Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (1) marzo 2022, pp. 157-170

La Geometria Proiettiva si può ancora ignorare nell'insegnamento di oggi?

Le Trasformazioni omologiche

Alessandra Rotunno*

* DIARC Università "Federico II" di Napoli; alessandra.rotunno@unina.it

DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.071

Sunto: *Si propone una sintesi dei lavori prodotti negli ultimi tre decenni da un gruppo di studiosi, soci della sezione Mathesis di Napoli, sull'insegnamento della Geometria. In particolare, si espone un percorso didattico che non trascura i teoremi essenziali della Geometria di Euclide, ma inserisce i primi elementi della Geometria Proiettiva, le cui conoscenze sono indispensabili alla comprensione dello studio della Fisica moderna.*

Parole Chiave: *Omologia, Affinità, Similitudine, Isometria*

Abstract: *A summary of the works produced in the last three decades by a group of scholars, members of the Mathesis section of Naples, on the teaching of geometry is proposed. In particular, an educational path is exhibited that does not neglect the essential theorems of Euclid's geometry, but inserts the first elements of Projective Geometry, the knowledge of which is essential for understanding the study of modern Physics.*

Keywords: *Homology, Affinity, Similitude, Isometry*

1 - Introduzione

Questo lavoro, presentato al Convegno “Quali conoscenze di geometria nella Scuola di oggi?”, rientra nella sessione di studi “La geometria … oltre Euclide” ed è complementare agli interventi dei professori Ferdinando Casolaro (geometria sullo spazio curvo), Onofrio Casoria (fisica e geometria), Antonio Maturo (geometrie join e misure di incertezza) le cui risultanze sono pubblicate nel presente volume.

Nella sessione di lavori citata si è cercato di sintetizzare le tematiche sviluppate negli ultimi due secoli, che riteniamo essenziali da proporre per un insegnamento moderno.

Non dettaglierò i vari passaggi, per i quali si richiamano i lavori citati in bibliografia, ma ritengo opportuno fissare l’attenzione sia sull’evoluzione storica che sulle motivazioni per le quali ritengo indispensabile un approccio didattico più ampio, che nasce proprio dai concetti di punto all’infinito (Casolaro, Rotunno, 2015) e da un approccio attraverso le trasformazioni geometriche (Casolaro, 2020).

In particolare mi soffermerò su una trasformazione, l’omologia, che nei corsi di Formazione docenti, viene proposta già nel Primo Ciclo di istruzione.

Pertanto, dopo una breve introduzione storica limitatamente al periodo ellenico, mi soffermerò sulla descrizione delle trasformazioni omologiche che didatticamente si possono introdurre già nella Scuola Primaria attraverso le ombre delle finestre sul pavimento.

Non è superfluo sottolineare, come si evincerà dalla descrizione storica nel prossimo paragrafo, il contributo dell’omologia allo sviluppo dell’arte e dell’architettura, la cui evoluzione ha tenuto conto non solo degli elementi euclidei quali le similitudine e le isometrie.

2 - Dagli artisti ai geometri: excursus storico

Le prime dimostrazioni di geometria furono stabilite nel VI secolo a.C. nella scuola di Talete, che è stato il precursore di risultati prodotti nei due secoli successivi V e IV, nelle Scuole filosofiche (Kline, 1991).

Nel III secolo a.C., Euclide raccolse tutti i risultati dei matematici che lo precedettero in un unico trattato, gli *Elementi,* che è ancora oggi il modello utilizzato dai docenti di matematica per l'insegnamento.

Va sottolineato, però, che lo stesso Euclide si rese conto che l'Universo è in movimento ed alla sua grande opera mancava qualcosa.

Infatti ha lasciato un trattato, ignorato per oltre duemila anni e tradotto nel 1916, *I Fenomeni* dove si incontra per la prima volta il concetto di "trasformazione geometrica", attraverso la definizione di superficie sferica.

Diversamente dalla classica definizione: la superficie sferica è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro (concetto statico), Euclide, ne *I Fenomeni* definisce la superficie sferica come superficie di rotazione della circonferenza attorno al suo diametro (concetto dinamico).

In quel periodo ebbe origine un gruppo di ricerca, del quale faceva parte lo stesso Euclide, i cui risultati sono indicati come "Ottica degli antichi". L'obiettivo del gruppo era il desiderio di studiare i fenomeni luminosi per distinguere la realtà (la figura reale) dall'apparenza (visione delle ombre).

A partire dalle premesse che ″la luce si propaga in linea retta″ si stabilirono molti teoremi (la maggior parte da parte di Euclide) che sono ancora considerati tra le fondamenta della trattazione matematica della luce.

La geometria descritta da Euclide nel suo lavoro originale, gli *Elementi* è indicata come ″geometria elementare″, anche se non è chiaro il limite tra il termine "geometria elementare" e qualcuna delle altre geometrie emerse negli ultimi secoli.

Infatti, è opinione di molti che la stessa geometria rappresentata sul piano cartesiano attraverso i vettori (geometria affine) sia una continuazione del modello euclideo, per cui dovrebbe rientrare nel termine "geometria elementare".

Nell'uso comune, il significato dell'espressione "geometria elementare" dipende anche dai programmi scolastici e, addirittura dalle condizioni della cultura matematica in vari luoghi. Ad esempio lo studio delle coniche, che in Italia fa parte della geometria proiettiva o considerato come argomento esclusivamente di geometria analitica, in Francia si trova in tutti i testi di geometria elementare.

Secondo un punto di vista più moderno, possiamo dire che la geometria elementare tratta quasi esclusivamente le proprietà di uguaglianza o di similitudini di figure; infatti, le proprietà che essa studia sono tali che se valgono per una figura, valgono per le figure uguali ad essa e per le figure ad essa simili.

Allo stesso modo diremo che le proprietà geometriche di una figura F che sussistono, oltre che per la figura stessa anche per tutte le figure che si possono dedurre per proiezione e per sezione, hanno carattere proiettivo.

Lo studio delle proprietà delle figure del piano o della stella che hanno carattere proiettivo costituisce la "geometria proiettiva".

L'analisi della geometria che ha condotto a questo punto di vista fu fatta dal matematico tedesco Felix Klein (1849, 1925) nella seconda metà del secolo scorso, dopo le dispute sulla crisi dei fondamenti e le discussioni sul postulato delle parallele.

Nel 1872, nominato professore ordinario all'Università di Erlangen, Klein pubblicò il suo "Program" (noto in letteratura come Programma di Erlangen), in cui considerava le proprietà geometriche delle figure classiche rispetto a gruppi di trasformazione. In tal modo riuscì a classificare le varie geometrie che progredirono in maniera indipendente una dall'altra (Casolaro, 2020).

In tale ottica, Klein prese atto che tra le geometrie basate su gruppi di trasformazioni lineari, la geometria proiettiva è la più ampia (Casolaro, Cundari, 1993).

3 - Proiettività tra piani. Omografie e legge di dualità

In una trattazione razionale della geometria proiettiva si assumono come enti primitivi (indicati in letteratura come "enti generatori") il punto, la retta e il piano, con un senso più ampio rispetto a quello che essi hanno nella geometria elementare (Loria, 1921).

Infatti, dato uno spazio affine (cioè uno spazio in cui le proprietà delle figure restano invarianti rispetto al "gruppo delle affinità"), una retta r e un punto $S \notin r$, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e le rette del fascio di centro S, corrispondenza che è senza eccezione se aggiungiamo ai punti ordinari (propri) di ogni retta un punto improprio (punto all'infinito) che individua la direzione della retta. Pertanto, rette parallele si intersecano nel punto improprio (Casolaro, Rotunno, 2019).

Analogamente, partendo da un piano α e da un punto $S \notin \alpha$, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le rette della stella di centro S ed i punti del piano α; anche in questo caso la corrispondenza è senza eccezioni se alle rette parallele al piano, facciamo corrispondere i punti impropri del piano.

Si definisce, in tal modo, la retta impropria, comune a tutti i piani paralleli ad α ed il piano improprio, insieme di tutti i punti impropri dello spazio.

Le trasformazioni che fanno parte del gruppo proiettivo sono dette "proiettività", in quanto avvengono con le operazioni di proiezione e sezione.

Le proiettività tra piani, nello spazio tridimensionale S_3, sono dette "omografie".

L'insieme delle omografie forma gruppo rispetto alle operazioni di proiezione e sezione. Il percorso didattico di seguito proposto è strutturato sullo studio delle omografie.

3.1 – Forme geometriche fondamentali. Principio di dualità

L'invarianza delle proprietà geometriche per proiezione e sezione consente di classificare le figure all'interno di enti geometrici che chiameremo "forme".

Si dicono forme fondamentali di prima specie, o ad una dimensione:

1. la retta punteggiata, che è l'insieme di tutti i punti che appartengono ad una retta (sostegno della punteggiata);
2. il fascio di rette, che è l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto di questo piano (centro del fascio);
3. il fascio di piani, che è l'insieme di tutti i piani passanti per una retta, (asse del fascio);

Nelle forme fondamentali di prima specie vale la legge di dualità piana che si esprime:

a) due punti distinti individuano una sola retta a cui appartengono	a') due rette distinte individuano un solo punto a cui appartengono
b) tre punti che non appartengono ad una stessa retta, individuano un piano a cui appartengono	b') tre piani, che non appartengono ad una stessa retta individuano un punto a cui appartengono
c) un punto ed una retta che non si appartengono individuano un piano a cui appartengono	c') un piano ed una retta che non si appartengono individuano un punto a cui appartengono.

È opportuno osservare che, per enunciare tali proposizioni abbiamo usato il verbo appartenere per denominare indifferentemente le relazioni tra punti, rette e piani, usualmente espresse dalle voci verbali "contenere" ed "essere contenuto". Scambiando le parole punto e piano, e lasciando inalterata la parola retta, otteniamo una proposizione dall'altra e viceversa.

Due proposizioni - o configurazioni geometriche - ottenute una dall'altra mediante gli scambi indicati vengono dette *duali*; ad esempio, sono duali la figura costituita da due punti e la retta loro congiungente e quella formata da due piani e la retta loro intersezione.

Si dicono forme geometriche fondamentali di seconda specie, o a due dimensioni:

1. <u>il piano punteggiato e il piano rigato composti</u>, rispettivamente, da tutti i punti e da tutte le rette di un piano (sostegno della forma);
2. <u>la stella di rette e la stella di piani</u> costituite, rispettivamente, da tutte le rette e da tutti i piani passanti per uno stesso punto, (centro della stella);

Nella dualità spaziale sono duali le operazioni di proiezione e sezione.

Si dicono <u>forme fondamentali di terza specie</u>, o a tre dimensioni, lo spazio di punti e lo spazio di piani, cioè l'insieme di tutti i punti e di tutti i piani dello spazio geometrico S_3

4 - L'omologia

Un'omografia prodotto di due prospettività è detta omologia. L'omologia è una trasformazione lineare del piano che ha la genesi nello spazio tridimensionale (Casolaro, Rotunno, 2019).

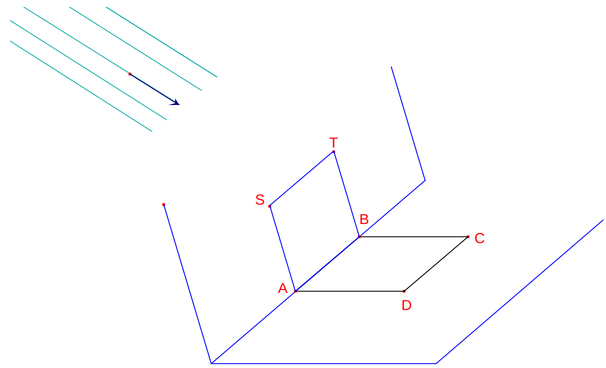

Fig. 4.1 Prospettività tra piani

La figura 4.1 schematizza la prospettività con centro improprio (si considera il sole come punto all'infinito) tra il piano verticale che contiene la finestra (rettangolo ABST) e il piano orizzontale che contiene la proiezione ABCD (quindi \`e una prospettività tra piani).

Nella figura 4.4 si costruisce l'omologia come composizione delle due prospettività disegnate nelle figure 4.2 e 4.3.

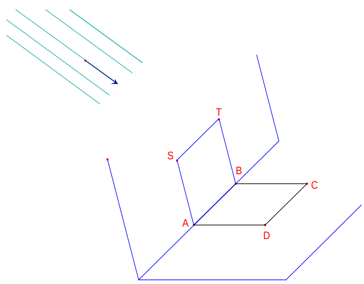

Fig. 4.2 Proiezione della finestra sul pavimento la mattina

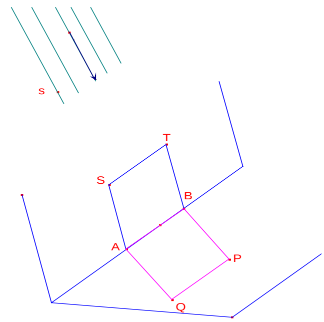

Fig. 4.3 Proiezione della finestra sul pavimento alcune ore dopo

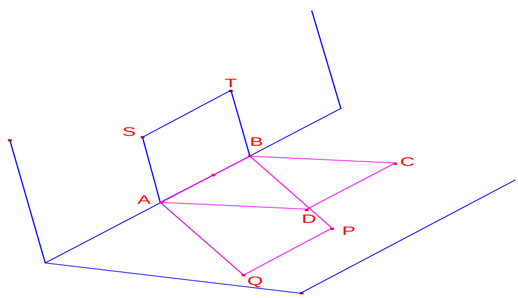

Fig. 4.4 Sovrapposizione delle proiezioni: la trasformazione sul piano del pavimento, che muta ABCD in ABP Q, `e l'omologia

Le proprietà dell'omologia sono:

1) esiste un punto unito che può essere proprio o improprio;

2) esiste una retta unita che può essere propria o impropria;

3) punti corrispondenti sono allineati con il centro;

4) rette corrispondenti si incontrano sull'asse.

Nelle figure 4.5, 4.6, 4.7 sono indicate tre tipologie di omologia tra trasformazioni elementari.

1. <u>Traslazione:</u> Omologia con asse improprio, centro improprio (figura 4.5)

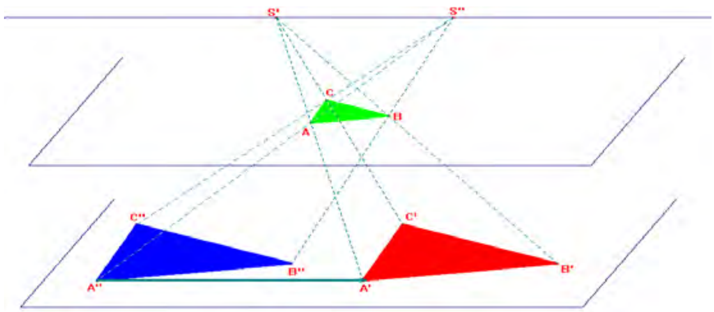

Fig. 4.5 Traslazione

2. <u>Omotetia</u>: Omologia con asse improprio, centro proprio (fig. 4.6)

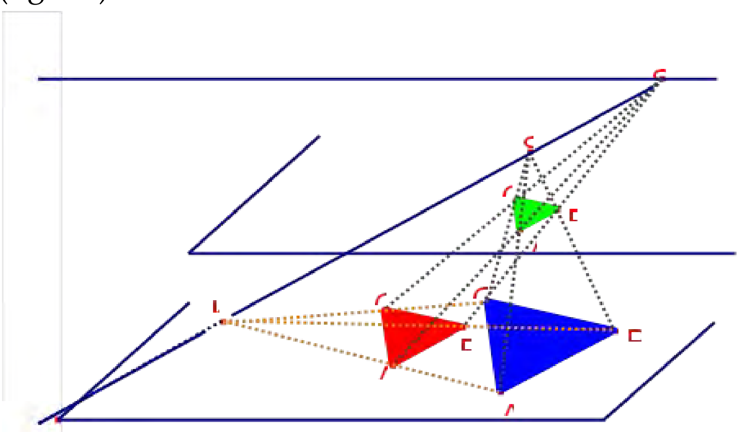

Fig. 4.6 Omotetia

3. Affinità omologica o omologia affine: Omologia con asse proprio, centro improprio (figura 4.7)

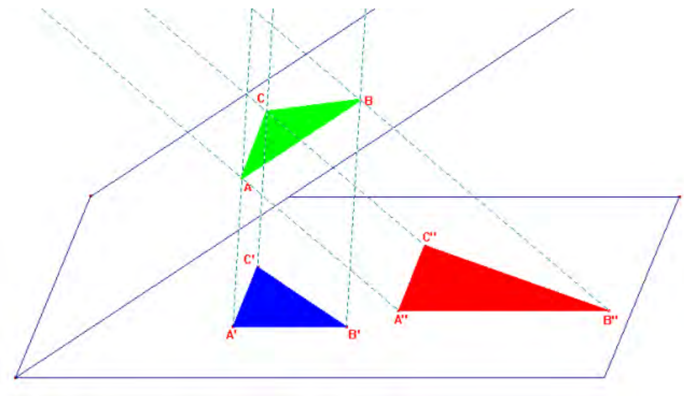

Fig. 4.7 Affinità omologica o omologia affine

Un particolare esempio di affinità omologica è la *simmetria assiale*, che presenta l'asse proprio, il centro improprio e il piano di riferimento è perpendicolare al piano della figura, che è a sua volta perpendicolare alla congiungente i centri di proiezione S_1 ed S_2 ed è equidistante da essi.

5 - Conclusioni

Ci siamo soffermati sul concetto di omologia perché rappresenta il primo approccio che un bambino, già all'età di pochi mesi, ha con la geometria: le ombre degli oggetti generate dal sole insieme alla forma delle figure reali.

Nei corsi di Formazione per Distretti scolastici organizzati dal Ministero, alcune maestre della Scuola Primaria hanno potuto sperimentare l'interesse dei ragazzi nelle quarte e nelle quinte classi, facendo disegnare la finestra e l'ombra che produce sul pavimento in momenti diversi della giornata, come abbiamo evidenziato nelle figure (4.5), (4.6), (4.7) di questo lavoro (Casolaro, 2003).

Il significato di questi cosiddetti "disegnini" va oltre gli obiettivi della rappresentazione perché permette all'insegnante di mostrare concretamente il movimento della Terra intorno al Sole (interrelazione con le Scienze) e le modifiche delle figure attraverso la prospettiva (interrelazione con l'arte).

Bibliografia

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli.

Kline M. (1991). Storia del pensiero matematico. Edizioni Einaudi.

Cundari C. (1991). Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie, *Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma, 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991 pp.85-103 e pp.101-118.*

Casolaro F., Eugeni F. (1996). Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie, *Atti del Convegno "Aspetti multidisciplinari in didattica della matematica". Teramo, 1-3 dicembre 1995. Ratio Matematica n. 1, 1996; pp. 23-33.*

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo, *Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra* *tradizione e innovazione: un confronto europeo". Bergamo, 17-19 ottobre 2002; pp.185-198.*

Casolaro F. (2003). Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica, *Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio", Vasto, aprile 2003; pp.129-148.*

Casolaro F. (2014). Dalla Geometria euclidea alla Geometria Proiettiva. *Science & Philosophy Divulgation 2014-Fondazione "Panta Rei". Numero speciale di Ratio Mathematica; pp.47-53.*

Casolaro F., Rotunno A. (2015). Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations. *Brno, Czech Republic: University of Defence.*

Casolaro F., Rotunno A. (2019). L'ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo, *in Matematica, Architettura, Fisica, Natura. Edizione Aracne; pp.106-122.*

Casolaro F. (2020). Dalla geometria euclidea alla geometria proiettiva: interrelazioni tra matematica e disegno, *Periodico di Matematica n. 2, dicembre 2020, pagine 41-73.*