Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (1) marzo 2022, pp. 147-156

I punti isodinamici di un triangolo

Cesare Labianca*

*Docente di Matematica presso l'Istituto di Istruzione Superiore "*Luigi di Savoia*" di Chieti – Componente del Consiglio Direttivo dell'associazione Mathesis Abruzzo e dell'APAV;
cesarelabianca@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.070

Sunto: *L'articolo presenta la proposta di un'esperienza didattica, da realizzare in una classe del biennio delle scuole superiori, su due punti notevoli relativi a un triangolo (non equilatero), chiamati punti isodinamici, e sull'analisi delle loro proprietà. In particolare, si mostrano l'algoritmo della costruzione di tali punti e le loro proprietà mediante l'uso di un software di geometria dinamica, sottolineando l'importanza di questo applicativo nella pratica didattica, per la sua capacità di coinvolgimento degli studenti, che li rende protagonisti del processo di apprendimento.*

Parole Chiave: *Triangolo, punti notevoli, Geogebra, Geometria*

Abstract: *The article presents the proposal for a teaching experience, to be carried out over either the first or second year of high school, regarding two special points of a triangle (non-equilateral), called isodynamic points, and the analysis of their properties. In particular, the aim is to study the algorithm of the construction of said points and discuss their properties through the use of a dynamic geometry software suite, emphasizing the importance of this application in teaching practice,* *due to its ability to engage students and make them protagonists of the learning process.*

Keywords: *Triangle, remarkable points, Geogebra, Geometry*

1 - Introduzione

L'obiettivo di questo intervento è mostrare un'esperienza didattica di Geometria, da realizzare in una classe del biennio delle scuole medie superiori, legata alla scoperta di due punti particolari, relativi a un triangolo non equilatero, detti punti isodinamici del triangolo, individuati anche grazie all'uso di un software di geometria dinamica.

La motivazione didattica è quella di ampliare le conoscenze relative allo studio dei triangoli, rispetto ai contenuti tradizionali presenti sui libri di testo del biennio, mostrando una particolare proprietà delle bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo (non equilatero).

Si illustra l'algoritmo della costruzione geometrica di tali punti, utilizzando il software di geometria dinamica Geogebra, utile per mostrare dinamicamente come, a partire da un triangolo qualsiasi (non equilatero), si determinano i relativi punti isodinamici e come, nel caso particolare di un triangolo equilatero, tali punti non esistono.

Si enunciano, infine, alcune proprietà che evidenziano diverse notevoli caratteristiche dei punti isodinamici di un triangolo (non equilatero).

2 – Definizione di punti isodinamici

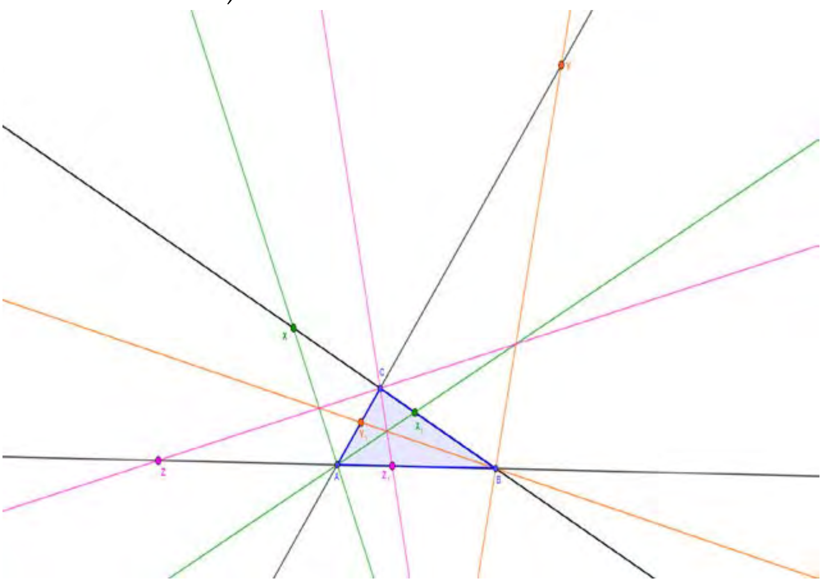
La definizione dei punti isodinamici di un triangolo è legata al seguente teorema:

Teorema Dato un triangolo non equilatero ABC, siano:

X e X_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice A con il lato BC;

Y e Y_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice B con il lato AC;

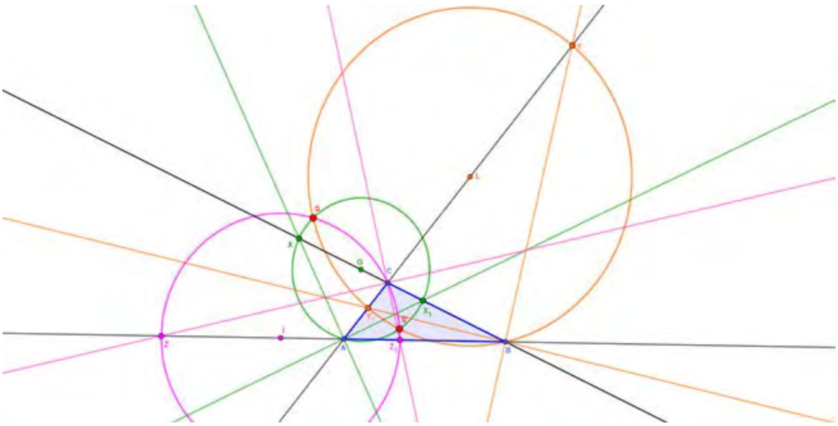
Z e Z_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice C con il lato AB.



Allora le tre circonferenze di diametro rispettivamente XX_1, YY_1, ZZ_1 si intersecano in due punti, S e S', detti **punti isodinamici** del triangolo ABC.

Tali circonferenze, inoltre, passano per i vertici del triangolo ABC, perché per un teorema di geometria elementare è noto che le bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo sono perpendicolari e quindi i triangoli AXX_1, BYY_1, CZZ_1 sono triangoli rettangoli e pertanto le tre circonferenze passano per i vertici A, B, C degli angoli retti.

È chiaro che se il triangolo ABC è equilatero allora le bisettrici degli angoli esterni relativi a un vertice sono parallele ai lati opposti a tale vertice e, quindi in tal caso, i punti isodinamici non esistono.



3 – Proprietà dei punti isodinamici

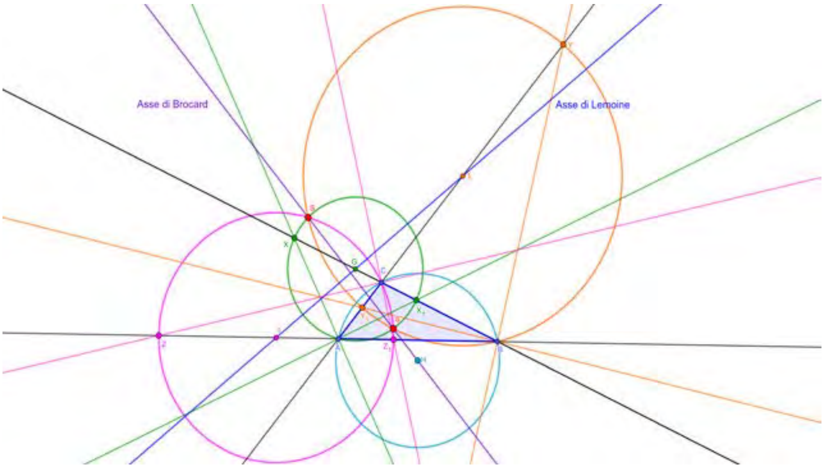
Vediamo alcune proprietà dei punti isodinamici di un triangolo.

1) Poiché le tre circonferenze appartengono al fascio di circonferenze passanti per i due punti isodinamici e poiché, come è noto, i centri delle circonferenze di tale fascio sono allineati su una retta, detta asse centrale del fascio, i loro centri (I, G, L) saranno pertanto allineati (e in questo caso la retta prende il nome di asse di Lemoine).

2) La retta passante per i due punti isodinamici, punti base del fascio di circonferenze, è l'asse radicale del fascio, che,

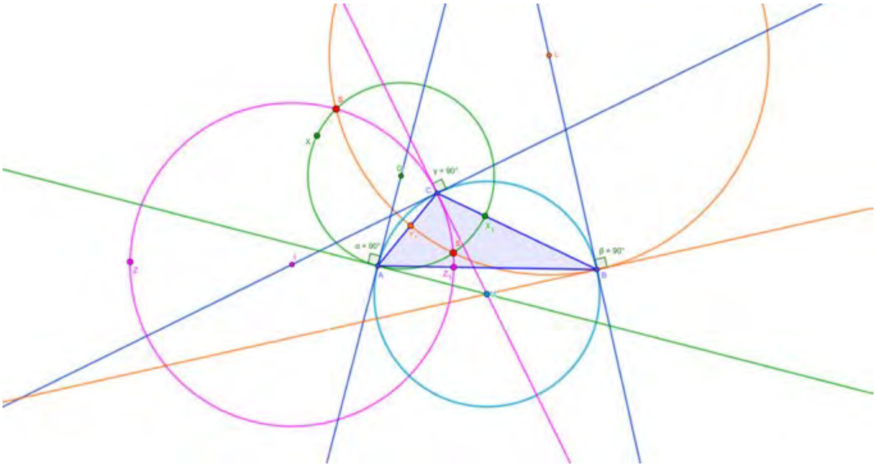
come si sa, è perpendicolare all'asse centrale (e in questo caso prende il nome di asse di Brocard).

3) I punti isodinamici e il circocentro H del triangolo ABC sono allineati (ovviamente sull'asse di Brocard).



4) Le tangenti alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC nei vertici A, B, C, passano per i centri delle tre circonferenze che determinano i due punti isodinamici del triangolo ABC.

5) Le tre circonferenze che determinano i due punti isodinamici del triangolo ABC sono ortogonali alla circonferenza circoscritta al triangolo.

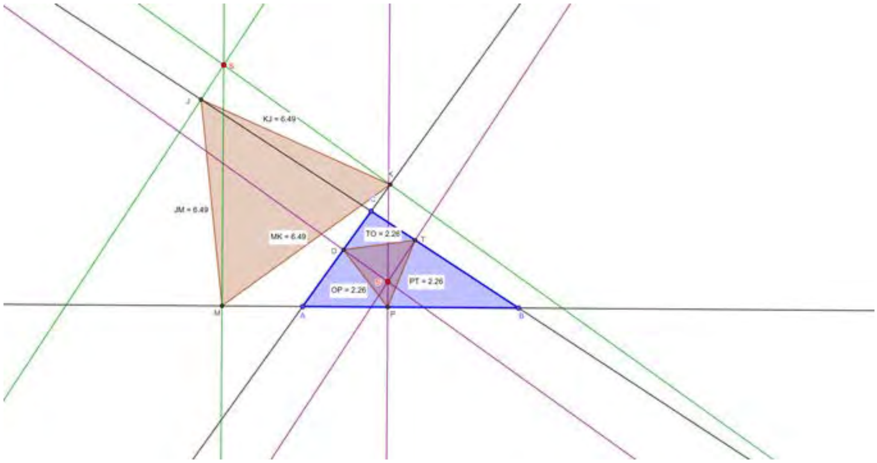


4 – Triangoli pedali dei punti isodinamici

Esiste un'interessante proprietà dei triangoli pedali dei punti isodinamici di un triangolo non equilatero. Partiamo dalla definizione di triangolo pedale di un punto rispetto a un triangolo.

Definizione Dato un triangolo t e un punto P, si chiama triangolo pedale di P rispetto al triangolo t, il triangolo avente per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati di t.

Si può dimostrare che i triangoli pedali dei punti isodinamici relativi a un triangolo qualsiasi ABC (non equilatero) sono sempre triangoli equilateri.

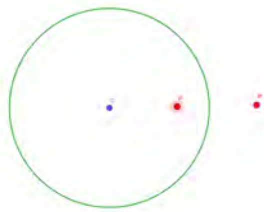


Nella figura, il triangolo pedale del punto isodinamico S relativo al triangolo ABC è JKM, mentre quello relativo al punto isodinamico S′ è OPT.

5 – Inversione circolare dei punti isodinamici

Prima di enunciare la prossima proprietà, è utile ricordare la definizione di inversione circolare.

Definizione Data una circonferenza di centro O e raggio r, si chiama inversione circolare di centro C e raggio r, la trasformazione geometrica del piano che assegna ad un punto P il punto P′ tale che $CP \cdot CP' = r^2$.



Ricordo che per l'inversione circolare valgono le seguenti proprietà:

i punti interni alla circonferenza sono trasformati in punti esterni (e viceversa);

i punti della circonferenza sono punti uniti;

le rette non passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in circonferenze passanti per il centro dell'inversione;

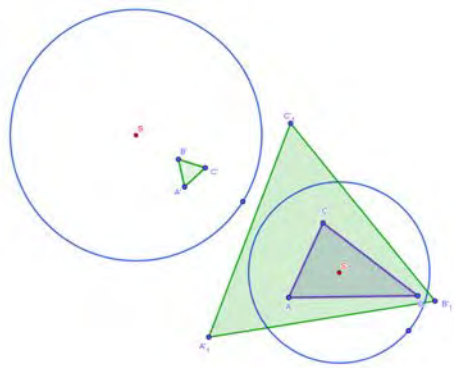
le rette passanti per il centro dell'inversione sono unite;

le circonferenze non passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in circonferenze non passanti per il centro dell'inversione;

le circonferenze passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in rette non passanti per il centro dell'inversione.

La relazione tra i l'inversione circolare e i punti isodinamici è data dal seguente teorema:

<u>Teorema</u> L'inversione circolare di un qualunque triangolo (non equilatero), di centro un punto isodinamico del triangolo e raggio qualsiasi, è sempre un triangolo equilatero.



Nella figura, l'inversione circolare del triangolo ABC, di centro il punto isodinamico S e raggio assegnato, è il triangolo A′B′C′; mentre, l'inversione circolare del triangolo ABC, di centro il punto isodinamico S′ e raggio assegnato, è il triangolo $A'_1B'_1C'_1$: come si può notare tali triangoli sono equilateri.

Quest'ultima proprietà dei punti isodinamici, quella di trasformare mediante un'inversione circolare qualunque triangolo in un triangolo equilatero, è sicuramente la più interessante.

6 – Conclusioni

Credo che, come considerazione finale, si debba stimolare gli studenti all'utilizzo di un software di geometria dinamica, il cui uso non deve assolutamente sostituire le dimostrazioni dei teoremi e la risoluzione dei problemi geometrici, che costituiscono un momento fondamentale dello sviluppo del pensiero razionale di uno studente.

Ma il software può benissimo affiancarsi ad essi, perché rappresenta l'opportunità di "verificare" la validità un teorema (o della soluzione di un problema), così come d'altra parte è fortemente raccomandato nelle Indicazioni Nazionali per i Licei, emanate qualche anno fa dal MIUR.

E in questa operazione di verifica è lo studente ad essere protagonista dell'azione didattica, perché deve essere lui a costruire le ipotesi del teorema o del problema.

Senza, però, mai stancarsi di sottolineare agli studenti che in Matematica (e in particolare in Geometria) la verifica di un teorema NON è mai una dimostrazione!

Bibliografia

D'Ignazio I., Suppa E. (2001). *Il problema geometrico, dal compasso al Cabrì*, Interlinea editrice.

Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. (1967). Geometry Revisited, *New Mathematical Library, vol. 19*, The Mathematical Association of America

Campedelli L. (n.d.). I metodi sintetici per la risoluzione dei problemi di geometria piana, in *Repertorio di Matematiche, vol. II*, a cura di M. Villa