

L'Icosaedro e le Cupole Geodetiche

Giuseppe Conti * Raffaella Paoletti **
Alberto Trotta***

*Dip. Matematica Università di Firenze; giuseppe.conti@unifi.it

** Dip. Matematica Università di Firenze; raffaella.paoletti@unifi.it

***IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno; albertotrotta@virgilio.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.069

Sunto: *In un precedente articolo gli autori hanno trattato la costruzione delle cupole geodetiche dal punto di vista geometrico. Con il procedimento ivi descritto si ottiene la geometria di gran parte delle cupole geodetiche presenti in architettura. Tuttavia, tale costruzione non comprende alcuni esempi importanti di cupole, come, ad esempio, quelle a forma di pentacisdodecaedro e la cupola del Parco Epcot, che si trova a Disney World, in Florida. In questa nota mostriamo un metodo di costruzione più generale, dovuto a M. Goldberg, D. Caspar e A. Klug, che comprende, come caso particolare, quello esposto nel precedente articolo. Inoltre, vengono descritti i poliedri di Goldberg, che sono i duali delle cupole geodetiche; questi poliedri hanno notevoli proprietà geometriche che sono messe a frutto nella costruzione di cupole aventi questa forma. Infine, mostriamo una formula che permette di determinare, in maniera semplice, il numero delle facce di una cupola geodetica; da questo è possibile calcolare anche il numero dei suoi spigoli, dei suoi vertici e quelli del suo poliedro duale.*

Parole Chiave: *Poliedro, poliedro convesso, poliedro duale, formula di Eulero per i poliedri.*

Abstract: *In a previous paper, the authors dealt with the construction of geodesic domes from a geometric point of view. With the procedure described there, we obtain the geometry of most of the geodesic domes built in architecture. However, that construction don't include some notable examples of domes, such as the pentacisdodecahedron-shaped ones and the dome situated in the Epcot Park, located in Disney World, Florida. In this note we show a more general method, due to M. Goldberg, D. Caspar and A. Klug, which includes, as a particular case, the one presented in the previous paper. The Goldberg polyhedra, which are the duals of the geodesic domes, are also considered; these polyhedra have remarkable geometric properties which are put to good use in the construction of domes having this shape. Finally, we show a formula that allows us to determine, in a simple way, the number of faces of a geodesic dome; from this it's also possible to determine the number of its edges, its vertices and those of its dual polyhedron.*

Keywords: *Polyhedron, convex polyhedron, dual polyhedron, Euler's formula for polyhedra.*

1 - Generalità

In un precedente articolo (Conti, Paoletti, Trotta, 2021) gli autori hanno studiato la geometria delle cupole geodetiche; queste sono dei poliedri a facce triangolari, inscritti in una sfera, i cui spigoli giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera ed i cui vertici hanno grado¹ 5 oppure 6. Talvolta si chiama cupola geodetica anche una parte di questo poliedro, come, ad esempio, quello che corrisponde a una calotta sferica. Poiché una cupola geodetica approssima una sfera, talvolta essa viene chiamata anche sfera geodetica. In tale articolo abbiamo esposto una costruzione

¹ Si chiama grado di un vertice il numero degli spigoli che hanno quel vertice come estremo.

delle cupole geodetiche basata su particolari suddivisioni delle facce dell'icosaedro regolare; in questo articolo presentiamo costruzioni più generali, di cui quelle esposte precedentemente sono casi particolari. Vedremo che in questo modo si ottengono esempi importanti di cupole geodetiche, come la cupola del Parco Epcot, che si trova a Disney World in Florida, e il pentacisdodecaedro (figura 1); questi tipi di cupole non si possono ottenere con le precedenti costruzioni.

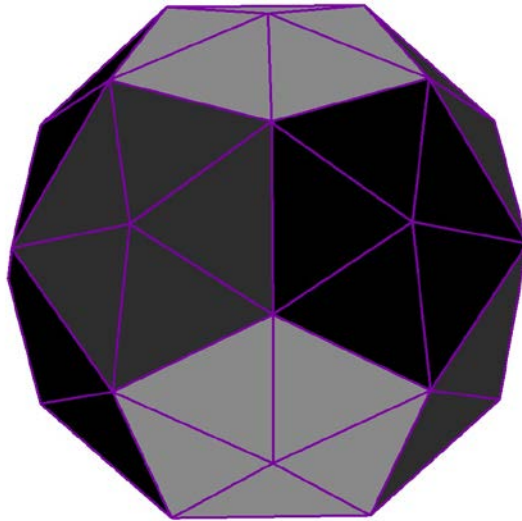


Fig. 1 - Pentacisdodecaedro

Ricordiamo che il pentacisdodecaedro si ottiene a partire dal dodecaedro regolare costruendo su ogni sua faccia una piramide retta a base pentagonale, in modo che i vertici di queste piramidi appartengano tutti alla sfera circoscritta al dodecaedro. Osserveremo in seguito che tale importante cupola geodetica si può ottenere anche a partire dall'icosaedro, tramite una particolare costruzione che rientra fra quelle che esporremo nel presente articolo.

2 - Costruzioni geometriche di sfere geodetiche

Descriviamo un metodo, introdotto nel 1962 da M. Goldberg, D. Caspar e A. Klug (Brinkmann, Goetschalckx P., Schein, 2017) per realizzare una famiglia infinita di cupole geodetiche, dotate della massima regolarità possibile in quanto possiedono le simmetrie rotazionali dell'icosaedro.²

Consideriamo una tassellazione del piano formata da triangoli equilateri di lato unitario, come in figura 2.

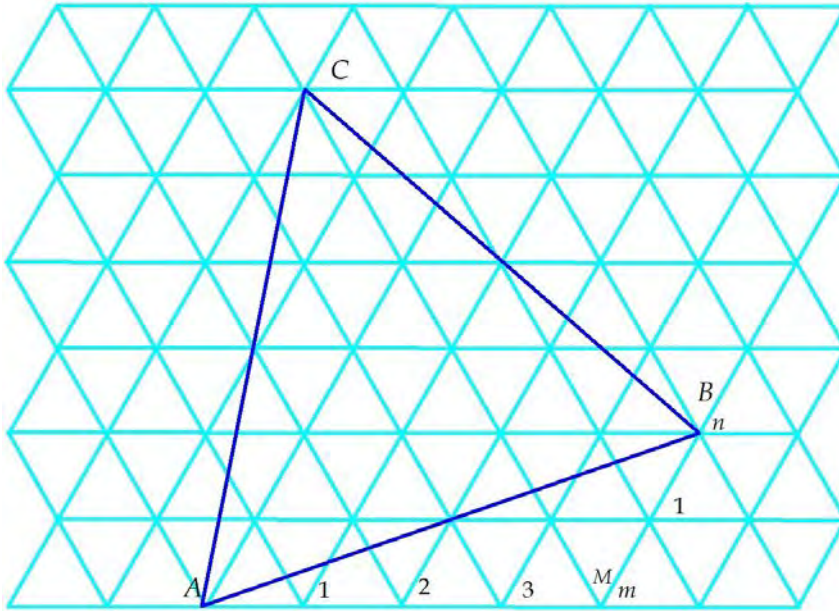
A partire da un vertice A della tassellazione, scegliamo una direzione della tassellazione e percorriamone m spigoli; poi cambiamo direzione ruotando di 60° in senso antiorario e procediamo di n spigoli fino ad arrivare al vertice B . Da qui ruotiamo di altri 60° in verso antiorario e, ripetendo il procedimento precedente, arriviamo ad un altro vertice C della tassellazione.

Se ripetiamo ancora lo stesso procedimento, ritorniamo nel punto A . Abbiamo in tal modo individuato un triangolo equilatero ABC , più grande di quelli del reticolo di partenza, eccetto il caso $m = 1$ e $n = 0$ oppure $m = 0$ e $n = 1$.

Si dice anche che abbiamo ottenuto una tassellazione del tipo (m, n) del triangolo ABC .

Sostituiamo ad ogni faccia di un icosaedro questo triangolo ABC con tutti gli elementi della tassellazione originale in esso contenuti (Battaia, 2019, p. 210).

² Esporremo in seguito l'elenco di queste simmetrie.

Fig. 2 - La suddivisione $m > 0, n > 0$

Successivamente, proiettiamo dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro i vertici, determinati da questa tassellazione, sulla sfera stessa, tralasciando le proiezioni degli elementi che si trovano sui lati del triangolo grande ABC , eccetto i casi $m = 0$ oppure $n = 0$; otteniamo in tal modo i vertici di una sfera geodetica S a facce triangolari. Notiamo che i vertici dei triangoli piccoli possono trovarsi in parte su una faccia dell'icosaedro e in parte su una faccia contigua; tuttavia, i triangoli che si trovano in parte su una faccia e in parte su un'altra faccia contigua, si "ricompongono" nella proiezione.

I triangoli piccoli, ottenuti con questa proiezione, non sono più equilateri in quanto i loro vertici, prima della proiezione, non appartengono alla sfera circoscritta all'icosaedro, eccetto i vertici dei triangoli grandi.

Intorno ai vertici che appartengono anche all'icosaedro si dispongono cinque triangoli, mentre intorno a tutti gli altri vertici si collocano sei triangoli.

La cupola geodetica così ottenuta è detta **di tipo** (m, n) perché ottenuta con una tassellazione di tipo (m, n) delle facce dell'icosaedro.

Notiamo che le tassellazioni di tipo $(m, 0)$ sono formate da triangoli equilateri con i lati paralleli ai lati del triangolo equilatero ABC . La stessa cosa accade per le tassellazioni di tipo $(0, n)$ (Figura 3).

In questi casi le corrispondenti cupole geodetiche sono dette di Classe I. Tali cupole geodetiche sono state studiate in un precedente articolo (Conti e altri, 2021). Nella Figura 3 è riportata una tassellazione di tipo $(5, 0)$.

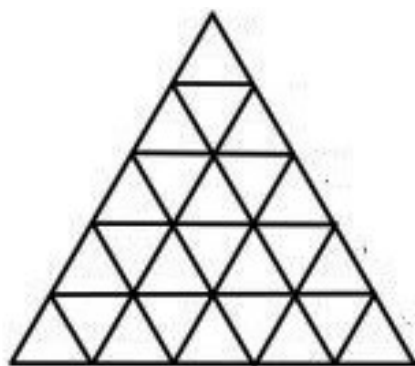


Fig. - 3. Tassellazione di tipo $(5, 0)$

La semicupola geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 4.

Nel caso di tassellazioni di tipo (n, n) , con $n \neq 0$, si dice che la cupola geodetica è di Classe II.

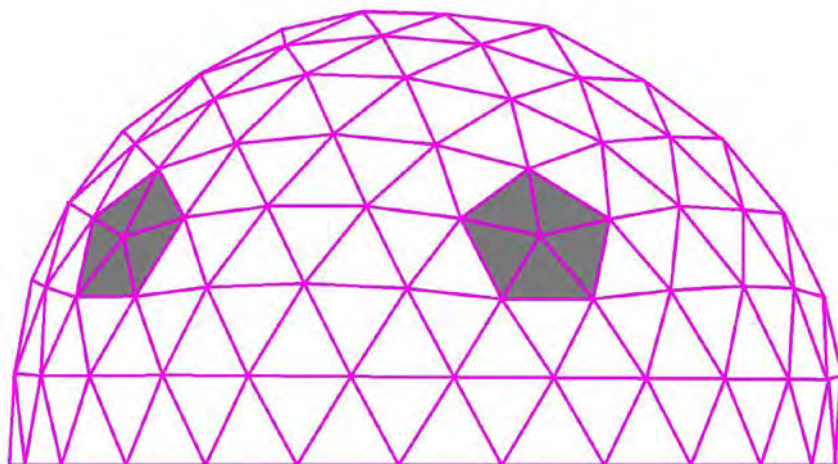


Fig. 4 - Semicupola geodetica di tipo (5, 0)

Nella Figura 5 è disegnata una tassellazione di tipo (2, 2).

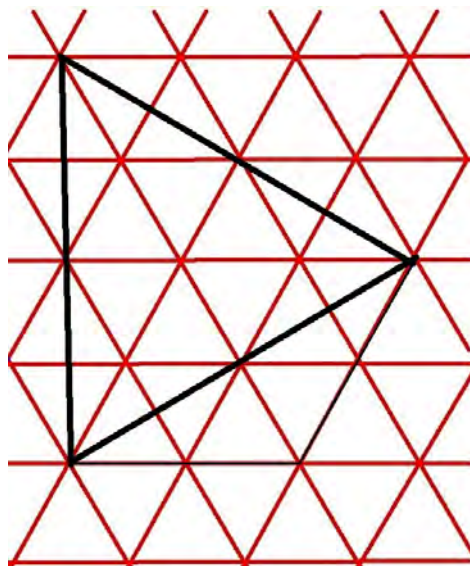


Fig. 5 - Tassellazione di tipo (2, 2)

La cupola geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 6.

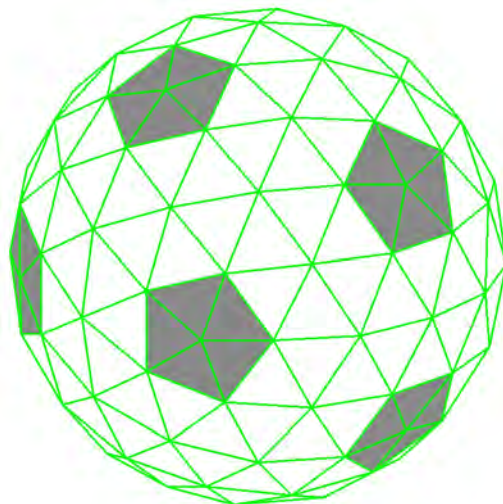


Fig. 6 - Cupola geodetica di tipo (2, 2)

Nel sito internet

<https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml>

è riportato un esempio di cupola geodetica del tipo (2, 2), usata per telecomunicazioni, che si trova nell'Antartide.

È interessante notare che il pentacisdodecaedro (figura 1) non è altro che la cupola geodetica di tipo (1, 1).

Come si può vedere anche dalle Figure 5 e 7, le tassellazioni di tipo di tipo (n, n) sono formate da triangoli equilateri e semitriangoli equilateri con ciascun lato perpendicolare ad uno dei lati del triangolo ABC .

Nel caso di tassellazioni di tipo (n, m) , con $n \neq m$ e almeno uno dei due diverso da 0, si dice che la cupola geodetica è di Classe III.

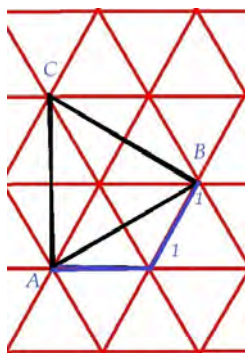


Fig. 7 - Tassellazione di tipo (1, 1)

Notiamo che i poliedri di questa classe sono chirali.³

Ogni tassellazione di questo tipo è formata da triangoli equilateri, o porzioni di triangoli equilateri, i cui lati non sono né paralleli né perpendicolari ai lati del triangolo ABC . Ad esempio, consideriamo la tassellazione di tipo (2, 1) (Figura 8).

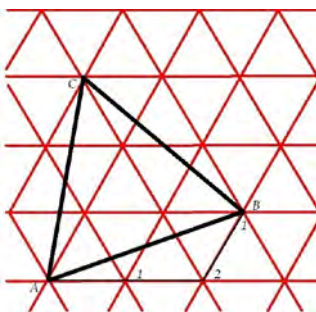


Fig. 8 - La tassellazione di tipo (2, 1)

³ Un solido si dice chirale (dalla parola greca $\chi\epsilon\iota\rho$ che significa “mano”) se non è sovrapponibile, tramite rotazioni e traslazioni, alla sua immagine speculare. Esempi di oggetti chirali sono le nostre mani e i nostri piedi. La definizione di figura chirale può essere data anche nel piano; ad esempio, un triangolo scaleno è una figura piana chirale.

Con questa tassellazione otteniamo la cupola geodetica della figura 9.

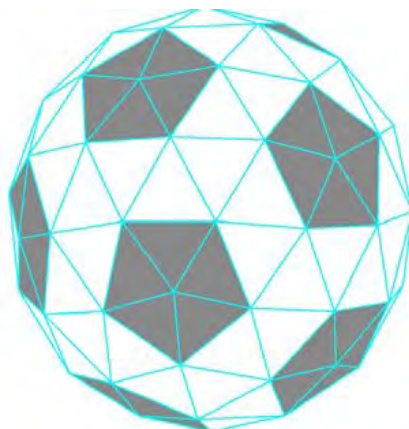


Fig. 9 - La cupola geodetica di tipo (2, 1)

La costruzione fatta nel caso $m = 0$ oppure $n = 0$ può essere eseguita anche a partire dagli altri poliedri regolari a facce triangolari, cioè il tetraedro e l'ottaedro (Battaia, 2019, pp. 221-223); tuttavia, quasi tutte le cupole geodetiche si ottengono considerando l'icosaedro come poliedro di partenza.

Ricordiamo che le facce (triangolari) della sfera geodetica ottenuta con questa costruzione sono triangoli isosceli, anche se costruiti partendo dai triangoli equilateri della tassellazione; inoltre esse non sono tutte uguali fra loro.

Oltre ai tre poliedri regolari a facce triangolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro), esistono soltanto 5 poliedri convessi le cui facce sono triangoli equilateri; tali poliedri sono chiamati deltaedri.⁴

⁴ I deltaedri furono studiati dal matematico olandese Bartel Leendert van der Waerden nel 1947; furono chiamati così da Martyn Cundy nel 1952 (vedi Cundy, 1952). Il loro nome deriva dalla lettera greca *delta*, che ha la forma di un triangolo.

Calcoliamo ora il numero di facce triangolari presenti in una cupola geodetica.

Facciamo riferimento alla figura 2 e ricordiamo che i triangoli equilateri che formano la tassellazione del piano hanno il lato unitario.

Determiniamo anzitutto il modulo del vettore \overrightarrow{AB} . Si ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. Supponiamo di riferire il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in cui il punto A è l'origine e la retta AM è l'asse delle ascisse, con il verso concorde con quello del vettore \overrightarrow{AM} .

Si ottiene che $\overrightarrow{AM} = (m, 0)$ e $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$.

Ne consegue che

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \left(m + \frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$$

perciò si ha che la misura del segmento AB è

$$\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Segue che l'area del triangolo equilatero ABC è

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2 + mn + n^2).$$

L'area di ogni triangolino di lato unitario della tassellazione è $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Possiamo concludere che il numero dei triangoli di lato unitario contenuti nel triangolo ABC è dato dal rapporto fra l'area del triangolo ABC e l'area del triangolo unitario; perciò è:

$$T = m^2 + mn + n^2.$$

Di conseguenza il numero delle facce triangolari che formano una cupola geodetica di tipo (m, n) è $20T$.

Il numero T è anche chiamato numero di triangolazione relativo cupola geodetica di tipo (m, n) ed è molto utilizzato in virologia. Ad esempio, il numero delle facce della cupola geodetica nella Figura 9 è 140.

Invece il numero delle facce della cupola geodetica di tipo $(1, 1)$ (il pentacisdodecaedro) è 60, essendo $T = 3$; a questo risultato si può arrivare anche tenendo conto dell'altra costruzione di questa cupola geodetica, ottenuta a partire dal dodecaedro (vedi Conti e altri, 2018).

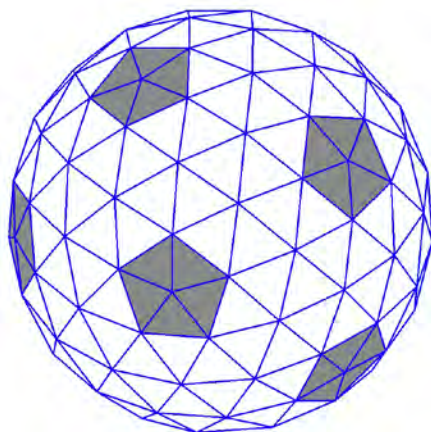


Fig. 10 - Cupola geodetica di tipo $(3, 1)$

La cupola geodetica di tipo $(3,1)$ (figura 10) ha 260 facce.

Nel paragrafo successivo calcoleremo anche il numero degli spigoli e dei vertici delle cupole geodetiche.

3 - Poliedri duali di cupole geodetiche

I duali delle cupole geodetiche⁵ sono i cosiddetti poliedri di Goldberg. Essi sono poliedri convessi formati da esagoni e pentagoni e furono introdotti nel 1937 da Michael Goldberg (vedi Goldberg, 1937).

Tali poliedri sono definiti da tre proprietà: ogni faccia è un pentagono o un esagono; in ogni vertice si incontrano esattamente tre facce; hanno le stesse simmetrie rotazionali dell'icosaedro, che sono:

- l'applicazione identica,
- 12 rotazioni di 72° ,
- 12 rotazioni di 144° ,
- 20 rotazioni di 120° ,
- 15 rotazioni di 180° .

Da queste proprietà segue che i poliedri di Goldberg hanno tutti gli spigoli uguali; le facce pentagonali sono pentagoni regolari, mentre quelle esagonali sono esagoni equilateri ma non regolari.

I poliedri di Goldberg sono chiamati anche fullereni, dal nome di Richard Buckminster Fuller (1895 - 1983), l'architetto statunitense che fu un pioniere nella costruzione delle cupole geodetiche a partire dal 1948.

Vediamo alcuni esempi⁶.

Il duale della cupola geodetica del tipo (1, 1) è l'icosaedro troncato (figura 11)⁷ (Conti G., Trotta, Conti F., 2018).

⁵ Il duale di una cupola geodetica è il poliedro che ha per vertici i centri delle facce della cupola e in cui due vertici sono adiacenti se lo sono le facce corrispondenti nella cupola.

⁶ Per una lista sufficientemente esaustiva di cupole geodetiche e dei loro poliedri duali si può fare riferimento a Wenninger, 1979.

Osserviamo che il dodecaedro regolare e l'icosaedro troncato sono gli unici poliedri di Goldberg in cui tutte le facce sono poligoni regolari.



Fig. 11 - Icosaedro troncato (pallone da calcio)

Osserviamo che taluni considerano i poliedri di Goldberg come sfere geodetiche; questo ci sembra poco corretto perché, a parte il dodecaedro regolare e l'icosaedro troncato, i poliedri di Goldberg non sono inscrittibili in una sfera; inoltre, essi non hanno le facce triangolari.

Tuttavia, esistono diverse strutture architettoniche che hanno la forma di poliedri di Goldberg. Una delle più interessanti è l'Eden Project, un complesso turistico in Cornovaglia, a circa 2 km dalla città di St Austell, ricavato nello spazio di una ex-cava (Conti G., Trotta, Conti F., 2018). In

⁷ Tale poliedro è chiamato anche *buckminsterfullerene*, oppure *backyball*. Ad essere rigorosi, l'icosaedro troncato è il duale del pentacisdodecaedro circoscritto ad una sfera, che è un particolare solido di Catalan. Invece, il pentacisdodecaedro che stiamo considerando, essendo una cupola geodetica, è inscritto in una sfera. Tuttavia la differenza fra queste due tipologie di pentacisdodecaedro è piccolissima (vedi Conti e altri, 2021).

questo complesso si trovano due grandi biosfere il cui interno ospita circa 100.000 piante provenienti da tutto il mondo.

Dalla formula di Eulero segue che tutti i poliedri di Goldberg possiedono esattamente 12 pentagoni.⁸

Per dimostrare questa proprietà, indichiamo con F_5 e F_6 il numero delle facce pentagonali ed esagonali rispettivamente. Poiché ogni spigolo è comune a due facce e ogni vertice è comune a tre facce, si ha, indicando con S e V il numero degli spigoli e dei vertici rispettivamente:

$$S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2} \text{ e } V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}$$

Sostituendo nella relazione di Eulero $F + V = S + 2$, si ottiene

$$F_5 + F_6 + \frac{5F_5 + 6F_6}{3} = \frac{5F_5 + 6F_6}{2} + 2$$

da cui, con semplici calcoli, si ricava: $F_5 = 12$.

Sostituendo $F_5 = 12$ nella relazione $V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}$ si ottiene che il numero delle facce esagonali di un poliedro di Goldberg è

$$F_6 = \frac{V}{2} - 10$$

Se il poliedro è un dodecaedro, poiché $V = 20$ si ottiene $F_6 = 0$, come deve essere.

⁸ Osserviamo che dalla Formule di Eulero segue anche che non esistono poliedri convessi le cui facce siano tutte esagonali.

Nel caso dell'icosaedro troncato si ha $V = 60$ e, di conseguenza, $F_6 = 20$. In seguito indicheremo con il simbolo $GC_{m,n}$ il poliedro di Goldberg duale della cupola geodetica del tipo (m, n) . Il poliedro duale della cupola geodetica del tipo $(2, 1)$ della figura 9 è il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ della figura 12.

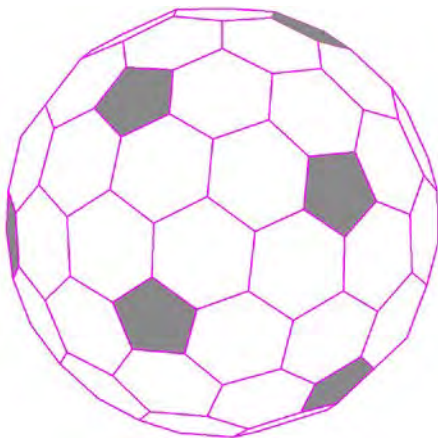


Fig. 12 - Poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$

Abbiamo visto che la cupola geodetica di tipo $(2, 1)$ ha 140 facce; di conseguenza il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ ha 140 vertici. Calcoliamone gli altri elementi.

Dalla formula $F_6 = V/2 - 10$, si ha che $F_6 = 60$; essendo sempre 12 il numero delle facce pentagonali, si ha che $GC_{2,1}$ ha 72 facce e quindi dalla relazione di Eulero segue che esso ha 210 spigoli. Allora la cupola geodetica di tipo $(2, 1)$, essendo il poliedro duale⁹ del poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$, ha 210 spigoli e 72 vertici.

⁹ Ricordiamo che, se il poliedro Q è il duale del poliedro P , allora P è il duale del poliedro Q .

Generalizzando questo procedimento, si ottengono le seguenti formule per le cupole geodetiche di tipo (m, n) :

$$F = 20T \qquad S = 30T \qquad V = 10T + 2$$

dove, ricordiamo, $T = m^2 + mn + n^2$.

La prima relazione è già stata dimostrata in precedenza.

Per provare la seconda, ricordiamo che nei poliedri di Goldberg il numero degli spigoli è $S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2}$ e che tale numero è uguale al numero degli spigoli della cupola geodetica sua duale; inoltre il numero dei vertici V_G di un poliedro di Goldberg soddisfa la seguente relazione

$$F_6 = \frac{V_G}{2} - 10$$

con $V_G =$ numero delle facce della cupola geodetica duale = $20T$. Dunque si ha dalla relazione precedente:

$$S = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot F_6}{2} = 30 + 3 \left(\frac{V_G}{2} - 10 \right) = \frac{3}{2} \cdot 20T = 30T$$

Dalla relazione di Eulero segue, infine, la terza formula:

$$V = 10T + 2.$$

Ad esempio, la cupola geodetica di tipo $(4, 1)$ (vedere la figura 13) ha $T = 21$. Di conseguenza essa ha 420 facce, 630 spigoli e 212 vertici. Segue che il corrispondente poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$ (vedere la figura 14) ha 420 vertici, 630 spigoli e 212 facce. È interessante notare il fatto che nelle cupole geodetiche e nei poliedri di Goldberg è sufficiente conoscere uno soltanto fra i numeri S , F , e V per determinare gli altri

due; invece, in un qualunque poliedro, occorre conoscerne due per determinare il terzo, usando la relazione di Eulero.

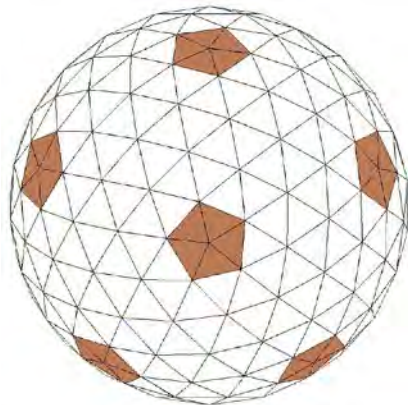


Fig. 13 - Cupola geodetica di tipo (4, 1)

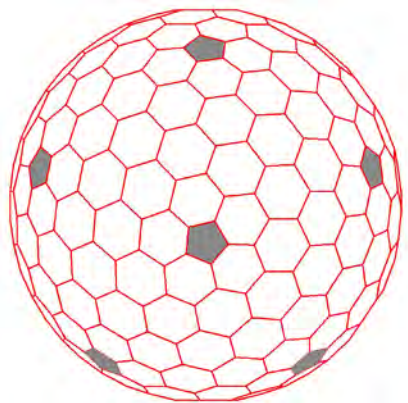


Fig. 14 - Poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$

Epcot è uno dei quattro parchi a tema che si trovano presso il Walt Disney World Resort a Bay Lake, Florida.

Epcot rappresenta un'utopistica città del futuro. Il simbolo di questo parco è un'astronave chiamata *Spaceship Earth*; essa ha la forma di una cupola geodetica (completa) di tipo (8,8) (vedere la figura 15). Ciascuna delle due linee che sono

evidenziate in questa figura rappresenta sulla sfera geodetica la proiezione dei segmenti che, nella tassellazione del piano, formano la linea che collega due vertici adiacenti dei triangoli grandi.

Essendo di tipo (8,8), si tratta di una cupola geodetica con $T = 192$; dunque, essa è formata da $192 \cdot 20 = 3840$ triangoli isosceli. In realtà ognuno di questi triangoli è la base di una piramide a base triangolare.

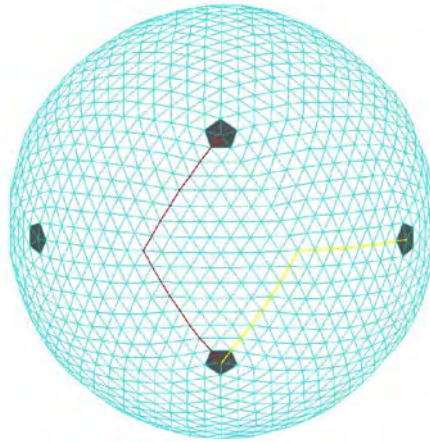


Fig. 15 - Cupola geodetica di tipo (8, 8)

Di conseguenza la cupola è composta da 3840 piramidi a base triangolare, delle quali sono visibili le tre facce laterali: perciò essa è formata da $3 \cdot 3840 = 11.520$ faccette. In realtà esse sono 11.324, poiché alcune di queste sono state eliminate per la presenza delle porte per entrare nell'interno della cupola e dei supporti che servono a sorreggere la struttura.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la Dottoressa Margherita Lori per il lavoro svolto con dedizione e competenza nella realizzazione delle immagini presenti in questo articolo.

Bibliografia

Battaia L. (2019). *Fantastici poliedri 2*. Poliedri semiregolari e loro duali,

http://www.batmath.it/corsi_uni/design_1819/SemiregolariBozza.pdf

Brinkmann G., Goetschalckx P., Schein S. (2017). Comparing the constructions of Goldberg, Fuller, Caspar, Klug and Coxeter, and a general approach to local symmetry-preserving operations, *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* v. 473, n.2206.

Conti G., Trotta A., Conti F. (2018). A Journey into the Polyhedrons World, *Science & Philosophy*, V. 6, n.1, pp. 67-92.

Conti G., Paoletti R., Trotta A. (2021). La Geometria delle Cupole Geodetiche, *Periodico di Matematica (IV)*, Vol. III (3-4) dicembre, pp. 79-98.

H. S. M. Coxeter H. S. M. (1971). *Virus macromolecules and geodesic domes*, In C. Butcher, editor, *A spectrum of mathematics*, pp. 98-107, Oxford University Press/Auckland University Press.

Cundy M. H. (1952). Deltahedra, *Math. Gaz.* 36, pp. 263-266, Dec.

Goldberg M. (1937). A class of multisymmetric polyhedral, *Tohoku Mathematical Journal*, 43, pp. 104-108.

Wenninger J. M. (1979). *Spherical models*. Cambridge University Press.