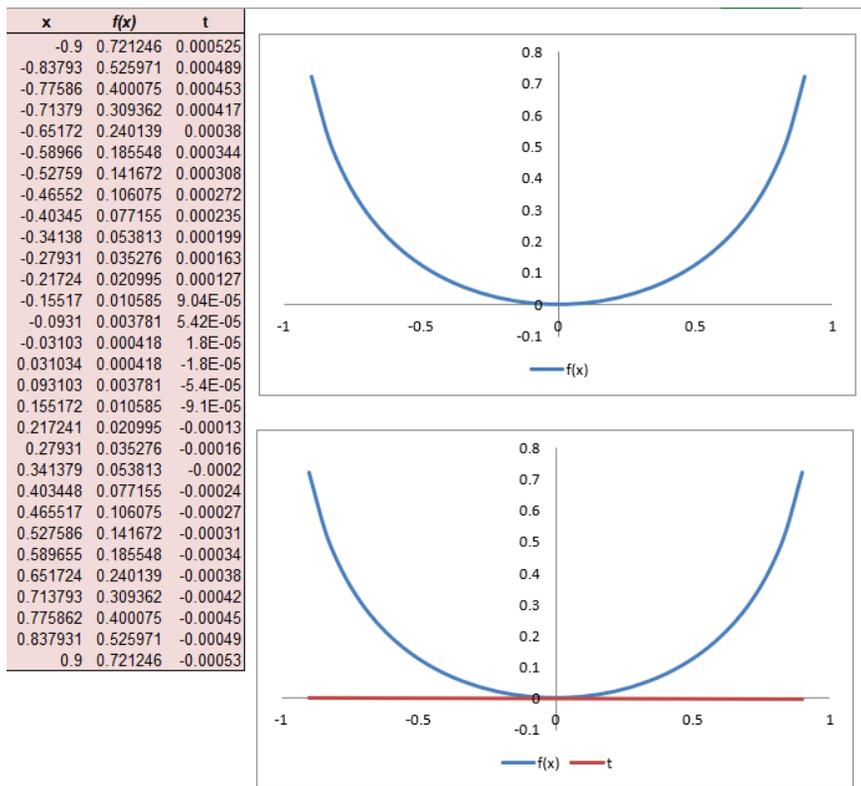
La funzione interseca l'asse delle ascisse in  $x = 0$

Fig. 19 Approssimazione dello zero  $\alpha = 1.711$  della funzione  $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ .

Il valore dello zero determinato è approssimativamente pari a 0. Nell'ultima iterazione si ottiene  $x_{k+1} = 0.000103$ , che restituisce un valore  $\alpha = 0$ , approssimando  $x_{k+1}$  alla terza cifra decimale.

Lo studente può notare che in questo caso il numero di iterazioni è più elevato, considerando il fatto che è stata scelta una soglia d'errore più piccola. Nell'ultima iterazione l'errore calcolato è  $|x_{k+1} - x_k| = 8 \cdot 10^{-5}$  minore della soglia  $10^{-4}$ .

In Fig. 20 sono mostrati il grafico della funzione e della sua tangente nello zero.



**Fig. 20** Andamento della funzione  $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$  e della sua tangente nello zero determinato.

Lo studente può facilmente verificare che la retta tangente determinata è la retta orizzontale corrispondente all'asse delle

ascisse. Infatti, il punto  $(0,0)$  è un punto di minimo in quanto la derivata  $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$  si annulla in  $x = 0$  ed è positiva alla sua destra e negativa alla sua sinistra.

## 5 - Conclusioni

In questo articolo sono stati mostrati esempi che evidenziano la validità dell'uso del tool Microsoft Excel a supporto degli alunni nello studio della geometria analitica. Le potenzialità dello spreadsheet, la facilità d'uso di operatori e funzioni matematiche, la semplicità nella creazione di grafici a dispersione per la visualizzazione di andamenti di funzioni, rende questo strumento assai duttile per verificare o approssimare soluzioni in problemi di geometria analitica e visualizzare e analizzare i risultati.

Nella presentazione dei tre esempi si è mostrato come Excel possa essere applicato a una vastità di problemi di geometria analitica; inoltre lo studente non necessita di acquisire la padronanza di linguaggi di programmazione per costruire esempi simili su fogli Excel.

Il Tool Microsoft Excel può quindi essere adottato con successo nelle scuole superiori di secondo grado per supportare gli studenti degli istituti superiori di secondo grado nello studio della geometria analitica e dell'analisi, e nelle misure degli errori di soluzioni approssimate di problemi geometrici.

## Bibliografia

Banner A. The Calculus Lifesaver: All the Tools You Need to Excel at Calculus, Princeton Univ Press 2007, 728 pp., ISBN: 978-0691130880

Bluttman K. Excel. Formule e funzioni For Dummies, Hoepli; 3° edizione (25 settembre 2014), 2014, 368 pp. ISBN: 979-8458042130.

Gerber L., Calculus with Analytic Geometry and Excel for Science. Teacher's Edition, Leor Gerber Publisher, 2009, ISBN: 978-0979292620.

Michaloudis J., Hong B, 101 Most Popular Excel Formulas, 458 pp. 2019., 978-1700300911.

Webster T. Excel 2021, Independently published, 2021, 220 pp. ISBN: 978-8820363246.

# La geometria: rileggiamone i fondamenti<sup>1</sup>

## Parte I

Franco Eugeni \* Raffaele Mascella\*\*

\*Già Professore Ordinario di Filosofia della Scienza  
Presidente dell'AFSU  
[eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com)

\*\* Professore Associato di Filosofia della Scienza  
Università degli studi di Teramo  
[rmascella@unite.it](mailto:rmascella@unite.it)



DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.056

**Sunto:** *Questo è il primo lavoro dedicato alle basi della geometria elementare. È oramai ben noto che la geometria elementare è sempre più trascurata nell'insegnamento secondario e che la cultura geometrica è sempre più affidata allo studio della geometria analitica, quasi a voler allontanare i discenti da una serie di legami che intercorrono tra geometria e matematica, da un ambito in cui la riflessione filosofica e il ragionamento deduttivo sono ancora più rilevanti. Vengono a mancare anche i legami storico-filosofici e il pensiero di quei tanti filosofi e filosofi della matematica quali Kant, Russell, Enriques e Speranza, che riteniamo di importanza fondamentale per la cultura di un docente che vuole interagire con il mondo moderno, sempre più complesso, che necessita di un elevato grado di comprensione epistemologica dei fondamenti dei nostri saperi.*

---

1 Parte di questo lavoro è stata oggetto di una nostra Conferenza dal titolo: "La geometria: cosa si può fare oggi?", presentata al 7° Simposio 2021 "Bellezza e fascino della Matematica", Villa S. Angelo (AQ), 29/31 Ottobre 2021.

**Parole Chiave:** Spazio Euclideo – Percezione dello Spazio – Filosofia della Geometria – Geometria assoluta.

**Abstract:** *This is the first work dedicated to the basics of elementary geometry. It is now well known that elementary geometry is increasingly neglected in secondary education and that geometric culture is increasingly relying on analytical geometry, as if to distance learners from a series of links between geometry and mathematics, from an area in which philosophical reflection and deductive reasoning are even more relevant. Also historical-philosophical links are so missing, as the thought of those many philosophers and philosophers of mathematics such as Kant, Russell, Enriques and Speranza, which we believe to be of primary importance for the culture of a teacher who wants to interact with the increasingly complex modern world, which requires a high degree of epistemological understanding of the foundations of our knowledge.*

**Keywords:** *Euclidean Space – Space Perception – Philosophy of Geometry – Absolute Geometry.*

## 1 – La percezione dello spazio assoluto

L'uomo, fin dalla nascita, ha la necessità di dominare, comprendere, controllare lo spazio che lo circonda. È un atteggiamento facilmente individuabile anche nell'uomo primitivo, un'esigenza innata che prende forza anche con la conquista della razionalità, in vista del perenne mutamento sociale. Così, in un non ben definito momento evolutivo sorse l'esigenza di fornirsi di strumenti per operare su questo spazio. È tipico l'esempio degli egiziani e delle piene del Nilo.

La geometria, nella formalizzazione che oggi conosciamo, nasce nell'antica Grecia, ad opera di una serie di studiosi interessati a costruire una teoria dello spazio. Un ruolo

decisivo fu quello di Euclide, per via dei suoi *Elementi di Geometria*, un'opera magistrale con cui raccolse i suoi risultati e quelli di altri, in un tentativo di scrittura completa di quello che sarà, nei secoli a seguire, l'esemplificazione massima di un edificio teorico, formale e logico-deduttivo.

Con il passare del tempo questa visione è divenuta patrimonio comune del mondo intero, in particolare di quello occidentale. Gli scienziati hanno posto la visione che si è ottenuta dalla geometria a fondamento delle teorie della fisica, la quale disciplina, personalizzata nei suoi cultori, cerca di capire come misurare il mondo e anche quali influenze su di esso agiscono. Il fatto di essere posta a fondamento del tutto, promuove l'idea che questo modo di leggere e misurare lo spazio circostante è quello vero, quello giusto. Nasce così l'idea dello *spazio assoluto*<sup>2</sup>, su cui si sono cimentati molti filosofi e scienziati dal Rinascimento in poi, da Leibniz a Spinoza e Cartesio, da Kant a Russell.

La certezza che esista uno spazio a priori, dato proprio dalla geometria euclidea ricevette l'ultimo forte impulso dalla teoria fisica newtoniana (che appunto si basava sulla geometria euclidea) e dal suo successo che indirettamente ne decretò la sua indubitabilità (Giorello et al., 2001).

---

<sup>2</sup> Non esiste una vera e propria definizione di spazio assoluto. Dall'idea generale ove si da tale attributo ad una struttura ove non è ammesso il postulato delle parallele, vari autori hanno inteso, nella loro assiomatica una qualunque struttura che sia posta alla base delle costruzioni vettoriali, euclidee e non euclidee. Taluno ritiene tale termine come un *quid* di esistente a priori.

L'idea di uno spazio uniforme ed omogeneo è la razionalizzazione di una nostra intuizione. Come osservano Duhem,<sup>3</sup> e Giorello,<sup>4</sup> anche nell'uomo delle caverne questa intuizione si palesava:

*Si può rappresentare per mezzo di un disegno una figura piana o per mezzo di una scultura una figura solida, e l'immagine può assomigliare perfettamente al modello, anche se questi hanno dimensioni differenti. Si tratta di una verità, della quale i cacciatori di renne del paleolitico, sulle rive della Vézère, non dubitavano minimamente. Ora, che le figure possano essere simili senza essere uguali, implica, e l'esprit de géométrie lo dimostra, l'esatta verità dei postulati di Euclide.*

Quando consideriamo la geometria come scienza a sé stante, dobbiamo tener conto che il punto di partenza non può che essere una nostra intuizione dello spazio, un'intuizione che ci permette di cogliere delle proprietà per il momento del tutto generali, che fanno da sfondo ad ogni loro uso applicativo, e su cui si basano le altre scienze, la fisica prima di tutto.

Nello studio dello spazio e fin dai tempi di Euclide, alcuni elementi vengono scelti come dati dall'intuizione, posti alla base come concetti primitivi, per i quali non si dimostra né l'esistenza e nemmeno l'essenza.

Qualche problema nasce proprio per questo aspetto, ad esempio con l'individuazione del punto come "elemento

---

<sup>3</sup> Pierre Duhem (1861-1916), filosofo francese, epistemologo e storico della scienza. Noto per l'idea delle indeterminazioni legate ai limiti del metodo sperimentale e per la storia del progresso scientifico medioevale.

<sup>4</sup> Duhem P. (2015) pp. 115-116, cit. in: Giorello et alii, (2001), p. 139.

primitivo”, introdotto come *ciò che non ha parti*, che non è in alcun modo divisibile, ed in senso metrico non ha né larghezza, né lunghezza. Ma questa non è una vera definizione! Anche Tartaglia<sup>5</sup> nel commentare l’opera di Euclide, così commenta la definizione euclidea del punto:

... l'Autthor ci diffinisce il principio della quantità continua (che è il ponto) & dice, che il punto è quello, che non ha parte alcuna, cioè, quello dal quale non si puo toglier, ne trouar, ne anchora imaginar la mettade, ouer il terzo, ouer il quarto, ne alcuna altra parte simile: Per la qual diffinitione ci dinota, il detto ponto non esser alcuna quantità: ma solamente, esser un semplice termine fatto dalla natura, ouero dall'arte, ouer con la mente imaginato, dinotante il principio ouer il mezzo, ouero il fine di alcuna quantità.

Dagli “elementi primitivi” si desidera derivare gli altri concetti, che così vengono in effetti definiti per mezzo dei concetti di base. In realtà per gli elementi introdotti come “elementi primitivi” non è possibile fornire una definizione esplicita<sup>6</sup>, in quanto si cadrebbe necessariamente in un circolo vizioso: *in una sorta di regresso all’infinito*.

La scelta degli elementi fondamentali, inoltre, non è determinata a priori, vengono scelti quelli che risultano più semplici e più immediati dalla nostra intuizione. Ed è da

---

<sup>5</sup> Tartaglia N. (1565). *De insidentibus aquæ* e *De ponderositate*, p. 1-2, Opera postuma.

<sup>6</sup> Una definizione esplicita è una frase nella quale il soggetto X acquista significato tramite tutti gli altri termini della frase. Ad esempio : la circonferenza è l’insieme dei punti del piano avente distanza assegnata da un punto dato, detto centro” naturalmente noti che siano tutti i termini definenti X (circonferenza).

questi, in definitiva, che la struttura dello spazio viene analizzata. Dice a tal proposito l'Enriques:<sup>7</sup>

*Dall'ordine delle cose esterne, nella rappresentazione data alla mente dai sensi, scaturisce il concetto di spazio. La Geometria studia questo concetto già formato nella mente del geometra, senza porsi il problema (psicologico, ma non matematico) della sua genesi. Sono dunque oggetto di studio, nella Geometria, i rapporti intercedenti fra gli elementi (punti, linee, superficie, rette, piani ecc.) che costituiscono il concetto complesso di spazio: a tali rapporti si dà il nome di proprietà spaziali o geometriche.*

Esiste tuttavia una differenza tra la visione degli antichi che ritenevano che gli assiomi posti alla base per definire *un ente*, esistente per origine divina, fossero in un certo qual modo immutabili. La visione moderna, nata dopo l'avvento delle geometrie non euclidee, ritiene che *sia gli assiomi definenti gli enti, sia gli assiomi definenti la logica per dedurre*, siano scelti dallo scienziato formulatore della Teoria, con le sole condizioni<sup>8</sup> che essi siano *non contraddittori*<sup>9</sup> e *indipendenti*.<sup>10</sup>

---

<sup>7</sup> F. Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898].

F. Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898.

<sup>8</sup> Un sistema razionale è dato da un sistema di assiomi per la teoria e una logica per dedurre. Se la logica è quella aristotelica il sistema si dice ipotetico deduttivo. Ma a priori potrebbe anche farsi uso di una logica anche di tipo "fuzzy", cfr. Pelusi D. (2019).

<sup>9</sup> È ben noto fin dal medio-evo la legge dello Pseudo-Scoto (cfr. Carruccio E. (1958) p.143 e 333) asserente che se in un sistema *ammetto una frase e la sua contraria allora posso dedurre qualunque proposizione*, ottenendo in tal modo una inutile teoria piena.

<sup>10</sup> Il non rispettare l'indipendenza non è un grave errore, didatticamente corrisponde a dare teoremi senza dimostrazione.

La fondamentale domanda che ci si pone è se la base della geometria<sup>11</sup> stia nella logica oppure nell'intuizione. Per i sostenitori kantiani sta nell'intuizione; d'altro canto, tanti mondi potrebbero essere logicamente possibili, per cui come si potrebbe determinare la giusta base seguendo una via esclusivamente logica? L'intuizione iniziale, tutto sommato, ci direbbe ancora che esso è euclideo. E in effetti sembra esserci una base intuitiva nella geometria, una base che le conferisce una posizione aprioristica nella conoscenza dello spazio. La questione però è controversa: esiste uno spazio universale ed una reale possibilità che noi possiamo coglierlo, oppure ciò che vediamo, concepiamo e rappresentiamo è frutto solo della migliore classificazione che il nostro intelletto può compiere o che ritiene più opportuna, più facile?

Su questo punto geometri e filosofi hanno proposto molte posizioni differenti nella storia della scienza e della cultura occidentale. Ad esempio, la visione euclidea abbracciata dal mondo greco e fino a circa duecento anni fa, ha inteso la struttura euclidea come una fedele rappresentazione del mondo circostante che noi percepiamo. La stessa scoperta delle geometrie non euclidee, almeno da un punto di vista logico-matematico, è stata possibile solo attraverso uno sforzo di semplificazione dell'edificio geometrico euclideo, inquadrandola come sistema ipotetico-deduttivo, senza per questo mai mettere in discussione la sua storia e la sua verità.

---

<sup>11</sup> Naturalmente pensiamo ad una geometria delle origini, oggi dopo la rivoluzione bourbakista in generale le geometrie moderne poggiano essenzialmente sulla logica. Tuttavia dal punto di vista didattico riteniamo che il ripercorrere la strada dell'intuizione, per arrivare a costruzioni logiche in età più matura sia una via da proporre, forse come primaria.

In ogni caso, le costruzioni non euclidee si sono sempre rappresentate, per comodità, all'interno delle euclidee. Naturalmente le medesime costruzioni si possono epurare dall'essere interne alle euclidee, riformulando le costruzioni negli spazi vettoriali sui reali, che si possono pensare come una geometria non ancora strutturata come euclidea, quindi ad essa alternativa, ma in effetti non cambia molto la sostanza.

Un discorso a parte merita l'introduzione, nel mondo delle cosiddette "geometrie moderne", delle geometrie sopra un campo<sup>12</sup>, o addirittura su strutture algebriche più deboli di un corpo, ovvero su corpi, su anelli, su quasi-corpi, su campi finiti. Nascono problematiche nuove, come l'ampio capitolo, ad esempio, di ricerche sull'esistenza e la costruzione di piani non desarguesiani finiti e no. Ovviamente in tali strutture moderne, che nascono lavorando sull'astratto, ogni idea di intuito che provenga dal mondo reale tende a sfumare<sup>13</sup>, fino a scomparire del tutto.

È importante prendere in esame l'interessante questione della *categoricità dell'edificio euclideo*, problema questo non secondario, ma non conosciuto dagli antichi, e spesso sottaciuto anche oggi, aspetto che è stato evidenziato solo dopo la scoperta degli spazi vettoriali. Infatti, essendo tali strutture univocamente determinate a meno di isomorfismi, esse permettono all'edificio euclideo di ereditare una tale

---

<sup>12</sup> Per una panoramica vedasi Eugeni F. (2021. I e II parte), e per approfondire il trattato di Segre B. (1961) con l'appendice di Lombardo Radice L. sulle geometrie finite. Vedasi ancora: Tallini G. (2005).

<sup>13</sup> Forse nel caso delle geometrie non archimedee ha ancora un senso di parlare di percezione delle stesse, cfr. ad esempio Mascella R. (2019).

proprietà. Così la geometria della retta<sup>14</sup> (ovvero del campo reale), del piano, dello spazio a tre o più dimensioni, sono uniche a meno di isomorfismi. Le geometrie non archimedee, essendo costituite da parti di uno spazio vettoriale non presentano alcuna caratteristica di categoricità, ed esistono vari modelli di tali spazi tra loro non isomorfi.

Dall'intuizione, che non è detto che ci porti sulla strada giusta (come dimostrano le ricerche dalla relatività in poi), passiamo alla formalizzazione che ritroviamo ed utilizziamo nelle nostre applicazioni. La nostra formalizzazione teorica euclidea, se anche può permetterci di studiare i fenomeni, non è detto che riesca a cogliere lo spazio esattamente quale esso realmente sia, ammesso che tale idea del "realmente sia..." abbia un senso.

Seguendo e approfondendo le argomentazioni di kantiane, Bertrand Russell<sup>15</sup> propone uno spazio a priori fatto attraverso due fundamenta successive, in cui è la cosiddetta geometria dell'intuito a fare da sfondo. La prima questione è che lo spazio così come lo intendiamo è una *forma di esternalismo*, ovvero una struttura che ci permette di distinguere gli oggetti, per il fatto di essere gli uni esterni agli altri. Dopo la percezione intuitiva dello spazio e dei suoi oggetti intervengono, in fase di razionalizzazione e di costruzione logica dello spazio, le *relazioni tra gli oggetti* (punti, rette, piani,

---

<sup>14</sup> Esiste una problematica, inaugurata da Peano, dello studio della retta, per via assiomatica, come ente a sè stante e non derivante come sottoinsieme di una assegnato spazio euclideo 2-dimensionale cfr. Eugeni F.-Mascella R. (2001).

<sup>15</sup> Russell B. (1975), *I fondamenti della geometria*, G.T.E. Newton & Compton, Roma.

ecc.) e subito dopo interviene la nostra funzione di ordinamento, che ci porta a vedere il mondo fatto come quello euclideo.

Da Platone e Aristotele, fino a Cartesio e Leibniz, la geometria euclidea è stata ritenuta una teoria scientifica certa, indubitabile, da prendere ad esempio anche per le altre scienze e nella stessa indagine filosofica. Un sostegno indiretto filosofico ed epistemologico è derivato anche dalla meccanica newtoniana<sup>16</sup>, allorché lo scienziato inglese riassunse in poche, semplici ed efficaci leggi le conoscenze fisico-sperimentali fin allora acquisite, avvalendosi implicitamente della geometria euclidea come struttura di fondo. Ciò è testimoniato anche dalla posizione kantiana, per cui questa geometria era considerata a priori, assoluta, esistente prima ancora della nostra esperienza col mondo. Non importa, diceva Kant, quale sarà il risultato della nostra esperienza perché, prima ancora di compierla, la struttura geometrica esiste ed assume le proprietà euclidee che conosciamo.

Mentre Leibniz sosteneva che lo spazio consiste solo di relazioni e Newton affermava che lo spazio assoluto è una realtà oggettiva, Kant pur sostenendo lo spazio assoluto, lo riteneva puramente soggettivo: quando le cose materiali “scompaiono”, con esse scompaiono anche le relazioni tra queste, e quindi perdiamo l’ordine spaziale, ma rimane lo spazio assoluto.

Seguendo l’approccio logicista di Russell, la conoscenza a priori è quella conoscenza che deriva dalle leggi del pensiero,

---

<sup>16</sup> Per una interessante sintesi dell’opera newtoniana vedasi: Gucciardini N. (2013). *Newton, un filosofo della natura e del sistema del mondo*, I grandi della Scienza2, Le Scienze, Milano.

dalle nostre categorizzazioni, che rendono possibile una qualche forma di esternalismo, che rendono accessibile l'indagine empirica, ovvero i presupposti, senza i quali la nostra esperienza non potrebbe aver luogo. Chiaramente oltre ai postulati che così classifichiamo, dobbiamo includere anche tutte le conseguenze deducibili prima che le deduzioni ottenute per via empirica entrino nella discussione.

Le proposizioni di base da noi ritenute soggettivamente primitive o fondamentali, come sosteneva Kant, non sono deducibili per via logica. Le argomentazioni di Kant<sup>17</sup> riguardanti la geometria e la sua concezione dell'intuizione<sup>18</sup> e dell'immagine produttiva sono tese a dimostrare che la costruzione dello spazio vuoto non è concettuale.

Russell aveva invece una posizione diversa. Egli sosteneva che sebbene le parti dello spazio non siano contenute nella categoria spazio, ma sono al suo interno, ciò non basta per affermare che lo spazio non è concettuale; la funzione dello spazio, per il filosofo inglese, è di distinguere tra tutte le cose che ci si presentano. La consapevolezza di un mondo fatto di cose esterne richiede un approccio conoscitivo, ma non deduttivo, che permette di discriminare gli oggetti. Non può essere deduttivo perché solo con oggetti diversi possiamo dedurre il reciproco esternalismo di essi. Kant dice:

*Affinché le sensazioni possano essere ascritte a qualcosa a me esterno... e similmente affinché io possa essere in grado*

---

<sup>17</sup> Il punto di vista di Kant sulla geometria appare in *Critica della ragion pura*, ove si parla anche di assiomi, postulati, definizioni, dimostrazioni.

Si veda anche Moretto Antonio (2013), *Con Euclide e contro Euclide: Kant e la geometria*, Studi Kantiani, vol 26 pp.71-91. In <https://www.jstor.org/stable/24347290>.

<sup>18</sup> Vedasi per approfondire: Veneroni Stefano (2019, a cura di).

*di presentarle come esterne e al di fuori l'una dall'altra... la presentazione dello spazio deve esistere già.*

Ma la questione dovrebbe riguardare solo il reciproco esternalismo delle cose, non l'essere esterne all'Io. E soprattutto questo può valere per una qualsiasi forma di esternalismo, euclidea o non. Qualunque forma di esternalismo che possa essere intuitiva e permettere la conoscenza. Ma dovrà anche essere un esternalismo che non sia caratterizzato dall'intuizione, anche se da essa deriva. La nostra esperienza, in altre parole, dipende da qualche elemento intuitivo, per il quale attribuiamo complessità agli oggetti percepiti. Ma le proprietà di cui si farà uso per distinguere gli oggetti, per proclamarne la diversità, deve comportare la presenza di elementi distintivi, che permettano una tale discriminazione tra gli oggetti considerati.

Russell, pur inglobando la possibilità logica delle altre geometrie non euclidee, basò la sua analisi filosofico-geometrica sul fatto che la geometria proiettiva fosse a priori, salvo ricredersi successivamente<sup>19</sup>. Russell basava questa scelta sul fatto che tre postulati iniziali erano indiscutibili:

*I. Nello spazio si possono distinguere parti diverse, per il solo fatto che si trovano l'una al di fuori dell'altra. Tutte queste parti, comunque, sono qualitativamente simili.*

*II. Lo spazio è continuo e divisibile all'infinito. Il risultato della divisione infinita, cioè la parte senza estensione, è il punto.*

---

<sup>19</sup> Russell mette come maggiormente evidente e più generale la geometria proiettiva, che per certi versi è una geometria dell'intuito visivo, oggi, invece, partiamo da uno spazio vettoriale e giova ricordare che uno spazio proiettivo è uno spazio vettoriale quozientato rispetto alle rette.

*III. Due punti determinano una figura unica ad una dimensione, la retta. Tre punti in generale (cioè non tutti sulla stessa retta) determinano una figura unica a due dimensioni, il piano. Quattro punti in generale determinano una figura unica a tre dimensioni. E così via. In un processo che termina, diciamo con  $n+1$  punti, determinando tutto lo spazio (con  $n$  dimensioni).*

Poi ci sono gli assiomi metrici:

*(i) l'applicazione del concetto di grandezza alle figure spaziali comporta l'assioma del libero movimento: le grandezze spaziali possono muoversi da un posto all'altro senza subire distorsioni. L'assioma del libero movimento comporta la omogeneità dello spazio, o equivalentemente, la relatività della posizione.*

*(ii) è condizione a priori della geometria che lo spazio deve avere un numero finito intero di dimensioni. L'essere intero dipende dal fatto che una frazione di relazione non ha significato, l'essere finito perché un numero infinito di dimensioni risulterebbe impossibile da specificare.*

*(iii) "Ciascun punto deve avere, rispetto a ogni altro punto, una ed una sola relazione indipendente dallo spazio rimanente. Questa relazione è la distanza tra i due punti."*

Per Russell da un lato abbiamo dunque la geometria proiettiva, che "racconta lo spazio", e dunque si occupa di aspetti qualitativi dello spazio, dall'altro la geometria metrica che invece si occupa di aspetti quantitativi. Ma la possibilità di quantificare dipende dall'identità della qualità.

E poi, nello spazio vuoto tutto è omogeneo e indistinguibile. Possiamo considerare e distinguere le posizioni solo se rompiamo l'omogeneità dello spazio vuoto. Questo possiamo farlo facendo subentrare la materia come elemento distintivo, un elemento cioè non definito univocamente da proprietà spaziali. Non alludiamo ad una

materia specifica, ma ad una concezione astratta. Ad esempio, nel concetto di congruenza interviene il moto, ma a muoversi non può essere un semplice punto geometrico, sarebbe una contraddizione in termini. A muoversi dovrà essere un qualche elemento, appunto la materia, che possa essere logicamente distinto dal punto o dalla posizione che occupa, di cui si sappia anche che rimane inalterata nel moto. Solo in questo modo, il moto potrà costituire una prova di uguaglianza.

La posizione di Russell è discutibile, soprattutto se riguardata dalla prospettiva della tradizione formalista della matematica o di un approccio primariamente logico-matematico, perché si subordina la geometria alla fisica, attribuendo, di conseguenza, una forma di empiricità e approssimazione alla geometria pura. Ma occorre anche osservare che tale approccio, di una geometria fisico-intuitiva, è stata spesso usata per fini didattici e probabilmente è anche la via più naturale per l'apprendimento della geometria. Per dirla con Russell, *“È come se rimandassimo la formazione dei numeri, finché non abbiamo contato le case a Piccadilly”*.<sup>20</sup>

## **2 - La questione didattica nell'Italia preunitaria: un fenomeno che va oltre l'Europa**

Il passo successivo scientifico rispetto all'opera di Euclide è l'assiomatica di David Hilbert<sup>21</sup> (1862-1943) che nel suo

---

<sup>20</sup> Ibidem, p. 93

<sup>21</sup> Hilbert D. (1889), *Grundlagen der Geometrie* (1889).

Grundlagen der Geometrie (1889), assegna un insieme formale, composto da 28 assiomi, che ha la caratteristica di eliminare le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche, iniziali di Euclide. È anche importante ricordare che l'assiomatica di Hilbert fu proposta, a quanto sembra in modo del tutto indipendente, da un grande didatta statunitense, Robert Lee Moore (1882 -1974), che era di vent'anni più giovane di Hilbert.

In realtà fin dalla prima metà dell'Ottocento gli scienziati della nascente Italia, ispirandosi ad alcune serie di incontri di scienziati tedeschi, che avevano avuto inizio nel 1823, promossero l'idea di fare altrettanto in Italia. Fu così che si tennero Congressi nel 1839 a Pisa, nel 1847 a Venezia, nel 1862 a Siena, nel 1873 a Roma e nel 1875 a Palermo.

La partecipazione globale degli scienziati ai congressi fu straordinaria, in quanto coinvolse sia naturalisti, sia matematici e astronomi, e anche letterati, storici e giuristi. Tuttavia nel periodo pre-unitario gli Stati italiani, dal canto loro, non ebbero una reazione univoca: il Granducato di Toscana e il Regno di Napoli furono favorevoli all'iniziativa, ma nello Stato Pontificio, Papa Gregorio XVI (sul soglio pontificio nel periodo 1831-1846) non approvò l'idea, e la Congregazione per gli Studi del Vaticano vietò ai propri professori la partecipazione alle riunioni. Ciò dipese dal fatto che nello Stato Pontificio la libertà dello scienziato era vincolata ad un rapporto gerarchico tra scienza e fede.

Molto interessante fu il modello istituzionale che portò a procedere per riforme successive, fenomeno che nella nostra nazione è tuttora in atto ed indica una scuola, almeno a grandi linee, aperta al mutamento ed adattamento continuo.

Alla nascita dell'Unità d'Italia si decise di estendere a tutto il territorio nazionale la legge del Ministro piemontese Gabrio Casati<sup>22</sup> (1798-1873), che fu l'ultima riforma scolastica del vecchio regno di Piemonte. Per le innovazioni sui programmi furono nominate apposite commissioni. La Commissione per la matematica, aveva come esperti, tra gli altri, due importanti matematici: il massone bolognese Luigi Cremona<sup>23</sup> (1830-1903) e il napoletano Giuseppe Battaglini<sup>24</sup> (1826-1894). La commissione propose che per la geometria si ricorresse, fin dal ginnasio, agli Elementi di Euclide, e successivamente ad una rielaborazione, degli stessi. Nel 1867 viene emanata la Legge del Ministro Michele Coppino<sup>25</sup>. Così con l'Unità d'Italia, *escono di scena i testi stranieri*, peraltro piuttosto scadenti e nei fatti imposti dal Regno Lombardo Veneto (1815-1866) e dalla Francia.

Ma una vera rivoluzione nell'insegnamento<sup>26</sup> nasce nel 1923, con la Riforma del Ministro Giuseppe Gentile<sup>27</sup> (1875-

---

<sup>22</sup> La legge piemontese, del Conte Gabrio Casati, datata 13 novembre 1859 n. 3725, perfezionò le norme dell'istruzione secondaria esistenti. Le precedenti erano state la legge Boncompagni del 1848 sull'insegnamento secondario e la legge Lanza del 1857.

<sup>23</sup> Cremona dal 1879 fu Senatore del Regno e nel 1898, per breve tempo, fu Ministro dell'Istruzione.

<sup>24</sup> Famoso per il suo "*Giornale di Matematica*", al quale si aggiunse, dopo la sua morte, la dicitura "*di Battaglini*".

<sup>25</sup> La legge 10 ottobre 1867, fu emanata dal Ministro dell'Istruzione Michele Coppino (1822-1891).

<sup>26</sup> Si veda in: [www.afsu.it/discipline/matematica/la](http://www.afsu.it/discipline/matematica/la) didattica in Italia le varie notizie e per i libri vedasi la voce ulteriore/Bollettini di Bibliografia (S. Nicotra).

<sup>27</sup> Giovanni Gentile fu insieme a Benedetto Croce uno dei maggiori esponenti del neoidealismo filosofico e dell'idealismo italiano. La Riforma

1944) che si avvale della collaborazione del pedagogista Giuseppe Lombardo Radice<sup>28</sup> (1879-1938) e che subì la pesante influenza di Benedetto Croce<sup>29</sup> (1866-1952).

Lo spirito della Riforma Gentile tese a considerare preminente, ai fini della formazione culturale dei giovani, l'apporto delle discipline umanistiche, trascurando le discipline scientifiche e la matematica in particolare. L'influsso di Benedetto Croce fu decisivo. Nell'idealismo di Croce i concetti erano riservati alle teorie, ovvero alle parti nobili della conoscenza mentre venivano distinte due forme secondarie di elaborazione pratica delle conoscenze, precisamente la formazione di pseudoconcetti empirici classificatori e di pseudoconcetti astratti numerativi. I primi erano concreti ma non universali e presi a fondamento delle scienze naturali, i secondi erano universali ma non erano da considerare concreti, erano cioè pseudoconcetti a fondamento delle scienze matematiche. Così per Croce i concetti matematici, per lui pseudoconcetti, sono fuori della realtà, ed una figura geometrica, sia pure astratta dalla realtà, sarebbe una finzione concettuale. Croce, con riferimento alla definizione di Bertrand Russell (1872-1970) che recita:

---

Gentile, pubblicata il 6 maggio 1923, è un insieme di atti normativi realizzanti una riforma organica della Scuola Italiana varata in Italia. Estensori furono lo stesso Gentile, al tempo Ministro della Pubblica Istruzione con la collaborazione del pedagogista G. Lombardo Radice e l'influenza di Benedetto Croce.

<sup>28</sup> Padre del matematico e filosofo Lucio L.R.

<sup>29</sup> Per l'idealismo di Croce di fronte alla logica e alla matematica vedasi Carruccio E. (1958), pp. 323-325.

*La matematica è quella scienza nella quale non si sa di che cosa si parla, e nella quale ciò che si dice non si sa se sia vero o falso», commenta che «una scienza che non affermi alcuna cosa e che non si riferisca ad alcuna cosa, non è nemmeno una scienza empirica per cui è impossibile che i principi della matematica abbiano un fondo di verità. Anzi tali principi sono assolutamente falsi.*

Francesco Speranza<sup>30</sup> nel ripresentare il progetto culturale di Federigo Enriques, evidenzia che lo stesso Enriques sostiene che una conoscenza risulta approssimata allora che si confrontino tra loro una realtà sensibile con un concetto scientifico. Altro asse portante è lo storicismo che tra '800 e '900 prevale sul razionalismo. A riguardo Enriques tenta una conciliazione parlando di razionalismo storico. Sostiene che ogni volta che si vuole ampliare una dottrina settoriale in una forma di cultura generale, si è costretti a rivedere metodi, adeguamenti, analogie e problematiche, specie nella loro evoluzione storica.

Il pensiero di Croce e il suo influsso portarono ad accentuare il carattere estetico-letterario del Liceo Classico, mentre per il mondo delle scienze nasce il Liceo Scientifico all'inizio "quadriennale", che prende il posto di quella che fu la Sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico. In ogni caso è interessante ricordare che nell'ultima classe del Liceo Classico viene dato molto spazio alla matematica greca, attraverso lo studio diretto dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide. La riforma prevedeva la formazione classica e umanistica, come prevalente mezzo di istruzione,

---

<sup>30</sup> Speranza F. (2020, ristampa).

per formare le future classi dirigenti fasciste, e nella quale grande importanza fu data appunto al Liceo classico.

Inizia una produzione di letteratura matematica, tra il 1870 e il 1902, che sarà tipica della Scuola Italiana, produzione di elevata qualità scientifica. Ricordiamo i testi del duo<sup>31</sup> Achille Sannia (1822-1892) ed Enrico D'Ovidio (1843-1933), di Aureliano Faifofer<sup>32</sup> (1843-1909), di Riccardo De Paolis<sup>33</sup> (1854-1892), di<sup>34</sup> Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957), di Francesco Severi<sup>35</sup> (1879-1961), tanto per citare i più significativi. L'opera di Enriques-Amaldi sarà quella di maggior successo, sono i libri<sup>36</sup> nei quali io e i miei compagni di scuola ci siamo formati, come tanti in Italia.

Con gli occhi di oggi direi che la metodologia dell'opera è una metodologia di utilizzo, almeno per le parti iniziali, della via intuitivo-fisica, per stabilire i fondamenti, è una metodologia mista, dato che, solo da un certo punto in poi, si razionalizza, e si iniziano a dimostrare i teoremi. Così il punto è "ciò che non ha parti" e quindi "senza dimensioni", la retta viene resa parzialmente dall'immagine del "filo a piombo", e

---

<sup>31</sup> A. Sannia e F. D'Ovidio (1869). *Elementi di Geometria*, Ed. Pellerano, Napoli.

<sup>32</sup> A. Faifofer (1878). *Elementi di Geometria*, Tip. Emiliana, Venezia.

<sup>33</sup> De Paolis R (1884). *Elementi di Geometria*, Torino: E. Loescher.

<sup>34</sup> Enriques F.-Amaldi U (1903). *Elementi di Geometria*, Zanichelli, Bologna.

<sup>35</sup> Severi F. (1926-27). *Elementi di geometria*. Vol. I: per ginnasio e per corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: per licei e per corso superiore dell'istituto tecnico, Vallecchi, Firenze.

<sup>36</sup> Interessante leggere sul sito il commento all'opera, cfr: [www.afsu.it/discipline/matematica/i\\_personaggi\\_della\\_M./enriques/\\_opere\\_di\\_Enriques/G.Israel\\_articolo](http://www.afsu.it/discipline/matematica/i_personaggi_della_M./enriques/_opere_di_Enriques/G.Israel_articolo).

“non ha spessore”, l’idea di piano nasce dall’osservazione “dell’acqua stagnante” ed infine lo spazio è “ciò che ci circonda, anche oltre il cielo”. Non sono definizioni vere e proprie, sono immagini mediate dalla realtà, che creano delle percezioni della geometria, così che la disciplina, lentamente, si fa strada in noi, creando un equivalente astratto nelle nostre menti. Il punto di passaggio dall’intuitivo al razionale è anche facile da trovare, ed è la dimostrazione del 1° Criterio di eguaglianza dei triangoli, che da sempre, nell’impostazione classica di Enriques-Amaldi, appare come una “forzatura”. Se si vuole, dopo questo “impasse”, la strada è in discesa. Naturalmente questa è una prima forma di educazione alla geometria, cercando di darne una lettura, compatibile con quel meraviglioso mondo della natura che osserviamo e che ci circonda. La geometria diventa una scienza solo quando si inizia a ragionare su essa e quindi a dimostrare teoremi. Ci si accorge che la linea guida cambia e il legame non è più l’osservazione visiva ed intuitiva delle singole figure, ma entrano in gioco lo studio dei legami e delle relazioni che intercorrono tra gli enti della geometria, che in questa seconda linea guida sono presenti esclusivamente nella loro astrattezza. È solo a questo punto che la geometria è divenuta una scienza.

Il Trattato di Geometria di Francesco Severi<sup>37</sup> si distingue dagli altri per l’impostazione originale, in quanto in esso è mantenuto intatto il rigore del metodo razionale, mitigato però dalla costante preoccupazione di mostrare per ogni nuova nozione, anche il suo substrato intuitivo, e le nozioni di

---

<sup>37</sup> L’impostazione di questo trattato è fortemente condivisa dagli autori di questo articolo.

senso comune da cui tali concetti hanno origine. Il metodo conduce al fatto che l'allievo possa meglio afferrare i significati dei vari concetti. Tale spirito si ritrova in un'opera successiva, precisamente nei due volumi di Geometria scritti da Angelo Fadini<sup>38</sup> (1910-1992), nei quali la formalizzazione assiomatica è sempre corredata con figure opportune, scelte nel mondo fisico-intuitivo, così che l'occhio aiuti la comprensione dell'assioma. Tali volumi hanno poi il vantaggio dell'uso di un linguaggio attuale, facendo un corretto uso sia della Logica che della Teoria degli insiemi. Torneremo ampiamente su tali volumi e sull'importanza scientifica di detta opera nella seconda parte.

La tradizione di testi prodotti da professori universitari è continuata e possiamo contare sulle opere di Francesco Speranza (1932-1998) e Alba Rossi dell'Acqua (1917-2011) della serie *Il linguaggio della matematica*, sulla serie *Scoprire la matematica* ad opera di Giovanni Prodi (1922-2010) e vari altri collaboratori, ma ancora su testi di Emma Castelnuovo (1913-2014), Bruno d'Amore, Anna Cerasoli tanto per citare quelli a noi più noti. Tali opere si distinguono tutte per la loro profondità e per il loro impegno nei vari capitoli, promuovendo una cultura della cosiddetta geometria sintetica, che di fatto oggi abbiamo del tutto dimenticata.

---

<sup>38</sup> Fadini A. (1977), *Geometria Razionale*, vol.I-II, Ed. Mursia, Milano,

## Bibliografia

Carruccio E. (1958). *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*. Torino: Ed. Gheroni.

Duheim P. (1915). *La science allemande*. Paris: Ed. Hermann.

Enriques F. (1898). *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Bologna: Zanichelli.

Enriques F. (2020). *Periodico di Matematica (IV) Vol. II (1)*, giugno 2020 pp.81-104.

Enriques F. (1926, rist.). *Problemi della Scienza*, Bologna: Ed. Zanichelli ([www.afsu.it/matematica/person](http://www.afsu.it/matematica/person)).

Eugeni F. (2019). I movimenti e la distanza nel piano di Klein, *Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2)*, pp. 33-96, (cfr. [www.afsu.it/riviste](http://www.afsu.it/riviste)).

Eugeni F. (2021). La geometria proiettiva e affine I: la via assiomatica e i piani finiti, *Periodico di Matematica*, Anno 36 (s.IV), Vol. III (1), 7-24.

Eugeni F. (2021). La geometria proiettiva e affine II: quadrati latini e piani affini finiti, *Periodico di Matematica*, Anno 36 (s.IV), Vol. III (2), pp. 19-46.

Eugeni F.-Mascella R. (2001). La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine, *Periodico di Matematiche*, serie VIII, vol.1, n.3, pp.45-56. ([www.afsu.it/discipline/matematica/fondamenti di g.](http://www.afsu.it/discipline/matematica/fondamenti_di_g)).

Eugeni F.- Mascella R. (2020). *Il problema della percezione dello spazio in geometria*, [www.afsu.it/discipline/matematica/fondamenti di geometria](http://www.afsu.it/discipline/matematica/fondamenti_di_geometria).

Giorello G.-Sindoni E.-Sinigaglia C. (1915). *I volti del tempo*. Milano: Bompiani.

Gucciardini N. (2013). Newton, un filosofo della natura e del sistema del mondo, *I grandi della Scienza 2, Le Scienze*, Milano.

Lombardo Radice L. (1961). Non-desarguesian finite graphic planes, in Segre B., *Lectures on modern geometry*, Roma: Ed Cremonese.

Mascella R. (2019). La possibilità non archimedea, *Periodico di Matematica*, anno 34°, serie IV, vol. I (1-2) pp. 97-150.

Nicotra L. (2015). Il ruolo dell'islam nello sviluppo delle scienze *ArteScienza n.4*. (<http://doi.org/10.30449/AS.v2n4.029>).

Nicotra L. (2018). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte I, *ArteScienza*, 10 (<http://doi.org/10.30449/AS.v5n10.085>).

Nicotra L. (2019). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte II, *ArteScienza*, 12 (<http://doi.org/10.30449/AS.v6n12.101>).

Nicotra L. (2020). Federigo Enriques tra filosofia e matematica. Parte III, *Arte Scienza*, 13 (<http://doi.org/10.30449/AS.v7n13.111>).

Pelusi D. (2019), Logica fuzzy e calcolo delle probabilità: due facce della stessa medaglia? *Periodico di Matematica*, anno 34 (s. IV), vol. I (1-2), pp. 151-168.

Russell B. (1975). *I fondamenti della geometria*, Roma: Newton & Compton.

Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry*. Roma: Ed Cremonese (CNR - Monografie Matematiche).

Speranza F. (1996). I fondamenti epistemologici della Matematica, in: *I fondamenti della Matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Verona 28-29-30 novembre 1996.

Speranza F.(2019). *Interazioni fra geometria e algebra*, (anche in: <https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2021/04/F.-Speranza-geometria-PAG.27-31.pdf>).

Speranza F. (2020). Il progetto culturale di Federigo Enriques, ristampato in: *Periodico di Matematica*, anno 35°, serie IV, vol. I (1) pp.83-108. ([https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/11/4-F.Speranza-Periodico-di-Matematica-IV-Vol.-II-1\\_83-108.pdf](https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/11/4-F.Speranza-Periodico-di-Matematica-IV-Vol.-II-1_83-108.pdf)).

Tallini G. (2005). *Lezioni di Geometria Combinatoria*, Bologna: Ed. Pitagora.

Tartaglia N. (1565). *De insidentibus aquæ e De ponderositate*, p. 1, Opera postuma.

Veneroni Stefano (2019, a cura di). I. Kant, *Pensieri sulla vera valutazione delle forze vive e critica delle dimostrazioni delle quali il Signor Leibniz ed altri studiosi di Meccanica si sono avvalsi in questa controversia, insieme ad alcune considerazioni preliminari riguardanti la forza dei corpi in generale*, con prefazione, introduzione, traduzione, note, commenti, 4 voll. Milano-Udine: Ed. Mimesis.

# *Variazioni sul teorema di Pitagora*

Antonio Fontana\*

\*Università di Camerino; antonio.fontana@unicam.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n3-4.057

**Sunto:** Presentiamo alcuni spunti relativi al teorema di Pitagora in vista di un possibile laboratorio a suo riguardo nelle scuole secondarie di secondo grado.

**Parole Chiave:** Teorema di Pitagora; Inverso del Teorema di Pitagora; Dimostrazioni senza parole; terne pitagoriche.

**Abstract:** We present some ideas related to the Pythagorean Theorem, in view of a possible laboratory about it in high schools.

**Keywords:** Pythagorean Theorem; Inverse of the Pythagorean Theorem; Proofs without words; Pythagorean triples.

## 1 - Introduzione

Questa nota nasce da alcuni corsi di aggiornamento e PCTO rivolti a docenti o studenti della Scuola Secondaria di secondo grado. Può essere la base per ulteriori, analoghe esperienze laboratoriali. Parla del teorema di Pitagora: un argomento che, bisogna riconoscerlo, in genere è spesso avvertito solo come una fastidiosa presenza nei programmi scolastici. Eppure rappresenta una pietra miliare nel pensiero matematico. È questo il parere autorevole del grande matematico del Novecento Godfrey Hardy, che, all'inizio della sua *Apologia di un matematico* (Hardy, 2002), menziona e celebra *“due dei teoremi più famosi della matematica ... «semplici»... e tuttavia di primissimo ordine”*, aggiungendo che ciascuno di essi *“conserva la freschezza e l'importanza di quando è stato scoperto”*. Ebbene, il primo di questi due risultati è proprio il teorema di Pitagora – aggiungiamo che il secondo è la dimostrazione euclidea dell'esistenza di un'infinità di numeri primi.

Perché il teorema di Pitagora è da ritenersi *“di primissimo ordine”*? Hardy sottolinea come esso si colleghi alla genesi dei numeri irrazionali, o comunque alla scoperta di grandezze incommensurabili: tali sono infatti, già nel caso apparentemente elementare di un triangolo rettangolo isoscele (il così detto semiquadrato) il cateto e l'ipotenusa, come dire il lato e la diagonale del quadrato doppio.

L'avvento dei numeri irrazionali è storicamente rilevante, ma già considerato dai programmi (anche se certamente difficile da spiegare e in genere trascurato). Quali altri spunti si possono individuare per meglio avvicinare gli studenti alla bellezza e alla ricchezza del teorema di Pitagora? Nel seguito

della nota ne proponiamo due: dimostrazioni senza parole e terne pitagoriche.

## 2 - Dimostrazioni senza parole

Il Teorema di Pitagora corrisponde alla proposizione 47 del primo libro degli *Elementi* (Euclide, 1988). La dimostrazione, basata sulla Figura 1, è abbastanza elaborata.

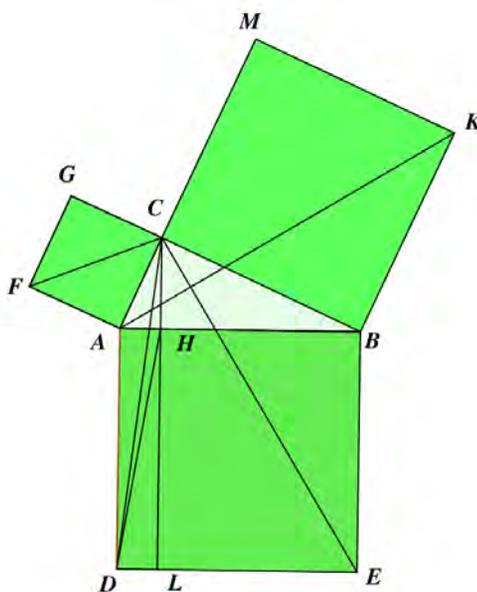


Figura 1

Il triangolo rettangolo in esame è quello  $ABC$  di ipotenusa  $AB$  e cateti  $AC$  e  $BC$ , così che i quadrati da confrontare risultano  $ABED$  (costruito sull'ipotenusa) e  $ACGF$ ,  $BCMK$  (costruiti sui cateti). I punti chiave dell'argomento euclideo sono:

- i triangoli FAB e CAD sono uguali,
- il triangolo CAD è equivalente al triangolo rettangolo AHD, di cui condivide la base AD e la relativa altezza,
- allo stesso modo il triangolo FAB è equivalente a FAC,
- facendo ruotare i triangoli AHD e FAC attorno alle rispettive ipotenuse otteniamo in un caso il rettangolo AHLD e nell'altro il quadrato ACGF, essi pure equivalenti.

Allo stesso modo si procede dalla parte di BC.

La dimostrazione più comune del teorema di Pitagora, quella che una volta si insegnava, e forse ancora si insegna, nelle scuole secondarie, si basa sul così detto *primo teorema di Euclide*. In realtà il risultato compare negli *Elementi* solo all'interno della proposizione 8 del sesto libro, dunque molto dopo il teorema di Pitagora. Vi si enuncia, per un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB e altezza relativa CH, la similitudine tra l'intero ABC e i triangoli AHC e BHC. La si può tradurre, in particolare, come l'equivalenza tra il quadrato costruito su AC e il rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e le proiezioni AH di AC sull'ipotenusa. Questa equivalenza si ricava tramite un opportuno parallelogramma ausiliario, come in Figura 2. Il teorema di Pitagora si deduce facilmente, ripetendo l'argomento dalla parte di BC.

Esistono tuttavia dimostrazioni ben più semplici e intuitive del teorema di Pitagora, suggerite da figure opportunamente architettate. Possono interessare, e forse addirittura attrarre gli studenti.

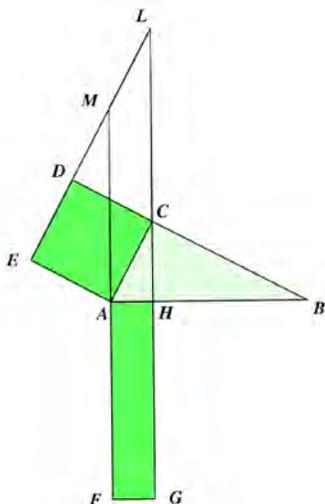


Figura 2

Ne ricordiamo qui alcune, tra le più famose, a cominciare da quella del testo cinese Zhoubi Suanjing, probabilmente del 200 a. C. . In essa lo stesso quadrato si compone di quattro triangoli rettangoli verdi, uguali a quello ABC di partenza, e poi a sinistra dei due quadrati blu costruiti sui cateti, a destra del quadrato viola costruito sull'ipotenusa, come in Figura 3.

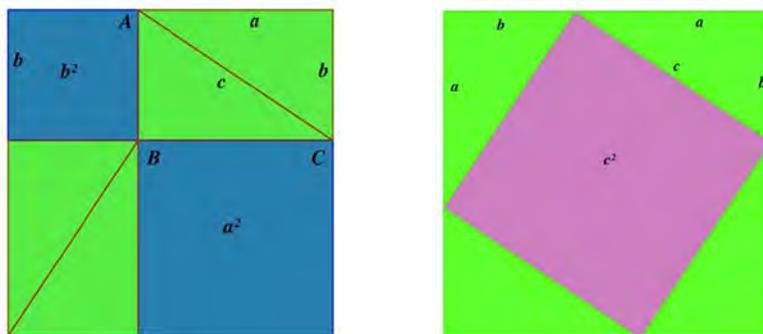


Figura 3

Curiosa è la dimostrazione in versi dell'astronomo britannico George Airy (1802-1892). Nell'originaria versione inglese recita così:

I am, as you can see,

$$a^2 + b^2 - ab.$$

When two triangles on me stand,  
square of hypotenuse is plann'd  
but if I stand on them instead  
the square of both sides are read.

Magari gli studenti stessi possono cercare una traduzione in italiano, che comunque riportiamo qui sotto per completezza.

Come potete vedere son qui,

$$a^2 + b^2 - ab.$$

Se due triangoli son sopra di me  
il quadrato dell'ipotenusa c'è  
ma se questi di sotto invece stanno  
i quadrati dei cateti si hanno.

Se questi versi non sono sufficienti a capire l'argomento, la Figura 4 interviene ad illustrarlo.

Il triangolo rettangolo a cui si fa riferimento è quello viola in basso a sinistra, uguale tuttavia all'altro triangolo rettangolo viola a destra, e ai due triangoli rettangoli celesti in alto.

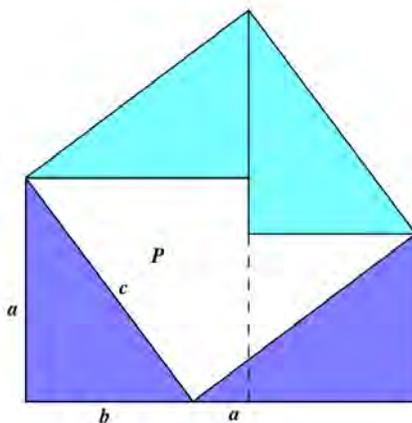


Figura 4

La parte in bianco e in celeste corrisponde al quadrato costruito sull'ipotenusa, quella in bianco e viola alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Le parti viola e celeste sono evidentemente uguali, componendosi di due dei quattro triangoli rettangoli di partenza. La parte bianca misura poi  $a^2 + b^2 - ab$ , che è la quantità di cui parla la poesia.

Citiamo ancora la dimostrazione di (addirittura) un presidente USA, James Garfield (1831-1881). Difficile immaginare che i suoi successori dei nostri tempi manifestino la stessa attenzione per la geometria. Stavolta il discorso è più articolato. Nella Figura 5 non compaiono quadrati, ma un trapezio rettangolo, insieme a due copie del triangolo rettangolo in esame. Le lunghezze di cateti e ipotenusa sono qui indicate con  $x, y, z$ . I triangoli sono in verde, rispettivamente  $ABC$  e  $CED$ , mentre il trapezio aggiunge loro anche la parte in bianco, coincide quindi con  $ABED$ .

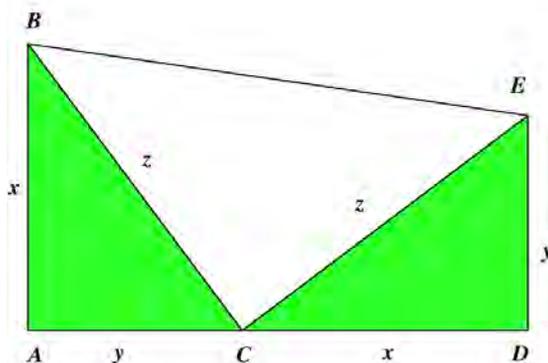
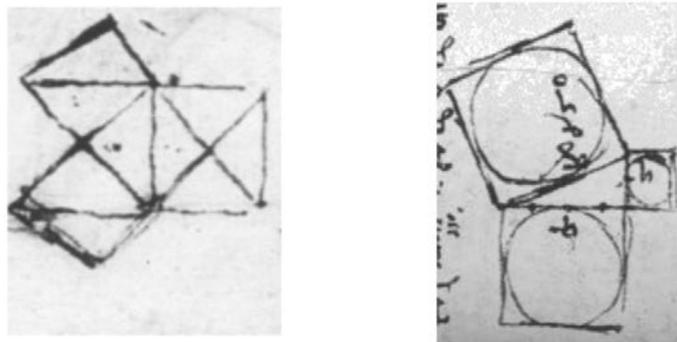


Figura 5

Si noti che il triangolo bianco a centro figura è rettangolo in  $C$  e isoscele. Il trapezio  $ABED$  ha altezza  $x+y$  e basi  $x$  e  $y$ , dunque area  $S = \frac{(x+y)(x+y)}{2} = \frac{(x^2+y^2)}{2} + xy$ . Ma la stessa area si ottiene come la somma di quelle dei tre triangoli rettangoli, due con cateti  $x$  e  $y$ , l'altro con due cateti uguali di misura  $z$  dunque vale:  $S = \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{z^2}{2} = xy + \frac{z^2}{2}$ . Confrontando le due espressioni di  $S$  si ottiene la tesi del teorema.

Ad anticipare le dimostrazioni senza parole fu anche Leonardo da Vinci (1452-1519): il suo approccio alla matematica è visivo, geometrico e intuitivo, e tuttavia riesce efficace e convincente, anche in prospettiva didattica (Pasquazi, 2019). Fornisce anche un collegamento affascinante tra geometria e arte.

L'interesse di Leonardo per il teorema di Pitagora è manifestato da molte delle figure (e relative didascalie) di una delle sue più celebri opere scritte, ovvero *Il codice atlantico* (Figura 6).



**Figura 6: Codice Atlantico, Foglio 225 verso.**

**Immagini prese da (Pasquazi, 2019).**

Concludiamo il paragrafo tornando ai due teoremi di Euclide. Come si è già riferito, nessuno dei due compare esplicitamente negli *Elementi*, ma entrambi si percepiscono nella proposizione 8 del sesto libro. Essi sottolineano come, in ogni triangolo rettangolo,

- ogni cateto sia medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa,
- l'altezza relativa all'ipotenusa sia media proporzionale tra le proiezioni dei cateti.

Forniscono così due maniere diverse per costruire geometricamente la radice quadrata di un numero intero positivo  $N$ :

- come misura del cateto di un triangolo rettangolo con ipotenusa  $N$  e proiezione  $1$ ,
- come misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo con proiezioni  $N$  e  $1$  (dunque ipotenusa  $N + 1$ ).

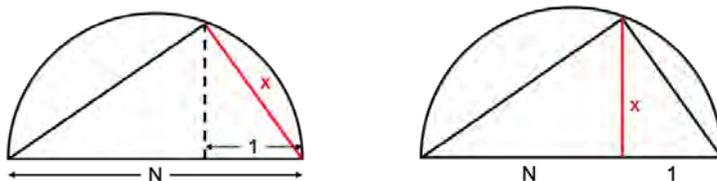


Figura 7

In altre parole, rivelano come l'estrazione di una radice quadrata si possa ottenere senza calcolatori, ma soltanto con riga e compasso (la costruzione di un triangolo rettangolo, come inscritto in una semicirconfenza, si ottiene infatti col solo uso di questi strumenti, come in Figura 7).

L'osservazione può illustrare ai ragazzi come gli antichi Greci, che mai svilupparono l'algebra per esteso, riuscirono tuttavia ad accostarla con spirito e metodi geometrici.

### 3 - Le terne pitagoriche

L'algebra, appunto. L'equazione pitagorica  $x^2 + y^2 = z^2$  (che esprime il legame tra le misure di cateti e ipotenusa di un triangolo rettangolo) è omogenea di secondo grado, a coefficienti interi, ma con soluzioni che spesso esulano dagli interi e anzi introducono i numeri irrazionali, come il caso del semiquadrato già testimonia.

Si possono tuttavia cercare le radici intere, cioè le terne di interi  $(a, b, c)$  che la soddisfano: alcune sono banali, quelle per cui per esempio  $a=0, b=c$  (come  $(1, 0, 1)$ , per cui  $0^2 + 1^2 = 1 = 1^2$ ): le altre, quelle per cui nessuno tra  $a, b, c$  è nullo si chiamano terne pitagoriche; stanno tra loro, come è facile verificare,

(3, 4, 5), da cui (6, 8, 10), (9, 12, 15), ...

(5, 12, 13), da cui (15, 36, 39), ...

Dal punto di vista geometrico possiamo poi concentrare l'attenzione sui casi in cui  $a, b, c$  sono tutti positivi: una restrizione semplice da accettare, visto che le incognite dell'equazione compaiono sempre e comunque al quadrato e quindi le soluzioni si preservano dopo un cambio di segno.

Ma quale interesse concreto può possedere la ricerca di queste terne pitagoriche? In effetti la loro storia è vecchia di millenni. La testimonianza più antica a loro riguardo è forse la tavoletta babilonese Plimpton 322, che risale al 1800 a. C., cioè all'epoca del re Hammurabi (Mansfield, 2021). Essa fu rinvenuta a inizio Novecento, acquistata dall'editore newyorkese George Plimpton dall'antiquario Edgar J. Banks nel 1922 e poi lasciata in eredità alla Columbia University. I numeri sono rappresentati con la scrittura cuneiforme, col sistema sessagesimale allora in uso. Si ritiene che le colonne riportino quelli che nella notazione moderna rappresentano i valori  $\left(\frac{c}{b}\right)^2, c, a$  di una terna pitagorica e relativo triangolo rettangolo. Si noti che  $\frac{b}{c}$  è il seno dell'angolo opposto al cateto di misura  $b$ .



**Figura 8: immagine presa da [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton\\_322.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg)**

Un'altra tavoletta di argilla, denominata Si.427, scoperta in Iraq nel 1894, conservata nel Museo Archeologico di Istanbul e datata probabilmente alla stessa epoca di Plimpton 322, rappresenta un documento catastale e molto probabilmente illustra l'uso delle terne pitagoriche nella determinazione di angoli retti da applicare nella suddivisione dei terreni.



**Figura 9: immagine presa da [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A\\_cadastre\\_text\\_written\\_in\\_Akkadian\\_Terracotta\\_tablet.18th\\_century\\_BCE.From\\_Sippar,Iraq.Ancient\\_Orient\\_Museum,Istanbul.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A_cadastre_text_written_in_Akkadian_Terracotta_tablet.18th_century_BCE.From_Sippar,Iraq.Ancient_Orient_Museum,Istanbul.jpg)**

Il punto chiave in questa prospettiva è il così detto *inverso del teorema di Pitagora*, corrispondente alla proposizione 48 del libro primo degli *Elementi* (Euclide, 1988), quella dunque che segue immediatamente, nella trattazione euclidea, il teorema pitagorico. Essa afferma: se in un triangolo le misure  $a, b, c$  dei lati soddisfano  $a^2 + b^2 = c^2$ , allora quel triangolo è rettangolo, e l'angolo retto è quello opposto al lato  $c$ .

Per esempio, un triangolo i cui lati misurano 15, 36 e 39, avendosi  $15^2 + 36^2 = 39^2$ , deve essere rettangolo, e il suo angolo retto è quello opposto al lato di misura 39. In questo modo la verifica che le lunghezze dei lati di un triangolo formano una terna pitagorica stabilisce anche se un dato angolo è retto.

Non sorprende che questo uso delle terne pitagoriche si ritrovi in altre antiche civiltà, come quella indiana. Gli antichi testi *Shulba Sutras* (la misura della corda) forniscono istruzioni geometriche per la costruzione di altari sacrificali del fuoco per i rituali vedici (Joseph, 2010). In particolare quelli attribuiti a Baudhayana, e risalenti circa all'800 a. C., propongono una formulazione del teorema di Pitagora e un accenno alle terne pitagoriche, da impiegare per le suddette ragioni architettoniche:

*Le aree dei quadrati prodotti separatamente dalle dimensioni di un rettangolo eguagliano assieme l'area del quadrato prodotto dalla diagonale. Questo si osserva in rettangoli che hanno per lati 3 e 4, 12 e 5, 15 e 8, 7 e 24, 12 e 35, 15 e 36.*

Le terne pitagoriche che in questo modo si ricavano sono (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 36) e quella di cui discutevamo poco fa, (15, 36, 39).

Euclide propone una ricetta per costruire tutte o quasi le terne pitagoriche nel libro nono degli *Elementi* (Euclide, 1988), nel lemma 1 alla proposizione 29. Forse conviene riportare integralmente il suo testo, per curiosità, ma anche per ribadirne lo spirito geometrico; i numeri, infatti, vi sono intesi come segmenti, si identificano cioè con le corrispondenti misure (Figura 10):

*Si fissino due numeri AB e BC, entrambi pari o entrambi dispari. Siccome, se si sottrae un pari da un pari (libro IX, prop. 24) o un dispari da un dispari la differenza è pari (libro IX, prop. 26), AC è pari.*

*Si divida a metà AC in D. Siano AB e BC numeri piani simili, o numeri quadrati (che sono anch'essi numeri piani simili).*

*Il prodotto di AB e BC insieme col quadrato su CD è uguale al quadrato di BD. E il prodotto di AB e BC è quadrato, appunto perché è stato dimostrato che, se due numeri piani simili moltiplicati tra loro producono un certo numero, il prodotto è un quadrato (II, prop. 6). Allora si sono trovati due numeri quadrati, il prodotto di AB e BC, e il quadrato su CD, che sommati danno il quadrato su BD (libro IX, prop. 1).*

*Ed è chiaro che due numeri quadrati, il quadrato su BD e quello su CD, sono tali che la loro differenza, il prodotto di AB e BC, è un quadrato, purché AB e BC siano numeri piani simili. Ma quando essi non sono numeri piani simili, si sono trovati due numeri quadrati, il quadrato su BD e quello su DC, tali che la loro differenza, il prodotto di AB e BC, non è un quadrato.*



Figura 10

Tradotta in termini moderni, la strategia di Euclide consiste in questo: si prendono due interi positivi  $u > v$  e si costruiscono

$a = u^2 - v^2$  (la differenza dei quadrati, che si può anche esprimere come il prodotto di somma e differenza,  $(u - v)(u + v)$ ),

$b = 2uv$  (il doppio prodotto),

$c = u^2 + v^2$  (la somma dei quadrati).

Per esempio, da  $u = 2$ ,  $v = 1$ , si ottiene la terna pitagorica (3, 4, 5), infatti  $(3 = 2^2 - 1^2, 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1, 5 = 2^2 + 1)$ . Una facile verifica attesta che ogni terna  $(a, b, c)$  così prodotta è pitagorica. Attenzione, però: non ogni terna pitagorica si ottiene per questa via. Per esempio (9, 12, 15) sfugge a questa procedura, perché 15 non si può esprimere come somma di 2 quadrati  $u^2 + v^2$ .

La classificazione completa delle terne pitagoriche è in genere attribuita a Kronecker, ma corona una serie di contributi dei secoli precedenti.

Si chiama *primitiva* una terna pitagorica  $(a, b, c)$  le cui componenti siano prime tra loro. Chiaramente ogni terna pitagorica ne genera una primitiva, dividendo le sue componenti per il loro massimo comune divisore, e si ricava da questa terna pitagorica moltiplicandone le componenti per

questo massimo comune divisore. È in questo modo che le terne non primitive (6, 8, 10) o (9, 12, 15) si ottengono dalla terna primitiva (3, 4, 5) - moltiplicando rispettivamente per 2 e per 3.

Così il punto chiave diventa classificare le terne  $(a, b, c)$  primitive, cioè con componenti prime tra loro, come (3, 4, 5). La ricetta di Euclide, adattata a questo ambito, consente di generare tutte e sole le terne primitive nel modo già indicato

$$a = u^2 - v^2 \text{ (la differenza dei quadrati),}$$

$$b = 2uv \text{ (il doppio prodotto),}$$

$$c = u^2 + v^2 \text{ (la somma dei quadrati).}$$

a partire però da due interi positivi  $u > v$  primi tra loro e uno pari e uno dispari.

In questo modo, per esempio, da  $u=2, v=1$  si ottiene (3, 4, 5), da  $u=3, v=2$  si ottiene (5, 12, 13), da  $u=4, v=1$  si ottiene (15, 8, 17), e via dicendo.

Una curiosità. Tutte le terne pitagoriche primitive si generano a partire da (3, 4, 5), che è la più semplice, con tre semplici procedure, consistenti, a partire da una terna data  $(a, b, c)$ , nel costruire

$$(a - 2b + 2c, 2a - b + 2c, 2a - 2b + 3c),$$

$$(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c),$$

$$(-a + 2b + 2c, -2a + b + 2c, -2a + 2b + 3c).$$

Si forma così il così detto albero delle terne pitagoriche primitive, che fu individuato per la prima volta da Berrgren

nel 1934, con perfezionamenti e varianti di autori successivi. Lo riproduciamo in Figura 11.

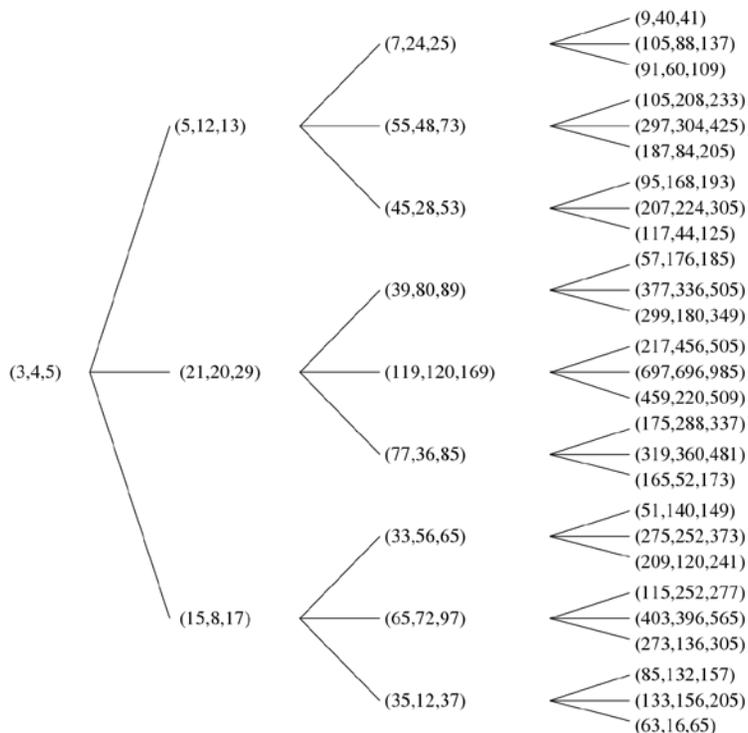


Figura 11: immagine presa da <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagorean.tree.svg>

Concludiamo questa breve serie di spunti sulle terne pitagoriche ricordando il modo in cui le introduce Diofanto, il matematico alessandrino del III secolo d. C. nel suo trattato *Aritmetica*. Il problema VIII del secondo libro chiede appunto questo: *dividere un quadrato nella somma di due quadrati*.

In altre parole, e per usare termini moderni, la questione proposta da Diofanto è la seguente: viene assegnato un intero positivo  $c$ , e si richiedono due numeri razionali (e magari due numeri interi)  $a, b > 0$  in modo che  $a^2 + b^2 = c^2$ ?

Il caso specifico considerato da Diofanto è  $c=4$ , così che sono da trovare  $a, b$  tali che  $a^2 + b^2 = 16$  cioè  $16 - a^2 = b^2$ .

Il metodo seguito da Diofanto consiste nel porre  $b = qa - 4$  alla ricerca di un  $q > 0$  razionale che soddisfi la precedente condizione. Con facili conti si ricava

$$16 - a^2 = b^2 = (qa - 4)^2 = q^2 a^2 - 8qa + 16,$$

da cui

$$\begin{aligned} -a^2 &= q^2 a^2 - 8qa, \\ (q^2 + 1)a &= +8q \end{aligned}$$

Fissando  $q=2$ , si ottiene  $5a=16$ , dunque

$$a = \frac{16}{5}, \quad b = 2 \frac{16}{5} - 4 = \frac{12}{5}.$$

Si arriva così alla terna  $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 4\right)$ , che a rigore non può definirsi pitagorica, perché le prime due componenti sono intere; moltiplicando tuttavia ogni componente per 5 e dividendo poi per 4, si ottiene una nuova terna, che soddisfa ancora l'equazione di Pitagora, e in più è formata da numeri interi, dunque è pitagorica: (4, 3, 5).

Il procedimento di Diofanto si può ripercorrere anche da un punto di vista geometrico, come in Figura 12: rispetto a un fissato sistema di riferimento cartesiano, si considerano la circonferenza  $x^2 + y^2 = 16 = 4^2$  con centro nell'origine e raggio 4, e la retta  $y = qx - 4$  passante per il punto C di coordinate (0, -4) e hanno coefficiente angolare  $q$  razionale positivo, alla ricerca di punti di intersezione a coordinate intere, o

razionali, nell'arco che sta nel primo quadrante (esclusi  $(4, 0)$  e  $(0, 4)$ ).

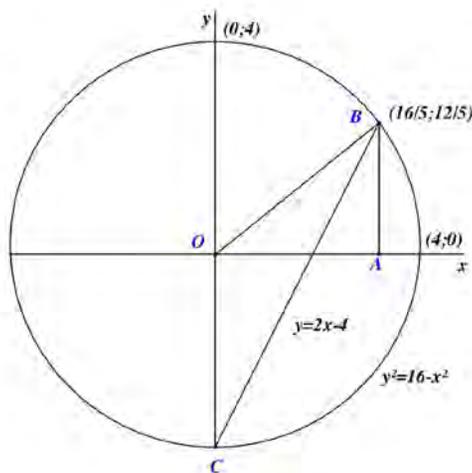


Figura 12

Per  $q=2$  la retta ha equazione  $y=2x-4$  così che ci si trova ad affrontare il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Per  $c$  arbitrario, nella ricerca di valori razionali (o addirittura interi)  $a, b > 0$  per cui

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

si pone, per  $q$  razionale positivo,  $b = qa - c$ .

A riguardo del problema VIII di Diofanto, si potrà ricordare come esso sia stato proprio lo spunto che ispirò a Fermat il suo

famoso *Ultimo Teorema*. Leggendo quella pagina, il matematico francese del Seicento si chiese se non l'equazione pitagorica, ma le sue varianti con esponente intero maggiore di 2, dunque in astratto

$$x^n + y^n = z^n$$

per  $n = 3, 4, 5, \dots$  (infiniti valori!), nello specifico  $x^3 + y^3 = z^3, x^4 + y^4 = z^4, x^5 + y^5 = z^5, \dots$ , ammettono ancora terne di soluzioni intere non banali (cioè a componenti tutte non nulle): le equivalenti, dunque, delle terne pitagoriche.

Si noti che queste equazioni di Fermat  $x^n + y^n = z^n$  sono ancora ciascuna omogenea di grado  $n$  e a coefficienti intere.

La congettura di Fermat - appunto, il suo Ultimo Teorema - esclude però, a differenza del caso pitagorico, soluzioni intere non banali. Come è ben noto, Fermat annotò sul bordo della pagina di Diofanto di aver trovato una prova meravigliosa di questo fatto, troppo lunga però per potersi contenere nel margine di quel foglio. Dopo di che, la prima dimostrazione completa affermazione arrivò solo nel 1994, a opera di Andrew Wiles, impiegando strumenti matematici sofisticatissimi e impensabili ai tempi di Fermat, e occupando centinaia di pagine.

Per maggiori approfondimenti sulle terne pitagoriche rinviamo alla panoramica del recente articolo (Agarwal, 2020).

## 4 - Conclusione

In questo breve itinerario abbiamo visto come il teorema di Pitagora e la geometria si colleghino in modo naturale non solo all'algebra, ma anche ad arte, architettura, come pure alla storia del pensiero, fino alla progettazione dei moderni algoritmi.

Siamo allora convinti che questa proposta possa stimolare e interessare i ragazzi, e dunque occupare non certo le lezioni dedicate ai programmi tradizionali, ma altre iniziative di contorno, come appunto PCTO, o PLS, o Liceo Matematico.

## Bibliografia

Agarwal R. P. (2020). Pythagorean Triples before and after Pythagoras, *Computation* 8, 62, 36 pp.

Euclide (1988). *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino: UTET.

Hardy G. (2002). *Apologia di un matematico*, Milano: Garzanti.

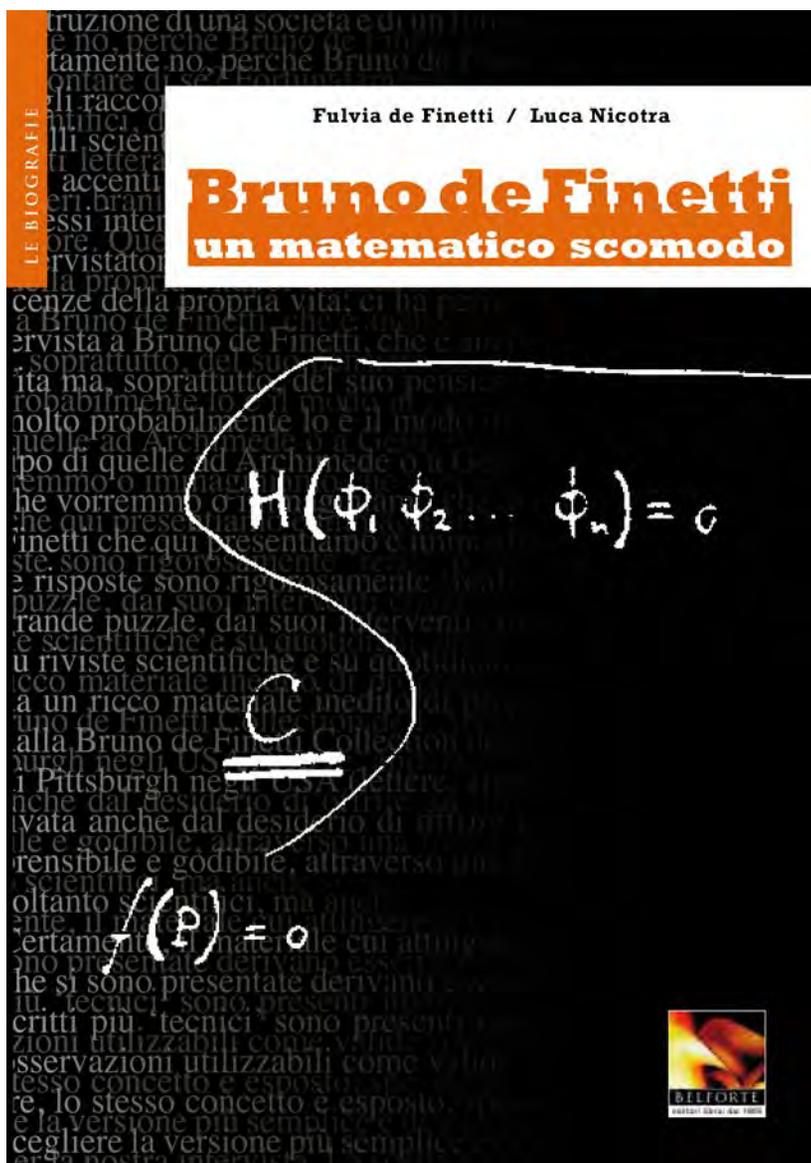
Joseph G. (2010). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

Leonardo da Vinci (2000). *Il Codice Atlantico* della Biblioteca Ambrosiana di Milano, Firenze: Giunti.

Mansfield D. F. (2021). Plimpton 322: A Study of Rectangles, *Foundations of Science*, 29 pp.

Pasquazi D. (2019). La geometria intuitiva di Leonardo da Vinci, *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, 3, pp. 237-258.

\*\*\*\*\*



\*\*\*\*\*

# Ma i punti esistono?

## Geometrie aristoteliche

Giangiaco Gerla\*

\*Professore Emerito dell'Università di Salerno, Italy; [ggerla@unisa.it](mailto:ggerla@unisa.it)



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.058

**Sunto:** *L'assunzione della nozione di punto come primitiva per definire una teoria dello spazio è sempre stata soggetta a critiche da parte di molti filosofi. Lo stesso si può dire per le nozioni di linea e di superficie. Tali critiche sono motivate dai dubbi circa l'opportunità di fondare il continuum geometrico su entità la cui esistenza appare problematica essendo ogni cosa nel mondo reale tridimensionale. In questo lavoro si citano le opinioni di alcuni di tali filosofi e si espongono recenti teorie che non assumono il punto come nozione primitiva. Viene invece assunta quella di "regione" o "corpo solido" (point-free geometry). I punti sono definiti in termini di regioni.*

**Parole Chiave:** *continuo, punti, geometria, regioni.*

**Abstract:** *The assumption of the notion of point as primitive to define a theory of space has always been subject to criticism from many philosophers. The same can be said for the notions of line and surface. Such criticisms are motivated by doubts about the advisability of founding the geometric continuum on entities whose existence appears problematic since everything in the real world is three-dimensional. In this work the opinions of some of these philosophers are cited and recent theories are presented that do not assume the point as a primitive notion, assuming instead that of "region" or "solid body" (point-free geometry). The points are instead defined in terms of regions.*

**Keywords:** *continuum, points, geometry, regions.*

## 1 - Introduzione

Scrivo questa nota sperando sia utile a suggerire un'attività interdisciplinare a cavallo tra geometria e filosofia per studenti delle superiori. Uso la parola "filosofia" per indicare l'amore per la l'analisi, la riflessione, la critica, la storia delle idee e non certo la costruzione di edifici teorici aventi la pretesa di essere una definitiva rappresentazione del mondo. Intesa in tale modo, sono convinto che la filosofia debba essere maggiormente presente nell'insegnamento sia nelle scuole superiori che nelle università e questo anche dove non è esplicitamente inserita nei programmi.

Andando al titolo del lavoro, la scelta di parlare della nozione di punto è dovuta al ruolo centrale che tale nozione gioca in tutti i tentativi di descrizione razionale del continuo e quindi del mondo in cui viviamo. Il lavoro inizia con una rapida panoramica sull'atteggiamento degli antichi greci verso la nozione di punto con particolare riguardo per i Pitagorici, Euclide, Aristotele, Sesto Empirico per poi considerare anche autori come Giordano Bruno e Lobačevskij.

Successivamente il lavoro passa a descrivere alcune moderne ricerche che vanno sotto il nome di "Point-free geometry"<sup>1</sup> in cui si vuole mostrare come la scelta dei punti come nozione primitiva non è la sola possibile. Tali ricerche iniziano nella prima metà del Novecento ad opera di Whitehead, Tarski, Grzegorzcyk, per poi proseguire fino ai giorni nostri. Tutte hanno in comune il rifiuto di assumere i punti come enti primitivi a favore delle "regioni" o, se si vuole, dei "corpi solidi". Le motivazioni sono di tipo

---

<sup>1</sup> Nome che tradurrò con "geometria point-free".

ontologico nel senso che si attribuisce alle regioni un tipo di esistenza più forte di quella dei punti i quali sono visti invece come risultato di un processo di astrazione (successioni sempre più piccole di regioni) o come caratteristiche da attribuire a regioni (spigoli risultanti da tagli).

Concludo evidenziando che questo articolo è motivato dalla mia convinzione che la geometria sintetica non è riducibile a quella analitica come attualmente si ritiene. In altri termini non sono affatto convinto della validità dell'equazioni

Geometria piana =  $\mathbb{R}^2$  ; Geometria solida =  $\mathbb{R}^3$ ,

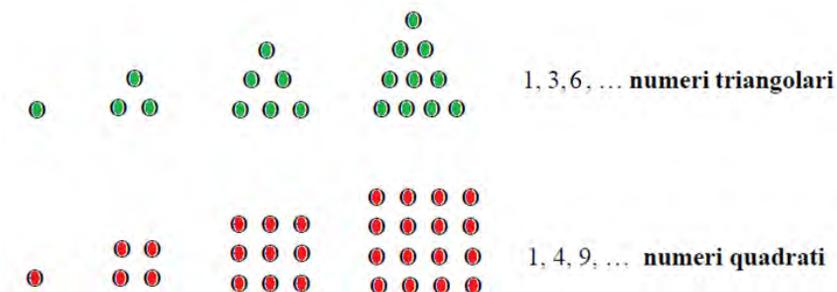
con  $\mathbb{R}$  campo dei numeri reali. Questo sia per motivi teorici che per motivi, non meno importanti, didattici.

## 2 - I punti: alcune opinioni degli antichi greci

Dovendo parlare dei punti è inevitabile partire dalla scuola pitagorica per la quale i punti-sassolino sono considerati base di tutte le cose. Lo testimonia il seguente famoso passo di Aristotele dove per "numeri" vanno intesi i numeri naturali ai quali sembra venga attribuita un'esistenza concreta come aggregazione di un numero finito di sassolini:

*Tra i primi filosofi ... furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri . . . Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (Aristotele, la Metafisica A, 985b23-986a3).*

In particolare, i pitagorici erano convinti che ogni figura geometrica fosse un aggregato finito di punti opportunamente disposti. Questo portava a chiamare “triangolari” i numeri che permettono la costruzione di un triangolo (equilatero), “quadrati” i numeri che permettono la costruzione di un quadrato e così via.



Corollario di tale punto di vista è che la grandezza di una qualunque figura geometrica è esprimibile tramite un numero intero. Basta scegliere come unità di misura le unità-punto e contare di quante unità-punto è costituita la figura. Purtroppo, ben presto si vide che se il lato di un quadrato misura un numero naturale, allora la diagonale non può essere misurata tramite un numero naturale. Questo comporta l'impossibilità di riduzione del continuo geometrico al discreto dell'aritmetica. In proposito l'opinione di Aristotele è netta:

*È impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. (Aristotele 231 a, 24-26) ... Il continuo sarebbe divisibile in indivisibili (Aristotele 231 b, 10); ma in realtà nessun continuo è divisibile in cose prive di parti... (Aristotele*

231 b, 11-12). *Ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili (Aristotele 231 b,16).*

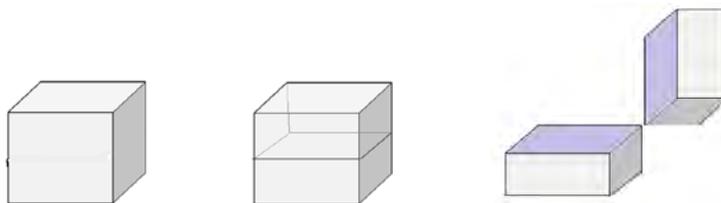
È importante l'uso del termine "divisibile" che sembra essere vista come un'azione (dividere) di un essere umano che in quanto tale non può che terminare dopo un numero finito di passi. Quindi "divisibile" è da intendere come "finitamente divisibile". Sulla natura ontologica dei punti Aristotele argomenta come segue.

*Se nella pietra non è presente un Ermete, neppure un semi-cubo sarà presente nel cubo come qualcosa di determinato. Dunque, non sarà presente neppure la superficie: se, infatti, fosse presente una qualsiasi superficie, ci sarebbe anche quella che delimita la metà del cubo. Lo stesso ragionamento vale anche per la linea, per il punto e per l'unità. (Aristotele 1002 a 21-25) ...*

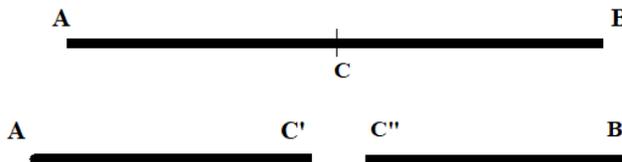
*... Infatti, non appena due corpi entrano in contatto o sono divisi, i loro estremi diventano simultaneamente uno se si toccano, due se si dividono. Quindi, quando i due corpi sono collegati, uno dei limiti non esiste più e quando sono divisi i due limiti esistono anche se prima non esistevano ..." (Aristotele 1002 a, 35 b, 1).*

Detto in modo esplicito, se da una pietra di marmo si pensa di scolpire una statua di Ermete, allora è naturale ritenere che la pietra abbia un'esistenza attuale e la statua solo un'esistenza potenziale. Similmente, se un cubo si taglia in due pezzi allora il cubo ha un'esistenza attuale ed i due pezzi hanno un'esistenza potenziale. A maggior ragione avranno esistenza potenziale le due nuove superfici createsi che

compaiono o scompaiono a seconda dell'azione compiuta. Lo stesso si può dire per le linee (due tagli) ed i punti (tre tagli).<sup>2</sup>



Riferendoci ad un segmento  $AB$ , possiamo dire che se  $AB$  si taglia a metà nel punto  $C$ , si ottengono due segmenti  $AC'$  e  $CB''$  con  $C'$  diverso da  $C''$ . Pertanto, il taglio riesce a spezzare in due parti il punto  $C$ : cosa assurda in quanto "un punto è ciò che non ha parti".



Possiamo anche fare il processo inverso e riunire di nuovo i segmenti in modo da ricostituire il segmento  $AB$  ed il punto  $C$ . Tutto questo è paradossale almeno che ai due punti (e più in generale a tutti i punti) non si attribuisca un'esistenza non attuale. D'altra parte, Aristotele esprime in modo esplicito la sua idea su cosa siano i punti: «*I punti sono limiti delle grandezze*» (Aristotele 1092 b, 9-10) in completa opposizione alla famosa definizione di Euclide: «*Punto è ciò che non ha parti*». (Euclide, Elementi, I, def. 1).

<sup>2</sup> Si veda anche Lobačevskij nel paragrafo 4.

### 3 - Scorrimento e rotolamento: Sesto Empirico

Non possiamo chiudere questa brevissima panoramica sull'idea di punto in Grecia antica senza parlare di Sesto Empirico il quale in "Contro i matematici" tra le altre critiche ai matematici mette in discussione il fatto che una figura geometrica possa essere "generata" dai punti per scorrimento.

*. . . essi dicono, inoltre, che una linea viene prodotta dallo scorrimento di un punto, una superficie dallo scorrimento di una linea, e un corpo solido dallo scorrimento di una superficie (ma)... il punto che essi definiscono come segno-privo-di-dimensioni, si deve concepire o come corporeo o come incorporeo. Corpo esso non è, secondo le loro stesse affermazioni, giacché le cose che non hanno dimensione, secondo loro, non sono corpi. Resta allora da dire che esso è incorporeo, il che è ancora una volta incredibile. Infatti, ciò che è incorporeo non si può concepire come generatore di una linea; quindi, il punto non è un segno-privo-di-dimensioni. (Sesto empirico, Libro terzo 19 e 22)*

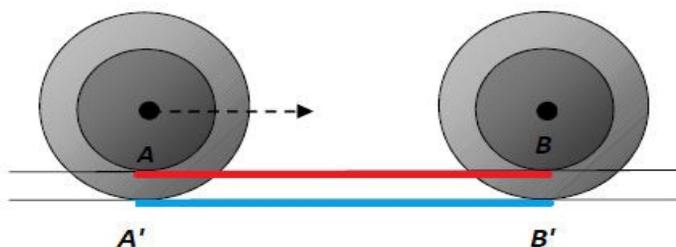
In altri termini Sesto Empirico pone il problema di come:

- un ente di dimensione 0, il punto, possa generare per scorrimento un ente di dimensione 1,
- un ente di dimensione 1, una linea, possa generare un ente di dimensione 2,
- un ente di dimensione 2, una superficie, possa generare un ente di dimensione 3.

Si noti che esiste una notevole differenza tra dire che un segmento è prodotto dallo scorrimento di un punto dal dire che un segmento è un insieme di punti. Infatti, nel primo caso l'operazione di scorrimento non sembra coinvolgere l'infinito attuale (per meglio dire carica il relativo problema sul

continuo temporale) in quanto lo scorrimento avviene in un tempo finito. Problemi relativi allo scorrimento sono forse pure presenti nel seguente paradosso dovuto, sembra, ancora ad Aristotele ma che si ritrova descritto da Galileo.

Consideriamo due ruote concentriche incollate una sull'altra, di raggi 0.5 ed 1, rispettivamente, e supponiamo di far fare alla più grande un giro completo cioè un giro di 360 gradi in modo che rotolando tracci un segmento  $A'B'$ . Nel frattempo, anche la ruota più piccola avrà fatto un giro completo di 360 gradi ed avrà tracciato un segmento  $AB$  della stessa lunghezza di  $A'B'$ .<sup>3</sup> Questo è assurdo perché i due segmenti rappresentano lo "srotolamento" di due circonferenze di lunghezza  $\pi$  e  $2\pi$ , rispettivamente. Ecco quello che dice in proposito Galileo.



*Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza? (Galileo, (1638) in "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze")*

---

<sup>3</sup> Se si vuole, è possibile anche immaginare che sulla ruota piccola sia stato messo dell'inchiostro rosso e su quella grande dell'inchiostro blu.

## 4 - Giordano Bruno e Nicolaj Ivanovič Lobačevskij

Abbiamo visto che presso i greci antichi coesistevano due idee diverse di punto. Quella di Aristotele che considerava i punti come derivati dai corpi solidi ed attribuiva a loro un tipo di esistenza più debole rispetto a quello dei corpi. Quella di Euclide che sembra attribuire ai punti un tipo di esistenza non diversa da quella dei solidi. Entrambi ritenevano che un ente di data dimensione non possa essere generato da enti di dimensione inferiore. Di fatto la scelta che sarà dominante fino ai giorni nostri sarà quella di Euclide. Tuttavia, tracce di questo dualismo saranno costantemente presenti nella storia della matematica. In proposito faremo solo due esempi.

Il primo si riferisce al filosofo Giordano Bruno (1548-1600) il quale nel suo *Contro i matematici ed i filosofi* enfatizza l'importanza del "minimo" chiamando "punti" gli enti che sono un minimo in un contesto di dimensione due ed "atomi" gli enti che sono un minimo in un contesto di dimensione tre.

*Intendiamo il minimo in due modi: uno nel piano, che è il punto, un altro nel solido che è l'atomo. Come l'unità è la sostanza del numero . . . così il minimo lo è della quantità sia geometrica che fisica.*

Si preoccupa poi di distinguere l'idea di Aristotele di punto come limite da quella, per lui centrale, di punto come minimo.

*Il punto che è il termine non è né una quantità, né è minore di qualcosa, né è un minimo, dunque noi lo distinguiamo dal punto che è una parte minima ...*

Il noto carattere, non certo morbido, di Giordano Bruno si mostra nel seguente passo in cui in segno di disprezzo chiama “geometri” e “filasafi” i matematici ed i filosofi che non riconoscono l’importanza del minimo.

*L’ignoranza del minimo rende i geometri di questo secolo dei geometri e fa dei filosofi dei filasafi.*

Pescando un po’ più in avanti nel tempo, voglio citare anche il matematico Nicolaj Ivanovič Lobačevskij che sembra seguire Aristotele ed essere un precursore della geometria point-free. Infatti, nella parte iniziale del suo libro “*Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele*”, dice:

*Il “contatto” costituisce l’attributo caratteristico dei corpi; e ad esso i corpi debbono il nome di “corpi geometrici” non appena noi teniamo fissa l’attenzione su questa loro proprietà e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano esse essenziali o accidentali.*

Dichiara poi esplicitamente che il contatto è da considerare un concetto primitivo.

*Questo semplice concetto, che abbiamo ricevuto direttamente nella natura attraverso i sensi, non deriva da altri concetti, e non soggiace perciò ad ulteriori spiegazioni.*

Subito dopo definisce la nozione di “sezione”.

*Due corpi A e B che si toccano tra loro formano un unico corpo geometrico C ... Viceversa ogni corpo C può essere sezionato in due parti A e B ... che si toccano.*

I punti, le linee, le superfici vengono definiti in termini del contatto che si crea tra pezzi di un corpo solido risultanti da uno o più tagli.

*Se si fissano in un corpo tre sezioni principali, ... , allora rispetto alla prima sezione due parti si toccano superficialmente, rispetto a due sezioni due parti poste in croce si toccano linearmente, mentre due parti che si trovano da parti opposte rispetto ad ognuna delle tre sezioni si toccano tra loro in un punto.*

## 5 - La nascita della moderna point-free geometry

La geometria point-free nasce in tempi moderni ad opera di due autori.

Il primo è il famoso filosofo inglese Alfred North Whitehead che scrive i due volumi *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge* (1919) e *The concept of Nature* (1920). Dopo alcuni anni pubblica un altro e più completo volume dal titolo *Process and Reality* (1929).

Il secondo è il famoso logico Alfred Tarski che nel 1927 scrive l'importante articolo *Foundation of the geometry of solids* (1927).

Cominciamo con l'espone le idee di Whitehead che sono frutto di un'analisi del continuo quadrimensionale. Quest'analisi porterà a mettere in evidenza alcune proprietà del continuo. che esporrò in termini di assiomi di una possibile teoria matematica e riferirò alle dimensioni due e tre. Si considerano strutture del tipo  $(Re, \leq)$  con  $Re$  insieme i cui elementi chiameremo "regioni" e  $\leq$  relazione binaria

interpretata come “inclusione”. Tra le proprietà consideriamo le seguenti che, esporrò sotto forma di assiomi.

- A1.  $\leq$  è una relazione d’ordine,
- A2. Per ogni  $x$  esistono  $z_1$  e  $z_2$  tali che  $z_1 < x < z_2$ .
- A3. Per ogni  $z_1$  e  $z_2$  esiste  $x$  tale che  $z_1 < x < z_2$ .

Sono messe in evidenza anche altre proprietà su cui non mi soffermo (si veda in proposito (Gerla, Tortora, 1992)). Preferisco invece esporre il modo come Whitehead definisce la nozione di “elemento geometrico astratto” ed in particolare quella di “punto”. Questo viene fatto definendo prima la nozione di processo di astrazione.

Definizione 5.1. Un *processo di astrazione* è una successione di regioni  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che:

- a)  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è strettamente decrescente
- b) non esiste un minorante di  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Le due figure seguenti rappresentano due processi di astrazione che permetteranno di definire una linea ed un punto, rispettivamente.



Può anche capitare che due diversi processi di astrazione rappresentino la stessa figura astratta come avviene per i due processi seguenti fatti di quadrati e di cerchi, concentrici,



Quella di Whitehead comunque è più una analisi filosofica del concetto di spazio che la proposta di un sistema di assiomi. La prima proposta di un rigoroso sistema di assiomi per la geometria point-free è, come abbiamo detto, quella del grande matematico e logico Alfred Tarski. Tarski applica una strategia che a me piace chiamare *cannibalizzazione di una teoria*  $T$ . Si tratta di considerare uno qualunque degli esistenti sistemi di assiomi  $T$ , espresso in un linguaggio  $\mathcal{L}$ , per la geometria euclidea in cui si assumono come è usuale, i punti tra gli enti primitivi. La cannibalizzazione di  $T$  avviene individuando una teoria  $T^*$ , espressa in un linguaggio  $\mathcal{L}^*$ , in cui sono i corpi solidi ad essere considerati come primitivi. Tale teoria deve essere in grado di definire i punti di cui parla  $T$  e tutte le nozioni che in  $T$  sono primitive. Queste definizioni sono effettuate in un linguaggio  $\mathcal{L}^{**}$  che è unione dei linguaggi  $\mathcal{L}$  ed  $\mathcal{L}^*$ . In tale linguaggio si considera la teoria  $T^{**} = T^* \cap T$  i cui modelli hanno un ridotto che è un modello di  $T$  e quindi è un modello della geometria euclidea.<sup>4</sup>

Nel lavoro di Tarski la teoria  $T$  è quella di Mario Pieri basata sulla sola nozione di equidistanza di un punto da altri due.  $T^*$  invece assume come primitive le regioni e consiste in alcune proprietà delle regioni e del predicato "essere sfera". In  $T^*$  definisce, nella classe delle sfere, la relazione binaria di essere equi-concentrici. Poiché questa relazione è un'equivalenza ha senso dare la seguente definizione.

---

<sup>4</sup> Una rigorosa precisazione di tutto questo richiederebbe troppo spazio e l'introduzione di varie nozioni di logica. È evidente che questo metodo, che Tarski non descrive in modo esplicito, è molto generale ed è applicabile tutte le volte che si vogliono cambiare le nozioni primitive di una teoria.

Definizione 5.5. Detto  $S$  l'insieme delle sfere un punto è una classe completa di equivalenza modulo la relazione di equiconcentricità.

## 6 - Due filoni di ricerca di cui mi occupo

Successivamente ai lavori di Whitehead e di Tarski si è sviluppata una vasta letteratura sulla geometria point-free. Non tenterò di descrivere tale letteratura (si veda in proposito (Gerla, 2020) e (Gerla, 2021) limitandomi ad esporre due direzioni di ricerca che seguo da tempo con il contributo di vari colleghi.

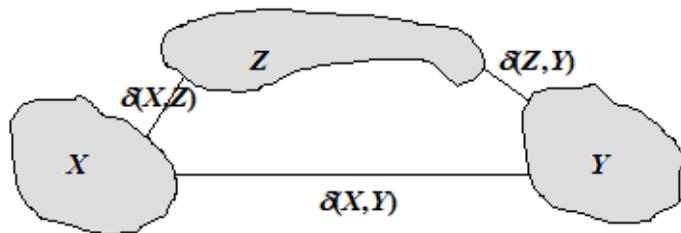
La prima è di carattere metrico e mira a cannibalizzare le esistenti assiomatizzazioni della geometria euclidea che vedono la geometria come spazio metrico  $(S, d)$  soddisfacente opportuni assiomi (si veda ad esempio (Blumenthal, 1953)). In tale caso i punti sono l'unico ente primitivo. A tale proposito viene naturale ispirarsi a nozioni di carattere metrico che si riferiscono alle regioni piuttosto che ai punti. Ad esempio, le nozioni di *diametro* e di *distanza* che, come noto, si definiscono ponendo per  $X$  ed  $Y$  insiemi non vuoti

$$|X| = \text{Sup}\{d(x,y) : x \in X, y \in X\},$$

e

$$\delta(X, Y) = \text{Inf}\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Si noti che  $\delta$  non è una metrica poiché può capitare che  $\delta(X, Y) = 0$  con  $X \neq Y$  e non vale la diseguaglianza triangolare come mostra la seguente figura



in cui risulta che  $\delta(X, Y) > \delta(X, Z) + \delta(Z, Y)$ . Tuttavia, valgono alcune proprietà che possiamo assumere come assiomi di una teoria point-free degli spazi metrici.

Definizione 6.1. Chiamiamo *spazio pseudo-metrico senza punti* una struttura  $(Re, \leq, \delta, | |)$  in cui  $\leq$  è una relazione d'ordine in  $Re$  e sono verificati i seguenti assiomi.

- $A_1$   $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|$  (crescenza del diametro),
- $A_2$   $\delta(x, y) = \delta(y, x)$  (simmetria),
- $A_3$   $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \delta(x_1, y) \leq \delta(x_2, y)$  (decrecenza di  $\delta$ ),
- $A_4$   $\delta(x, x) = 0$ ,
- $A_5$   $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) + |z|$  (diseguaglianza triangolare).

Come al solito, gli elementi di  $Re$  sono chiamati *regioni*, la relazione  $\leq$  *relazione di inclusione*. Inoltre,  $\delta$  è chiamata *funzione distanza* e la funzione  $| |$  *diametro*.

Definizione 6.2. Un *rappresentante di un punto* è una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  decrescente tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .

Teorema 6.3. Denotiamo con  $RP$  l'insieme dei rappresentanti di punto e con  $\underline{d} : RP \times RP \rightarrow \mathbb{R}^+$  la funzione definita ponendo,

$$\underline{d}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_n \delta(x_n, y_n),$$

allora  $(RP, \underline{d})$  è uno spazio pseudo-metrico. Pertanto la relazione  $\equiv$ , definita ponendo  $(x_n)_{n \in N} \equiv (y_n)_{n \in N}$  se e solo se  $\underline{d}((x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N}) = 0$ , è una relazione di equivalenza.

Grazie a tale teorema possiamo definire lo spazio metrico  $(RP/\equiv, d)$  dove  $RP/\equiv$  è il quoziente di  $RP$  modulo  $\equiv$  e  $d$  è definita ponendo

$$d([(x_n)_{n \in N}], [(y_n)_{n \in N}]) = \underline{d}((x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N}).$$

Definizione 6.4. Chiamiamo *punto* un elemento di  $RP/\equiv$ .

Avendo associato a  $(Re, \leq, \delta, | |)$  uno spazio metrico  $(RP/\equiv, d)$ , possiamo cannibalizzare un qualunque sistema di assiomi di carattere metrico per la geometria euclidea.

Si noti che esistono anche approcci in cui si considera come primitivo il solo diametro. Il primo a seguire questa via sembra essere stato Flavio Previale nel 1966.

Un diverso filone di ricerca si basa sulla nozione di "ovale" che vuole rappresentare la nozione di insieme convesso (si veda Gerla, Gruszczyński, 2017). In tale caso si propongono strutture del tipo  $(B, \leq, Ov)$  soddisfacenti, tra gli altri, gli assiomi seguenti.

**A1.**  $(B, \leq)$  è un'algebra di Boole completa senza atomi i cui elementi sono chiamati "regioni".

**A2.**  $Ov$  è un sistema di chiusura in  $(B, \leq)$  cioè è un sottoinsieme chiuso rispetto agli estremi inferiori.

La seguente lista mostra che in un modello della teoria sono definibili tutte le nozioni della geometria di incidenza.

- Chiamiamo *semipiano* un ovale il cui complemento è ancora un ovale.

- Chiamiamo *retta* una partizione dell'universo costituita da ovali e quindi una coppia  $l = \{o, -o\}$  con  $o$  semipiano. Chiameremo *lati* di  $l$  i due semipiani  $o$  e  $-o$ .

- Diciamo che due rette  $l$  ed  $l'$  sono *parallele* se uno dei lati di  $l$  è disgiunto da uno dei lati di  $l'$ . Chiameremo *incidenti* due rette che non sono parallele.

- Date due rette incidenti  $l, l'$ , chiamiamo *angolo* ogni regione ottenuta intersecando un lato di  $l$  con un lato di  $l'$ .

- Chiamiamo *pseudo-punto* una coppia  $P = \{l, l'\}$  di rette incidenti.

- Diciamo che un pseudo-punto  $P = \{l, l'\}$  *giace su di un convesso*  $x$  se tutti gli angoli ottenuti dalle rette  $l$  ed  $l'$  si sovrappongono ad  $x$ .

- Diciamo che due pseudo-punti  $P$  e  $Q$  sono *separabili* se giacciono in due convessi disgiunti, *inseparabili* altrimenti.

La relazione di non separabilità è una relazione di equivalenza e questo permette la seguente definizione.

Definizione 6.5. Un *punto* è un elemento del quoziente dell'insieme degli pseudo-punti modulo la non separabilità.

Avendo definito tale serie di nozioni non è difficile cannibalizzare, ad esempio, il sistema di assiomi della geometria di incidenza proposti da Hilbert.

## 7 - Conclusioni

Le ricerche in geometria point-free sono solo al loro inizio e molti problemi sono aperti. Il principale è trovare una

teoria che non utilizzi il trucco della cannibalizzazione ma si basi su assiomi esprimenti proprietà significative dei corpi. Ad esempio, nell'approccio basato sugli ovali che abbiamo brevemente esposto non è difficile dimostrare che l'assioma delle parallele è equivalente all'affermazione che la classe dei semipiani contenuti in un semipiano è totalmente ordinata. Inoltre, sarebbe interessante esaminare cosa è derivabile dall'assumere un "assioma di separazione" affermando che due ovali disgiunti sono sempre separabili da una linea (cioè esistono due semipiani disgiunti che li contengono).

Potrebbe anche essere interessante esplorare le potenzialità didattiche della geometria point-free. Infatti, è evidente che l'intuizione dello spazio che tutti possediamo si fonda in modo prioritario su quella di corpo solido o, per meglio dire, di luogo occupabile da un corpo solido.<sup>5</sup> Inoltre, tale geometria potrebbe essere la base di un nuovo fusionismo.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> La questione è comunque complessa in quanto è anche straordinaria la capacità dei bambini di rappresentare, quando disegnano, un mondo di dimensione tre su un foglio di dimensione due.

<sup>6</sup> Il fusionismo consiste nella proposta di non separare la geometria piana da quella solida (si veda ad esempio (Borgato, 2006)). Per un testo fusionista si veda (De Paolis 1884).

## Bibliografia

Barbieri G., Gerla G. (2021). Defining measures in a mereological space: an exploratory paper, *Logic and Logical Philosophy*.

Biacino L., Gerla, G. (1991). Connection structures, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32: 242-247.

Blumenthal L. M. (1953). *Theory and Applications of Distance geometry*, Oxford University Press at Oxford.

Borgato M. T. (2006). Il fusionismo e i fondamenti della geometria, in: *Da Casati a Gentile momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia: a cura di L. Giacardi*, Centro Studi Enriques.

Coppola C., Pacelli, T. (2006). Approximate distances, pointless geometry and incomplete information. *Fuzzy Subsets and Systems*, 157: 2371-2383.

De Paolis R. (1884). *Elementi di geometria Torino*, ed. Loescher.

Di Concilio A., Gerla G. (2006). Quasi-metric spaces and point-free geometry, *Math. Struct. in Comp. Science*, 16, pp 115-137.

Galileo G., (1638). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.

Gerla G. (1990). Pointless metric spaces, *J. Symbolic Logic*, 55, pp 207-219.

Gerla G. (2006). Un punto dal volto di gatto: fare a meno dei punti I e II, *Periodico di Matematiche*, 3 e 4, pp 9-20 pp 15-25.

Gerla G., A. Miranda (2008). Mathematical features of Whitehead's point-free geometry, in *Handbook of Whiteheadian Process Thought*, Michel Weber and William Desmond, Jr. (eds.), Frankfurt/Lancaster, Ontos Verlag, 2, pp 119-130.

Gerla G., Gruszczyński R. (2017). Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes, *The Review of Symbolic Logic*, pp 237-258.

Gerla G., Tortora R. (1992). La relazione di connessione in A. N. Whitehead: Aspetti matematici, *Epistemologia* 15, pp 341-354.

Gerla G. (2020). Point-free continuum, in *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Geoffrey Hellman and Shapiro editors, Oxford University Press.

Gerla G. (2021). L'idea di punto e la point-free geometry (in corso di stampa sul *Portale Italiano di Filosofia Analitica*.)

Lando T., Scott D. (2019). A calculus of Regions Respecting Both Measure and Topology, *Journal of Philosophical Logic*, 14.

Previale F. (1966). Reticoli metrici, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 21, pp 243-250.

Sesto Empirico (1972). *Contro i matematici*, Laterza.

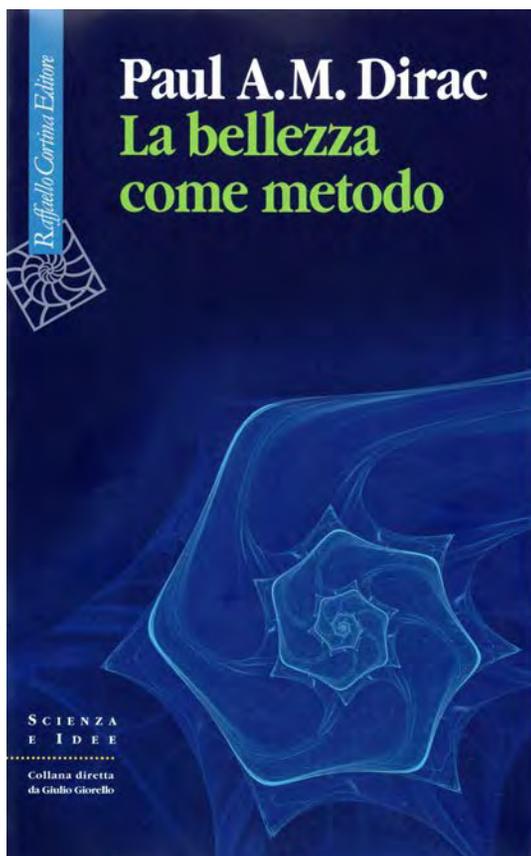
Tarski A. (1956). Foundation of the geometry of solids, in: *Logic, Semantics, Mathematics*, (traduzione di J. H. Woodger). Oxford University Press, Oxford, pp 24-30.

Varzi A. (1997). Boundaries, Continuity, Contact, *Noûs*, 31, pp 26-58.

Whitehead A.N. (1919). *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, Cambridge, University Press, Cambridge.

Whitehead A.N. (1920). *The Concept of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge.

Whitehead A.N. (1929). *Process and Reality*, Macmillan, New York.



*Il principio di bellezza matematica svolge secondo Dirac una duplice funzione. Nel contesto della scoperta, la bellezza determina la direzione della ricerca, nel contesto della giustificazione – ed è questa la tesi più forte –, la bellezza è la qualità che permette di giudicare una teoria, più ancora dell'accordo con le osservazioni. Nella sua scienza, Dirac usò con impareggiabile efficacia il criterio di bellezza come un modo per trovare la verità.*

*L'equazione di Dirac, considerata la più bella della fisica:*

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

# L' "utilità" della geometria euclidea

Veronica Bitonti\* Francesco Laudano\*\*

\* veronica.bitonti03@gmail.com

\*\* Liceo M. Pagano di Campobasso; francesco.laudano@unimol.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.059

**Sunto:** In questa nota si indicano alcune possibili direzioni dell'innovazione nell'insegnamento-apprendimento della Geometria euclidea. In particolare, si mostrano alcuni semplici problemi che consentono un approccio concreto allo studio della disciplina. Inoltre, si evidenzia la possibilità di sviluppare un percorso integrato di geometria euclidea e trigonometria al biennio dei licei, avvalendosi del software di geometria dinamica. Per fornire un esempio delle tecniche utilizzate, si presenta un'attività didattica sul teorema di Carnot, rivolta agli studenti del primo anno delle superiori. Lo scopo ultimo del lavoro è confermare il valore formativo della geometria euclidea.

**Parole Chiave:** geometria euclidea, trigonometria, software di geometria dinamica, teorema del coseno.

**Abstract:** This note indicates some possible directions of innovation in the teaching-learning of Euclidean geometry. In particular, some problems are shown that allow a concrete approach to the study of the discipline. It also highlights the possibility of developing an integrated course of Euclidean geometry and trigonometry in the first two years of high school, using the dynamic geometry software. To give a taste of the techniques used, a didactic activity on the cosine

*law is presented, aimed at first year high school students. The ultimate aim of the work is to confirm the formative value of Euclidean geometry.*

**Keywords:** *Euclidean geometry, trigonometry, dynamic geometry software, cosine theorem.*

## 1 - Introduzione

Negli ultimi anni lo studio la geometria euclidea (GE) nel secondo ciclo è stato ridimensionato per lasciare spazio ad altre parti della matematica, ritenute a ragione indispensabili nella formazione del cittadino, come l'induzione matematica, la statistica inferenziale, e le equazioni differenziali. È evidente che queste ed ulteriori auspicabili integrazioni dei contenuti non possono essere realizzate con una semplice riduzione del tempo da dedicare agli altri argomenti, ma richiedono una profonda revisione dei percorsi didattici, peraltro già suggerita dalle indicazioni nazionali per i licei (MIUR, 2010). Tale revisione potrebbe riguardare in particolare l'insegnamento della GE, in modo da renderne più concreto l'approccio, anche mediante l'uso del software di geometria dinamica (GDS). Senza trascurare i processi di astrazione, e, quindi, le dimostrazioni.

Nelle pagine seguenti, proveremo ad evidenziare la possibilità di insegnare/apprendere la GE mediante un approccio problematico e laboratoriale, proponendo un esempio di "problema di realtà" sulla similitudine, che chiameremo "Il problema della cruise girl". Inoltre proporremo un'attività didattica sul teorema di Carnot, rivolta agli alunni del primo anno dei licei. Si tratta di un esempio di integrazione dello studio della

trigonometria nel percorso di geometria del primo biennio, in linea con le già citate indicazioni nazionali.

## 2 – Il problema della cruise girl

*È una bellissima mattinata estiva, il sole non è ancora alto, sembra il momento ideale per passare un po' di tempo in piscina, assieme agli amici. La ragazza si dirige verso il ponte superiore della nave portando con sé un asciugamano, e la sua fedele poquette, nella quale custodisce un tubetto di crema solare e l'immane smartphone. La nave è ferma di fronte alla costa. La ragazza toglie gli occhiali da sole ed affacciandosi a dritta vede distintamente una torre, proprio di fronte a sé. Dopo aver contemplato per un po' il panorama, trova un lettino libero, vi stende l'asciugamano e si sdraia, felice di rilassarsi al sole. Ma una domanda si insinua nella sua mente:*

*“chissà quanto siamo distanti dalla costa”.*

*È solo un attimo, il pensiero svanisce e la ragazza inforca lo smartphone per contattare gli amici conosciuti a bordo. Lo schermo si accende e l'occhio le cade su un'applicazione che misura le distanze, che ha usato a scuola per risolvere un problemino di geometria. E il pensiero, subdolo, ritorna. “È chiaro che lo smart-phone non può misurare la distanza dalla costa, ma deve esserci un modo per calcolarla. Certo, con un po' di approssimazione.”*

Come potrebbe procedere la cruise girl per determinare la distanza della nave dalla costa?

Lasciamo al lettore interessato la risoluzione del problema, limitandoci ad osservare che si tratta di un semplice problema di misurazione, analogo a “Il problema del boy scout” (Laudano, 2017). Nella pratica didattica problemi di questo tipo aiutano a stimolare l'interesse degli studenti, quindi costituiscono un buon punto di partenza per avviare lo studio

di un nuovo argomento. Nelle fasi successive l'insegnante guiderà gli studenti nella costruzione delle capacità di astrazione e nell'assimilazione del metodo assiomatico, obiettivi salienti dei percorsi di GE.

### **3 – Le innovazioni delle indicazioni nazionali**

Nel seguito dell'attività di apprendimento avviata col problema della cruise girl si prevede l'apporto decisivo del software di geometria dinamica. Un suggerimento esplicito all'uso del software è fornito dalle indicazioni nazionali (MIUR 2010), le quali, con riferimento al primo biennio, prevedono che:

*La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

Come sottolineato da vari autori e come vedremo nell'ultima sezione di questo lavoro, l'uso del GDS consente un approccio laboratoriale finalizzato alla ricerca/scoperta delle proprietà geometriche. In tal modo anche gli studenti meno interessati sono attratti dallo studio della GE.

Un altro suggerimento esplicito fornito dalle indicazioni nazionali, che ha avuto poco seguito, riguarda lo studio delle funzioni circolari. A tal proposito nel suddetto documento, con riferimento al primo biennio dei licei scientifici, si legge che:

*Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli ed il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica. Lo studente studierà ... .. le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi.*

È opportuno sottolineare che il suddetto documento ministeriale non prevede lo studio della trigonometria negli anni successivi. Dunque le indicazioni nazionali suggeriscono di sviluppare l'intero percorso di trigonometria al primo biennio dei licei scientifici. Tale suggerimento, ignorato dalla maggior parte dei testi, è un'innovazione importante che non trova eguali negli altri sistemi scolastici occidentali. Trattando la trigonometria, in una versione snellita, al primo biennio è possibile negli anni successivi trovare tempo da dedicare alle equazioni differenziali, alla statistica inferenziale ed alle geometrie non euclidee.

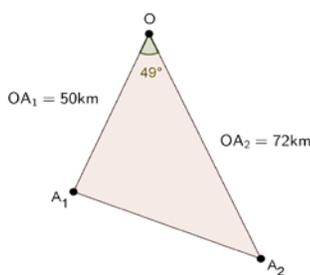
#### **4 - Un'attività di apprendimento sul Teorema di Carnot al primo anno del liceo**

In questo paragrafo descriviamo un esempio di attività di apprendimento sul teorema di Carnot diretta agli alunni del primo anno delle superiori. In particolare si vuole dare un'idea del modo in cui l'insegnante può guidare gli studenti alla scoperta del Teorema, facendogli usare il software di geometria dinamica in aula. L'attività dura all'incirca 90 minuti ed ha i seguenti obiettivi:

- Scoprire il teorema di Carnot
- Dimostrare il teorema di Carnot
- Risolvere problemi usando il teorema di Carnot

Si utilizza la metodologia dell'inquiry based learning (Laudano & Tortoriello & Vincenzi, 2020), secondo la quale la riflessione degli studenti deve essere guidata attraverso domande appropriate. L'attività prende le mosse da un problema e si sviluppa attraverso le seguenti fasi.

### Fase 1. Il problema della torre di controllo



*Una torre di controllo posta in un punto  $O$  può determinare la sua distanza da due aerei posti nei punti  $A_1$  ed  $A_2$ . Sapendo che l'angolo  $A_1OA_2$  misura  $49^\circ$  e le distanze tra  $O$  ed i due aerei misurano  $50\text{km}$  e  $72\text{km}$ , trovare la distanza tra i due aerei.*

**Fig. 1 - Il problema degli aerei**

Dopo qualche minuto di riflessione guidata dall'insegnante alcuni studenti propongono due possibili strategie risolutive. La prima inizia disegnando la perpendicolare dal punto  $A_1$  a  $OA_2$  ed applica due volte la formula pitagorica. La seconda parte dalla costruzione col GDS di un triangolo  $B_1PB_2$  simile a  $A_1OA_2$ , con  $B_1P = 5\text{cm}$ ,  $PB_2 = 7.2\text{cm}$  e l'angolo  $B_1PB_2 = 49^\circ$ , e trova la distanza tra i due aerei moltiplicando la lunghezza di  $B_1B_2$  per il fattore di similitudine  $106$ . L'insegnante sottolinea che entrambe le strategie sono valide. Tuttavia, una formula che esprime la lunghezza di un lato di un triangolo in

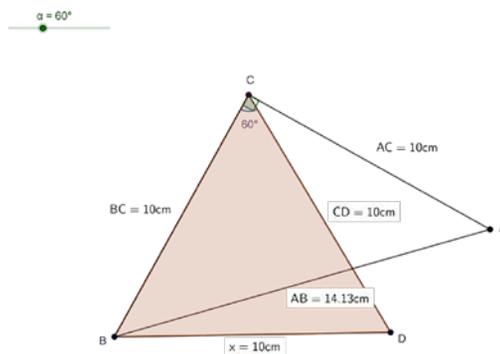
funzione degli altri lati e l'angolo tra essi compreso permetterebbe di risolvere il problema in modo più efficace. Pertanto l'insegnante invita gli studenti a riflettere e discutere per rispondere alla seguente domanda.

D<sub>1</sub>: In linea di principio, potrebbe esistere una formula generale che esprime la lunghezza di un lato di un triangolo in funzione degli altri lati e dell'angolo tra di essi?

Alcuni studenti sottolineano che due lati e l'angolo tra loro determinano in modo univoco tutti gli elementi del triangolo, e concordano sul fatto che tale formula possa esistere. Pertanto, l'insegnante propone un'indagine volta a cercare un'estensione del teorema di Pitagora che sarebbe utile per risolvere il problema dell'aereo.

## **Fase 2. Attività laboratoriale con l'uso del DGS**

La prima parte dell'attività è volta a scoprire il ruolo che assume l'angolo nella formula che si vuole determinare, e, in particolare, a capire quale delle funzioni  $\sin\alpha$  e  $\cos\alpha$  potrebbe intervenire nella formula. L'insegnante invita gli studenti a lavorare su un file opportunamente preparato con DGS (vedi Fig. 2) in modo che possano modificare l'ampiezza dell'angolo  $BCA$  agendo sullo slider, mentre  $BC$  e  $DC$  sono segmenti di lunghezza data pari a  $10\text{cm}$ . Usando lo slider relativo all'angolo, gli studenti si rendono subito conto che aumentando l'angolo  $BCA$  aumenta anche la lunghezza di  $AB$ . Quindi l'insegnante li guida attraverso le seguenti domande e la relativa discussione.



**Fig. 2 - lavorando con triangoli isosceli**

D2: come cambia il valore di  $AB^2$  al variare del seno e coseno dell'angolo  $\alpha$ ?

Per rispondere a questa domanda, l'insegnante invita gli studenti ad annotare su un foglio di lavoro i valori di seno e coseno degli angoli  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$  ed i corrispondenti valori di  $AB^2$ . Confrontando le relazioni mostrate nella tabella, gli studenti notano che il valore del coseno diminuisce costantemente all'aumentare dell'angolo. Quello del seno, invece, aumenta per  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$  mentre diminuisce per  $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ . Quindi la lunghezza di  $AB$  non sembra essere correlata a  $\sin \alpha$ . Inoltre, osservano che all'aumentare di  $\alpha$ , aumenta la quantità  $-\cos \alpha$ , e così anche la lunghezza di  $AB$ . Il docente consiglia agli studenti di ricercare la formula più semplice che verifica le condizioni emerse con l'utilizzo del DGS. Quindi, poiché la relazione cercata deve estendere il teorema di Pitagora, pone la seguente domanda ed anima la relativa discussione.

D3: si può ricavare la formula cercata a partire dalla relazione pitagorica, sottraendo alla somma dei quadrati dei due lati una quantità opportuna che dipende da  $\cos \alpha$ ?

L'insegnante indirizza la discussione allo scopo di ottenere  $AB^2$  sottraendo da  $BC^2 + AC^2$  un termine proporzionale a  $\cos\alpha$ . Quindi invita gli studenti a calcolare il fattore di proporzionalità in vari casi utilizzando il file DGS della Figura 2, per rispondere alla seguente domanda.

D4: qual è la relazione tra  $AB^2$  e  $\alpha$  nei casi precedenti?

L'insegnante verifica che gli studenti, calcolando le quantità  $(AB^2 - AC^2 - BC^2)/\cos\alpha$ , ottengano sempre il valore 200, al variare di  $\alpha$ . Quindi verifica se gli studenti scoprono che  $AB^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cos\alpha$ . Poi l'insegnante invita gli studenti a modificare la lunghezza di  $AB$  e  $BC$  per verificare se la relazione precedente può essere estesa ad altri triangoli isosceli. Eseguendo questi test, gli studenti scoprono che per i triangoli isosceli vale la formula:  $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos\alpha$

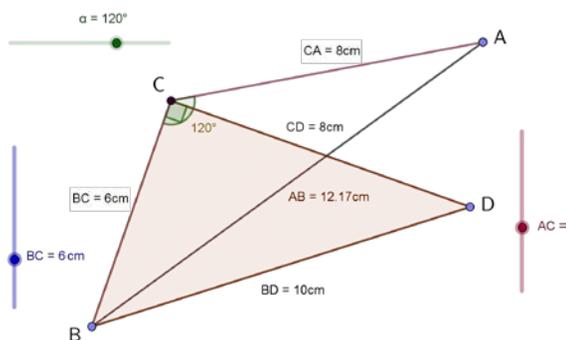
### Fase 3. Formulazione di una congettura

A questo punto l'insegnante propone agli studenti di costruire triangoli scaleni, utilizzando un nuovo file DGS, preparato per testare la formula che ci sembra di aver scoperto. Le domande poste dall'insegnante guidano gli studenti nella formulazione della congettura generale.

D5: la relazione precedente vale anche per i triangoli scaleni?

D6: a questo punto, possiamo formulare una congettura per generalizzare il Teorema di Pitagora?

Le osservazioni fatte utilizzando gli sliders sembrano confermare la validità della formula (1) per i triangoli scaleni.



**Fig. 3 - Lavorando con triangoli qualunque**

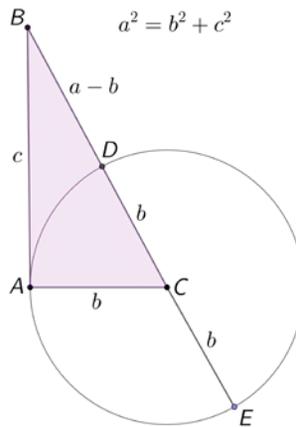
Attraverso la domanda successiva e la discussione che ne segue, l'insegnante lascia emergere la necessità di una dimostrazione.

D7: possiamo essere certi che la formula precedente valga per tutti i triangoli?

#### **Fase 4. Dimostrazione del teorema di Carnot**

Poiché la formula da dimostrare è un'estensione del Teorema di Pitagora, l'insegnante propone di provarla generalizzando una dimostrazione di questo Teorema. In particolare, suggerisce di partire dalla già nota dimostrazione visualizzata nella Figura 4, che si basata sul Teorema della tangente e della secante. Com'è ben noto questo teorema afferma che

«conducendo da un punto esterno ad una circonferenza un segmento tangente ed uno secante ad essa, risulta verificata una proporzione in cui il segmento tangente è medio proporzionale tra il segmento secante e la sua parte esterna.»



**Fig. 4 - Una prova visuale del Teorema di Pitagora**

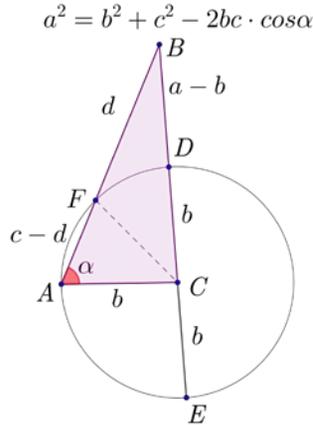
Nella figura  $BE : AB = AB : BD$ . Da cui segue immediatamente  $(a+b):c=c:(a-b)$ , e quindi  $(a+b)(a-b)=c^2$ , cioè  $a^2 - b^2 = c^2$ .

È il caso si sottolineare che Il teorema precedente è una semplice applicazione del terzo criterio di similitudine tra triangoli, infatti i triangoli  $ABD$  e  $ABE$  hanno l'angolo  $B$  in comune e gli angoli  $BAD$  e  $AED$  congruenti poiché insistono sullo stesso arco  $AD$ . Si tratta di una dimostrazione visuale (Nelsen, 2000 e 2015) la cui semplicità è dovuta alla scelta della figura. L'introduzione della trigonometria al primo biennio è resa possibile proprio da questo tipo dimostrazioni. A questo punto il docente pone agli studenti la seguente domanda:

D7: Il ragionamento mostrato nella Figura precedente può essere esteso ai triangoli non rettangoli?

Il docente anima la discussione che segue alla domanda, e, se necessario, suggerisce di utilizzare il Teorema due secanti,

che estende naturalmente il Teorema della tangente e della secante, guidandoli nella comprensione della dimostrazione. Nella Figura 5 mostriamo uno schizzo di tale dimostrazione, che verrà esplicitata agli alunni solo se non riescono a scoprirla da soli.

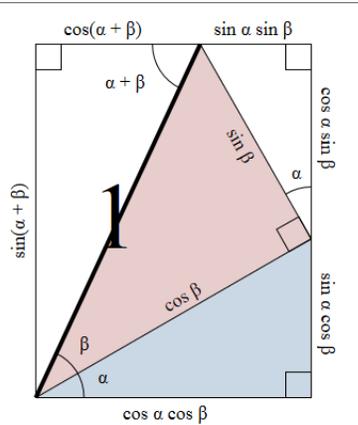


**Fig. 5 - Una prova visuale del Teorema di Carnot**

Com'è evidente, essa si può ottenere sulla falsa riga della prova precedente, tenendo conto che  $c-d=2b \cos\alpha$ .

Sembra opportuno sottolineare che in letteratura si possono trovare prove visuali per tutte le formule trigonometriche, in (Wolfram, 2020) e nei già citati testi di R. Nelsen compaiono alcuni esempi interessanti. Tali prove sono fondamentali nella definizione di un percorso integrato di geometria euclidea e trigonometria rivolto agli studenti del primo biennio. A titolo esemplificativo riportiamo di seguito una dimostrazione delle formule di addizione e sottrazione del coseno (Nelsen, 2000).

Anche in questo caso l'efficacia della prova si basa sulla scelta della figura.



**Fig. 6 - Una prova visuale delle formule di addizione del seno e del coseno**

Applicando le formule dei triangoli rettangoli è immediato osservare che il lato di sinistra del rettangolo è  $\sin(\alpha + \beta)$ , mentre quello di destra è  $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ . Questa semplice osservazione dimostra la formula di addizione del seno e in modo analogo si può ottenere quella del coseno. Pare opportuno rilevare che, nella sperimentazione condotta negli ultimi anni dagli autori, le dimostrazioni visuali sono state particolarmente utili nella didattica a distanza. Infatti esse hanno consentito di sostituire sequenze di passaggi formali, difficili da seguire a distanza, con ragionamenti più semplici che poggiano sull'intuizione geometrica.

## 5 - Conclusioni

Negli ultimi anni nella scuola secondaria si sono moltiplicate le proposte didattiche centrate sulla "modellizza-

zione”, spesso poco chiara, di “problemi di realtà”. Tali attività assorbono gli studenti fin dai primi anni della scuola secondaria ed aspirano talvolta a diventare addirittura curricolari, sottraendo tempo prezioso ad altri segmenti della matematica. Nelle pagine precedenti abbiamo mostrato che anche la GE può essere utilizzata per risolvere problemi concreti. Tuttavia è evidente che l’insegnamento della matematica non può essere finalizzato esclusivamente alla risoluzione di problemi, ma deve indirizzare verso lo sviluppo del pensiero razionale, e quindi critico, indispensabile per l’esercizio consapevole della cittadinanza.

La GE, a 2300 anni dal suo concepimento, sembra ancora insostituibile per raggiungere queste finalità (Moise, 1975). Non solo, essa potrebbe integrarsi con la trigonometria consentendo di anticiparla al primo biennio, in modo da poter inserire altri argomenti nella formazione matematica degli studenti del secondo ciclo.

## Bibliografia

LAUDANO F. (2017). Il problema del boy scout, *Periodico di Matematiche*, serie XIII vol 9 n.1, 2017.

LAUDANO F., Tortoriello F.S., Vincenzi G. (2020). An experience of teaching algorithms using inquiry-based learning, *Int J Math Educ Sci Technol*, Vol. 51 (3), 2020, pp. 344-353.

MIUR (2010). *Schema di regolamento recante 'Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.*

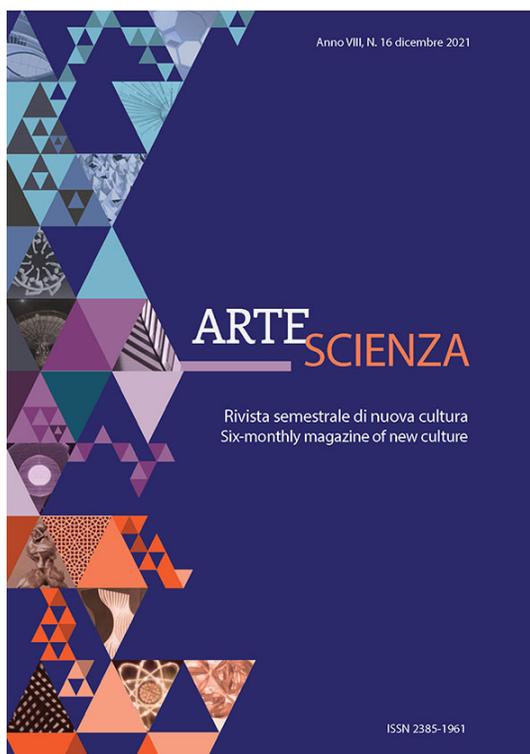
NELSEN R. (2000). One figure, six identities, *College Mathematics Journal*, 31 (2000), pp. 145-146.

NELSEN R. (2000). *Proofs Without Words II*. Mathematical Association of America.

NELSEN R. (2015). *Proofs Without Words III*, Mathematical Association of America.

MOISE E.E. (1975). The meaning of Euclidean Geometry in school Mathematics, *The Mathematics Teacher*, 68 (6) (1975) pp. 472-477.

WOLFRAM MathWorld (2020). Prosthapheresis Formulas,  
<https://mathworld.wolfram.com/ProsthapheresisFormulas.html>



## **ArteScienza** ® Anno VIII, N. 16, dicembre 2021

Rivista semestrale telematica  
www.assculturale-arte-scienza.it

### **Indice**

*Pirandello. Maestro di logica*  
di Bruno de Finetti

*Gli scienziati italiani alla guida del Paese*  
di Luca Nicotra

*Ontologia e morfologia dell'immagine*  
di Enza Maria Macaluso

*Dialogo tra Fryderyk Chopin e Maria Skłodowska-Curie*  
di Alberto Macchi

*Le nuove femmine*  
di Violetta Chiarini

*Il contrappasso*  
di Mario De Paz

*Chi era Cambellotti: l'epopea della lestra*  
di Maria Cristina Crespo

*Quando Togliatti si arrese al Papa*  
di Antonio Castellani

*La Letteratura minore del Novecento. Parte I I*  
di Franco Eugeni

*Il male di vivere*  
di Ferdinando Gargiulo

# *Spirografo, simmetrie, moti composti*

Nicla Palladino\* Giulia Betani\*\*

\*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia;  
nicla.palladino@unipg.it

\*\* Laurea magistrale in Matematica, Università di Perugia



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.060

**Sunto:** Lo spirografo è un oggetto che permette di disegnare diverse curve come ipo ed epi trocoidi la cui versione giocattolo fu sviluppata dall'ingegnere D. Fisher che lo esibì nel 1965 alla Nuremberg International Toy Fair. Le curiosità storiche sull'origine dello strumento e l'utilizzo di esso in modo idoneo possono essere utili a sviluppare concetti geometrici legati alle simmetrie e ai moti dei pianeti. L'attività può essere condotta nell'ambito della teoria dell'autopoiesi. Si presentano premesse, fasi e risultati di un intervento didattico condotto in una scuola secondaria di II grado.

**Parole Chiave:** spirografo, simmetrie, concezione operativa

**Abstract:** The spirograph is an object that allows you to draw different curves such as hypo and epi-trochoid; the toy version was developed by the engineer D. Fisher who exhibited it in 1965 at the Nuremberg International Toy Fair. Historical curiosities about the origin of the instrument and its use in a suitable way can be useful for developing geometric concepts related to the symmetries and motions of the planets. The activity can be conducted in the context of the autopoiesis theory. We present here the premises, phases and results of a didactic intervention conducted in a secondary school of II degree.

**Keywords:** spirograph, symmetries, operational conception

## 1 - Introduzione

Illustriamo un'attività che ha avuto come scopo presentare il concetto di simmetria a studenti delle scuole superiori di II grado, con approcci miranti ad un apprendimento costruttivo e significativo. Per un apprendimento solido della disciplina abbiamo lavorato in una situazione a-didattica: l'insegnante è sempre presente ma lascia agire il ragazzo di propria iniziativa in modo tale che esso si configuri come "ricercatore" delle soluzioni del problema posto. In questo ambito quando si parla di "problema" si intende un problema ampio, ben strutturato che possieda determinate caratteristiche. Il problema in questione non può essere un semplice esercizio risolvibile mediante procedure meccaniche, la risposta non può essere immediata e deve richiedere un ragionamento da parte dello studente, si svolge in aula dove è presente la figura "guida" dell'insegnante. Il fattore chiave della metodologia del problem solving è che i ragazzi hanno i prerequisiti necessari per risolvere il problema assegnatogli però viene loro richiesto di riorganizzare le proprie conoscenze in modo da trovarne la soluzione. Nel modello dello sviluppo mentale di un allievo si distinguono due livelli: il livello di sviluppo effettivo ed il livello di sviluppo potenziale. Il problem solving permette di passare dallo sviluppo effettivo a quello potenziale, purchè il passaggio sia compiuto autonomamente dallo studente.

Abbiamo qui fatto riferimento alla teoria dell'apprendimento della ricercatrice Anna Sfard e agli studi sul pensiero divergente. Nella sperimentazione si è utilizzato un approccio di tipo operativo, utilizzando un gioco che porta alla realizzazione di rappresentazioni grafiche originali e utili ai concetti matematici da presentare.

Il progetto ha coinvolto le classi II A e II B di un liceo scientifico della città di Perugia.

Come primo step, è stato somministrato un test, uguale per entrambe le classi, per verificare se i ragazzi possedessero i prerequisiti necessari per affrontare le simmetrie in matematica. Nella classe di controllo (II B) è stato introdotto il nuovo argomento con lezioni frontali tradizionali. Nella classe sperimentale (II A) è stata presentata un'attività a partire dall'utilizzo dello spirografo e di elementi architettonici a scopo decorativo ricorrenti in chiese di epoca romanica. Questa attività è stata quindi interdisciplinare. A conclusione è stato assegnato un test uguale per le due classi al fine di valutare l'efficacia dell'azione didattica.

## **2 - L'approccio operativo e quello strutturale**

Anna Sfard in (Sfard 1991) analizza la peculiarità del pensiero matematico riflettendo sull'aspetto epistemologico e ontologico dei costrutti matematici. A seconda del punto di vista adottato, l'autrice fa una distinzione tra il concetto (spesso identificato anche con il termine "nozione") e la concezione. Definisce concetto quel blocco di conoscenza matematica inserito in un contesto teorico mentre la concezione è l'insieme di rappresentazioni interne al soggetto evocate dal concetto; in altre parole, la concezione rappresenta l'elaborazione personale che il soggetto fa del concetto.

L'autrice osserva che i matematici per parlare di un certo universo popolato da determinati oggetti fanno uso di un particolare linguaggio; tali oggetti possiedono specifiche caratteristiche e sono sottoposti a determinati processi regolati

da precise leggi. Tuttavia, i costrutti matematici avanzati sono quasi sempre inaccessibili ai nostri sensi. Essere capaci in qualche modo di "vedere" con gli occhi della mente questi oggetti invisibili sembra essere una componente fondamentale dell'abilità matematica. Per ogni concetto, la concezione può essere di due tipi: strutturale ma anche operativa.

Una concezione di tipo strutturale indica un approccio al concetto in cui la nozione è trattata come un oggetto astratto, mentre mediante la concezione operativa il concetto è considerato come il risultato di un processo operativo. Vedere un'entità matematica come oggetto significa riferirsi ad essa come se fosse una cosa reale, una struttura statica esistente; cioè vuol dire riconoscere l'idea nel suo insieme e manipolarla come un tutt'uno. D'altra parte, concepire una nozione come processo significa interpretarla come un'entità potenziale che esiste nel momento in cui viene utilizzata in una sequenza di azioni. Mentre la concezione strutturale è statica, istantanea e unificante, quella operativa è dinamica, sequenziale e dettagliata. La differenza cruciale tra i due modi di pensare risiede nelle convinzioni implicite nella natura delle entità matematiche, ovvero esiste un profondo divario ontologico tra le concezioni operativa e strutturale.

É quindi possibile pervenire ad un concetto mediante due strade diverse ma strettamente collegate fra loro. Infatti, come sottolinea Sfard, le concezioni strutturale ed operativa sono due facce della stessa medaglia. Sfard condivide il pensiero di Piaget (1952) secondo cui lo sviluppo di un concetto in ambito storico sia simile allo sviluppo di esso nel processo di apprendimento individuale. In altre parole, la dinamica di apprendimento di un concetto segue lo stesso iter che ha

seguito la sua evoluzione storica. La ricercatrice aggiunge che, come in ambito individuale le concezioni operative precedono quelle strutturali, anche in ambito storico i procedimenti operativi vengono prima di quelli strutturali. Questa non necessariamente è da considerare una legge assoluta in quanto potrebbero esserci delle eccezioni: esistono concetti geometrici che sono "nati" da immagini mentali piuttosto che dai processi. La ricercatrice individua l'esistenza di tre fasi che corrispondono a tre "gradi di strutturazione", nominati sulle basi dell'analisi teorica del rapporto tra processi e oggetti. Nella prima fase, detta interiorizzazione, il soggetto prende confidenza con i processi che daranno vita ad un nuovo concetto. Questi sono operazioni effettuate su oggetti matematici di livello inferiore. In modo graduale il soggetto diventa abile nell'eseguire questo tipo di processi. Questa fase prende il nome di interiorizzazione dal momento che un processo è "interiorizzato" se può essere portato avanti mentalmente. La fase di condensazione è uno stadio in cui delle lunghe procedure vengono ristrette ad unità più maneggevoli. A questo livello l'individuo diventa sempre più capace di pensare ad un processo come un'unica entità, senza sentire la necessità di eseguire il processo. La fase di condensazione dura finché la nuova entità resta strettamente legata al processo che le ha dato origine. Soltanto quando la persona è in grado di concepire la nozione come un oggetto a sé stante ed indipendente, si può dire che il concetto è stato reificato. Tale schema trifase deve essere compreso come una gerarchia, ovvero uno stadio non può essere raggiunto prima di eseguire tutti i passaggi precedenti.

L'aspetto operativo e quello strutturale sono importanti in ugual misura nel processo di sviluppo di un concetto matematico. Teoricamente la matematica potrebbe essere affrontata anche facendo uso del solo approccio operativo, molto utilizzato a livello scolastico. Mediante la concezione puramente operativa si procede dai processi elementari verso processi di livello superiore e poi si cerca di raggiungere processi ancora più complessi. Dal punto di vista storico, si è osservato che per moltissimo tempo una grande porzione di matematica è stata affrontata proprio in questo modo. La matematica egiziana, quella babilonese e quella dell'antico oriente erano di tipo algoritmico tanto che anche le sequenze più complesse di operazioni numeriche erano presentate verbalmente come delle "ricette", non stimolando quindi i processi di condensazione e di reificazione. Il motivo per cui Sfard sostiene che un approccio strutturale sia necessario è che senza gli oggetti astratti l'attività mentale sembra essere molto più difficile. L'uomo ha bisogno di riorganizzare le informazioni immagazzinate in modo che siano facili da gestire. Ad un certo punto della formazione della conoscenza l'assenza di una concezione di tipo strutturale potrebbe impedire ulteriori sviluppi. La ricercatrice sostiene che la transizione da processi ad oggetti astratti accresce il "senso di comprensione della matematica" del soggetto, la reificazione favorisce le abilità di problem-solving e di apprendimento. La reificazione di un processo avviene simultaneamente con l'interiorizzazione del processo di livello superiore, cioè le due fasi sembrano essere l'una prerequisito per l'altra.

### 3 – Il pensiero laterale

J.P. Guilford (1950) individua, oltre al pensiero convergente-verticale che aveva caratterizzato la ricerca del passato, un pensiero divergente o laterale caratterizzato da meno vincoli ed in grado di dar vita a molteplici alternative. Il pensiero verticale è il pensiero logico e sequenziale che si fonda sulla programmazione lineare di una serie di gradini logici da affrontare uno dopo l'altro. Il pensiero laterale si basa sulla ricerca di nuovi punti di vista da esaminare che permettono di rompere gli schemi abituali e trovare un approccio semplice, efficace ed originale

Ciò che permette di percorrere nuove strade è proprio la creatività. Si elencano di seguito le quattro caratteristiche del pensiero laterale, tipico della creatività:

Fluidità: è la capacità di un soggetto di fornire il maggior numero di risposte ad una data domanda;

Flessibilità: è il numero di categorie concettuali alla quali le risposte del soggetto possono essere ricondotte;

Originalità: è la facoltà di esprimere idee nuove e realmente innovative;

Elaborazione: è la capacità del soggetto di conferire concretezza ed operatività alle proprie idee.

Più questi fattori sono presenti nel soggetto e più egli potrà sperimentare la creatività che possiede. Quest'ultima riveste un ruolo di fondamentale importanza non soltanto nell'approccio alla risoluzione di problemi matematici di varia natura ma anche nelle azioni che caratterizzano la quotidianità. Il processo creativo, come tutti i processi che hanno luogo nel cervello, parte da alcuni elementi per fornire alla fine del processo dati che risultano essere nuovi per

l'individuo e che non sono stati costruiti mediante procedure deterministiche. Nel contesto educativo, che costituisce una realtà complessa e dinamica, il pensiero creativo potrebbe essere utilizzato nella risoluzione di situazioni problematiche, proprio come suggerisce Canevaro (2013).

Edward De Bono (1994, 2000), sostiene che il pensiero creativo sia un'abilità che può essere rapidamente incrementata. Uno dei metodi utilizzati da De Bono per lo sviluppo di abilità di problem solving creativo è quello dei "Sei cappelli per pensare" (De Bono 1985). Lo psicologo, attraverso la metafora dei cappelli, insegna ad affrontare i problemi assumendo punti di vista differenti e propone quindi diverse prospettive dalle quali è possibile generare un'idea. Molteplici ricercatori hanno cercato di analizzare e spiegare nei dettagli il processo creativo suddividendolo in fasi. Wallas (1926) elabora una teoria sullo sviluppo del processo creativo che sarà poi ripresa, con qualche piccolo cambiamento, da altri studiosi. Secondo Wallas un'intuizione si sviluppa mediante quattro fasi: preparazione, incubazione, illuminazione, verifica. Dal breve excursus sui concetti di creatività, di pensiero divergente e di pensiero laterale emergono, come sostengono Zollo *et alii* (2015), interessanti spunti di riflessione su possibili declinazioni didattiche di queste teorie nella prospettiva di una didattica semplice, cioè di una modalità di insegnamento in grado di decifrare e di fronteggiare la complessità dei processi formativi e dei contesti educativi. È possibile individuare importanti analogie tra l'ambito della semplicità, termine coniato da Berthoz (2011), e quello del pensiero creativo. Infatti è stato osservato che le principali caratteristiche del pensiero creativo, la

flessibilità, l'adattamento e la deviazione, sono state individuate poi da Berthoz come proprietà e come principi della semplicità, cioè come strumenti e semplici regole che consentono di decifrare la complessità, compresa quella didattica. Infatti la flessibilità e l'adattamento al cambiamento si configurano come proprietà semplici del sistema didattico e dell'azione didattica che, secondo Berthoz, devono "essere in grado di percepire, catturare, decidere o agire in molti modi a seconda del contesto, compensare deficit, affrontare situazioni nuove". Analogamente De Bono (2000) propone non di risolvere i problemi singoli, ma di cogliere nuove interpretazioni della realtà. La ricerca di soluzioni alternative alle situazioni abituali costituisce l'espressione di una libertà di scelta nell'insieme delle soluzioni possibili in modo da evitare di perdersi nella complessità.

#### **4 - Il percorso in classe**

L'obiettivo dell'azione didattica è stato presentare il concetto di simmetria che gli alunni non conoscevano. I prerequisiti necessari per comprendere le lezioni sono stati:

- conoscere la definizione di angolo;
- saper disegnare angoli con ampiezze diverse;
- conoscere le definizioni di angolo retto, angolo piatto, angolo giro;
- saper definire il concetto di segmento (e conoscere la relativa nomenclatura);
- conoscere la definizione di vettore;

- sapere la differenza tra segmento e vettore;
- conoscere il concetto di distanza tra due punti;
- riconoscere quando due figure sono congruenti;
- saper dare la definizione di punto medio di un segmento;
- saper definire il concetto di asse di un segmento;
- conoscere il concetto di poligono;
- saper individuare le diagonali di un poligono.

Gli obiettivi didattici da raggiungere sono stati:

- conoscere e saper distinguere i concetti di simmetria centrale, simmetria assiale, simmetria radiale;
- saper dare la definizione di centro di simmetria;
- conoscere il concetto di ordine di simmetria;
- saper dare la definizione di asse di simmetria;
- saper riconoscere figure simmetriche rispetto ad una retta
- saper disegnare la figura simmetrica rispetto ad un punto, data una figura ed il punto;
- saper individuare il centro di simmetria e l'ordine di simmetria di una figura;
- saper tracciare l'asse di simmetria di una figura.

Ancor prima di proporre l'attività è stato assegnato ai ragazzi un test iniziale da svolgere a casa, in autonomia, in modo da verificare se entrambe le classi possedessero i prerequisiti necessari per affrontare le simmetrie. I prerequisiti sono stati testati mediante un questionario basato sui concetti di angolo, segmento, vettore, punto medio di un segmento, asse di un segmento, distanza tra due punti, poligono e diagonale di un poligono.

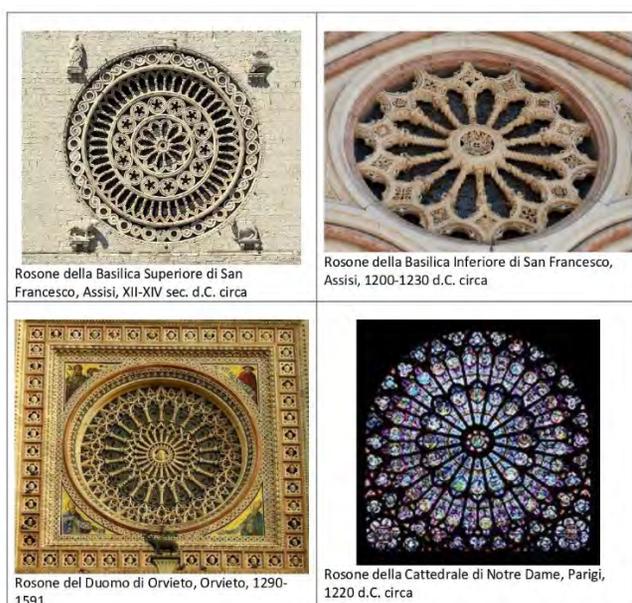
Nella lezione successiva si è pensato di ripresentare gli argomenti con una correzione collettiva del test facendo uso di una presentazione in power-point. Per la classe sperimentale l'attività è proseguita secondo un approccio di tipo operativo in base alle indicazioni degli studi di Anna Sfard e degli studi relativi al pensiero creativo, mentre per la classe di controllo lo step successivo alla correzione è stato quello di presentare le simmetrie tramite una lezione di tipo tradizionale.

Per portare avanti l'attività sperimentale ci siamo avvalsi dell'uso dello spirografo. L'idea era quella di far utilizzare agli studenti lo spirografo vero e proprio, ma a causa della DAD siamo stati costretti ad utilizzare un'applet. Lo spirografo è un dispositivo meccanico che permette di realizzare curve matematiche, dette ipotrocoidi ed epitrocoidi, mediante il "rotolamento" di una circonferenza all'interno di un'altra. L'uso di tale oggetto può essere considerato come un momento di "creazione artistica" in quanto lo spirografo è in grado di sviluppare la creatività e addirittura molte delle figure che si ottengono richiamano figure piane che di solito vengono presentate a scuola. Lo spirografo può essere utilizzato su di un foglio di carta. Si posiziona il telaio sul foglio all'interno del quale poi si mette una delle rotelle più piccole. Si posiziona la penna in uno dei fori presenti sulla rotellina e facendola roteare si ottiene la figura desiderata. Cambiando di volta in volta il foro in cui si posiziona la penna o cambiando la dimensione della rotellina si otterranno figure differenti.

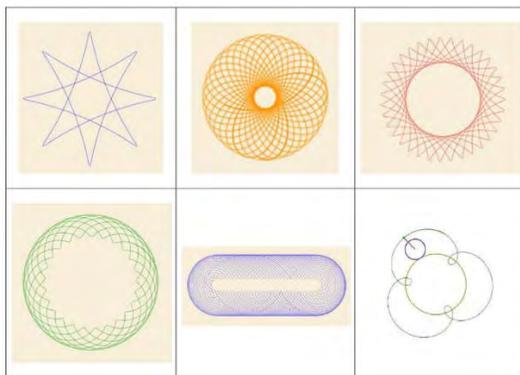
Lo scopo dell'attività presentata nella II A è stato quello di introdurre il concetto di simmetria a partire dall'uso dello spirografo e da alcune immagini di rosoni. La teoria del

pensiero divergente supporta la tesi secondo cui partire da immagini belle che colpiscono l'osservatore può essere utile per sviluppare la creatività del soggetto e favorirne l'apprendimento. L'attività è stata svolta dagli studenti a casa, in modo autonomo.

La prima parte del questionario riportava diversi rosoni realizzati tra il 1100 e il 1500. In architettura il rosone è riconosciuto come un elemento decorativo che caratterizza le chiese di epoca romanica. Agli studenti è stato chiesto se avessero mai visto elementi di questo tipo, se sapessero il loro nome e se conoscessero il motivo per cui in passato erano molto utilizzati. Per stimolare l'approccio creativo gli è stato chiesto di disegnare a mano libera uno dei rosoni presentati e al fine di incentivare la creatività gli alunni sono stati invitati a inventarne e disegnarne altri.

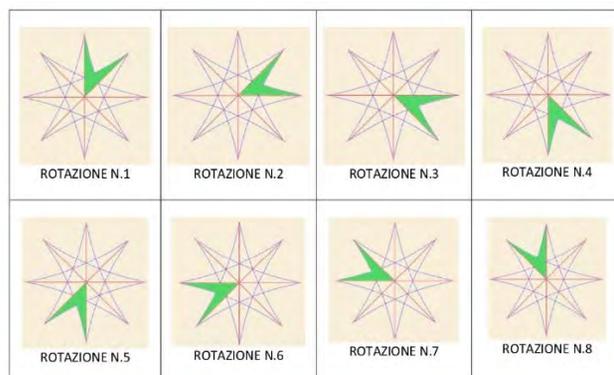


La seconda parte dell'attività prevedeva l'uso dello spirografo, strumento realizzato come giocattolo dall'ingegnere Denys Fisher negli anni '60. Sono stati posti dei problemi da risolvere in modo da capire l'utilizzo dello strumento nella sua versione come applicazione in Java. In modo particolare, si è posta l'attenzione su cosa accade cambiando il numero di denti delle ruote dentate, il foro per la penna e la posizione del foro all'interno della rotella. Nell'ultima parte dell'attività è stato chiesto agli alunni di scrivere la combinazione adatta (n. di denti delle rotelle, posizione del foro nella rotella e foro in cui è stata inserita la penna) a riprodurre alcune figure date.



Prendendo spunto dalle immagini ottenute con lo spirografo, abbiamo presentato il sistema geocentrico. Sono stati introdotti concetti storici di notevole importanza come la definizione di sistema geocentrico, di epiciclo, di deferente e sistema eliocentrico. Successivamente, sempre nella classe

sperimentale, a partire da particolari figure ottenute con l'applet si è iniziato a parlare delle simmetrie.



Siamo poi ritornati ad utilizzare le immagini iniziali dei rosoni come applicazione del concetto di simmetria radiale. Abbiamo continuato anche a lavorare su altre immagini ottenute con lo spirografo per poi arrivare ad altre figure geometriche. Sono stati introdotti poi i concetti di simmetria centrale ed assiale.

A conclusione della sperimentazione è stato somministrato un test finale, anche in questo caso uguale per entrambe le classi, al fine di valutare l'efficacia dell'azione didattica. Sono state poste delle domande aperte per verificare la capacità degli alunni di fornire definizioni e di fare confronti tra i concetti matematici spiegati, sono stati posti dei quesiti di tipo vero-falso sui concetti di simmetria centrale, simmetria assiale e simmetria radiale e si è lavorato anche con l'aspetto grafico dei concetti illustrati.

Nella classe II B è invece stata proposta una lezione frontale di tipo trasmissivo sulle simmetrie facendo uso di una

presentazione Power-point in modo da supportare gli studenti con delle immagini.

## 5- Risultati e conclusioni

La correzione del test ha evidenziato risultati migliori della classe sperimentale rispetto a quella di controllo, possiamo quindi affermare che l'attività di tipo sperimentale è andata bene. L'intera attività si è svolta in modalità a distanza e quindi i ragazzi non hanno potuto far uso dello spirografo vero e proprio ma dell'applet ed è venuta a calare la possibilità di interazione e confronto tra gli studenti, elementi chiave del progetto. L'aver usato l'applet è stato limitante dal momento che non è stato possibile ottenere tutte le figure che avremmo ottenuto con lo spirografo.

Il quesito 1 serviva per testare la capacità degli studenti di dare una definizione matematica precisa e rigorosa del concetto di simmetria centrale. In II A più di metà classe ha risposto correttamente alla domanda, mentre in II B sono stati pochi gli alunni che hanno dato una definizione corretta.

Successivamente sono stati proposti dei test vero-falso (quesiti 2, 3, 4, 5, 6, 7) relativi ai concetti di centro di simmetria, asse di simmetria e ad alcune proprietà delle simmetrie centrale e assiale. Nella classe sperimentale 26 alunni su 28 hanno dato la risposta giusta.

Nei quesiti 10, 11, 12, 13, 14 si è fatto riferimento all'aspetto grafico relativo ai concetti di simmetria assiale, centro di simmetria e asse di simmetria. Sia i ragazzi della classe sperimentale che quelli della classe di controllo hanno

incontrato delle difficoltà però nella classe II A in media sono stati ottenuti risultati migliori.

Nel quesito 17 è stato richiesto di tracciare l'asse di simmetria di alcune figure. In II A l'intera classe ha compreso pienamente il concetto, mentre in II B 8 studenti su 17 hanno risposto in modo corretto.

Relativamente agli obiettivi trasversali di interesse e partecipazione, l'attività sperimentale ha riscosso molto successo. Sin da subito sono stati attratti dall'uso dello spirografo e dal fatto che stavamo utilizzando un gioco per spiegare un nuovo argomento matematico. In questo modo siamo riusciti a coinvolgere anche quegli studenti che, in generale, risultano poco interessati alla disciplina ed inoltre tutti si sono divertiti a tal punto che nemmeno gli sembrava di stare a scuola a fare una lezione di matematica.

## Bibliografia

- Berthoz A. (2011). *La semplicità*, Torino: Codice.
- Canevaro A. (2013). *Scuola inclusiva e mondo più giusto*, Trento: Erickson.
- De Bono E. (1985). *Sei cappelli per pensare*, Milano: BUR.
- De Bono E. (1994). *Creatività e pensiero laterale. Manuale di pratica della fantasia*, Milano: BUR.
- De Bono E. (2000). *Il pensiero laterale*, Rizzoli.
- Guildford J.P. (1950). Creativity, *American Psychologist*, 5 (9), pp. 444-454.
- Piaget J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge and Kegan.
- Sfard A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, No. 1, Springer, pp. 1-36.
- Wallas G. (1926). *The Art of Thought*, Solis Press.
- Zollo I., Kourkoutas E., Sibilio M. (2015). Creatività, pensiero divergente e pensiero laterale per una didattica semplice, *Educational Reflective Practices*.

\*\*\*\*\*

**Noterelle da *La mia vita da fisico* (1983)**

Paul A. M. Dirac, *La bellezza come metodo*, Milano, Cortina Ed., 2019.

*Finita la scuola, passai alla facoltà di ingegneria dell'Università di Bristol. [...] Il corso di ingegneria ebbe su di me un forte influsso. In precedenza mi ero interessato solo alle relazioni matematiche esatte. Procedere per approssimazioni non mi piaceva, e volevo evitarlo, ma da ingegnere dovetti farmene una ragione. Un ingegnere, infatti, si occupa del mondo reale, vi fa riferimento nei suoi calcoli, e deve compiere approssimazioni di continuo. Quello bravo sa intuire quali approssimazioni andranno bene e quali daranno problemi. Ho imparato che, nel descrivere la Natura, le approssimazioni vanno tollerate, e che lavorarci può essere interessante, e a volte bello. Un'altra cosa importante che appresi durante gli studi di ingegneria riguardava la relatività. Cominciai l'università a Bristol nel 1918, e fu proprio nel novembre di quell'anno, quando la guerra finì, che a un tratto sentimmo parlare della relatività e di Einstein. Fino ad allora nessuno sapeva nulla di tutto ciò, tranne pochissimi specialisti nelle università. [...] Da ingegneri, avevamo basato tutto il nostro lavoro su Newton, per scoprire adesso che, chissà come, Newton si sbagliava. Per noi quella fu una grande sorpresa. Nessuno capiva perché si sbagliasse, ma dovemmo accettare che le leggi di Newton non erano esatte. [...] Gli studi di ingegneria mi insegnarono ad accontentarmi delle approssimazioni nello studio della Natura. Forse, tutte le leggi di Natura sono soltanto approssimate, e la nostra conoscenza della Natura dovrebbe essere ritenuta tutt'altro che definitiva. [...] Terminai il corso di ingegneria in tre anni, nel 1921, e scoprii che non riuscivo a trovare lavoro come ingegnere. All'epoca c'era una crisi economica. Rimasi all'Università di Bristol a studiare matematica, per due anni. L'argomento che mi interessò di più fu la geometria proiettiva. È qualcosa che i fisici non usano molto, ma per me fu utilissimo impadronirmi delle idee basilari di questa disciplina. [...] Nel mio lavoro di ricerca uso continuamente la geometria proiettiva, anche se non troverete riferimenti a essa nei miei articoli pubblicati. La uso per visualizzare le relazioni tra quantità tensoriali e vettoriali nello spazio euclideo e nello spazio di Minkowski.*

# *Incommensurabilità angolare in classe: un nuovo approccio didattico*

*Un laboratorio didattico di geometria*  
Bonaventura Paolillo \*

\*Liceo Francesco Severi-Salerno;  
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI: 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.061

**Sunto:** In questo lavoro si presenta un'attività laboratoriale basata sull'incommensurabilità tra due angoli. La riflessione su tale tema è spesso assente nella prassi didattica. Domande semplici come le seguenti, sono eluse o non risolte: Nel triangolo rettangolo con lati (3,4,5) gli angoli acuti, in gradi sessagesimali, sono misure razionali o irrazionali? Se  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  che cosa si può dire sull'eventuale natura razionale di  $\alpha$  in gradi sessagesimali? La soluzione è fornita dal **Teorema di Niven**. Il laboratorio didattico realizzato si è focalizzato su una prova semplice di tale teorema, di recente pubblicazione ed apparsa in [7]. L'attività è stata presentata da un gruppo di allievi del Liceo F. Severi di Salerno, alla 2° Giornata Internazionale della Matematica, (Pigreco Day 2021).

**Parole Chiave:** Valori razionali, funzioni trigonometriche, Teorema di Niven, Incommensurabilità,

**Abstract:** This work presents a laboratory activity based on the incommensurability between two angles. Many reflections on this theme not carried out in teaching practice. Simple issues such as the following are avoided or unresolved. In the right-angled triangle with sides (3,4,5), are the acute angles, in

*sexagesimal degrees, rational or irrational measures? If  $\cos a = 2/3$  what can be said about the possible rational nature of  $a$  in sexagesimal degrees? The solution is provided by Niven's Theorem. The laboratory activity was focused on a simple proof of this theorem, recently published in [7]. This activity was presented by some of students of the High School Liceo F. Severi-Salerno, at the 2nd International Mathematics Day, (Pi- Day 2021).*

**Keywords:** *Rational values,, trigonometric functions, Niven's theorem, incommensurability.*

## 1 - Introduzione

Nel seguente articolo si vuole illustrare la realizzazione di un laboratorio didattico di *Geometria* per riconoscere e individuare angoli incommensurabili tra loro. In continuità con una precedente proposta, presentata al *Convegno Nazionale del Centro Morin 2018*, si intende qui offrire una semplificazione didattica della prova del Teorema di Niven. Questo costituisce uno strumento teorico basilare per riconoscere la commensurabilità di due angoli. In [6],[7] sono pubblicati due recenti lavori sugli sviluppi legati alla dimostrazione di tale teorema. L'approccio didattico che si proporrà si è basato in particolare sul [7].

Il laboratorio didattico di Geometria è stato realizzato col gruppo classe della VASA del Liceo Francesco Severi di Salerno (a.s.2020-2021). Gli allievi coinvolti sono stati: Vincenzo Matteo Faino, Francesco Fabiano, Gaetano Longobardi, Mariagrazia Naddeo, Luca Scalese, Silvana Marchesano.

Viste le condizioni epidemiologiche del periodo, l'interazione col gruppo si è svolta in modalità on line e in

maniera extra-curricolare, anche se è auspicabile in futuro, proporre tale esperienza all'intera classe e in orario curricolare. L'attività è stata presentata poi al Piday 2021, ovvero la Seconda giornata internazionale della Matematica, organizzata dal Laboratorio Effediese del Politecnico di Milano con la realizzazione e produzione di un video su tale tematica, di 3 minuti e 14 secondi. L'evento aveva per titolo Pi greco e gli irrazionali.

## 2 - Realizzazione del Laboratorio di Geometria

In tale percorso laboratoriale si sono sviluppate le seguenti fasi. Si indicano orientativamente i tempi di realizzazione a fianco di ciascuna fase.

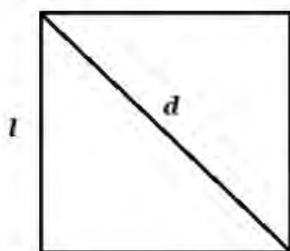
### 2.1 - Prima Fase; Incommensurabilità classica, (2-3 h)

Si è ripreso opportunamente con gli allievi il delicato tema dell'irrazionalità di alcuni numeri notevoli.

Come giustamente sottolineano le indicazioni ministeriali è auspicabile riflettere sulle cause che hanno spinto a dover introdurre i numeri irrazionali. Diventa esigente naturalmente considerare quel periodo della storia della Matematica conosciuto come Crisi degli Incommensurabili (*Scuola Pitagorica, VI-V secolo a.C.*).

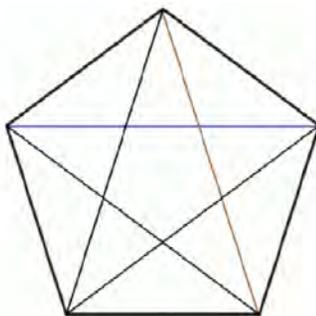
L'esperienza didattica sul campo, accerta spesso che nell'allievo, tale tema appare sfuggente e lontano da una reale consapevolezza di un suo significato profondo, sebbene si affronti l'irrazionalità in Geometria e con la teoria dei Radicali in Algebra. In particolare, si sono riprese alcune prove

sull'irrazionalità di numeri notevoli come la radice di due  $\sqrt{2}$  e il numero aureo  $\varphi$ ; non si riportano in questa stesura i vari dettagli dimostrativi ma si possono vederli in [3], e in [4].



*Quadrato*

L'irrazionalità della radice di due  $\sqrt{2}$



L'irrazionalità del numero aureo  $\varphi$

## **2.2 - Seconda Fase; il caso del contesto angolare, (30')**

La definizione di angoli incommensurabili tra loro segue in generale da quella classica per le grandezze omogenee tra loro, come segmenti, archi, aree, volumi,...

Un angolo  $\alpha$  è commensurabile con l'angolo  $\beta$  se e solo se:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

con  $m, n$  numeri naturali. Per esempio  $\alpha=30^\circ$  è commensurabile con  $\beta = 360^\circ$  poiché  $\alpha / \beta = 1/12$ .

Si nota che per un angolo  $\alpha$  rapportarsi all'angolo giro o al grado sessagesimale, non né altera la commensurabilità e questo vale pure per una qualsiasi unità di misura angolare presa come frazione dell'angolo giro. Analogamente permane l'incommensurabilità di un angolo  $\alpha$  rispetto all'angolo giro se confrontata col grado sessagesimale o con una generica frazione dell'angolo giro. Tali considerazioni, non si possono applicare, nel confronto con unità angolari come il radiante, non essendo frazione dell'angolo giro, a causa dell'irrazionalità di  $\pi$ . I prerequisiti richiesti agli studenti sono stati quelli semplici della *Goniometria di base* e del software *GeoGebra*, oltreché naturalmente dell'uso di *Riga e Compasso*.

### Questione di base

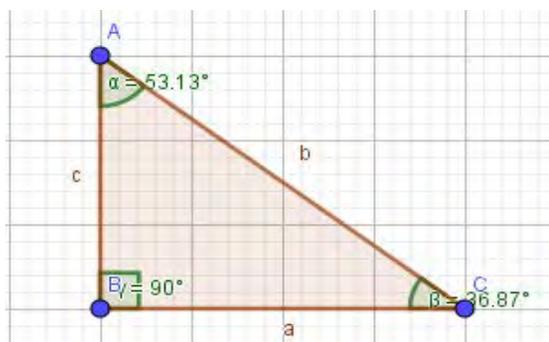
Dato un triangolo con lati a lunghezze intere, cosa si può congetturare sulla natura dei relativi angoli interni? Sono commensurabili con l'angolo giro?

Nella letteratura della didattica della Geometria, la questione non è posta all'attenzione dell'allievo, ed è in gran parte ignorata dai testi scolastici italiani e stranieri.

#### Esempio 1:

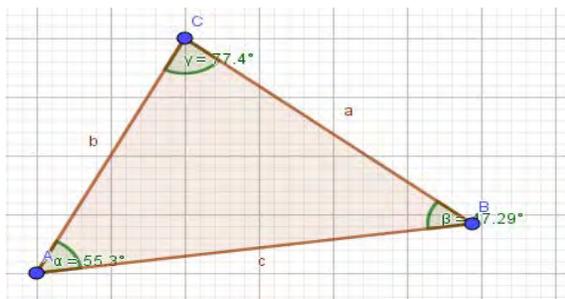
Nel classico triangolo rettangolo ( $c=3, a=4, b=5$ ) gli angoli acuti mostrati in *GeoGebra* mostrano direttamente-senza

calcolarli- i relativi valori di  $53,13^\circ$  e  $36,87^\circ$ . Ci si chiede se tali valori sono approssimati o precisi?



### Esempio 2

Qualcosa di analogo accade per l'esempio seguente



Restiamo nell'incertezza dei valori riscontrati da *GeoGebra* ( $55,30^\circ - 77,40^\circ - 47,29^\circ$ ).

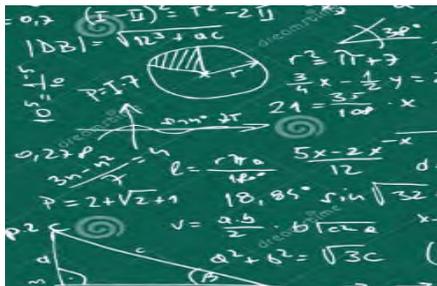
Utilizzando la *Trigonometria* e i classici teoremi dei seni e del coseno, si perviene a determinare, anche con una comune calcolatrice scientifica,  $\arccos(4/5)$  e  $\arcsin(4/5)$ . In sintesi, le risposte degli allievi non riescono a stabilire la commensurabilità o meno degli angoli interni rispetto all'angolo giro.

Per i triangoli equilateri la risposta è immediata, in quanto si riscontrano dei lati interi con gli angoli di  $60^\circ$  che di certo sono commensurabili con l'angolo giro.

Un triangolo con lati interi è chiamato anche *diofanteo*. Ne segue che la questione di base è così riformulata:

Dato un triangolo diofanteo e non equilatero, gli angoli interni sono commensurabili rispetto all'angolo giro?

L'attesa di una risposta definitiva a tale questione resta significativa nell'allievo, poiché si rende manifesta un'analisi cognitiva delle proprie conoscenze e dei relativi limiti e possibilità. La soluzione è collegata al seguente risultato.



### 2.3 - Terza Fase; la prova del Teorema di Niven (45')

#### Teorema di Niven

Se  $a = (m/n)360^\circ$  e  $\cos a$  è razionale, allora gli unici valori assunti dal coseno sono:

$$\cos \alpha = 0, \pm 1/2, \pm 1.$$

Prima di illustrare in dettaglio la dimostrazione, ci si sofferma su qualche osservazione di carattere storico-didattico. Le dimostrazioni di tale teorema sono generalmente impegnative e si basano su identità goniometriche coinvolgenti polinomi trigonometrici di Chebyshev, polinomi ciclotomici oppure la formula di De Moivre dei numeri

comlessi, ecc; in rete per esempio sono accessibili gli articoli relativi a [1], [2].

In [5] era stato avviato un percorso laboratoriale didatticamente interessante, con gruppi di allievi liceali, in cui si utilizzava un certo tipo di argomentazione per la prova del teorema. La dimostrazione che invece si riporterà, è stata recentemente pubblicata in [7] e su di essa è basata l'attività centrale del nostro laboratorio. Ha il pregio di essere semplice ed organica, e sicuramente fruibile in classe.

### Dimostrazione

Sia  $\cos \alpha \neq 0$ , si vuole provare necessariamente che:

$$\cos \alpha \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2} \right\}$$

(il caso in cui  $\cos \alpha = 0$  è ovviamente verificato).

Si scriva  $\cos \alpha = \frac{p}{q} \neq 0$ , con  $p, q$  interi coprimi,  $q > 0$

Si prendano tutti gli angoli con denominatore  $n$ , cioè

$\alpha_i = \frac{i}{n} 360^\circ$  con  $i=1, 2, 3, \dots$  numero naturale arbitrario.

Si consideri l'insieme  $T = \{\cos \alpha_i \in \mathbb{Q} - \{0\} / i \in \mathbb{N}\}$ , si hanno allora due semplici proprietà per  $T$ .

**P<sub>1</sub>)**  $T$  è finito, per la periodicità della funzione coseno, infatti si evidenzia che a partire da un certo punto, i valori del coseno si ripetono:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{n} 360^\circ, \longrightarrow \cos(\alpha_1) \\ \alpha_2 &= \frac{2}{n} 360^\circ, \longrightarrow \cos(\alpha_2) \\ \alpha_3 &= \frac{3}{n} 360^\circ, \longrightarrow \cos(\alpha_3) \\ \alpha_n &= \frac{n}{n} 360^\circ, \longrightarrow \cos(\alpha_n) \\ \alpha_{n+1} &= \frac{n+1}{n} 360^\circ, \longrightarrow \cos(\alpha_{n+1}) = \cos(\alpha_1) \end{aligned}$$

e così via.

$P_2$ )  $T$  è non vuoto, poiché per ipotesi  $\alpha_m = (m/n)360^\circ = \alpha$ .

Esiste allora  $q_k$  il massimo dei denominatori delle frazioni in  $T$ , per qualche  $\alpha_k$ ; cioè  $\cos \alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$ . Si osserva che:

$\alpha_{2k} = 2\alpha_k = \frac{2k}{n} 360^\circ$  e applicando la formula di duplicazione del coseno si ha:  $\cos(\alpha_{2k}) = \frac{2p_k^2 - q_k^2}{q_k^2}$ .

Poiché si sta operando con valori del coseno che sono frazioni irriducibili, si distingueranno due casi.

Se  $q_k$  è dispari la frazione di sopra è irriducibile e non nulla e quindi è in  $T$ . Poiché  $q_k \geq q_k^2$ , segue che  $q_k = 1$ .

Se  $q_k = 2s$  è pari, con  $s$  numero naturale, si potrà scrivere:

$\cos(\alpha_{2k}) = \frac{2p_k^2 - q_k^2}{q_k^2} = \frac{p_k^2 - 2s^2}{2s^2}$  con quest'ultima che è irriducibile e non nulla, quindi è in  $T$ . Dovendo risultare:

$q_k \geq 2s^2 = \frac{q_k^2}{2}$ , segue  $q_k = 1, 2$ . Pertanto si ha anche  $q = 1, 2$ , essendo  $q_k$  il valore massimo, quindi

$$\cos \alpha \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2} \right\}. \quad C.V.D.$$

Un'altra prova significativa del teorema di Niven è trattata in [6] ed utilizza immediatamente la funzione tangente.

## 2.4 - Quarta Fase; Conseguenze del Teorema di Niven, (45'-60')

Il teorema di Niven consente di esplorare anche i valori razionali delle altre funzioni goniometriche, vale cioè la seguente:

Proposizione. Se  $\alpha = (m/n)360^\circ$  gli unici valori razionali delle funzioni goniometriche di  $\alpha$  sono i seguenti:  
 $\sin \alpha = 0, \pm 1/2, \pm 1$ ;  $\tan \alpha = 0, +1, -1$ ;  
 $\cotan \alpha = 0, +1, -1$ ;  $\sec \alpha = \pm 1; \pm 2$ ;  $\operatorname{cosec} \alpha = \pm 1; \pm 2$ .

### Dimostrazione

Si proveranno le prime due uguaglianze, essendo le altre subito deducibili. Infatti, se  $\alpha$  è frazione di  $360^\circ$  anche  $(90^\circ - \alpha)$  lo è. Inoltre, si assuma per ipotesi che  $\text{sen } \alpha$  sia razionale.

Dall'ovvia uguaglianza sugli archi complementari:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

si può utilizzare il teorema di Niven e ottenere la tesi per la funzione seno.

La seconda uguaglianza segue dalla nota identità:

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

e questa conduce a:

$$2\alpha = 0^\circ, 60^\circ, 90, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ,$$

cioè:

$$\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$$

Essendo la tangente razionale si ricava la tesi dai soli angoli

$$\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 180^\circ.$$

Si evidenziano ancora nei seguenti corollari, alcune proprietà angolari immediate ed utili in chiave didattica.

### Corollario 1.

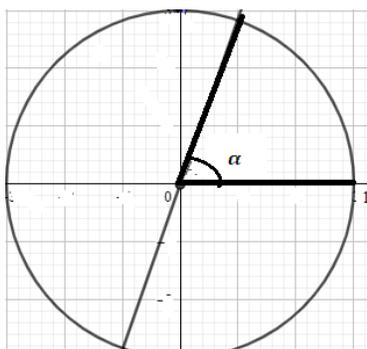
I valori degli angoli  $\alpha$  razionali in  $[0, 360^\circ]$  con  $\cos \alpha$  razionale, sono:

$$\alpha = 0^\circ, 60^\circ, 90, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ.$$

### Corollario 2.

Se  $\cos \alpha = p/q$  è non nullo ed è diverso, in valore assoluto, da 1 e  $1/2$ , allora  $\alpha$  è incommensurabile con l'angolo giro.

Si mostra in figura, che per  $\cos \alpha = 1/3$ ,  $\alpha$  è irrazionale.



Si mostra allora, che la costruzione di angoli incommensurabili con l'angolo giro, non solo è possibile ma risulta anche immediata e di tali angoli se ne possono costruire in numero infinito (si pensi ad esempio alla successione  $\cos \alpha_n = 1/n$ , con  $n$  numero naturale  $>2$ ).

### 3 - Angoli commensurabili ma non costruibili con Riga & Compasso; Ciclotomia

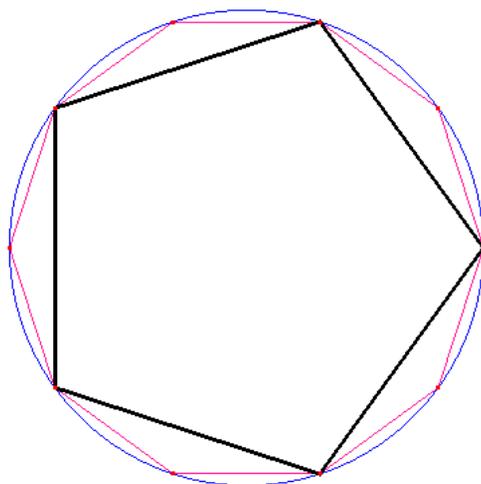
Dopo le ultime considerazioni svolte, diventa allora naturale continuare il percorso laboratoriale, introducendo almeno un collegamento sintetico con una parte fondamentale della *Geometria*, che è la *Ciclotomia*. È noto che tramite il *Teorema di Talete*, si può dividere un segmento dato in  $n$  parti congruenti, utilizzando solamente *Riga e Compasso*. Sin dall'antichità, analogamente, si poneva la questione anche per la circonferenza. Precisamente, la Ciclotomia risponde alla seguente domanda:

È possibile dividere una circonferenza data in  $n$  parti uguali, utilizzando Riga e Compasso, ovvero costruire, assegnandone il lato, un poligono regolare di  $n$  lati?

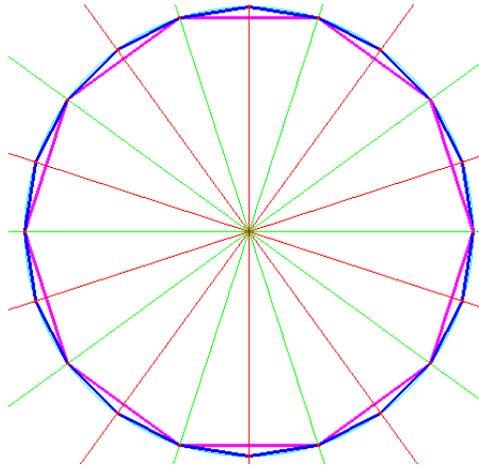
L'esposizione didattica qui svolta è ad un livello essenziale nel suo sviluppo storico ma si sono delineati i nuclei principali. Ad un livello piu' astratto, il collegamento con l'Algebra e i polinomi ciclotomici risulterebbe interessante, anche se evidentemente si può evitare di svolgere.

Concretamente erano note le costruzioni di poligoni regolari come *quadrati*, *triangoli*, *pentagoni*, *esagoni*. Facilmente, si verifica che se un poligono di  $n$  lati è costruibile, lo è anche il poligono con  $2n$  lati. Tuttavia per  $n = 7, 9, 11, \dots$  e così via per i successivi, cosa si poteva dire a riguardo?

Si evidenziano nelle seguenti figure, alcuni poligoni regolari costruibili con *Riga e Compasso*:



**Decagono e Pentagono**



**Poligono di 20 lati**

Vale il seguente fondamentale teorema

Proposizione - *Poligoni costruibili con riga e compasso*  
(Gauss 1796, Wantzel 1836)

Un poligono regolare di  $n$  lati può essere costruito con riga e compasso se e solo se  $n$  è un numero del tipo:

$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_r$$

dove  $k$  è un intero  $\geq 0$  e i  $p_m$  sono *numeri primi di Fermat*, distinti tra loro. Essi sono del tipo:

$$p_m = 2^{2^m} + 1$$

Si ammette anche il solo caso di  $n=2^k$ .

Non si conoscono molti primi di Fermat, se non in 5 casi, per  $m = 0,1,2,3,4$  e la ricerca in take ambito è tutt'ora aperta. Quindi sono costruibili sorprendentemente alcuni poligoni regolari *insospettabili* con 17 o 257 lati, ma non i poligoni regolari con 7 o 9 lati, ecc. Questo significa che per esempio gli angoli  $360^\circ/7$  e  $360^\circ/9$  sono commensurabili con l'angolo giro ma non costruibili con *Riga e Compasso*. Da un punto di vista

storico e didattico il problema ciclotomico è significativo poiché se ne evidenzia la soluzione ad un problema bimillenario e il superamento delle difficoltà tecniche collegate ad esso. Sebbene la dimostrazione del risultato precedente coinvolga strumenti di Algebra superiore, e non è utilizzabile in classe, nondimeno si ritiene di tralasciarne l'enunciato. Infatti, il suo alto contenuto può apportare all'allievo sicuro giovamento, in termini di interesse, motivazione e competenze. Sarebbe poi auspicabile, se non necessario, un collegamento interdisciplinare con il *Disegno Tecnico* e un'intesa sull'effettiva costruibilità di tali poligoni regolari. Diversi manuali, a riguardo, propongono dei metodi universali di costruzione dei poligoni regolari, ma non sono corretti, almeno teoricamente, nel senso che non possono violare il teorema precedente. Essi offrono comunque un grado accettabile di approssimazione, nella maggior parte dei casi.

#### 4 - Conclusioni

L'incommensurabilità angolare può costituire un significativo momento di riflessione didattica che si affianca agli approcci classici di Dedekind, Cantor, Cauchy. Questi, da soli, infatti, non appaiono immediati nell'essere acquisiti nell'allievo, a causa anche di un certo grado di astrazione. Permane allora l'obiettivo di avvicinarsi alla comprensione del concetto di numero reale, la cui importanza è indiscutibile, anche attraverso contesti geometrici più ricchi e significativi.

Il gruppo di allievi ha risposto in maniera efficace a tale attività rispondendo ed integrando in maniera naturale le

sollecitazioni richieste. Naturalmente si auspica di ripetere l'esperienza laboratoriale e di testarne ancora i risultati conseguiti.

## Bibliografia

Olmsted J. M. H. (1945). Rational values of trigonometric functions. *The American Mathematical Monthly*, 52(9), 507-508.

Jahnel J. When  $\cos(\sin)$  of a rational angle equal to a rational number? ArXiv-1006.2938.

Livio M, (2005), *La sezione aurea.*, Rizzoli

Paolillo B. (2013). L'irrazionalità della  $\sqrt{2}$ : aspetti didattici. *Atti Seminario Nazionale 2013, IMSI 2013*

Paolillo B. (2019). L'incommensurabilità angolare in classe: un percorso didattico. *L'insegnamento Della Matematica E Delle Scienze Integrate*, 42 (B), 461-474.

Paolillo B., Vincenzi G. (2020). An elementary proof of Niven's theorem via the tangent function; *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*

On the Rational Values of Trigonometric Functions of Angles that are Rational in Degrees; *Math. Mag.* **94**, No. 2, 132-134, *Mathematical Association of America*.

Paolillo B., Rizzo P., Vincenzi G. (Jul,2021). Commensurable diagonals in Regular  $n$ -gons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

\*\*\*\*\*



\*\*\*\*\*

# *La geometria in Dante Alighieri*

Carlo Toffalori\*

\* Università di Camerino; carlo.toffalori@unicam.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.062

**Sunto:** *Proponiamo e commentiamo alcuni spunti di Geometria nell'opera di Dante, in particolare nella Commedia.*

**Parole Chiave:** *Geometria; Punto; Cerchio.*

**Abstract:** *We illustrate the presence of Geometry in Dante's writings, in particular in the Commedia.*

**Keywords:** *Geometry; Point; Circle.*

## **1. La Geometria all'epoca di Dante**

Cominciamo dal parere autorevole di un matematico illustre come Francesco Severi (Severi, 1953): *“Ai tempi di Dante non restavano [...] nella cultura dei dotti e nelle scuole che poche elementari tradizioni euclidee [...] Ma tutto ciò che allora di Euclide si conosceva, l'Alighieri sapeva”.*

Severi celebra quindi le conoscenze scientifiche di Dante, ma non il livello della Geometria di quell'epoca. Tuttavia il ruolo della Geometria nella cultura ai tempi di Dante è rilevante. Lo troviamo illustrato nell'affresco di Andrea di Bonaiuto (... -1377) Trionfo di San Tommaso, Cappellone degli Spagnoli, S. Maria Novella, Firenze.

In esso vengono raffigurate a sinistra le 7 arti sacre, a destra le 7 arti liberali (Quadrivio e Trivio), ognuna accompagnata da un suo autorevole rappresentante. In particolare abbiamo nell'ordine:

- Quadrivio (Aritmetica e Pitagora, Geometria ed Euclide, Astrologia-Astronomia e Tolomeo, Musica e Tubalcain)
- Trivio (Dialettica e Pietro Ispano, Retorica e Cicerone, Grammatica e Prisciano)

Risalta così, come si diceva, la funzione fondamentale di Geometria e Aritmetica: in verità entrambe sono viste da Dante come "ancelle" dell'Astronomia/Astrologia, cui va la sua preferenza; ma ambedue sono ritenute nobilissime perché sommamente nobile è la padrona - al di sopra della quale sta poi la Filosofia.

La nota che segue introduce e commenta la presenza della Geometria nell'opera dantesca, in particolare nella *Commedia*. I concetti che vi sono proposti si trovano ampliati e approfonditi in (Maroscia et al., 2021) e (Maroscia et al., 202?).

Per i riferimenti danteschi facciamo costante riferimento a (Alighieri, 1965).

## 2 – Pitagora, Euclide e Archimede

I grandi nomi della geometria dell'antichità sono: Pitagora, Euclide e Archimede. Ci domandiamo come e dove compaiono nell'opera di Dante.

Pitagora non è mai esplicitamente menzionato nella *Commedia*, a meno che non vogliamo cogliere un accenno alle sue teorie, e specificamente alla musica delle sfere, nei versi 82-94 del primo canto del *Paradiso*:

*La novità del suono e 'l grande lume  
di lor cagion m'accesero un disio  
mai non sentito di cotanto acume.*

Tuttavia Pitagora è ripetutamente menzionato ed elogiato nel *Convivio*, III, XI, 3-6, anche se soprattutto come filosofo:

*nel tempo quasi che Numa Pompilio, secondo re dei  
Romani, vivea un filosofo nobilissimo, che si chiamò  
Pittagora". E ancora: "Questo Pittagora, domandato se egli  
si riputava sapiente, negò a sé questo vocabulo e disse sé  
essere non sapiente, ma amatore di sapienza. E quindi  
nacque poi, ciascuno studioso in sapienza che fosse 'amatore  
di sapienza' chiamato, cioè 'filosofo' ...*

Se non il personaggio storico di Pitagora, certamente il suo pensiero e il valore del numero hanno larga eco altrove nell'opera dantesca.

Euclide invece si incontra nella *Commedia* fra gli «spiriti magni» del Limbo, *Inferno*, IV, 142: «Euclide geomètra e Tolomeo». Altrove negli scritti di Dante a suo riguardo si registrano rare citazioni, ma si avverte una chiara ammirazione. Talora si trova pure una qualche risonanza dei

suoi teoremi: come primo assaggio traiamo dal *De Monarchia*, I, XII, 12, l'affermazione «un triangolo ha tre angoli, che sono uguali a due retti». Ma questo argomento, cioè la citazione di teoremi euclidei nell'opera dantesca, verrà ripreso e approfondito nel seguito.

Archimede, infine, era poco conosciuto nel Medio Evo: la sua riscoperta avvenne soprattutto in epoca rinascimentale. Ne *La misura del cerchio* però (Archimede, 1974), egli introduce quello che oggi chiamiamo pi greco, e anzi ne fornisce un'eccellente approssimazione razionale  $22/7 = 3 + 1/7 = 3,142857142857\dots$ . Dante ne sembra a conoscenza, stando alla lettura dell'*Inferno*, XXIX, 9, e XX, 86-87. Parlando delle Malebolge (9 valli circolari concentriche), prima della penultima si dice

*che miglia ventidue la valle volge*

Poi dell'ultima e più piccola si aggiunge:

*con tutto ch'ella volge undici miglia,  
e men d'un mezzo di traverso non ci ha.*

Questi riferimenti ai numeri 22 e 11 non sembrano casuali. In particolare l'ultima circonferenza misura 11 miglia, mentre il diametro si può stimare in 3,5, stando anche al parere espresso da Galileo (Galilei, 2010). Dunque il rapporto sarebbe proprio 22/7. Visto che ci siamo, dedichiamo qualche parola a Brisone di Eraclea, lui pure matematico. Visse nel V secolo a. C.; gli si attribuiscono alcuni tentativi di quadrare il cerchio, ritenuti abbastanza goffi e criticati dallo stesso Aristotele. Dante sottoscrive questa opinione negativa. Cita Brisone

(*Paradiso*, XIII, 123) tra «chi pesca per lo vero e non ha l'arte» e prosegue nei versi 124-126,

*E di ciò sono al mondo aperte prove  
Parmenide, Melisso, e Brisso, e molti,  
li quali andavano e non sapean dove.*

## 2 - Teoremi e misteri

Passiamo dai “geometri” alla geometria. Consideriamo soprattutto la celebre pagina del *Convivio*, II, XIII, in cui Dante stabilisce una sorta di corrispondenza biunivoca tra le arti liberali e «li sette cieli» attorno alla Terra. Nella sua visione astronomica, che è quella di Tolomeo rivista secondo il pensiero cristiano, «li sette cieli» sono poi racchiusi da: il Cielo Stellato, che rappresenta la Fisica e la Metafisica, il Primo Mobile e la Scienza morale, l'Empireo e la Teologia.

In questa concezione dantesca la Geometria corrisponde a Giove. Leggiamo infatti:

*Lo cielo di Giove si può comparare alla Geometria per due propietadi: l'una è che [...] Giove è stella di temperata complessione in mezzo de la freddura di Saturno e de lo calore di Marte. L'altra si è che in tutte le stelle bianca si mostra, quasi argentata. E queste cose sono ne la scienza de la Geometria.*

Segue la spiegazione:

*La Geometria si muove [...] come tra 'l punto e lo cerchio [...]; ché, sì come dice Euclide, lo punto è principio di quella, e, secondo che dice, lo cerchio è perfettissima figura in quella, che conviene però avere ragione di fine. Sì che 'l*

*punto e lo cerchio sì come tra principio e fine si muove la Geometria [...]. lo punto per la sua indivisibilitade è immensurabile, e lo cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto. E ancora: la Geometria è bianchissima, in quanto è senza macula d'errore e certissima per sé e per la sua ancella, che si chiama Perspettiva.*

Torneremo tra breve su questo paragone. Osserviamo intanto che teoremi di geometria euclidea sono esplicitamente ricordati perfino nel *Paradiso*. Nel canto XVII, ai versi 13-18, Dante, incontrando l'antenato Cacciaguida, gli chiede presagi sul suo futuro di esule.

*O cara piota mia, che sì t'insusi,  
che come veggion le terrene menti  
non capere in triangol due ottusi,  
così vedi le cose contingenti  
anzi che sieno in sé, mirando il punto  
a cui tutti li tempi son presenti*

Come dire: allo stesso modo in cui sulla terra si conosce che un triangolo non può contenere due angoli ottusi (come si deduce dalla proposizione 17 del primo libro degli *Elementi* (Euclide, 1988), secondo la quale la somma di due angoli di un triangolo non può eguagliare due angoli retti), così Cacciaguida può intravedere il tempo che verrà, mirando Dio, che è «il punto a cui tutti li tempi son presenti».

Sempre nel *Paradiso*, ma nel canto XIII, versi 94-102, viene menzionata la proposizione 31 del libro III degli *Elementi*, in base alla quale ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo. Stavolta a parlare è San Tommaso d'Aquino, che celebra il re Salomone, perché

salendo al trono chiese anzitutto a Dio il dono della giustizia, e afferma:

*Non ho parlato sì, che tu non posse  
ben veder ch'el fu re, che chiese senno  
acciò che re sufficiente fosse,  
non per saper il numero in che ènno  
li motor di qua su, o se necesse  
con contingente mai necesse fenno;  
non, si est dare primum motum esse,  
o se del mezzo cerchio far si puote  
triangol sì ch'un retto non avesse.*

A prescindere dai teoremi euclidei, è notevole notare un aspetto che nella *Commedia* e in particolare nel *Paradiso* sembra distinguere e privilegiare la matematica, e specificamente la Geometria, rispetto alle altre scienze. Infatti nell'ultima cantica del Poema la conoscenza umana, raffigurata da Virgilio, lascia il passo alla teologia e alla fede, rappresentate da Beatrice, dunque la scienza in qualche modo si congeda (XXX, 122-123):

*dove Dio senza mezzo governa  
la legge natural nulla rileva.*

Eppure ci accorgiamo che nello stesso *Paradiso* la Geometria persiste e perfino sovrabbonda, comparando non solo con i suoi teoremi, compresi quelli appena citati, ma soprattutto con i suoi misteri. Ci riferiamo a punto e cerchio, dei quali Dante ha sottolineato nel *Convivio* la sfuggevolezza, il primo perché adimensionale e immensurabile, il secondo perché impossibile a quadrarsi, come del resto impossibile a rettificarsi è la circonferenza. Ebbene proprio queste loro caratteristiche consentono a Dante di impiegarli come termini di paragone in

ardite similitudini sugli enigmi della fede. Il punto diventa l'immagine stessa di Dio, che, come abbiamo appena visto, è

*il punto  
a cui tutti li tempi son presenti  
(Paradiso, XVII, 17-18).*

Ma il passo più famoso in proposito è la prima descrizione che Dante propone di Dio, quando gli appare riflesso negli occhi di Beatrice nel canto XXVIII del Paradiso (versi 16-18):

*un punto vidi che raggiava luce  
acuto sì, che 'l'viso ch'elli affoca  
chiuder conviensi per lo forte acume.*

Quanto al cerchio e al problema della sua quadratura, dunque di determinare il lato di un quadrato equivalente, Dante si affida loro nell'ultimo canto del poema per descrivere la duplice natura umana e divina di Cristo (versi 133-138). Ecco la famosissima similitudine.

*Qual è 'l geomètra che tutto s'affige  
per misurar lo cerchio, e non ritrova,  
pensando, quel principio ond'elli indige,  
tal era io a quella vista nova;  
veder volea come si convenne  
l'imgo al cerchio e come vi s'indova*

Del resto il motivo del cerchio ricorre altrove e ripetutamente nella cantica. Ci limitiamo a ricordare i versi 28-30 del canto XIV, a riguardo della Trinità:

*Quell'uno e due e tre che sempre vive*

*e regna sempre in tre e 'n due e 'n uno,  
non circunscritto, e tutto circunscribe*

Citiamo di passaggio anche gli spunti e le anticipazioni della geometria non euclidea che matematici e pensatori illustri del Novecento, quali Pavel Florenskij, Andreas Speiser, Hermann Weyl, hanno inteso cogliere nella visione dantesca dell'universo e nel suo itinerario dell'aldilà, collegandoli anche alla teoria einsteiniana della relatività. In particolare Dio come punto, contrapposto a Lucifero che sta imprigionato al vertice della cavità infernale e al centro della Terra, è allo stesso tempo il cerchio massimo che tutto racchiude, e il polo di energia e luce.

### 3 - Conclusione

Etimologicamente "geometria" significa "misura della terra", e in questo senso si può intendere come una scienza umile e immanente. Ma Dante ritiene che la sua perfezione e i suoi misteri servano al contrario ad allontanare dalla terra e avvicinare a Dio e alla sua trascendenza. Il Poeta segue in questo le concezioni del suo tempo. Si pensi alla geometria mirabile della facciata di S. Miniato al Monte a Firenze e dell'interno della stessa chiesa, in cui motivi geometrici circondano il mosaico absidale col Cristo "gravido". Tra l'altro, Dante ricorda espressamente quella chiesa in una similitudine dal *Purgatorio*, XII, 100-102:

*Come a man destra per salire al monte  
dove sorge la chiesa che soggioga  
la ben guidata sopra Rubaconte...*

## Bibliografia

Alighieri D. (1965). *Tutte le opere*, Edizione del Centenario, Milano: Mursia.

Archimede (1974), *Opere*, a cura di A. Frajese, Torino: UTET.

Euclide (1988). *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino: UTET.

Galilei G. (2010). *Due lezioni all'accademia fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell'Inferno di Dante*, a cura di Riccardo Pratesi, Livorno: Sillabe.

Maroscia P., Toffalori C. (2021). Sulle tracce della matematica nella *Commedia*, *Rivista di Studi Italiani/Journal of Italian Studies* XXXI (3), pp. 32.

Maroscia P., Toffalori C. (202?). I matematici e la *Commedia*, *Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, in corso di stampa.

Severi F. (1953). Dante e la scienza dei suoi e dei nostri tempi, *Il Trecento*, Firenze: Sansoni - Libera cattedra di storia della civiltà fiorentina, pp. 71-92.

# Dalle congetture alle dimostrazioni in geometria

*Un percorso didattico con l'uso di un software di matematica (GeoGebra)*

Luigi Tomasi\*

\*Università di Ferrara; luigi.tomasi@unife.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v3n3-4.063

**Sunto:** *L'articolo riassume quanto è stato svolto in una relazione al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?" il 14-15 luglio 2021, dedicata alle congetture, all'argomentazione e alla dimostrazione, con l'uso di un software di geometria, per la Scuola secondaria. Inizialmente si è analizzato il vantaggio che il software permette nella costruzione di una figura geometrica, che da statica diventa dinamica. Successivamente sono stati illustrati alcuni problemi che si possono proporre in classe "in forma aperta", per attività didattiche riguardanti l'avvio alla dimostrazione, con l'uso di un software di geometria.*

**Parole Chiave:** *congetture, software di geometria dinamica; problemi in forma aperta; dimostrazioni.*

**Abstract:** *The article summarizes what we proposed in a report at the conference "What knowledge of geometry in today's school?" July 14-15, 2021, dedicated to conjectures, argumentation and demonstration, with the use of geometry software, for secondary school. Initially, we analyzed the advantage that the software allows in the construction of a geometric figure, which from static becomes dynamic. Subsequently, some problems were illustrated that can be*

*proposed in class "in open form", for didactic activities concerning the start of the demonstration, with the use of a geometry software.*

**Keywords:** *conjectures, dynamic geometry software; open problems; demonstrations.*

## 1 - Introduzione

In questo articolo si espone quanto è stato presentato in una relazione al Convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?” 14-15 luglio 2021, dedicata alla proposta di un percorso didattico di geometria all’inizio della scuola secondaria di II grado, con l’uso di un software di geometria (per esempio, GeoGebra).

Inizialmente sono state proposte alcune considerazioni sull’importanza della geometria nella formazione matematica degli studenti nella scuola secondaria. Nel seguito sono stati richiamati gli attuali curricoli di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l’uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi per un possibile percorso di geometria, che gradualmente porti dalle congetture alle dimostrazioni.

## 2 - La complessità dell’insegnamento della geometria

Tutti sanno che la geometria svolge un ruolo molto importante nell’apprendimento della matematica perché ha aspetti sia teorici che visuali e uno stretto legame con il mondo

fisico che ci circonda. La geometria è stata descritta come «prima rappresentazione del mondo fisico» (Federigo Enriques, 1906). Nello stesso tempo occorre però sottolineare che il suo insegnamento è particolarmente complesso. Tutti gli insegnanti di matematica, a qualunque livello scolare, sono consapevoli dell'importanza della geometria nel curriculum di matematica, ma di fatto ritengono difficile questo insegnamento e in diversi indirizzi di scuola secondaria la presentano in una forma ridotta oppure, date le difficoltà, la trascurano. Le ragioni di questa situazione in cui si presenta l'insegnamento della geometria sintetica sono state individuate da Vinicio Villani in un articolo del 1994, in cui scrive:

*L'insegnamento della geometria è un qualcosa di estremamente articolato e complesso. Sui principali concetti occorre ritornare a più riprese nell'intero arco dell'istruzione pre-universitaria (e oltre) con successivi aggiustamenti, a livelli di approfondimento diversi e da punti di vista diversi. Ciò rischia di determinare, e di fatto determina, un senso di insicurezza e di disagio psicologico in molti insegnanti, consapevoli del fatto che il loro insegnamento della geometria rappresenta solo un tassello in un contesto più vasto. (Vinicio Villani, 1994).*

Questo articolo si occupa del passaggio tra la geometria intuitiva e sperimentale a quella ipotetico-deduttiva, che di solito viene proposta nei primi anni della scuola secondaria di II grado. In questo delicato snodo si ritiene che l'uso di un software di geometria dinamica, come previsto anche dalle *Indicazioni nazionali/Linee guida* (2010) per la Scuola secondaria, possa dare un notevole contributo e suscitare un maggiore interesse da parte degli allievi.

La geometria è sempre stata tradizionalmente l'ambito privilegiato per introdurre il metodo dimostrativo nella scuola secondaria di II grado. Questa impostazione ha caratterizzato fortemente la prassi didattica nell'insegnamento del metodo dimostrativo, non solo in Italia. Si pensa, tuttavia, che questo percorso verso la dimostrazione dovrebbe essere più graduale e far uso degli strumenti tecnologici che attualmente si hanno a disposizione, come sono i software di geometria dinamica.

In questo articolo si propone quindi un approccio più graduale alla dimostrazione.

In realtà, negli ultimi decenni, nella scuola secondaria di II grado si sono andate rafforzando prassi didattiche che hanno visto un progressivo abbandono dell'insegnamento della geometria sintetica, soprattutto della dimostrazione, data la sua difficoltà, soprattutto se la si presenta agli inizi del percorso di studi di scuola superiore.

Negli ultimi decenni nella scuola c'è stata una diffusione delle tecnologie e tra queste quella dei software di geometria dinamica. Questi software hanno determinato un qualche recupero, almeno in una parte degli insegnanti, dell'interesse per l'insegnamento della geometria, proprio nel senso euclideo delle costruzioni con riga e compasso. I software di geometria dinamica consentono infatti di vedere dinamicamente le figure, riportando in primo piano la geometria sintetica e i metodi di risoluzione dei problemi geometrici. Fin dal loro apparire questi software hanno suscitato un notevole interesse per le loro caratteristiche di dinamicità e come strumenti a supporto della risoluzione di problemi, in particolare in ambito geometrico. Con l'uso di questi strumenti, per la geometria, la prima cosa che cambia è

il concetto di figura, che da statica diventa dinamica, e si può quindi manipolare, trasformare, trascinare.

L'uso di questi software nell'analisi di un problema permette di fare delle osservazioni e delle congetture, che possono facilitarne la risoluzione e sviluppare nello studente la capacità di intuizione e la necessità di un'argomentazione e di una spiegazione delle proprietà osservate.

Il software tuttavia, come tutti gli strumenti, da solo non basta. Sono fondamentali le modalità d'uso da parte degli studenti e il progetto didattico dell'insegnante. Nel seguito si porrà quindi l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso del software e in generale delle nuove tecnologie, accanto all'uso degli strumenti tradizionali. In particolare si proporranno alcuni problemi geometrici di costruzione e altri proposti "in forma aperta", per favorire il passaggio dalle congetture alle dimostrazioni, così come è suggerito dalle *Indicazioni nazionali* per i licei del 2010:

*La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

### **3 - I software di geometria dinamica: costruzioni ed esplorazioni, verso la dimostrazione**

Dal punto di vista didattico il software dovrebbe essere integrato in un percorso didattico e utilizzato in classe al momento opportuno, con diverse modalità:

-quando c'è bisogno di fare una figura con elevata precisione (sia da parte degli insegnanti che degli studenti);

-per esplorare dinamicamente e per visualizzare "oggetti" geometrici che, se modificati opportunamente, mettono in luce delle proprietà invarianti; si sfrutta, per esempio, il trascinarsi di alcuni elementi iniziali di una data costruzione geometrica;

-per scoprire delle proprietà e produrre delle congetture da validare o refutare; per questo il software viene utilizzato dagli studenti, con la guida dell'insegnante.

Per potere utilizzare il software dal punto di vista didattico l'insegnante deve conoscerlo in modo approfondito e avere presente qual è la sua «logica». Occorre quindi preparare un progetto didattico in cui si prevede di usare al momento opportuno il software. In tale progetto il software a volte deve essere usato dall'insegnante e altre volte dagli allievi, suddivisi eventualmente in piccoli gruppi di lavoro.

Una figura eseguita con un software di geometria dinamica è da considerarsi corretta se ogni altra figura ottenibile per trascinarsi da questa può essere considerata corretta. Tale criterio di validazione non dipende tanto dall'aspetto dell'immagine prodotta, quanto dalla procedura che l'ha prodotta. Un esempio iniziale da proporre e da discutere è, per esempio, quello della costruzione, con l'uso del software, di un quadrato a partire dal lato. Questo primo esempio può servire per comprendere che la costruzione di una figura, anche con il software, deve essere svolta utilizzando le proprietà geometriche della figura che vogliamo costruire.

Riportiamo (figura 1) di seguito la costruzione di un quadrato, dato il lato, in cui con il software si simula la costruzione con riga e compasso di un quadrato, contenuta nella Proposizione 46 del Libro I degli *Elementi* di Euclide. I punti indicati in colore blu (A e B) dal software sono i punti iniziali della costruzione ed hanno due gradi di libertà, ossia possono essere trascinati; invece i punti indicati dal software in colore nero (C e D) non hanno gradi di libertà perché dipendono dalla costruzione dei punti iniziali.

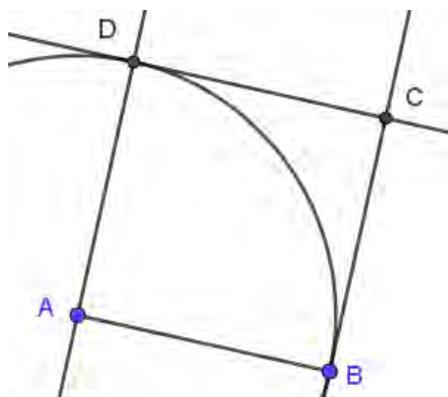


Figura 1

Cosa accade quando si integra nella pratica didattica il software di geometria? Il contesto nel quale la classe agisce cambia, perché accanto a strumenti più tradizionali, quali la riga, il compasso, il goniometro..., gli allievi e l'insegnante hanno a disposizione nuovi strumenti, offerti dal software. Gli strumenti sono molteplici; elenchiamo solo quelli salienti:

-le primitive del software che consentono di costruire le figure geometriche; per esempio la creazione di un punto, di una retta, di una circonferenza, ma anche i comandi che

permettono la costruzione dell'asse di un segmento, della bisettrice (nel software è una retta) di un angolo, di una retta parallela a una data (il V postulato è uno strumento del software...), ecc.

-le macro-costruzioni che permettono di creare nuovi strumenti a partire da alcune costruzioni fondamentali e ne permettono l'uso ogni volta che sia necessario;

-la funzione di trascinamento che serve per muovere e trasformare le figure costruite con il software, mantenendo però le proprietà geometriche utilizzate nelle costruzioni e definite dai comandi usati.

*Il software di geometria dinamica offre strumenti e modi d'uso che rimandano al significato teorico di costruzione e in particolare al significato di assioma e teorema, in breve al significato di sistema teorico. È in questo senso che comandi e modi d'uso possono contribuire alla costruzione di tali significati da parte degli allievi. È importante sottolineare che quando si parla di un sistema teorico, due sono gli aspetti rilevanti tra loro interconnessi: da un lato l'idea di dimostrazione, dall'altro l'idea di teoria. (M. Alessandra Mariotti, 2005).*

Con un software di geometria dinamica un compito di costruzione può considerarsi risolto se l'immagine che si ottiene sullo schermo «supera» il test del trascinamento. La possibilità di trascinamento degli elementi base di una figura costituisce senz'altro l'elemento innovativo che caratterizza gli ambienti di geometria dinamica e prevede:

-l'uso del trascinamento per verificare se la costruzione effettuata è corretta, ovvero corrisponde allo scopo prefissato;

-l'uso del trascinamento al fine di produrre una congettura: formulare un enunciato, che risponda alla formulazione di un problema proposto in forma aperta.

Nella proposta di curriculum UMI, contenuta in *Matematica* 2003, troviamo un'impostazione innovativa per quanto riguarda l'insegnamento della matematica e l'uso dei software nell'insegnamento della matematica. Alcune idee salienti di questa proposta di curriculum sono le seguenti:

-si consiglia l'uso di software (di geometria dinamica, CAS-computer algebra system, fogli elettronici, calcolatrici grafiche, ecc.)

-si propone la dimostrazione non solo in ambito geometrico;

-si richiama l'attenzione sull'argomentazione e sulle congetture, sulla discussione matematica, prima di arrivare alla dimostrazione (nella Scuola secondaria di II grado);

-si pone l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso dei software e in generale delle nuove tecnologie, accanto a quelle tradizionali;

-si dà infine importanza allo studio delle trasformazioni geometriche, in contesti motivanti e con problemi scelti opportunamente, che ne mettano in luce l'importanza.

Come sappiamo c'è una certa difficoltà degli studenti di scuola secondaria ad affrontare e produrre dimostrazioni. Di solito gli allievi leggono e ripetono delle dimostrazioni, quelle richieste dagli insegnanti. Ma produrre una dimostrazione è qualcosa di diverso. Questo richiede un itinerario didattico specifico dell'insegnante. Talvolta gli studenti pensano, soprattutto all'inizio della scuola secondaria di II grado, che in geometria si vogliano dimostrare delle proprietà «evidenti»,

che «si vedono dalla figura». Nell'insegnamento di questi temi occorre quindi fare delle scelte opportune, non potendosi usare in modo sistematico, già all'inizio della scuola secondaria di II grado, il metodo assiomatico-deduttivo. Prima di arrivare a svolgere le prime dimostrazioni, si potrebbero proporre delle attività sulle congetture e sull'argomentazione con l'uso di un software di geometria. Per quanto riguarda la dimostrazione conviene scegliere alcuni nuclei fondamentali e un numero ridotto di teoremi da dimostrare, mettendo in chiaro qual è il quadro teorico in cui si inseriscono (assiomi, enti primitivi, definizioni, teoremi,...).

Riportiamo una citazione dalle *Indicazioni nazionali/Linee guida* (del 2010) per i licei, per il I biennio:

*Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano...; l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.*

*La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

È quindi opportuno partire da alcuni problemi proposti «in forma aperta», con l'uso di un software di geometria dinamica. Nel seguito proponiamo sinteticamente alcune di queste attività di risoluzione di problemi. Un problema proposto in forma aperta deve avere le seguenti caratteristiche:

-ha un enunciato abbastanza breve;

- non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi e tantomeno la soluzione o la tesi;
- non deve indurre automaticamente a uno specifico metodo di risoluzione;
- non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste.

I problemi si presentano come situazioni in cui lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come "il risultato", ma come le conseguenze delle premesse che ha usato. In questa attività gli studenti possono essere suddivisi in gruppi di lavoro e devono utilizzare sia il loro quaderno che un software di geometria dinamica.

In queste attività, si propone di:

- a) esplorare un problema presentato in forma aperta;
- b) individuare degli invarianti, tramite le funzionalità permesse dal software: il trascinamento, la misura e la verifica di proprietà;
- c) individuare relazioni geometriche tra figure, mettendo in evidenza i legami funzionali (quali oggetti della figura variano in dipendenza di quali altri) e variazionali (come variano);
- d) formulare nuove congetture, tramite l'esplorazione della configurazione geometrica;
- e) validare le congetture formulate, tramite prove su casi particolari, o trascinamento, o costruzioni, o altro;
- f) dimostrare le congetture formulate.

Il software di geometria può quindi essere usato a diversi livelli, in attività di costruzione di figure, di esplorazione e anche come avvio alla dimostrazione. Una delle difficoltà che può insorgere è quella di introdurre l'uso del software senza integrarlo con l'attività didattica e slegato dal "problem solving". Occorre quindi scegliere questioni non troppo facili ma neppure troppo complesse, adatte alla classe in quella precisa fase in cui vengono proposte, da affrontare con l'uso del software.

#### **4 - Alcuni esempi di problemi di costruzione e altri quesiti, presentati in forma aperta, con l'uso di un software di geometria**

Proponiamo alcune attività che si possono svolgere nel Primo biennio della Scuola secondaria di II grado con l'uso di un software di geometria dinamica (oltre che con gli strumenti tradizionali).

1. Alcune costruzioni iniziali, da eseguire senza il software e in un secondo momento con il software sono le seguenti:

- costruire un triangolo equilatero, dato il lato;
- costruire un quadrato, dato il lato;
- costruire l'asse di un segmento;
- costruire la bisettrice di un angolo;
- costruire i punti notevoli di un triangolo (baricentro, circocentro, ortocentro, incentro).

2. Problema di costruibilità. Dato un segmento AB e un segmento di lunghezza  $2p$ , dire qual è la condizione a cui

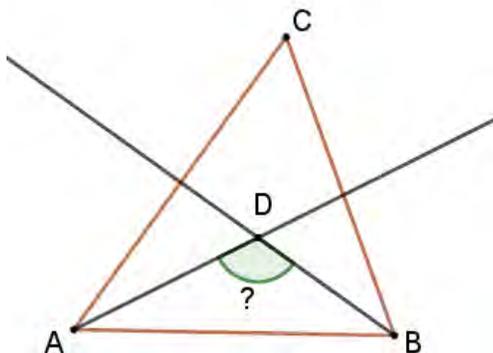
deve soddisfare  $AB$  perché sia possibile costruire un triangolo che abbia come lato  $AB$  e perimetro  $2p$ .

3. Problemi di costruibilità da presentare in forma aperta, con l'uso del software.

Due altezze di un triangolo possono essere perpendicolari? E due assi? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà.

4. Problemi di costruibilità da presentare in forma aperta, con l'uso del software.

Dato un triangolo, costruire le bisettrici di due angoli interni. Con l'uso del software, trascinando opportunamente i vertici del triangolo, puoi rendere queste bisettrici tra esse perpendicolari? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiegare perché è impossibile ottenere questa configurazione (figura 2).



**Figura 2**

Commento. Dopo vari tentativi, si scopre che il problema è impossibile. Chiediamo il perché agli studenti e poi di dimostrare perché è impossibile.

5. Due mediane di un triangolo possono essere perpendicolari? In caso affermativo, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiegare perché è impossibile (figura 3).

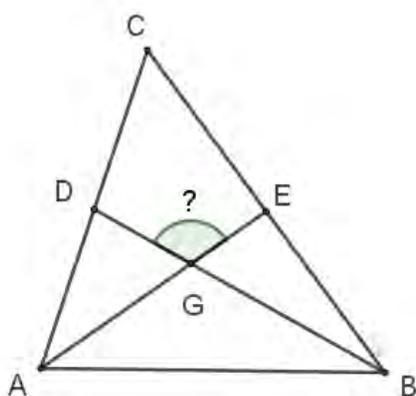


Figura 3

6. Problema di costruzione. Date tre rette  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , passanti per un punto  $I$ , costruire un triangolo che abbia queste rette come bisettrici degli angoli interni. Il problema è sempre possibile? (figura 4).

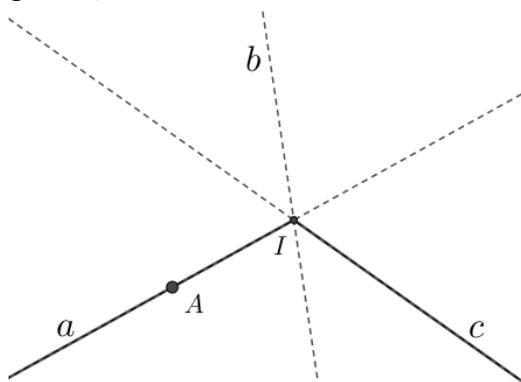


Figura 4

### 7. Verso la dimostrazione con il software

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD e AD.

- Quali proprietà ha il quadrilatero LMNP?
- Quali configurazioni particolari può assumere il quadrilatero LMNP?
- Quali ipotesi occorre fare su ABCD perché LMNP assuma queste configurazioni?
- Produrre congetture e, successivamente, dimostrarle.

8. Sia dato un triangolo ABC. Quali ipotesi si devono aggiungere su ABC affinché questo triangolo si possa scomporre in due triangoli isosceli? Usare il software e trascinare i vertici per esaminare le possibili configurazioni che realizzano la richiesta.

### 9. Scoperta di proprietà, congetture

-Sia dato un triangolo equilatero. Esaminare la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolare condotti da un punto P interno (esterno) a ciascuno dei lati (figura 5). Questo problema è più difficile dei precedenti e potrà quindi essere riproposto non solo all'inizio della Scuola secondaria di II grado.

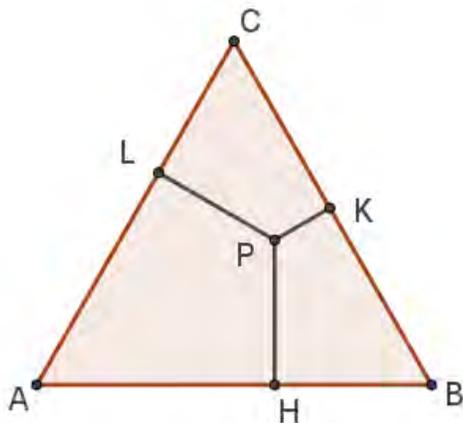


Figura 5

10. Scoperta di proprietà, di congetture, da utilizzare verso la dimostrazione con il software

Sia dato un quadrilatero ABCD. Considerare le bisettrici degli angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M in senso orario. Far variare A, B, C, D, esaminando i casi particolari. Come cambia la figura K, L, M, N?

Scrivere tutte le osservazioni fatte e le congetture. Dimostrare (o confutare) le congetture fatte.

11. Un problema di costruzione: la bisettrice... nel foglio (dai problemi di "Flatlandia").

Costruire con riga e compasso la bisettrice di un angolo (formato prolungando due segmenti disegnati nel foglio). La costruzione però si deve fare senza uscire dal foglio (vedi figura 5).

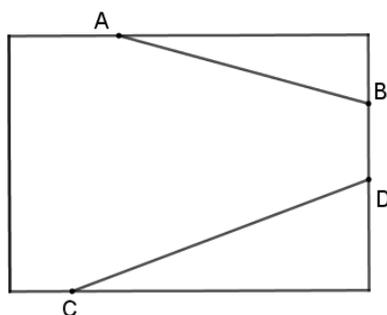


Figura 6

## 5 - Conclusioni

La dimostrazione è una attività molto importante da proporre nella scuola secondaria di II grado, ma ovviamente non è necessario affrontare troppe dimostrazioni: non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti. È opportuno osservare che dal punto di vista didattico e dell'apprendimento, le attività di congettura e di argomentazione vengono prima di quelle dimostrative. Non si può arrivare alle dimostrazioni se prima non è chiaro il significato che ha "il dimostrare" e che cosa esso presuppone (una teoria, degli assiomi, degli enti primitivi, delle regole che si possono utilizzare per dedurre delle affermazioni). Serve dunque un approccio graduale, che dia spazio all'uso del software in attività di scoperta di proprietà, di congettura e di dimostrazione. In questo articolo sono state proposte alcune attività di geometria che possono essere utilizzate, con l'uso del software, per un approccio graduale al metodo dimostrativo.

## Bibliografia

AA.VV. (2003). *Matematica 2003* (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario). Lucca: Liceo Scientifico Vallisneri.

AA.VV. (2001). *Matematica ed aspetti didattici. Seminario di formazione per docenti*. Lugo di Romagna, Liceo Scientifico Ricci-Curbastro.

Enriques F. (1906), *Problemi della scienza*. Bologna, Zanichelli.

Mariotti M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora Editrice.

Tomasi L. (2018). Percorsi di geometria per la Scuola secondaria di II grado (con l'uso del software), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 41AB, N.5, pp. 669-680.

Tomasi L. (2019). Argomentare, congetturare, dimostrare: cosa cambia con l'uso di un software?, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 42AB, N.5, pp. 660-671.

Villani V. (1994). L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 17AB, N.5, pp. 439-457.

Villani V. (2004). *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*. Bologna: Pitagora Editrice.

I "problemi di Flatlandia" (rubrica mensile di problemi di geometria sintetica in rete, per studenti della scuola secondaria):

<http://dm.unife.it/flatlandia/>

## *Profili biografici degli autori*

**Loredana Biacino** - [loredana.biacino@libero.it](mailto:loredana.biacino@libero.it)

Nata a Trieste, si è laureata in matematica con lode presso l'Università degli studi di Napoli il 3 dicembre del 1969. Subito dopo è diventata assistente incaricata e poi, doporegolare concorso, di ruolo presso la cattedra di Analisi Matematica III. Dal 1985 fino al 2014, anno in cui sono andata in pensione sono stata professore associato di Analisi Matematica presso la Federico II. In parallelo con l'attività svolta come professore associato ho tenuto, dal 1996 ogni anno, fino alla conclusione del ciclo, un breve corso nell'ambito del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica; poi dal 2001 al 2007 uno o due corsi annuali di 30 ore l'uno di Storia della Matematica, per la SICSI; infine da diversi anni partecipo al Progetto Lauree Scientifiche, con un Laboratorio su Infiniti e infinitesimi.

**Andrea Bertoni** - [aerdnab87@gmail.com](mailto:aerdnab87@gmail.com)

Giovane docente di matematica e scienze della scuola secondaria di I grado presso l'Istituto Comprensivo di Rivanazzano Terme (PV). Dopo la Laurea in Geofisica, conseguita nel 2012 ed alcune esperienze in ambito ingegneristico relative alla ricostruzione, post terremoto, di alcuni quartieri de L'Aquila ed un'esperienza all'estero presso l'Istituto Oceanografico di Lisbona, dal 2014 mi sono avvicinato al mondo della scuola. Ha conseguito l'abilitazione all'insegnamento presso l'Università degli Studi di Pavia, e nell'anno scolastico 2017/2018 è entrato di ruolo. Dal 2015 frequenta i corsi di aggiornamento Mathesis organizzati dalla sezione di Pavia e dal 2017 è membro del Direttivo della suddetta sezione. In ambito scolastico coltiva l'interesse, sia per la creazione e attuazione di curricula verticali ed inclusivi relativi all'apprendimento della

matematica nel I Ciclo d'Istruzione, sia per le STEAM al fine di incrementare una didattica il più interdisciplinare possibile e incoraggiare gli studenti ad assumere un atteggiamento sistematico e sperimentale, oltre che a ricorrere all'immaginazione per attuare nuovi collegamenti tra le idee.

**Veronica Bitonti** - [veronica.bitonti03@gmail.com](mailto:veronica.bitonti03@gmail.com)

studia Matematica presso l'Università di Cambridge. Negli anni del liceo ha seguito vari corsi di Matematica presso prestigiose università italiane e straniere.

**Ferdinando Casolaro** - [ferdinando.casolaro@gmail.com](mailto:ferdinando.casolaro@gmail.com)

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni Novanta al 2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed al Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli. Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti". Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

**Giuseppe Conti** - [giuseppe.conti@unifi.it](mailto:giuseppe.conti@unifi.it)

È Professore di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Architettura e di Matematica per il Design del Corso di Laurea in Disegno industriale dell'Università di Firenze. È autore di numerose pubblicazioni scientifiche di Analisi Funzionale su riviste internazionali e di libri di testo per l'università e di testi di matematica per la scuola superiore e per l'università. Da tempo si interessa di applicazioni della matematica all'arte, alla musica, alla natura ed all'architettura. Su questi argomenti ha scritto diversi libri ed articoli su riviste specializzate; inoltre ha tenuto numerose conferenze presso università italiane e straniere ed associazioni culturali. Nel 2002 ha vinto il premio internazionale Pirelliaward (Premio Pirelli) per la divulgazione scientifica tramite internet.

**Mariarosaria Cuomo** - [mari.cuomo@yahoo.it](mailto:mari.cuomo@yahoo.it)

È laureata in Matematica presso l'Università Napoli "Federico II". Abilitata all'insegnamento per le classi di concorso A026 (Matematica), A027 (Matematica e Fisica) e A047 (Matematica Applicata) presso la Scuola Interuniversitaria Campana di Specializzazione all'Insegnamento (SISS), è immessa in ruolo nel 2011 per la classe di concorso A027, è attualmente docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Pascal" di Pompei. Ha partecipato a vari convegni di didattica, in particolare nel 2002 al Convegno, tenutosi ad Agerola, "La matematica all'esame di Stato ed il suo ruolo nell'insegnamento", dove ha pubblicato agli atti una presentazione storica della cittadina.

**Marco D'Errico** - [marco.derrico1@outlik.it](mailto:marco.derrico1@outlik.it)

Laureato in scienze Geologiche con 110 e lode. Dottore di ricerca in Scienze della Terra. Attualmente insegnante a t. i. di Matematica e Scienze per superamento di Concorso pubblico. Precedentemente: Professore a contratto, assegnista di ricerca, borsista e contrattista presso Istituti di ricerca Nazionali ed Università italiane su linee di

ricerca in ambito geologico e divulgazione scientifica, divulgatore scientifico presso società private e WWF ed animatore scientifico presso “Festival della scienza” di Genova. È socio e membro del Consiglio direttivo dell’associazione Mathesis Napoli “Aldo Morelli” di cui attualmente ricopre la carica di Segretario.

**Ferdinando Di Martino** - [fdimarti@unina.it](mailto:fdimarti@unina.it)

È ricercatore di Informatica presso il Dipartimento di Architettura dell’Università di Napoli Federico II. È membro del collegio dei docenti del dottorato nazionale in Intelligenza Artificiale, settore ambiente/agrifood ed è membro dell’European Society for Fuzzy Logic And Technology (EUSFLAT) Research Working Group on soft computing in image processing. È autore di oltre cento lavori di ricerca pubblicati su riviste internazionali. Il suo campo prevalente di ricerca riguarda la messa a punto di modelli e approcci di fuzzy-based di intelligenza computazionale in data, spatial data e image analysis. E’ associate editor delle riviste internazionali Soft Computing, Advances in Computational Intelligence, Advances in Fuzzy Systems e Journal of Cybernetics and Cyber-Physical Systems. È stato guest editor in Special Issue di numerose riviste internazionali di intelligenza computazionale.

**Franco Eugeni** - [eugenif3@gmail.com](mailto:eugenif3@gmail.com)

È nato a Teramo nel 1941. Laureato in Matematica a Bologna nel 1963, percorre tutti i gradini della carriera universitaria fino alla pensione. Vince il Concorso da Ordinario del 1984 sulla Cattedra di Analisi Matematica e Geometria Analitica. Ha insegnato in varie Università quali Modena, L’Aquila, Chieti, Roma, Milano ed infine Teramo. Ha trascorso periodi di ricerca presso le Università di Mainz, Giessen, Dehli e Iasi. E’ stato per molti anni Direttore di Dipartimento e Coordinatore di Dottorati di ricerca e di Master, membro del Senato Accademico, Delegato Rettorale (prorettore) anche presso la Conferenza dei Rettori. Dal 2001 è transitato sulla

Cattedra di Logica Filosofia della Scienza. In pensione dal 2009, è stato Rettore dell'Istituto Universitario linguistico "A.Macagno" di Cuneo e Pinerolo e ha tenuto insegnamenti presso l'ISIA di Pescara e Scienze Sociali di Chieti, fino al 2015. E' stato Presidente Nazionale della Mathesis, nel 2001-2004, l'associazione dei Matematici Italiani fondata nel 1894, nella quale era nel direttivo Nazionale fin dal 1979, è professore onorario nell'Università di Iasi (Romania), è stato Presidente dell'Accademia Piceno-Aprutina dei Velati, fondata nel 1598, dal 1998 fino al 2015. E' Commendatore della Repubblica Italiana. E' autore di circa 250 pubblicazioni, in Riviste italiane ed estere, e di una quindicina di libri. Ha fondato le riviste telematiche Ratio Matematica, Eiris, Skills for Economic Management, Science and Philosophy, ed è membro dei comitati scientifici di varie riviste internazionali. Un elenco parziale delle sue pubblicazioni è reperibile nel sito ResearchGate.

**Antonio Fontana** - [antonio.fontana@unicam.it](mailto:antonio.fontana@unicam.it)

È professore di Matematica e Fisica presso il liceo scientifico "G. Mercalli" di Napoli, attualmente è dottorando in "Computer Science and Mathematics" presso l'Università di Camerino. È autore di pubblicazioni su riviste di settore riguardanti la didattica della matematica.

**Giangiacomo Gerla** - [ggerla@unisa.it](mailto:ggerla@unisa.it)

Dopo la laurea ha insegnato nell'Istituto Enrico Fermi di Napoli. Successivamente è stato Ricercatore presso l'Università Federico II dove ha svolto attività didattica e di ricerca nel gruppo di lavoro del Prof. Aldo Morelli. Attualmente Professore Emerito di Matematiche Complementari presso l'Università di Salerno, ha fondato presso tale Università, e diretto per molti anni, una sezione locale della Mathesis. I suoi interessi scientifici sono indirizzati verso la logica fuzzy, la geometria point-free e la ricerca in didattica della

matematica con particolare attenzione agli aspetti formali e non formali dei processi deduttivi.

**Francesco Laudano** - [frlaud.fl@gmail.com](mailto:frlaud.fl@gmail.com)

Laureato in Matematica con lode nel 1990, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado e nel 2018 ha conseguito il Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica all'Università di Salerno. Da sempre sensibile alla didattica, ha tenuto relazioni in vari Convegni e Seminari nelle Scuole a supporto di studenti e docenti per la formazione. Ha pubblicato vari articoli su riviste nazionali e internazionali. È socio da diversi anni dell'associazione Mathesis, di cui è stato Presidente della sezione di Campobasso fino al 2017, anno di chiusura della sezione.

**Raffaele Mascella** - [rmascella@unite.it](mailto:rmascella@unite.it)

È Professore Associato di Logica e Filosofia della Scienza presso la Facoltà di Scienze della Comunicazione, Delegato del Rettore alla Didattica e alle ICT. Nel 2005 ha conseguito il dottorato in Epistemologia e Didattica della Matematica e dal 2005 è docente presso la Facoltà di Scienze della Comunicazione. È stato Coordinatore di Master e Corsi di Formazione, membro del Collegio del Dottorato in Epistemologia dell'Informatica e Mutamenti Sociali (Università degli Studi di Teramo). I suoi interessi di ricerca sono nella filosofia della computazione e dei sistemi complessi, nella filosofia della matematica, nella teoria dei codici, nella logica fuzzy e nelle sue applicazioni nella computazione intelligente. Su questi temi è autore di numerose pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali.

**Luca Nicotra (Roma)** - [luca.nicotra1949@gmail.com](mailto:luca.nicotra1949@gmail.com)

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei

Giornalisti albo pubblicitari dal 2008. Autore di oltre 400 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.* (coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. - Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

**Nicla Palladino** - [nicla.palladino@unipg.it](mailto:nicla.palladino@unipg.it)

È professore presso l'Università degli Studi di Perugia per il settore MAT/04. Dottore di ricerca in Matematica applicata e Informatica, ha rivolto i suoi studi principalmente a strumenti e modelli di superfici matematiche costruiti nell'800, all'esame delle

corrispondenze epistolari tra matematici a cavallo del periodo risorgimentale e a varie questioni ad esse connesse, ad aspetti storici legati a problemi di Geometria e relative applicazioni al campo della didattica.

**Raffaella Paoletti** - [raffaella.paoletti@unifi.it](mailto:raffaella.paoletti@unifi.it)

Si è laureata in Matematica con votazione 110/110 e lode presso l'Università di Firenze discutendo una tesi di geometria algebrica. Successivamente ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica discutendo una tesi di geometria algebrica. Attualmente è Ricercatrice confermata presso l'Università di Firenze, dove è docente di Matematica per il Design del Corso di Laurea in Disegno Industriale. Inoltre è docente di Geometria per Ingegneria Meccanica/Gestionale dell'Università di Firenze.

**Bonaventura Paolillo** - [bonaventura.paolillo@gmail.com](mailto:bonaventura.paolillo@gmail.com)

Si è laureato in Matematica e Scienze dell'informazione a Salerno. Ha conseguito poi il Phd in Matematica sotto la supervisione del prof. Gerla, occupandosi di Geometria senza Punti. È stato Tutor/Formatore TFA nel 2015 per la classe di concorso A047. Insegna Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno. Si occupa di temi legati alla divulgazione della matematica, come la Probabilità e le sue applicazioni, Irrazionalità di numeri notevoli, la Geometria,... Ha pubblicato una quindicina di articoli di tali temi su riviste nazionali e internazionali.

**Salvatore Sessa** - [sessa@unina.it](mailto:sessa@unina.it)

È Professore ordinario di Fondamenti di Informatica presso il dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Dal 2004 è Direttore del corso di Perfezionamento post-laurea Sistemi Informativi Territoriali per la gestione di sistemi urbani e sistemi complessi. È autore di numerosi lavori su note riviste

scientifiche internazionali riguardanti l'utilizzo di sistemi GIS in problemi di "Soft Computing" e "Fuzzy Sets and Systems".

**Carlo Toffalori** - [carlo.toffalori@unicam.it](mailto:carlo.toffalori@unicam.it)

Professore ordinario di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 fa parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. I suoi interessi di ricerca riguardano teoria dei modelli e algebra. Si occupa anche di divulgazione della matematica. Ha pubblicato vari libri, tra cui *Matematica, miracoli e paradossi* (con Stefano Leonesi, per Bruno Mondadori, 2007), *Il matematico in giallo* (Guanda, 2008), *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura* (Guanda, 2011) e più di recente *Algoritmi* (il Mulino, 2015) e *Logica a processo. Da Aristotele a Perry Mason* (Franco Angeli, 2016, ancora con Stefano Leonesi). Nel 2017 ha curato per Grandangolo *Scienza Cantor. La teoria degli insiemi*.

**Luigi Tomasi** - [luigi.tomasi@unife.it](mailto:luigi.tomasi@unife.it)

Laureato in Matematica. Ha superato i concorsi ordinari a cattedre ed è abilitato per l'insegnamento (nella scuola secondaria di I e II grado) di Matematica e Fisica, Matematica, Scienze matematiche applicate e Matematica e Scienze. Ha insegnato Matematica e Fisica nei Licei scientifici di Adria e di Rovigo, nei quali ha anche svolto svariati incarichi di supporto all'organizzazione scolastica. Dall'anno accademico 2000/2001 al 2008/2009: è stato supervisore di tirocinio nella S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università di Ferrara. Attualmente è professore a contratto presso l'Università di Ferrara e presso l'Università di Padova nel corso di laurea in matematica. Si è sempre interessato ai problemi della scuola, della didattica della matematica e all'uso delle tecnologie nel suo insegnamento. Su questi temi ha scritto diversi articoli, contributi a

libri e tenuto molti corsi di formazione e aggiornamento per docenti oltre che comunicazioni/relazioni a convegni, seminari e congressi. Ha fatto parte della Commissione nominata dall'UMI che ha elaborato la proposta di curriculum contenuta in Matematica 2003 e Matematica 2004, "La matematica per il cittadino". Fa parte del Consiglio di Presidenza del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" e della Redazione di "Progetto Alice, rivista di matematica e didattica". Collabora con l'INVALSI, come esperto per le prove di Matematica per la Scuola secondaria di II grado.

**Alberto Trotta** - [albertotrotta@virgilio.it](mailto:albertotrotta@virgilio.it)

È docente di ruolo nella Scuola Secondaria di secondo grado in provincia di Salerno. Ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica, presieduto dal prof. Stefano Marchiafava, al Dipartimento di Matematica dell'Università <Sapienza> di Roma. E' stato il fondatore e Presidente storico della sezione Mathesis di Anzio-Nettuno nel periodo 2002-2014 ed è attualmente socio della sezione Mathesis di Napoli. È autore di 20 pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali con particolare riferimento alle questioni di Fisica moderna.