Periodico di Matematica (IV) Vol.IV (1) marzo 2022, pp. 197-206

Dal Metodo di Esaustione alla Teoria degli indivisibili e i principi di Cavalieri e Torricelli

Franco Eugeni*

* Già professore di Filosofia della Scienza e Presidente AFSU
eugenif3@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.073

Sunto: *Questa breve nota è una lezione da me tenuta molti anni fa, in un Insegnamento di Matematiche Complementari.*

Parole Chiave: *Metodo di Esaustione, Teoria degli indivisibili, Principi di Cavalieri, Integrali connessi.*

Abstract: *This short note is a lecture I gave many years ago, in Didactis of the Mathematics.*

Keywords: *Method of exhaustion, Theory of indivisibles, Principles of Cavalieri, Connected integral calculus.*

1 – La lezione sul Principio di Cavalieri

Un esame del mondo greco c'induce a ritenere che in un periodo non ben definito i matematici greci si avvalsero di metodi non rigorosi specie per risolvere questioni non solubili in termini finiti. Da Eudosso di Cnido (408-355 a.C.), a Democrito di Abdera (460-370 a.C.) e Ippocrate di Chio (460-377 a.C.), passando da Euclide, le cui date di nascita e morte sono incerte ma operante nel 300 a.C., si arriva ad Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), per la ricerca empirica e non rigorosa dell'area del cerchio e dei volumi della piramide, del cono, della sfera e dell'area della superficie sferica, infine del volume di un segmento di paraboloide rotondo.

Successivamente, venne a maturarsi un maggior spirito critico, anche in seguito alla comprensione di paradossi nati per un troppo disinvolto uso dell'infinito, e si giunse a una buona sistemazione di un metodo per trattare l'infinitesimale di allora, metodo conosciuto come "metodo di esaustione".[1]

Esso fu introdotto, o forse solo valorizzato, da Eudosso di Cnido, come testimonia Archimede. Il metodo di esaustione, anche riletto con le attuali conoscenze, è perfettamente rigoroso ed era usato a posteriori per la giustificazione di risultati acquisiti per altra via, anche non rigorosa. Secondo altri il metodo di esaustione sarebbe da far risalire al più giovane Ippocrate di Chio, in quanto tale matematico utilizza la proporzionalità tra le aree di due cerchi e i quadrati dei rispettivi diametri.

[1] Il nome venne dato al metodo nel 1647 dal gesuita, matematico Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) di origine fiamminga, noto soprattutto per i suoi studi sulla quadratura del cerchio.

Interessante il fatto che tale proporzionalità, scoperta per via non rigorosa, è dimostrata nel XII libro degli *Elementi* di Euclide, in modo rigoroso appunto con il metodo di esaustione.

Il metodo di esaustione diede molti risultati, ma poiché faceva uso di un ragionamento del tipo delle classi contigue di figure geometriche, mal si prestava ai fini euristici poiché, in realtà, andava ad operare con risultati già noti, sia pure per vie non rigorose. Pertanto i matematici dei successivi secoli XVI e XVII cercarono altre vie, anche riscoprendo tecniche già presenti nell'opera *Metodo* di Archimede. Questi stabiliva in alcuni casi l'equivalenza di figure piane o anche solide confrontando i loro "elementi infinitesimi" in alcune condizioni che, se anche erano particolari, si adattavano a molti casi.

È interessante l'apporto di Luca Valerio e di Galileo Galilei, specie per la determinazione del volume della sfera come appare in Nicotra (2022).

Per tornare alla *Teoria degli indivisibili* della quale Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ebbero ad intuire la grande potenzialità, a suo tempo sembra che tale teoria fosse utilizzata anche dagli antichi ma come un grande segreto. Tale aspetto emerge chiaramente in un passo del Torricelli, tradotto dal latino, così come citato dal Carruccio (1958, p. 175):

> *Veramente non oserei affermare che questa geometria degli indivisibili sia proprio una nuova scoperta. Crederei piuttosto che gli antichi geometri si siano valsi di questo metodo nella scoperta dei teoremi più difficili, quantunque nelle dimostrazioni si siano serviti di altra via, forse sia per*

occultare il segreto della loro arte, sia per non offrire il fianco ai detrattori. Comunque sia, è certo che questa geometria costituisce un notevole risparmio di lavoro sulle dimostrazioni, ciò che non può farsi seguendo la dottrina degli antichi. Questa geometria degli indivisibili, infatti tra i matematici attuali appare veramente come la Via Regia, che primo tra tutti aperse e spianò per tutti, Cavalieri, supremo artefice di mirabili invenzioni.

La teoria degli indivisibili dello stesso Cavalieri, che cita Keplero tra i precursori, muove dalla considerazione che ogni superficie piana si può pensare sezionata da infinite corde intercettate da un sistema di rette parallele, ciascuna corda pensata come un rettangolo infinitesimo.

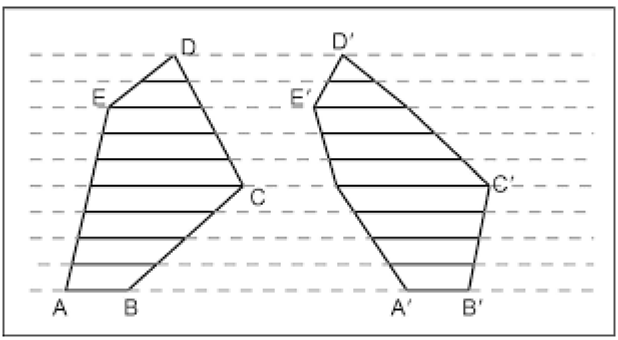

Fig. 1

Analogamente ogni solido si può pensare sezionato da infinite superficie intercettate da un sistema di piani paralleli, ciascuna superficie–sezione pensata come un cilindretto di altezza infinitesima.

La teoria, che in ogni caso prelude a sviluppi dell'Analisi Infinitesimale nelle costruzioni iniziali, molto deve allo stesso Cavalieri e al Torricelli.

Il Principio I di Cavalieri, ovvero la versione piana del principio, asserisce che :

Se ogni retta di un fascio di rette parallele interseca due figure piane in due sezioni (corde) della stessa lunghezza, esse sono equiestese, hanno cioè la stessa area. Inoltre se le due corde tagliate dalle rette parallele stanno sempre in un dato rapporto, anche le aeree di dette figure piane staranno nel medesimo rapporto.

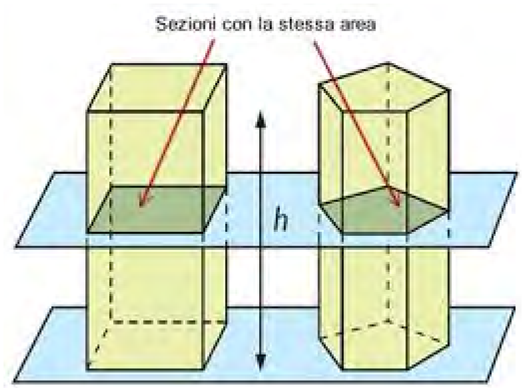

Fig. 2

Il Principio II di Cavalieri è usualmente presentato come un assioma della geometria euclidea nella versione spaziale, asserente che:

Se ogni piano di un fascio di piani paralleli interseca due figure solide in due sezioni equiestese, allora i due solidi hanno lo stesso volume. Inoltre se le due figure tagliate dai piani paralleli stanno *sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei detti solidi staranno nel medesimo rapporto.*

Raramente a un assioma si riserva la dicitura "Principio", più usata in fisica in differenti contesti. Nel nostro caso il termine "Principio" indica che tale assioma è sovrabbondante in quanto esso può essere banalmente dimostrato ricorrendo al concetto di integrale. L'"assioma" o "principio" è molto interessante, specie dal punto di vista didattico, in quanto può essere giustificato da spiegazioni intuitive (Fadini, 1977, pp. 192-199) che sembrano idealmente anticipare il calcolo integrale e di fatto molto vicine alla *Teoria degli indivisibili* dello stesso Cavalieri, che nelle costruzioni iniziali molto deve allo stesso Evangelista Torricelli (1608-1647).

Si noti anche, che tale principio, esprime un criterio sufficiente ma non necessario per l'equiestensione, dato che esistono figure solide equistese, ma non verificanti le ipotesi del Principio.

Esaminiamo ora i due principi alla luce del calcolo integrale.

<u>Il caso delle figure piane.</u>

Data una funzione $f:[a,b] \to R$, che sia continua, allora, come è ben noto esiste l'integrale secondo Mengoli-Cauchy, che esprime il valore del trapezoide di base variabile [a,b] ed altezza variabile secondo la corda $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Essendo F la funzione primitiva della f, continua in [a,b], segue che F è derivabile in [a,b] e risulta $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

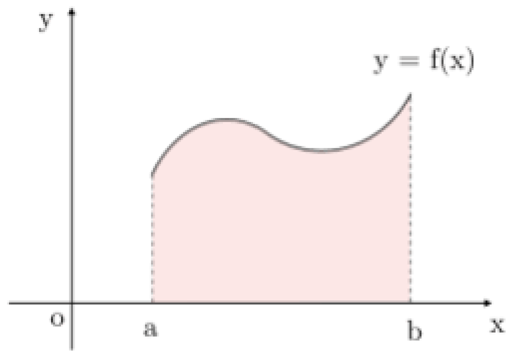

Fig. 3

Si ha inoltre che il valore dell'area A è dato dall'integrale seguente:

$$(1) \qquad A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La (1) è una formula denominata formula fondamentale del Calcolo Integrale.

Siano ora date quattro funzioni continue sull'intervallo chiuso [a,b] e siano:

$$f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \rightarrow R.$$

Consideriamo ora l'area A definita dalle rette x=a, x=b e dalle immagini $f_1(x)$, $f_2(x)$, delle due curve. Sia B l'area dell'analoga figura ottenuta dalle funzioni g_1, g_2. La prova del I Principio di Cavalieri risiede nell'osservare che per la (1), integrando:

$$f_2(x) - f_1(x) = g_2(x) - g_1(x),\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow A = B.$$

Consideriamo un solido S riferito ad un sistema di coordinate cartesiane monometriche dello spazio O,x,y,z . Supponiamo ora che un fascio di piani del tipo z = k , intersechi il solido S in una figura la cui area sia espressa mediante una funzione continua $A : R \to R$ di immagine A(z). Supponiamo inoltre che il solido S sia compreso tra i due piani z=a, z=b.

È ben noto allora che il volume V(S) è dato da (de Finetti (1957, pp.578-579; Bononcini, 1965, p. 592):

$$V(S) = \int_a^b A(z)dz. \tag{1}$$

È noto dal tempo del Cavalieri che se A(z) è della forma $a+bz+cz^2+dz^3$ allora vale la formula di Cavalieri –Torricelli[2]

$$V(S) = \frac{h}{6}\left[A(a) + 4A\left(\frac{a+b}{2}\right) + A(b)\right]$$

dove l'altezza del solido S è pari a h =(b-a) cos θ, formula che si adatta ad una miriade di casi particolari.

Supponiamo ora che il medesimo fascio di piani di equazione z = k , intersechi un secondo solido S′, in una figura la cui area, in modo del tutto analogo a quanto visto sopra mediante una funzione continua $B : R \to R$ di immagine B(z). Supponiamo inoltre che anche il solido S′ sia compreso

[2] Se l'asse z è inclinato di un arco θ, l'integrale va moltiplicato per cos θ, cfr. Leonardi R. (1952) voce "Volume".

tra i due piani z=a, z=b. Sussiste allora, per la (2), l'implicazione:

$$A(z) = B(z)\ ,\ \forall z \in [a,b] \Rightarrow V(S) = V(S')$$

che prova il II Principio di Cavalieri.

Per concludere dobbiamo a Torricelli un'estensione della Teoria del Cavalieri mediante l'uso di indivisibili curvi, che potrebbe essere detto III Principio di Cavalieri o Principio di Torricelli.

Alla base vi è il ragionamento seguente. Supponiamo di voler confrontare due figure piane segando la prima con un sistema di curve, la seconda con un sistema di rette parallele, se ogni indivisibile curvo della prima è pari al corrispondente indivisibile rettilineo, allora le due figure hanno la stessa area. Per lo spazio vale un ragionamento analogo. Esempi e applicazioni di tale III principio sono interessanti e riportate in Carruccio.[3] Profili e immagini dei matematici citati sono reperibili nel nostro sito.[4]

[3] Esempi e applicazioni sono reperibili in (Carruccio, 1958, pp.186-190).
[4] https://www.afsu.it/lista-dei-periodi/

Bibliografia

Bononcini V. (1965). *Istituzioni di Matematiche*. Bologna: Patron.

Carruccio E. (1958). *Matematica e Logica*. Torino: Gheroni.

de Finetti Bruno (1957). *Matematica logico intuitiva*. Roma: Ed.Cremonese.

Enriques Federigo, Amaldi Ugo (1945). *Elementi di Geometria*. Bologna: Zanichelli.

Fadini A. (1977). *Geometria razionale, vol. II*, Milano: Ed. Mursia.

Leonardi R. (1952*). Dizionario illustrato delle Scienze pure ed applicate.* Vol I-II. Milamo: Hoepli

Nicotra Luca (2022). Leggendo Galileo: dalla scodella di Luca Valerio agli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e all'Additive Manufacturing, *Periodico di Matematica* (IV) Vol. IV (1) marzo 2022, pp. 7-38.

****

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) entrò nel 1613 nell'ordine dei Gesuati (da non confondersi con quello dei Gesuiti, che annoverò altri grandi matematici del 500-600).Studiò matematica a Pisa sotto Benedetto Castelli (1578–1643). Galileo Galilei ne appoggiò la carriera stimandolo uno dei maggiori matematici del suo tempo. Fu l'inventore dell'assonometria cavaliera e dell'omonimo principio e principalmente del metodo degli indivisibili. La sua prima opera fu *Lo specchio ustorio*, overo, *Trattato delle settioni coniche*, con varie applicazioni all'acustica, alla costruzione degli specchi ustori e al moto dei gravi ove riporta la scoperta della forma parabolica della traiettoria di un grave, appresa da Galileo Galilei, senza però citare il Maestro, che pertanto ne fu molto irritato.