Periodico di Matematica (IV) Vol. IV(1) marzo 2022, pp.97-126

La divina proporzione "vera ispiratrice di bellezza"

Una proposta didattica per la scuola secondaria di II grado

Giovanna Della Vecchia*

* DIARC-Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n1.068

Sunto: *Il lavoro presentato illustra un percorso didattico realizzato nella scuola secondaria di secondo grado sul "numero aureo" φ, quel famoso numero irrazionale che tanta importanza ha avuto nel definire i canoni della bellezza, della grazia e dell'armonia dalla Grecia classica ai giorni nostri e che, per il suo particolare valore esoterico, affascina ancora oggi studiosi di ogni campo.*

Il percorso è articolato con il forte intento di provocare, incuriosire, suscitare stupore negli studenti e coinvolgerli in situazioni ludiche in grado di risvegliare interessi e passioni spesso sopiti tra i banchi di scuola: ciò per sottolineare quanto la motivazione ad apprendere ed il coinvolgimento emotivo siano fattori essenziali, ineludibili del processo di insegnamento/apprendimento.

Parole Chiave: *numero aureo, bellezza, armonia.*

Abstract: *The work presented illustrates a didactic path carried out in secondary school on the "golden number", that famous irrational number which had so much importance in defining the canons of beauty, of grace and harmony* *from classical Greece to the present day and that, for its particular esoteric value, still fascinates scholars of every field. The course is articulated with the strong intention of provoking, intriguing, arousing amazement in the students and involving them in playful situations able to awaken interests and passions often dormant among the school desks: this emphasizes that motivation to learn and emotional involvement are essential, inescapable factors of the teaching/learning process.*

Keywords: *golden number, beauty, harmony.*

1 - Premessa

Ho insegnato per circa quaranta anni in un Istituto professionale della provincia di Napoli e, nella mia lunga carriera di docente di Matematica, ho maturato la convinzione che la motivazione ad apprendere ed il coinvolgimento emotivo siano fattori essenziali, ineludibili del processo di insegnamento/apprendimento.

Lo spunto che ha dato il via all'elaborazione del presente percorso didattico è stata la lettura di un articolo intitolato "La sezione aurea e le regole del giuoco del calcio" e pubblicato sul blog "Mr Palomar – Il blog di Matematica giocosa di Paolo Alessandrini".

Il titolo dell'articolo ha fortemente catturato la mia attenzione: in che modo l'autore metteva in relazione il regolamento del gioco del calcio e la sezione aurea?

In realtà nell'articolo si parla di campi di calcio e delle loro dimensioni e si afferma spiritosamente che il miglior candidato al titolo di «stadio più aureo del mondo» sembra essere il Santiago Bernabeu di Madrid: ovviamente il titolo è riferito alle dimensioni del terreno di gioco. Vera o falsa che sia l'affermazione, resta il fatto che il Santiago Bernabeu di Madrid è uno stadio che sta molto a cuore a noi italiani, soprattutto a quelli che, nella lontana estate del 1982, scendevano in piazza a festeggiare quella notte magica in cui la Nazionale Italiana diventava Campione del mondo.

Le riflessioni in merito alle dimensioni del campo di calcio hanno offerto quindi l'occasione per parlare di quel numero, anch'esso magico, denotato con una φ e denominato da Luca Pacioli "divina proporzione" o, molto più tardi, "sezione aurea", che è uno dei più famosi tra gli irrazionali, numero che ha affascinato nei secoli matematici e non solo e tanta importanza ha avuto nel definire i canoni della bellezza e dell'armonia.

2 - Il regolamento del giuoco del calcio

Secondo il regolamento del giuoco del calcio, il terreno di gioco deve essere rettangolare e la lunghezza delle linee laterali deve essere, in ogni caso, superiore alla lunghezza delle linee di porta.

Le dimensioni devono essere le seguenti:
lunghezza: min m. 90, max m. 120
larghezza: min m. 45, max m. 90

Nelle gare internazionali invece le dimensioni devono essere:
lunghezza: min m. 100, max m. 110
larghezza: min m. 64, max m. 75.

Nella maggior parte dei casi, i terreni di gioco tendono ad assumere proporzioni "meno quadrate", con lunghezze e larghezze che si pongono circa a metà dei rispettivi intervalli ammessi, cioè intorno a 105 metri x 67,5 metri.

Le dimensioni che la FIFA raccomanda per i tornei internazionali, e che in Italia le Leghe di Serie A e B stabiliscono obbligatoriamente per le partite di campionato corrispondono quasi esattamente al formato "medio" 105 metri x 68 metri, tollerando al limite una dimensione minima di 65 metri per il lato corto, in caso di difficoltà tecniche dell'impianto.

Ecco un elenco dei campi di calcio con un terreno di gioco formato standard 105 x 68:

Olimpico di Roma
Olimpico di Torino
San Siro di Milano
Maradona di Napoli
Bentegodi di Verona
Campo Nou di Barcellona
Lužniki di Mosca
Stadio del Centenario di Montevideo,
Azteca di Città del Messico

Il rapporto tra i lati di un rettangolo 105 x 68 è pari ad un valore non molto vicino al rapporto aureo:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

Se gli organismi del calcio avessero scelto come standard per i terreni di giuoco una lunghezza di 110 metri e una larghezza di 68 metri, dimensioni che rientrano nell'intervallo stabilito dalla Regola 1 (anche per gare internazionali), avrebbero disegnato un rettangolo quasi perfettamente aureo essendo 110:68 = 1,617…

Il Santiago Bernabeu di Madrid è dunque legittimamente candidato a stadio più aureo del mondo essendo le dimensioni del suo campo di gioco , secondo il sito Uefa, 106 x 66.

Se è la versione corretta allora il rapporto tra le due dimensioni è: $\frac{106}{66} = 1{,}606$ valore molto vicino al rapporto aureo.

Fig. 1 - Il Santiago Bernabeu

3 - Il rettangolo aureo: il rettangolo "più bello"

Un rettangolo si dice aureo quando le sue dimensioni *a* e *b* soddisfano la proporzione aurea cioè la minore è medio proporzionale tra la maggiore e la differenza delle due

$$a : b = b : (a-b)$$

Le particolarità del rettangolo aureo, grazie anche all'alone di mistero che sembrava aleggiare intorno agli effetti visivi determinati da figure in cui è presente la proporzione aurea e alla sensazione di armonia che tale proporzione susciterebbe, l'hanno fatto considerare nei secoli un canone di bellezza assoluto; intorno all'800 ci sono state persino indagini psicologiche volte ad avvalorare tale tesi.

Nel 1875 lo psicologo tedesco Theodor Fechner (1801, 1887) mostrò a 347 persone una disposizione di 10 rettangoli con il rapporto tra i lati in ordine crescente (da 1:1 a 1:2,5); tra questi il rettangolo aureo occupava la settima posizione. Chiese poi quale rettangolo giudicassero più gradevole, quale destasse in loro una maggiore sensazione di armonia, di «bellezza».

Gli esiti, pubblicati nel 1879, rivelarono una preferenza del 35% per il rettangolo aureo (fig. 2). Successivamente ci furono numerose contestazioni sulla correttezza del metodo seguito e l'esperimento continuò, dopo avere apportato modifiche al metodo di indagine, dando risultati che in qualche modo portavano a conclusioni diverse, ma che, in ogni caso, aprivano la strada a nuove indagini anche di carattere psicologico.

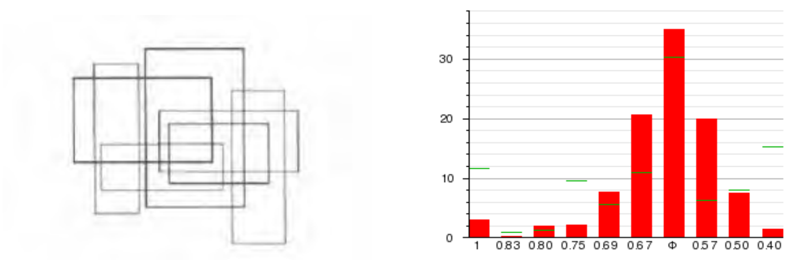


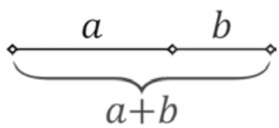
Fig.2

4 - La sezione aurea: la divina proporzione

In Matematica due quantità disuguali a e b si dicono in rapporto aureo se la maggiore è medio proporzionale tra la somma delle due e la minore.

Se $a > b$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$



a + *b* sta ad *a* come *a* sta a *b*

Il rapporto tra due quantità in rapporto aureo viene detto sezione aurea e indicato con la lettera φ. Posto

$$\frac{a}{b} = \varphi$$

$$da \ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad si\ ottiene\ 1 + \frac{b}{a} = \varphi\ cioè\ 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi\ da\ cui$$

$$\varphi + 1 = \varphi^2 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

la cui soluzione positiva è

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

Questo numero, noto come *numero aureo* o *rapporto aureo* o *divina* proporzione, sembra abbia rappresentato, per secoli, e rappresenta tutt'oggi lo standard di riferimento della perfezione, la grazia e l'armonia, sia in architettura, scultura e pittura, sia nella natura.

Più di tutti l'opera di Luca Pacioli "De Divina Proportione", ha contribuito a diffondere la convinzione che questa proporzione fosse considerata la chiave universale per interpretare il mistero della bellezza e anche della natura.

Secondo Luca Pacioli, tra tutte le possibili proporzioni, quella aurea sembra essere la vera ispiratrice della bellezza, quindi del creato, quindi del Suo creatore, quindi Divina (Luca Pacioli – De divina proportione 1509):

Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare, né per quantità alcuna rationale exprimere,ma sempre fia occulta e secreta e da lì mathematici chiamata irrationale.

Il simbolo che accompagnò il rapporto aureo fu per molti secoli la lettera greca τ, dal greco *tomè*, che significa taglio o sezione. La scelta della lettera φ è stata fatta solo nel 1900 da Mark Barr, probabilmente in onore del famoso scultore greco Fidia (490-430 a.c.) autore della statua di Zeus nel tempio di Olimpia e supervisore della costruzione del Partenone ad Atene, opere nelle quali sembra essere presente più volte il rapporto aureo.

Qualcuno spiritosamente lega la φ alla F di Fibonacci.

Fig. 3 - Ricostruzione statua di Zeus

Fig. 4 - Partenone

4.1 – Alcune curiosita' su φ: magia dei numeri!

ϕ è l'unico numero irrazionale il cui inverso ha la sua stessa parte decimale.

Infatti da

$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ segue che $\frac{1}{\varphi} = 0{,}6180339887\ldots$

E' anche l'unico numero irrazionale il cui quadrato ha la sua stessa parte decimale

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \approx 2{,}6180339887.......$$

φ può essere altresì rappresentato come valore a cui tende una radice continua infinita o frazione continua infinita con soli 1. Consideriamo inoltre la seguente espressione, che consta di infinite radici quadrate che si succedono l'una nell'altra:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

e chiamiamo x questa espressione (x > 0), poniamo cioè

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

elevando al quadrato si ha:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

da cui $x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$, che è ancora l'equazione della sezione aurea, pertanto è

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887...... = \varphi$$

Quindi è:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+......}}}}$$

Se invece consideriamo l'equazione

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

è possibile scrivere:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 +}}}}$$

La frazione non contiene numeri all'infuori di 1, converge perciò molto lentamente a φ; è come se il rapporto aureo "resistesse" alla sua espressione sotto forma di frazione più di qualunque altro numero irrazionale e, per questa ragione, viene anche detto "il più irrazionale" degli irrazionali.

4.2 – Cenni storici

I pitagorici (500 a.C) si erano già imbattuti in questo rapporto che aveva seriamente messo in crisi la loro dottrina.

In Euclide (300 a.C.) si legge: «si dice che una retta è divisa in *media ed estrema ragione* quando la lunghezza totale della linea sta alla sua parte maggiore come questa sta alla minore».

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci (1175/1235), creò una successione di numeri che ha diverse analogie col numero aureo.

Luca Pacioli 1445/1517: (*De Divina Proporthione)* aveva la pretesa di interpretare la geometria, la filosofia, le scienze alla luce del rapporto aureo.

Martin Ohm 1792/1872 per primo introdusse il termine "sezione aurea".

5 - I Pitagorici e il pentagramma stellato

I pitagorici erano convinti che due segmenti fossero sempre commensurabili cioè che esistesse sempre un loro sottomultiplo comune, un segmento capace di dare misure intere per entrambi i segmenti. Quando invece scoprirono che proprio nel simbolo scelto per la loro scuola, il pentagramma stellato, il rapporto tra la diagonale e il lato non poteva essere espresso come frazione di interi, ne furono letteralmente sconvolti!I triangoli ADE e BCT sono simili, pertanto risulta:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BT} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BD - A}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d - l} \qquad da\ cui \qquad \frac{d}{l} = \frac{1}{\left(\frac{d}{l} - 1\right)}$$

Posto $x = \frac{d}{l}$ si ha $x = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = o$

da cui:

$$x = \frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$$

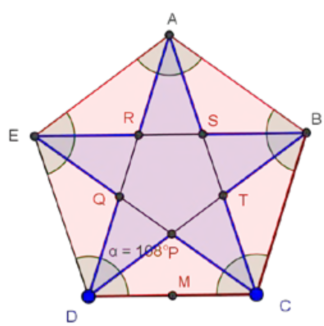
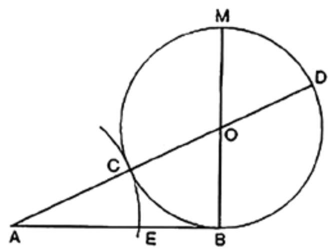


Fig. 5- Il pentagramma stellato

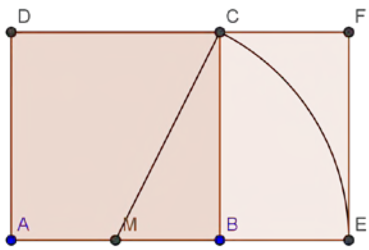
Si narra che il pitagorico Ippaso da Metaponto sia morto in mare come empio per aver provocato l'ira degli dei: aveva scoperto il valore di φ e divulgato l'esistenza delle grandezze incommensurabili e dei numeri irrazionali, scoperta da tenere il più possibile segreta in quanto avrebbe avuto effetti devastanti per la dottrina pitagorica.

6 - Costruzione della sezione aurea di un segmento



Dato il segmento AB tracciare il cerchio di diametro uguale ad AB e tangente ad esso in B. Tracciare la secante per A passante per il centro O del cerchio. La parte esterna della secante (AC) è la sezione aurea del segmento, essendo la tangente (AB) media proporzionale tra l'intera secante (AD) e la sua parte esterna (AE).

7 - Costruzione del rettangolo aureo



Dato il quadrato ABCD (che per semplicità possiamo pensare di lato 1, congiungiamo il punto medio M del lato con il vertice C e tracciamo la circonferenza di centro M e raggio MC fino ad incontrare in E il prolungamento del lato AB. Completiamo quindi la costruzione del rettangolo di base AE e altezza AD: Ebbene in questo rettangolo la base e l'altezza stanno in rapporto aureo!

Infatti da:

$$\overline{MC} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{AE} = \overline{AM} + \overline{ME} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

il rapporto tra base e altezza del rettangolo risulta:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

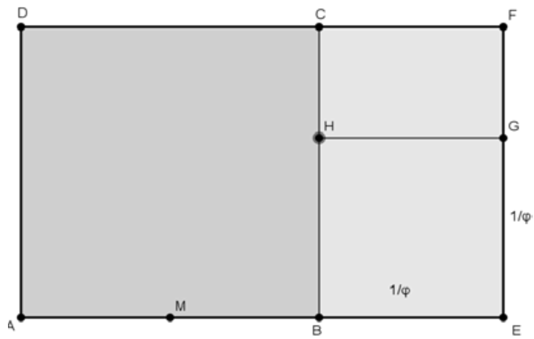
Un tale rettangolo è pertanto un rettangolo aureo, ma c'è di più: anche il rettangolo BEFC è un rettangolo aureo!

Infatti risulta:

$$\mathrm{BE} = \mathrm{AE} - \mathrm{AB} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \quad e \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BE}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$$

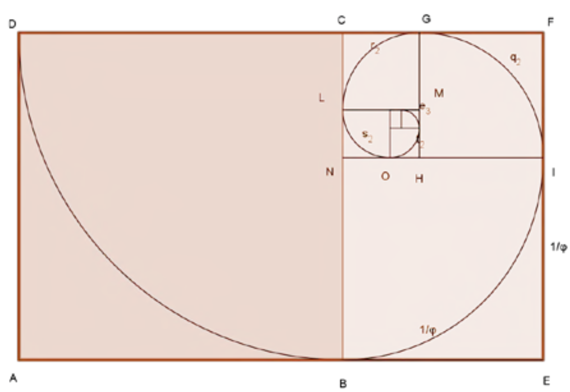
Questo procedimento può essere ripetuto indefinitamente dando origine ad una successione infinita di rettangoli aurei.

Infatti se inscriviamo nel rettangolo BEFC il quadrato di lato BE = $1/\varphi$ si ha:



$$FG = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} \quad e \quad \frac{HF}{FG} = \frac{1}{\varphi} \cdot \varphi^2 = \varphi$$

Se si continua con tale procedimento si ottiene una successione infinita di rettangoli aurei e se si tracciano dei quarti di circonferenze inscritte nei quadrati, compare quella spirale nota come «spirale di Fibonacci » presente anche in altre figure nelle quali il rapporto aureo è molto presente.



8 - La sezione aurea canone di bellezza

Sembra che la "divina proporzione" abbia una capacità straordinaria di generare armonia tra le parti che compongono il tutto: sin dall'antichità è stata riconosciuta come lo standard per definire la bellezza, la grazia e l'armonia, per cui è diventata, nei secoli, un principio compositore di qualsiasi forma d'arte.

8.1 – La sezione aurea nell'antica Grecia

Nella Grecia Classica sembra che architetti ed artisti, nelle loro creazioni, facessero grande uso del rettangolo aureo. Molto frequentemente lo utilizzavano per disegnare la pianta del pavimento e la facciata dei templi.

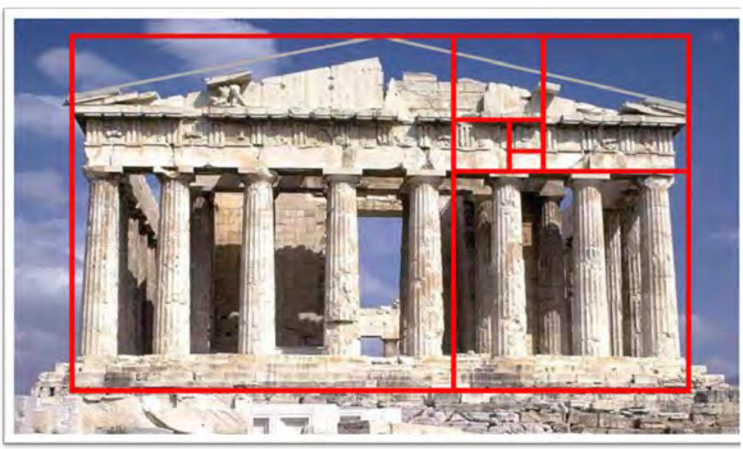


Fig. 6 - Il Partenone (metà V secolo a.C.)

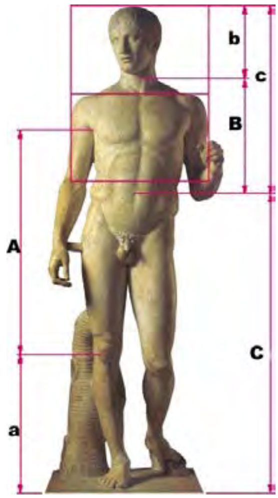


Fig. 7 - Doriforo (fine II - inizio I secolo)

8.2 – La sezione aurea nel Rinascimento

Per gli artisti del Rinascimento (Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, …) il rapporto aureo rappresentò un canone di bellezza cui ispirarsi per ogni composizione artistica, non solo nell'architettura, ma anche nella scultura e nella pittura.

Sembra comunque che talvolta ci sia stato un abuso nell'utilizzo di tale rapporto (Nicotra, 2019, p. 169):

Non sempre la presenza della sezione aurea in opere pittoriche e architettoniche è realmente verificata.

Si assiste, a volte, a un fenomeno di "idolatria" di questo modello matematico di bellezza, con evidenti forzature.

Un esempio è fornito dall' Ultima cena di Leonardo da Vinci, nella quale si è voluto ravvisare la presenza di un rettangolo aureo che circoscriverebbe la figura del Cristo.

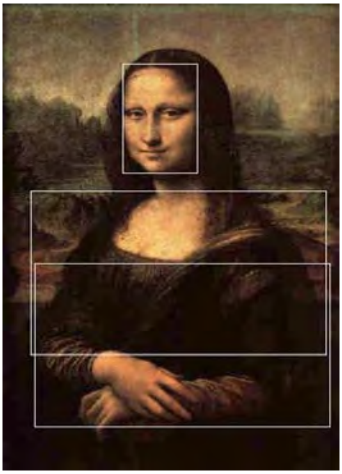


Fig. 8 - Nella Gioconda il Rapporto Aureo è stato individuato:

- nella disposizione del quadro;

- nelle dimensioni del viso;

- nell'area che va dal collo a sopra le mani;

- in quella che va dalla scollatura dell'abito fino a sotto le mani.

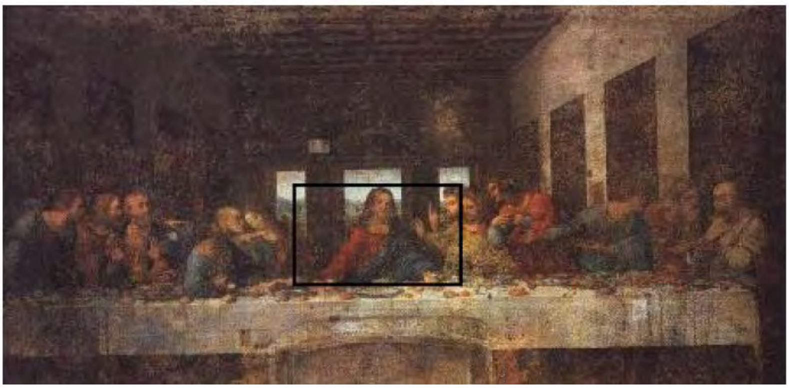


Fig. 9 - Ultima Cena – Leonardo da Vinci

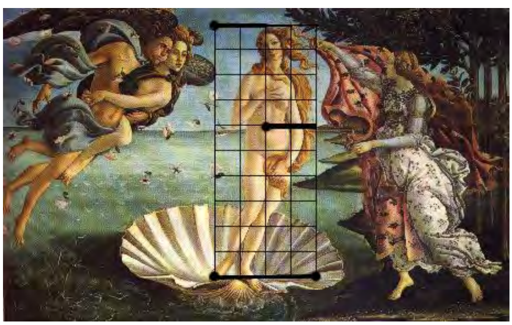


Fig. 10 -Nascita di Venere – Sandro Botticelli

8.3 – La sezione aurea in natura

La proporzione aurea è molto presente anche in natura che sembra voler conferire bellezza ed armonia al creato: il Nautilus, ad esempio, è un mollusco la cui conchiglia segue perfettamente la spirale aurea; la stessa spirale aurea si riscontra nelle corna del muflone o nella coda dell'ippocampo nonché nella disposizione dei petali di alcuni fiori.

Fig. 11

Fig. 12

8.4 – La sezione aurea nell'uomo

Leonardo Da Vinci in *L'Uomo*, studia le proporzioni della sezione aurea attingendo dal *De architectura* di Vitruvio. Una persona è inscritta in un quadrato e in un cerchio. Nel quadrato, l'altezza dell'uomo è uguale alla distanza tra le estremità delle mani con le braccia distese . La retta orizzontale passante per l'ombelico divide i lati esattamente in rapporto aureo tra loro.

L'ombelico è il centro del cerchio che inscrive la persona umana con le braccia e gambe aperte.

Se si sdraia un uomo sul dorso, mani e piedi allargati, e si punta un compasso sul suo ombelico, con una apertura uguale alla distanza tra ombelico ed estremità del dito medio di una della mani, si descriverà un cerchio, in cui risulta inscritto il corpo umano con braccia e gambe aperte.

Vitruvio, nel terzo libro del De Architettura, tratta separatamente le due figure antropometriche: "homo ad quadratum" e "homo ad circulum"

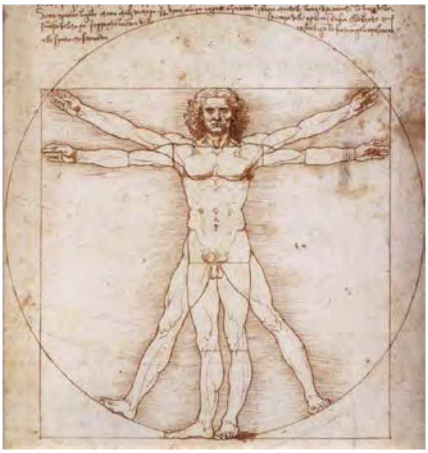


Fig. 13- L'uomo vitruviano di Leonardo da Vinci

Nella sintesi operata da Leonardo fra il cerchio e il quadrato il raggio del cerchio rappresenta la sezione aurea del lato del quadrato.

Nel "*L'Uomo*" sono aurei, oltre che il rapporto tra l'altezza complessiva e l'altezza da terra dell'ombelico, anche il rapporto tra la lunghezza dell'intera gamba e la distanza dal collo del femore al ginocchio o il rapporto tra la lunghezza dell'intero braccio e la distanza tra gomito e punta del dito medio.

Lo stesso vale, se si misurano le dita della mano, anche per i rapporti tra le lunghezze delle falangi del dito medio e anulare.

L'autorevole giornale francese "Le Figaro" qualche anno fa ha proclamato Laetitia Casta "donna del millennio", rilevando, nelle sue misure, "il numero d'oro della perfezione classica" (fig.6).

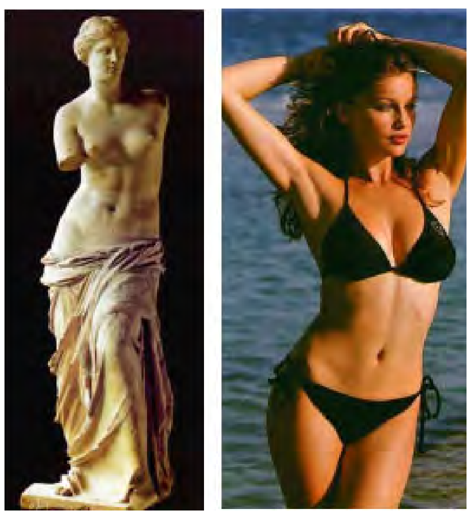


Fig. 14

Bella Hadid (figura 14) è invece oggi la donna più bella del mondo secondo il chirurgo plastico di Harley Street Julian De Silva. Il suo volto è quello che risulta più vicino di tutte le altre candidate alle proporzioni della sezione aurea: con un punteggio di 94,35%.

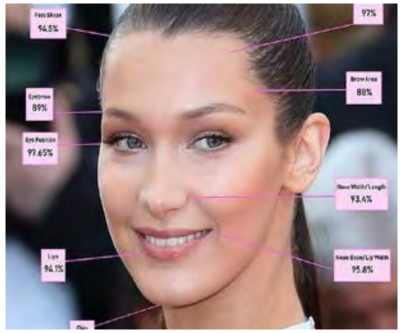


Fig.15

Secondo lo stesso chirurgo, l'attore britannico Robert Pattinson, il cui volto è quello che più si avvicina all'ideale classico della sezione aurea, è invece considerato oggi l'uomo più bello del mondo.

8.5 – Qualche curiosità

L'uccellino di Twitter è stato costruito per mezzo di circonferenze sovrapposte aventi i diametri pari a numeri della sequenza di Fibonacci (figura 16).

Una costruzione analoga è stata fatta anche nella realizzazione dei loghi Apple e MC DONALD'S (figure. 17 e 18)

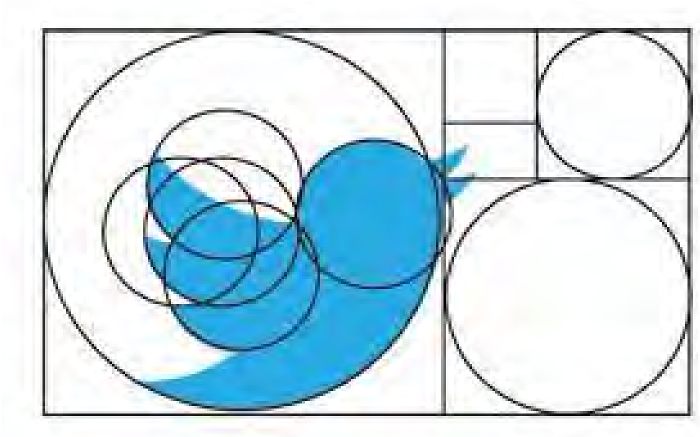


Fig. 16

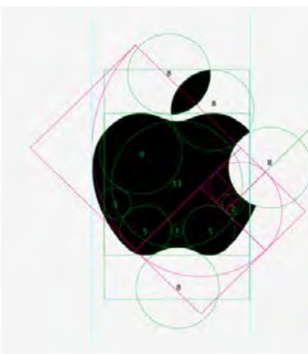


Fig. 17

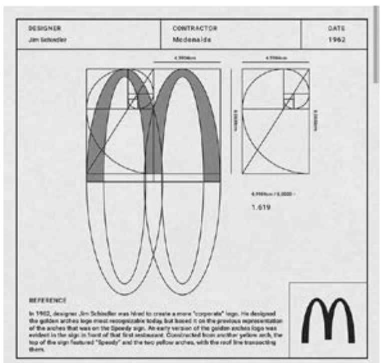


Fig. 18

9 - La successione di Fibonacci e la sezione aurea

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci, (XII–XIII secolo) è stato uno dei più grandi matematici del Medioevo (figura 19).

Fig. 19 - Leonardo Pisano

Un problema postogli dal re Federico II gli fornì l'occasione per l'introduzione della serie (di Fibonacci) che si riscontra in numerosi esempi in natura e che ha uno strettissimo legame con il Numero Aureo.

Un contadino chiuse nella sua conigliera una coppia di conigli per avviare un allevamento. La coppia prese a prolificare il secondo mese una nuova coppia di conigli. Nei mesi che seguirono la coppia capostipite continuò a generare regolarmente una coppia al mese e altrettanto fece ciascuna delle coppie generate, ciascuna però a partire dal secondo mese dopo la propria nascita.

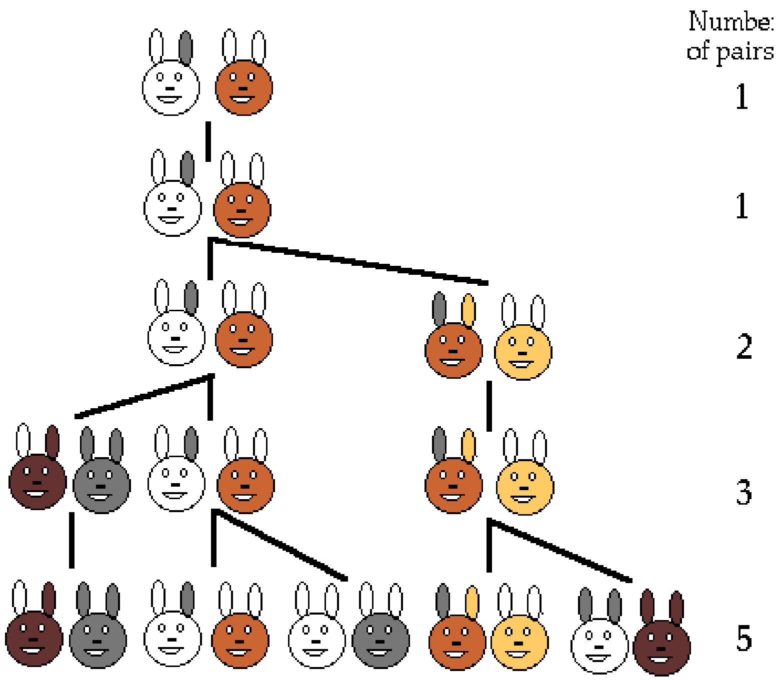
Quante coppie di conigli popolarono la conigliera dopo il decimo mese se nel frattempo non morì nessun coniglio?

La soluzione è data dalla successione di Fibonacci:

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; 233 ; 377 ; ………

dove risulta, per ogni n,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$



9.1 – Alcune proprieta' della successione di Fibonacci

È immediato verificare le seguenti proprietà della successione di Fibonacci:

Comunque si prendono due elementi, in posizione n-esima ed m-esima, il loro Massimo Comune Divisore è un elemento della successione di posizione p, M.C.D. tra n ed m

Il quadrato di ogni elemento differisce di uno (alternativamente in più o in meno) dal prodotto del precedente per il successivo

Sommando alternativamente tutti gli elementi della successione (uno sì ed uno no) il risultato è sempre l'elemento successivo all'ultimo sommato.

9.2 – I numeri di Fibonacci e la sezione aurea

Fu Keplero, intorno al 1600, a riconoscere per la prima volta, una stretta relazione tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea.

E' di Keplero la famosa frase:

«La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la sezione aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello».

Consideriamo questa successione di potenze di φ (v. Nicotra 2019):

$$1; \varphi; \varphi^2; \varphi^3; \varphi^4; \varphi^5; \ldots$$

ricordando che $\varphi^2 = \varphi + 1$ è possibile scrivere:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$
$$\varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi$$
$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi^2 + \varphi) = \varphi^3 + \varphi^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{n+2} = \varphi \cdot \varphi^{n+1} = \varphi \cdot (\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

Come nella successione di Fibonacci avviene che

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

anche nella successione delle potenze di φ, ciascun termine si ricava sommando i due termini che lo precedono

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

e come avviene per il rapporto

$$\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi$$

anche il rapporto tra un termine della successione di Fibonacci e il termine che lo precede si avvicina progressivamente a φ, al crescere del valore di n (come è possibile dedurre dalla seguente sequenza):

1 : 1	=	1,000000…
2 : 1	=	2,000000…
3 : 2	=	1,500000…
5 : 3	=	1,666666…
8 : 5	=	1,600000…
13 : 8	=	1,625000…
21 : 13	=	1,615384…
34 : 21	=	1,619047…
55 : 34	=	1,617647…
89 : 55	=	1,618181…
144 : 89	=	1,617987…
233 : 144	=	1,618055…
377 : 233	=	1,618025…
610 : 377	=	1,618037…
987 : 610	=	1,618032…
1597 : 987	=	1,618034…
2584 : 1597	=	1,618033…
4181 : 2584	=	1,618034…
……………….	=	………………..

Risulta dunque:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

9.3 – La formula di Binet

Ci permette di determinare il termine n-simo della successione di Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

È sorprendente constatare come l'applicazione di una formula costituita da elementi irrazionali possa restituire come risultato numeri interi!!

9.4 – I numeri di Fibonacci in natura

Molte piante hanno un numero di petali pari ai numeri di Fibonacci. Il lilium e l'iris ne hanno 3, la rosa selvaggia 5, il delphinium 8, la cinerarian 13 , la margherita 34, e si potrebbero trovare molti altri esempi (figura 20).

Iris, 3 petali; parnassia, 5 petali; cosmea, 8 petali.

Fig. 20

Gli stessi numeri si ritrovano spesso anche nella disposizione delle foglie di numerose piante (fillottassi, fig. 14).

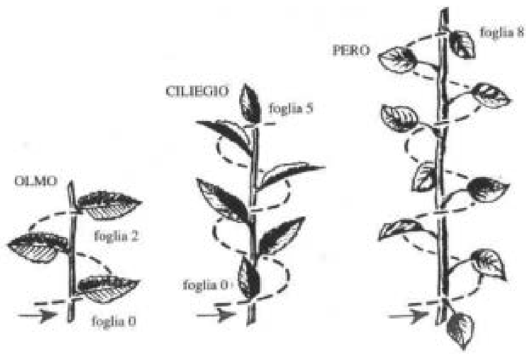


Fig. 21 - La fillottassi

Keplero (1571-1630) per primo intuì l'esistenza di una relazione tra la fillotassi e i numeri di Fibonacci, ma fu necessario aspettare il XIX secolo perché l'intuizione di Keplero venisse confermata dallo studio della botanica che definisce la regola generale in base alla quale i rapporti di fillotassi si possono esprimere come rapporti tra numeri di Fibonacci. Sembra che la fillotassi ottimizzi l'assorbimento della luce da parte della pianta, in quanto la disposizione a spirale consente alle foglie di non farsi ombra le une con le altre.

9.5 – I numeri di Fibonacci nell'arte contemporanea

Mario Merz (Milano, 1925 – Torino, 2003) artista, pittore e scultore italiano, esponente della corrente dell' arte povera, dal 1970 ha introdotto nelle sue opere la successione di

Fibonacci. Nel 2000 ha collocato i numeri della successione realizzati al neon, sulla Mole Antonelliana di Torino (i numeri in volo), e poco prima della sua morte, sul soffitto della stazione metropolitana Vanvitelli di Napoli.

Fig. 22 - La Mole Antonelliana

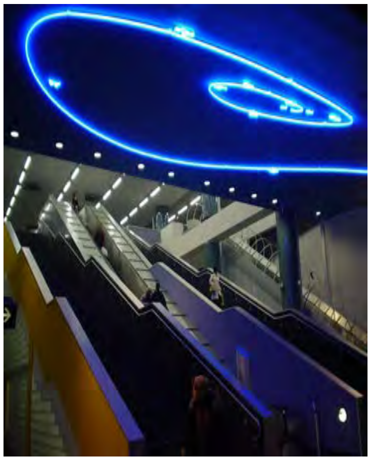


Fig. 24 - Stazione metropolitana Vanvitelli

Bibliografia

Boyer Carl B. (1990). *Storia della matematica,* A. Mondadori.

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2018). Is the golden section a key for understanding beauty? Part I, *«Science & Philosophy», v. 6(1), p. 93*.

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2018). Is the golden section a key for understanding beauty? Part II, *«Science & Philosophy», v. 6(2), p. 129.*

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2019). Is the golden section a key for understanding beauty? Part III, *«Science & Philosophy», v. 7(2), p. 83*.

Nicotra Luca (2019)– Osservazioni critiche sulla sezione aurea, in *Matematica, Architettura, Fisica, Natura* (a cura di Ferdinando Casolaro e Salvatore Sessa), Roma: Aracne

http://misterpalomar.blogspot.com/2012/04/la-sezione-aurea-e le-regole-del-giuoco.html

(https://www.youtube.com/watch?v=abagpn8ROOo): la trama dei numeri di Fibonacci

(https://www.accademiavenezia.it/upload/docs/docenti/file/244/ordinecomplessitaepreferenzeestetiche.pdf): ordine, complessità e preferenze estetiche: