Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (1) marzo 2022, pp. 39-56

Geometrie Join e Misure di Incertezza[1]

Antonio Maturo*

*Mathesis Abruzzo; email antomato75@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n1.065

Sunto: *Un approccio geometrico recente è quello delle geometrie basate sul concetto di ipergruppo, che è una generalizzazione del concetto di gruppo, richiedendo che il risultato di un'operazione non sia necessariamente un singolo elemento, ma possa essere un insieme non vuoto di elementi. Gli ipergruppi commutativi idempotenti soddisfacenti un particolare assioma, detto "assioma di incidenza", determinano importanti strutture geometriche, dette "spazi join" e "geometrie join". Casi particolari sono la "geometria euclidea", in cui il risultato di una operazione fra due punti è il segmento che congiunge tali punti, e la "geometria proiettiva", in cui il risultato è la retta per i due punti. Rientrano nella definizione, in particolare, anche gli spazi proiettivi finiti. Se ci sono le condizioni per cui il risultato di una operazione possa essere (intuitivamente) considerato una generalizzazione del concetto di segmento, allora ci troviamo in presenza di una generalizzazione della geometria euclidea, che può essere l'ambiente in cui costruire misure di incertezza che generalizzano la probabilità soggettiva di de Finetti. Infatti, le "assegnazioni coerenti di probabilità soggettiva" sono le coordinate dei punti degli insiemi convessi generati dai costituenti. Allora in generale si può immaginare di utilizzare come misure di incertezza, "probabilità distorte", le coordinate di punti di insiemi che soddisfano una condizione generale di convessità in uno spazio join o in una geometria join.*

[1] Lavoro dedicato all'amico prof. Franco Eugeni per i suoi 80 anni (e 52 anni di amicizia fraterna)

Parole Chiave: *Spazi geometrici. Geometria proiettiva. Geometria euclidea. Spazi Join. Geometrie Join. Probabilità soggettiva. Misure di incertezza join.*

Abstract: *A recent geometric approach is based on the concept of hypergroup, which is a generalization of the concept of a group, requiring that the result of an operation is not necessarily a single element, but can be a non-empty set of elements. The idempotent commutative hypergroups satisfying a particular axiom, called the "axiom of incidence", determine an important set of geometric structures, called "join spaces" and "join geometries". Special cases are Euclidean geometry, in which the result of an operation between two points is the segment that connects these points, and projective geometry, in which the result is the line through the two points. In particular, finite projective spaces also fall within the definition. If there are the conditions for which the result of an operation can be (intuitively) considered a generalization of the concept of segment, then we find a generalization of Euclidean geometry, which can be the environment in which to construct uncertainty measures that generalize de Finetti's subjective probability. In fact, the "coherent assignments of subjective probabilities" are the coordinates of points of the convex sets generated by the constituents. Then in general we can imagine using as uncertainty measures, "biased probabilities", the coordinates of points of sets that satisfy a general condition of convexity in a join space or in a join geometry.*

Keywords: *Geometric spaces. Projective geometry. Euclidean geometry. Join spaces. Join geometries. Subjective probability. Join uncertainty measures.*

1 - Spazi geometrici e sistemi join

1.1 - Spazi geometrici di rango 2

Definizione 1.1 (Beutelspacher, Rosenbaum, 1998) Si dice *spazio geometrico di rango 2 (o struttura di incidenza)* una terna G=(S, B, I) dove:

(G1) S è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti*;

(G2) B è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *blocchi*;

(G3) I è una relazione di S in B, detta *relazione di incidenza*; se aIK, $a \in S$, $K \in B$, diciamo che a è *incidente* a K.

Lo spazio geometrico G si dice *non degenere* se:

(ND1) ogni blocco è incidente ad almeno tre punti;

(ND2) esistono almeno due blocchi.

Diciamo che in G vale *l'assioma delle coppie* se:

(C) Dati due punti distinti a, b, esiste un solo blocco K tale che (aIK, bIK). Diciamo che K è il blocco *individuato* dalla coppia (non ordinata) {a, b}.

In seguito, considereremo solo spazi geometrici di rango 2 non degeneri e in cui vale l'assioma delle coppie.

Esempi immediati di tali spazi geometrici di sono:

1. Lo spazio affine delle rette. Si pone $S = R^n$; B uguale all'insieme delle rette in R^n; I relazione di appartenenza.
2. Lo spazio proiettivo delle rette. Si pone S uguale all'unione di R^n con l'iperpiano improprio, B uguale all'insieme delle rette in S; I relazione di appartenenza.
3. Lo spazio euclideo dei segmenti chiusi. Si pone $S=R^n$, B uguale all'insieme dei segmenti chiusi [ab] con $a \neq b$; I relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K. Evidentemente, per ogni coppia {a, b} di punti distinti di R^n, esiste un solo segmento chiuso che ha estremi a, b, e quindi vale l'assioma delle coppie.
4. Lo spazio euclideo dei segmenti aperti. Si pone $S=R^n$, B uguale all'insieme dei segmenti aperti (ab), con $a \neq b$; I la relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K.
5. Lo spazio cartesiano degli intervalli chiusi. Si pone $S = R^n$, B uguale all'insieme degli intervalli chiusi $[ab] = a_1b_1 \times a_2b_2 \times \ldots \times a_nb_n$, con $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$; I relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K.

6. Lo spazio cartesiano degli intervalli aperti. Si assume la convenzione che, dato un numero reale k, l'intervallo aperto (k, k) sia uguale all'insieme {k}. Ciò è giustificato dal fatto che in questo contesto (k, k) sta per (k^-, k^+), ovvero come intersezione degli intervalli aperti contenenti k. Si pone S = R^n, B uguale all'insieme degli intervalli aperti (ab) = $a_1b_1 \times a_2b_2 \times \ldots \times a_nb_n$, con a = ($a_1$, a_2, …, a_n)≠b = (b_1, b_2, …, b_n); I relazione tale per ogni a∈S, K∈B, aIK se e solo se a è un estremo di K.

7. Lo spazio del triodo chiuso (Prenowicz, Jantosciak, 1979). In R^n si considerano un punto o e tre semirette chiuse distinte R_1, R_2, R_3 di origine o. Poniamo $S=R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Se a, b sono due punti distinti del triodo, si dice ***segmento*** *del triodo chiuso* il segmento chiuso [ab] se a, b appartengono ad una stessa semiretta, oppure l'unione dei segmenti chiusi [ao] e [ob] se a, b appartengono a diverse semirette. Si pone S = R^n, B uguale all'insieme dei segmenti del triodo chiuso e aIK, a∈S, K∈B, se e solo se esiste b∈S tale che [ab] è un segmento del triodo chiuso.

8. Lo spazio del triodo aperto (Prenowicz, Jantosciak, 1979). In R^n si considerano un punto o e tre semirette distinte R_1, R_2, R_3 di origine o. Posto $S=R_1 \cup R_2 \cup R_3$, se a, b sono due punti distinti del triodo, si dice *segmento del triodo aperto* il segmento aperto (ab) se a, b appartengono ad una stessa semiretta, oppure l'unione (ao)∪{o}∪{ob} se a, b appartengono a due semirette diverse. Lo spazio del triodo aperto è la terna (S, B, I), dove B è l'insieme dei segmenti del triodo aperto e aIK, a∈S, K∈B, se e solo se esiste b∈S tale che (ab) è un segmento del triodo aperto.

Nota 1.1 Spesso, in Geometria, la relazione di incidenza I è identificata con la relazione di appartenenza ∈. Ciò è vero nell'ambito della geometria affine o della geometria proiettiva.

Invece le due relazioni sono distinte nel caso degli spazi euclidei o cartesiani. Infatti, ad esempio, un segmento è incidente (in relazione I) solo con i suoi estremi, mentre una coppia {a, b} di punti distinti appartiene a infiniti segmenti. Analogamente, in uno spazio cartesiano, un intervallo è incidente (in relazione I) solo con i suoi estremi, mentre una coppia {a, b} di punti appartiene a infiniti intervalli.

Nota 1.2 Pur tenendo conto della nota 1.1, generalmente si può assumere che i blocchi siano sottoinsiemi di P(S). Ciò vale negli esempi precedenti e nel seguito del discorso.

1.2 - Sistemi Join

Definizione 1.2 - Si dice *sistema join* (o *sistema di connessione*) una coppia J = (S, σ) in cui S è un insieme non vuoto e $\sigma: S \times S \rightarrow P(S)$ è una funzione che ad ogni coppia ordinata (a, b) di elementi di S associa un sottoinsieme di S soddisfacente i seguenti assiomi, in cui si pone $a\sigma b = \sigma(a, b)$:

(J1) (legge di esistenza) per ogni a, b in S, $a\sigma b \neq \emptyset$;

(J2) (legge commutativa) per ogni a, b in S, $a\sigma b = b\sigma a$;

(J3) (legge associativa) per ogni a, b, c in S, $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$;

(J4) (legge di idempotenza) per ogni $a \in S$, $a\sigma a = \{a\}$.

La funzione σ è vista come una operazione a più risultati (detta *iperoperazione*) e $a\sigma b$ è detto *iperprodotto* (rispetto a σ) o semplicemente *prodotto.* Le (J1), (J2), (J3) definiscono una struttura algebrica detta *semi-ipergruppo*, che generalizza quella classica di semigruppo.

Nota 1.3 - Nelle teorie geometriche in genere si identifica il punto a con il singleton {a}. Quindi le scritture $a \in A$ e $a \subseteq A$ sono considerate equivalenti.

Nota 1.4 - Nella legge associativa $(a\sigma b)\sigma c$ è il prodotto di un insieme $a\sigma b$ con un punto c. Questo è definito come l'unione dei prodotti $x\sigma c$, con $x \in a\sigma b$. Ad esempio, se consideriamo lo spazio euclideo dei segmenti chiusi e se a, b, c sono punti distinti e non allineati, allora $a\sigma b$ è il segmento chiuso di estremi a, b, mentre $(a\sigma b)\sigma c$ è il triangolo di estremi a, b, c.

In generale, se A e B sono due sottoinsiemi di S, allora $A\sigma B$ è l'unione dei prodotti $x\sigma y$, $x\in A$, $y\in B$.

Importanti proprietà dei sistemi join sono le seguenti:

Teorema 1.1 (Monotonia). Se A, B, C, D sono sottoinsiemi di S, allora:

$A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow A\sigma B \subseteq C\sigma D.$ (1.1)

Corollario 1.1 - Se c, d sono punti di $a\sigma b$ allora $c\sigma d \subseteq a\sigma b$.

Nota 1.5 - La dimostrazione del corollario 1.1 evidenzia l'importanza degli assiomi (J2), (J3), (J4). Infatti da questi assiomi e dalla (1.1) segue:

$c, d \in a\sigma b \Rightarrow c\sigma d \subseteq (a\sigma b)\sigma(a\sigma b) = (a\sigma a)\sigma(b\sigma b) = a\sigma b.$

1.3 - Spazi geometrici di rango 2 come sistemi join

Dato uno spazio geometrico non degenere G = (S, B, I) con $B \subseteq P(S)$, soddisfacente l'assioma delle coppie, ad esso si può associare la coppia $J = (S, \sigma)$, ponendo, per ogni coppia di elementi distinti a, b, in S,

$(a\sigma b = K) \Leftrightarrow (aIK, bIK).$ (1.2)

Assumendo, per convenzione, che $a\sigma a = \{a\}$, si vede che valgono le proprietà (J1), (J2), (J4).

Nota 1.6 - Non sempre vale la *legge associativa* (J3). Ad esempio, nello spazio affine delle rette, se a, b, c sono punti non allineati, $(a\sigma b)\sigma c$ è l'unione delle rette del piano passanti per c e diverse dalla retta per c parallela alla retta $a\sigma b$, mentre $a\sigma(b\sigma c)$ l'unione delle rette del piano passanti per a e diverse dalla retta per a parallela alla retta $b\sigma c$.

Si può dimostrare invece che soddisfano la (J3), e quindi sono sistemi join, gli *spazi proiettivi*, gli *spazi di segmenti*, gli *spazi di intervalli* e gli *spazi di triodi*.

Viceversa, dato un sistema join J = (S, σ), ad esso si può associare uno spazio geometrico G = (S, B, I) con B $\subseteq$ P(S), soddisfacente l'assioma delle coppie, ponendo B uguale all'insieme degli iperprodotti aσb, con a$\neq$b. La relazione di incidenza I è definita ponendo, per a$\in$S, K$\in$B,

aIK $\Leftrightarrow$ esiste b$\in$S tale che aσb = K. (1.3)

2 - Insiemi convessi in sistemi join

Definizione 2.1- Sia J = (S, σ) un sistema join. Un sottoinsieme H non vuoto di S si dice *convesso* (rispetto a σ) se vale la condizione:

a, b$\in$H $\Rightarrow$ aσb $\subseteq$ H. (2.1)

In particolare, S è un insieme convesso. Sia A un sottoinsieme di S. L'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti A è un insieme convesso contenente A, detto *involucro (o guscio) convesso* (*convex hull*) di A.

In seguito, generalizzando le notazioni degli spazi euclidei, chiamiamo

(a) σ--*segmento* il prodotto aσb;

(b) Se a, b, c sono punti distinti tali che nessuno di essi appartiene al σ-segmento individuato dagli altri due, chiamiamo *σ-triangolo* il prodotto (aσb)σc = aσ(bσc).

Dal teorema 1.1 e dal corollario 1.1 seguono:

Teorema 2.1 - Se a_1, a_2, …, a_n sono punti di S allora il prodotto $a_1\sigma a_2\sigma\ldots\sigma a_n$ è un insieme convesso.

Teorema 2.2 - Se A e B sono insiemi convessi allora AσB è un insieme convesso.

Definizione 2.2 - Se a_1, a_2, …, a_n sono punti di S, l'involucro convesso dell'insieme {a_1, a_2, …, a_n} si indica con [a_1, a_2, …, a_n] e si dice *politopo* (rispetto a σ) generato da {a_1, a_2, …, a_n}.

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.3 - *(Formula del politopo)* Dati i punti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il politopo $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ da essi generato è l'unione di tutti gli iperprodotti

$a_{j1}\sigma a_{j2}\sigma\ldots\sigma a_{js}$, con $s \leq n$, $j1 < j2 < \ldots < js$.

3 -Il politopo euclideo delle probabilità soggettive coerenti

Per ogni evento E, sia E^c il suo contrario, indichiamo con $\varnothing$ l'evento impossibile e con Ω l'evento certo.

Consideriamo il caso semplice di due eventi A e B. Essi si dicono *logicamente indipendenti* (de Finetti, 1979) se tutte le intersezioni AB, AB^c, A^cB, A^cB^c sono eventi possibili. Si dicono *logicamente dipendenti* in caso contrario. Ad esempio, si ha una dipendenza logica se $A \subseteq B$, se $A = B^c$, se A e B sono incompatibili, etc.

In ogni caso, si dicono *costituenti* di (A, B) gli eventi non impossibili appartenenti all'insieme $\{AB, AB^c, A^cB, A^cB^c\}$.

Chiamiamo *vincolo* ogni intersezione impossibile.

Dal punto di vista geometrico la coppia di eventi (A, B) si rappresenta come un piano euclideo in cui l'asse x è l'evento A, l'asse y è l'evento B e

$AB = (1, 1)$, $AB^c = (1, 0)$, $A^cB = (0, 1)$, $A^cB^c = (0, 0)$.

Se K è l'insieme dei costituenti di (A, B), si considera il politopo G(K) generato da K. Le coppie di *probabilità soggettive coerenti* (p(A), p(B)) sono i punti di G(K).

Casi particolari:

(1) Se A e B sono indipendenti allora G(K) è l'intervallo $[0,1]\times[0,1]$.

(2) Se A e B sono incompatibili ($AB = \varnothing$) e non ci sono altri vincoli, allora G(K) è il triangolo di vertici [0, 0], [0, 1], [1, 0].

(3) Se A = B allora G(K) è il segmento di estremi [0, 0], [1, 1].

(4) Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ allora G(K) è il triangolo di vertici [0, 0], [0, 1], [1, 1].

In generale, data una n-pla di eventi $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, all'evento E_i è associato l'asse i-simo dello spazio R^n.

Si definiscono *costituenti* associati alla n-pla di eventi tutte le intersezioni $A_1A_2\ldots A_n$, con $A_i \in \{E_i, E_i^c\}$, diverse dall'evento impossibile.

Ogni costituente $C = A_1A_2\ldots A_n$ è rappresentato dal punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di R^n con $a_i = 1$ se $A_i = E_i$ e $a_i = 0$ se $A_i = E_i^c$.

Sia K l'insieme dei costituenti. Le assegnazioni di probabilità coerenti sono i punti del politopo G(K) generato dai costituenti. Se $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ è un punto di G(K) scelto soggettivamente allora p_i è la probabilità soggettiva dell'evento E_i.

4 - Misure di incertezza associate a un sistema join

Generalizzando il concetto di coerenza rispetto al politopo euclideo, sia (R^n, σ) un sistema join. Sia K l'insieme dei costituenti della n-pla di eventi $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Diamo la seguente:

Definizione 4.1 - Diciamo *misura di incertezza join σ-coerente* su $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ ogni punto $P = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ di R^n appartenente all'insieme $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n$, dove $G_\sigma(K)$ è il σ-politopo generato dai costituenti.

Se $P = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ è un punto di $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n$, scelto soggettivamente, allora m_i è la *misura di incertezza join σ-coerente* dell'evento E_i.

Nota 4.1 - Osserviamo che, per il teorema 2.3, $K \subseteq G_\sigma(K)$, per cui l'insieme delle misure di incertezza σ-coerenti contiene almeno l'insieme K. Inoltre, valgono le condizioni per una *misura normalizzata*:

$$0 \leq m_i \leq 1, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (4.1)$$

Ovviamente, in generale una misura join σ-coerente non gode della proprietà additiva (a meno che non sia una probabilità). Però può essere importante imporre la *condizione di monotonia*:

$E_i \subseteq E_j \Rightarrow m_i \leq m_j$ (4.2)

Se M è l'insieme dei punti di R^n soddisfacente la 4.2, allora M contiene l'insieme K dei costituenti e si ottiene una *misura di incertezza join σ-coerente monotona* su $(E_1, E_2,\ldots, E_n)$ per ogni punto P = $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ di R^n appartenente all'insieme $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n \cap M$.

Nota 4.2 - Le condizioni per un punto P di R^n di essere una probabilità coerente e una misura di incertezza join σ-coerente possono coesistere, sulla base di considerazioni particolari. In questo caso si ottengono probabilità soggettive contemporaneamente coerenti e σ-coerenti per ogni punto P = $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ appartenente a $G(K) \cap G_\sigma(K)$. Più in generale si possono avere probabilità soggettive σ-coerenti rispetto ad un insieme di sistemi join.

5 - La divisione e l'assioma di incidenza in un sistema join

Sia (S, σ) un sistema join. Il modello proiettivo e il modello euclideo soddisfano alla seguente condizione:

(D) per ogni a, b in S, esiste $x \in S$ tale che $b \in a\sigma x$.

Nel modello proiettivo, se a ≠ b, soddisfa alla condizione (D) ogni punto della retta ab; mentre, se a = b la (D) vale per ogni punto di R^n.

Nei modelli euclidei, se a ≠ b, soddisfa alla (D) ogni punto della semiretta di origine b e non contenente a. Ne fa parte b se si considera il modello dei segmenti chiusi, mentre b è escluso se si considera il modello dei segmenti aperti. Se a = b allora soddisfano la condizione (D) tutti i punti di R^n, se consideriamo i segmenti chiusi, mentre soddisfa la condizione (D) solo il punto a, se consideriamo i segmenti aperti.

In generale, se (S, σ) è un sistema join, si definisce σ-quoziente $(b/a)_\sigma$ l'insieme $\{x \in S: b \in a\sigma x\}$.

Introduciamo ora il seguente assioma:

(J5) (legge di esistenza del quoziente) per ogni a, b$\in$S, $(b/a)_\sigma \neq \emptyset$.

Nota 5.1 - Il fatto che valgano (J1), (J2), (J5) si esprime dicendo che (S, σ) è un *ipergruppo* (Corsini, 1993), concetto che generalizza quello classico di gruppo, considerando la possibilità di operazioni con più risultati.

Si può dimostrare che la (J5) è soddisfatta da tutti gli spazi geometrici considerati nel paragrafo 1. In particolare, se a $\neq$ b:

(a) Per gli spazi di rette, $a\sigma b = (b/a)_\sigma$;

(b) Per lo spazio euclideo dei segmenti chiusi $(a\sigma b)\cap(b/a)_\sigma = b$;

(c) Per lo spazio euclideo dei segmenti aperti $(a\sigma b)\cap(b/a)_\sigma = \emptyset$.

Un altro assioma importante è il seguente:

(J6) (assioma di incidenza) dati 4 punti distinti a, b, c, d in S, se

$$(b/a)_\sigma \cap (d/c) \neq \emptyset \Rightarrow a\sigma d \cap b\sigma c \neq \emptyset \qquad (5.1)$$

Nel caso dello spazio proiettivo l'assioma di incidenza equivale all'assioma di Veblen-Young che caratterizza gli spazi proiettivi (Beutelspacher, Rosembaum, 1979):

"se le rette ab e cd si incontrano in un punto x, allora anche le rette ad e bc si incontrano in un punto y".

Nel caso dello spazio euclideo (di segmenti) l'assioma di incidenza equivale all'assioma di Pash che introduce un ordine in geometria:

"dato il triangolo xbc e un punto a sul segmento xb, allora ogni retta per a e per un punto d, sulla retta per x e c, ma esterno a xc, incontra il segmento bc"

Definizione 5.1 - Una coppia (S, σ) che soddisfa tutti gli assiomi (J1), …, (J6) si dice *join space* (o *spazio join*) (Corsini, 1993).

In maniera equivalente si può dire che

"uno spazio join è un ipergruppo commutativo idempotente in cui vale l'assioma di incidenza",

oppure

"uno spazio join è un sistema join in cui valgono l'esistenza del quoziente e l'assioma di incidenza".

6 - Rette, segmenti chiusi o segmenti aperti?

In generale, dato un join space J = (S, σ), diamo la seguente definizione:

Definizione 6.1 - Diciamo che il join space J = (S, σ) è:

chiuso se, per ogni a, b in S, $a\sigma b \supseteq \{a, b\}$;

aperto se, per ogni a, b in S, $a \neq b$, $a\sigma b \cap \{a, b\} = \emptyset$.

Si possono verificare i seguenti teoremi:

Teorema 6.1 - Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(a) J = (S, σ) è chiuso;

(b) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = S$;

(c) per ogni a, b, distinti in S, $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma \supseteq b$.

Teorema 6.2 - Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(a) J = (S, σ) è aperto;

(b) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = a$;

(c) per ogni a, b, distinti in S, $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = \emptyset$.

Le osservazioni precedenti portano ad una classificazione degli spazi join. Generalizzando le considerazioni fatte su spazi proiettivi e spazi euclidei possiamo fare la seguente classificazione degli spazi join:

(A) Se, per ogni a, b, distinti in S, $a\sigma b = (b/a)_\sigma$ si ha uno *spazio di rette*;

(B) Se, per ogni a, b, distinti in S, $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = b$ si ha uno *spazio di σ-segmenti chiusi*;

(C) Se, per ogni a, b in S, $a \neq b$, $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = \emptyset$ si ha uno *spazio di σ-segmenti aperti*.

Se vale la (A) siamo in presenza di un generale spazio proiettivo, essendo la definizione equivalente a quella data in (Beutelspacher, Rosembaum, 1979).

In particolare, oltre agli spazi proiettivi classici sono compresi gli spazi proiettivi finiti, di cui quello con un numero minimo di elementi è il piano di Fano.

L'idea intuitiva di convessità ottenuta da segmenti fa preferire gli spazi di segmenti, sia per una generalizzazione della geometria euclidea e sia per le misure coerenti rispetto ad un join space.

È necessario però fare una scelta: è preferibile lavorare su σ-segmenti aperti o su σ-segmenti chiusi?

Anche se a prima vista può sembrare più comodo considerare i σ-segmenti chiusi, tuttavia ci sono vari motivi che inducono a preferire i σ-segmenti aperti. Alcuni sono i seguenti:

(1) Evitare i casi banali o degeneri. Considerando i σ-segmenti chiusi la (J1) è soddisfatta anche se il σ-segmento $a\sigma b$ non contiene punti diversi dagli estremi, mentre la (J5) è soddisfatta anche se $(b/a)_\sigma$ non contiene punti diversi da b.

(2) Evitare di raddoppiare le dimostrazioni dei teoremi, dovendo considerando a parte i casi di un punto interno e di un estremo di un σ-segmento.

(3) Definire con precisione $(a/a)_\sigma$, che si riduce ad $\{a\}$ per i σ-segmenti aperti, mentre è uguale a tutto lo spazio per i σ-segmenti chiusi.

(4) Permettere una partizione finita di un σ-segmento $a\sigma b$. Non è possibile, in generale, per un σ-segmenti chiuso, mentre per un σ-segmento aperto, $a\sigma b$, con $a \neq b$, per ogni $c \in a\sigma b$, si ha che $\{a\sigma c, c\sigma a, c\}$ è una partizione in tre σ-segmenti aperti.

Inoltre, due proprietà importanti dei σ-segmenti aperti sono le seguenti:

<u>Teorema 6.3</u> - Siano $J = (S, \sigma)$ un join space aperto e $a\sigma b$ un suo σ-segmento. Allora:

(a) Per ogni $c \in a\sigma b$, $c\sigma b \subset a\sigma b$;

(b) Per ogni $c, d \in a\sigma b$, $c\sigma d \subset a\sigma b$;

(c) se $a \neq b$, $a\sigma b$ ha infiniti punti.

In conclusione, la condizione che J = (S, σ) sia un join space aperto è molto restrittiva e i σ-segmenti di J sono effettivamente interpretabili, da un punto di vista intuitivo, come una generalizzazione dei segmenti di uno spazio euclideo aperto.

Per questo motivo si usa dare la seguente definizione:

Definizione 6.2 - Un join space J = (S, σ) si dice ***geometria join*** se vale la seguente condizione:

(J7) (legge di idempotenza del quoziente) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = \{a\}$.

In conclusione, per ottenere σ-segmenti che siano una generalizzazione intuitivamente soddisfacente dei segmenti della geometria euclidea, è conveniente considerare *geometrie join*, mentre, se si vuole lavorare in un ambito più generale, può essere opportuno limitarsi ad assumere i sei assiomi di uno *spazio join*.

7 - Conclusioni e prospettive di ricerca

L'aspetto straordinario delle teorie "join" è quello di racchiudere "l'essenza" del concetto di segmento e della teoria della convessità in quattro semplici assiomi, introducendo il concetto di "sistema join" e di "σ-segmento". Come conseguenza si ottengono vari teoremi fondamentali.

Il passo successivo, che nasce dall'idea di "prolungare" un "σ-segmento" e di stabilire una "sorta di ordinamento" porta all'introduzione della "legge di esistenza del quoziente" e della "proprietà di incidenza". Si ottiene quindi una struttura definita da sei assiomi, detta "spazio join", che ha vari modelli di grande interesse.

Possono accadere due eventualità:

(a) la procedura di prolungamento di un "σ-segmento" porta a riottenere solo i punti dello stesso "σ-segmento". In tal caso i "σ-segmenti" sono rette di uno spazio proiettivo (che può essere anche finito) e quindi lo "spazio join" è uno "spazio proiettivo", così come definito in (Beutelspacher, Rosembaum, 1998).

(b) la procedura di prolungamento porta all'acquisizione di nuovi punti e quindi, intuitivamente, un "σ-segmento" corrisponde all'idea intuitiva di "segmento" della geometria euclidea, rappresentandone una generalizzazione.

La maniera più semplice per ottenere il caso (b) è di ammettere che i "σ-segmenti" siano aperti. Ciò si ottiene aggiungendo come settimo assioma la "legge di idempotenza del quoziente". Le strutture geometriche che soddisfano tutti i sette assiomi sono dette "geometrie join". In esse valgono varie proprietà dello spazio euclideo, incluso il fatto che un "σ-segmento" ha infiniti punti.

Per quanto riguarda la generalizzazione del concetto di "probabilità soggettiva coerente", introducendo il concetto di "misura join", essa è possibile già semplicemente in un qualsiasi "sistema join" con sostegno R^n. Appare però più incisiva e intuitivamente efficace se si effettua in uno "spazio join" in cui vale l'alternativa (b), in particolare in una "geometria join".

Negli ultimi decenni sono stati fatti molti studi per una generalizzazione del concetto di "probabilità", introducendo "misure non additive" a partire dalla teoria dei "fuzzy set".

Nel presente lavoro è stata proposta una nuova strada, a partire dal concetto di "sistema join". L'idea è di ricercare nuovi modelli di "spazi join" in corrispondenza dei quali si ottengano "misure join" utili per particolari assegnate esigenze.

Bibliografia

Beutelspacher A., Rosembaum U. (1998). *Projective Geometry,* Cambridge University Press.

Corsini P. (1993). *Prolegomena of hypergroup theory*, Udine: Aviani Editore.

––– (1994). Join spaces, power sets, fuzzy sets, *"Proc. of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications", Iasi, Romania.*

Corsini P., Leoreanu L. (2003). *Applications of the Hyperstructure Theory,* London: Kluver Academic Publishers.

Di Gennaro F., Maturo A. (2002). La teoria delle iperstrutture: un efficace strumento per una visione unitaria di algebra e geometria, *"Periodico di Matematiche", Serie VIII, v. 2, n. 4, pp. 5-16*.

Doria S., Maturo A. (1995). A hyperstructure of conditional events for artificial intelligence, *in Mathematical models for handling partial knowledge in artificial intelligence*, *Plenum press, New York, pp. 201-208.*

––– (1996). Hyperstructures and geometric spaces associated to a family of events, *"Rivista di Matematica Pura e Applicata" n.19, pp. 125-137.*

Dramalidis A., Vougiouklis T. (2012). Hv-semigroups as noise pollution models in urban areas, *"Ratio Mathematica" n.23, pp. 39-50.*

Ferri B., Maturo A. (1997). Hyperstructures as tool to compare urban projects, *"Ratio Mathematica" n.12, pp. 79-89.*

––– (1998). An application of the fuzzy set theory to evaluation of urban projects, *New trends in Fuzzy Systems, Scientific Word, Singapore, pp. 82-91,.*

––– (1999). Fuzzy Classification and Hyperstructures: An Application to Evaluation of Urban Project, *Classification and Data Analysis, Springer-Verlag, Berlin, pp. 55-62.*

––– (1999). On Some Applications of Fuzzy Sets and Commutative Hypergroups to Evaluation in Architecture and Town-Planning, *Ratio Mathematica, n.13, pp. 51-60.*

––– (2001). Mathematical models based on fuzzy classification and commutative hypergroups to solve present problems of evaluation in town planning, *Fuzzy Systems & A. I., v. VII, n.1-3, pp. 7-15.*

––– (2001). Classifications and Hyperstructures in problems of Architecture and Town-Planning, *Journal of Interdisciplinary Mathematics, v. 4, n.1, pp 25-34.*

Hoskova-Mayerova Š., Maturo, A. (2016). An analysis of Social Relations and Social Group behaviors with fuzzy sets and hyperstructures, *Int. J. Algebraic Hyperstruct. Appl. 2(1), pp. 91–99.*

––– (2016). Fuzzy sets and algebraic hyperoperations to model interpersonal relations, in *"Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models". Studies in Systems, Decision and Control, v. 66.*

Marty F. (1934). Sur une généralization de la notion de group, IV, *Congres des Mathematiciens Scandinave, Stockholm.*

Maturo A. (2006). A Geometrical Approach to the Coherent Conditional Probability and its extensions, *Scientific Annals of the University Ion Ionescu de la Brad, Tom XLIX, v 2, pp. 243-255.*

––– (2008). Join coherent previsions, *Set-valued Mathematics and Applications, v. 1 n.2, pp. 135-144.*

––– (2009). Coherent conditional previsions and geometric hypergroupoids, *Fuzzy sets, rough sets and multivalued operations and applications, v. 1, n.1, pp. 51–62.*

Prenowitz W., Jantosciak J. (1979). *Join Geometries,* New York: Springer-Verlag UTM.

Vougiouklis T. (1994). *Hyperstructures and their representations,* U.S.A: Hadronic Press.

––– (1999). Fundamental Relations in hyperstructures, *Bulletin of the Greek Mathematical Society, v. 42, pp.113-118.*

––– (2009). Hyperstructures as models in social sciences, *Ratio Sociologica, v. 2, n.2, pp. 21-34.*