

Percorsi didattici di geometria dello spazio

Uso di un software di geometria dinamica 3D nella Scuola secondaria di II grado

Luigi Tomasi *

* Università di Ferrara; luigi.tomasi@unife.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.072

Sunto: *L'articolo riassume quanto è stato presentato in una relazione al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?", Agerola (Napoli) 8-10 settembre 2021, dedicata ad alcuni percorsi di geometria dello spazio per la Scuola secondaria di II grado con l'uso di un software di geometria dinamica 3D. Dopo alcune considerazioni sull'importanza della geometria dello spazio nella formazione matematica degli studenti della scuola secondaria, nel seguito sono stati richiamati i curricoli di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l'uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi di percorsi didattici di geometria dello spazio.*

Parole Chiave: *geometria dello spazio, software di geometria dinamica 3D; visualizzazione, scuola secondaria di II grado.*

Abstract: *The article summarizes what was presented in a report at the Conference "What knowledge of Geometry in today's school?", Agerola (Naples) 8-10 September 2021, dedicated to some paths of geometry of space for secondary school with the use of 3D dynamic geometry software. After some considerations*

on the importance of the geometry of space in the mathematical training of secondary school students, the curricula for the secondary school of II degree have been recalled below with regard to the geometry and the use of technologies, for finally conclude with the presentation of some examples of didactic paths of 3D geometry.

Keywords: *space geometry, 3D dynamic geometry software; visualization, secondary school of II degree.*

1 - Introduzione

In questo articolo si riassume quanto è stato presentato nella relazione - tenuta al Convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?”, organizzato dall’Associazione Mathesis “Aldo Morelli” di Napoli, 8-10 settembre 2021, ad Agerola (Na) - dedicata alla proposta di alcuni percorsi didattici di geometria dello spazio nella scuola secondaria di II grado, con l’uso di un software di geometria dinamica 3D (per esempio, GeoGebra). Inizialmente sono state proposte alcune considerazioni sull’importanza della geometria dello spazio nella formazione matematica degli studenti della scuola secondaria.

Nel seguito sono stati richiamati gli attuali curricoli di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l’uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi di percorsi di geometria dello spazio.

2 - L'insegnamento della Geometria dello spazio e i software 3D

I software di geometria dinamica consentono di vedere dinamicamente le figure e riportano in primo piano i metodi sintetici nello studio della geometria e nella risoluzione dei problemi. Fin dal loro apparire questi software hanno suscitato interesse tra gli insegnanti di matematica, per le loro caratteristiche di dinamicità e come validi strumenti a supporto dell'insegnamento e apprendimento della matematica.

Cosa cambia con i software di geometria (di matematica)? Per la geometria, la prima cosa che cambia è il concetto di figura, che da statica diventa dinamica, che si può manipolare, trasformare, trascinare... e questo per lo spazio è ancora più importante rispetto alla geometria del piano.

L'utilizzo del software di geometria e della deformazione «continua» della figura, tramite il trascinamento, facilitano l'analisi e la discussione sulle proprietà osservate di una figura, suggerendo congetture, da sottoporre poi a validazione mediante opportune argomentazioni e dimostrazioni.

La geometria dello spazio è piuttosto trascurata nella scuola secondaria di II grado, per diverse «ragioni»: tempo, difficoltà dell'argomento, È ritenuta, a torto, poco integrata con altri temi del curriculum di matematica e delle altre discipline di studio (Fisica, Disegno e Storia dell'Arte,...). Quando viene svolta, di solito viene proposta in una forma fin da subito troppo astratta, lontana dal mondo reale. Eppure viviamo nello spazio tridimensionale...

Esiste inoltre una tradizionale separazione, nell'insegnamento, tra la geometria piana e geometria dello spazio. I problemi

sono presentati di solito in forma “chiusa”, in cui si sa già dove si vuole arrivare. Non viene dato il giusto ruolo alla visualizzazione, tramite modelli fisici e il riferimento al mondo reale, e non c’è un adeguato utilizzo dei software per la geometria dello spazio.

L’insegnamento della geometria dello spazio, oltre a quella del piano, dovrebbe avere, almeno inizialmente, uno stretto legame con la visualizzazione e fare ricorso al mondo reale e ai modelli fisici. Il software, in questo intento, può aiutare a intuire e a “vedere” certe proprietà e permettere anche di presentare i contenuti in modo più interattivo, motivando maggiormente gli allievi. Per quanto possibile sarebbe da evitare di proporre dei percorsi separati tra la geometria del piano e quella dello spazio. È quindi utile fare ricorso al software di geometria e alla visualizzazione per attività di congettura e di scoperta di fatti e proprietà geometriche anche per lo spazio.

Nonostante quel che prevedono le *Indicazioni nazionali/Linee guida* (2010, 2012) per la matematica di tutti gli ordini scolastici, la geometria che di fatto si insegna -nel caso sia svolta - è quasi unicamente quella piana. Non c’è quindi da meravigliarsi se i problemi di geometria, riferiti allo spazio che ci circonda, danno luogo a difficoltà negli studenti. Ecco un esempio di domanda che può essere “imbarazzante” per i nostri allievi: come individuare la posizione apparente del sole in cielo, in un dato momento della giornata? Va da sé che le coordinate adatte allo scopo sono quelle sferiche, con origine nel punto di osservazione e piano di riferimento identificato con il piano orizzontale sul quale si trova l’osservatore. Questa domanda può essere collegata

all'aneddoto in cui si racconta come Talete sia riuscito a determinare l'altezza della piramide di Cheope.

Nella scuola secondaria di II grado la geometria sintetica del piano e – nei casi in cui se ne parla – dello spazio, è trattata da un punto di vista astratto e ipotetico-deduttivo fin dagli inizi della scuola secondaria di II grado. In tale ottica, il ruolo della percezione visiva e della visualizzazione viene considerato marginale o addirittura potenzialmente fuorviante. Invece, la fase di esplorazione e scoperta di una proprietà su una figura o su un modello, dovrebbe precedere la fase di “dimostrazione” della medesima proprietà nell'ambito di una sistemazione teorica.

Occorre quindi sviluppare l'intuizione e la visualizzazione spaziale. L'intuizione spaziale va specificamente curata nella fascia d'età compresa tra circa i dodici e sedici anni. In particolare vanno analizzate con cura le relazioni che intercorrono tra le figure tridimensionali e loro rappresentazioni bidimensionali. Detto in altri termini: occorre analizzare in classe gli oggetti “come sono” (sono tridimensionali!) e “come si vedono” (come li vedono i nostri occhi: visualizzazione nello spazio).

Anche per la geometria dello spazio, come per quella del piano, congetturare viene prima di dimostrare. Sia nel caso della geometria del piano che in quella dello spazio, gli studenti andrebbero stimolati ad esplorare situazioni non completamente formalizzate e a formulare congetture prima di passare alla fase della dimostrazione. Per queste attività esplorative, l'uso di un opportuno software (2D e 3D) è estremamente utile, in quanto consente di scoprire proprietà invarianti in ampie classi di figure, senza fare la fatica di

eseguire manualmente un gran numero di disegni, considerato anche che quelli di geometria dello spazio sono difficili da eseguire correttamente “a mano”.

3 - Percorsi di geometria dello spazio: alcuni esempi proposti con il software 3D

Nel seguito si proporranno alcuni temi di geometria dello spazio con accenni all'uso del software di geometria dinamica:

- rette e piani nello spazio; posizioni reciproche; perpendicolarità e parallelismo;
- poliedri (prismi, piramidi, poliedri regolari); sviluppi piani di solidi;
- sezioni di un cubo; sezioni piane di un solido;
- poliedri regolari e loro simmetrie;
- volumi; equiestensione tra i solidi;
- isometrie e similitudini dello spazio;
- le coniche come sezioni (nello spazio);
- introduzione alla geometria sulla sfera
- geometria analitica dello spazio.

La vista Grafici 3D di *GeoGebra* fornisce un supporto notevole all'intuizione e alla visualizzazione di proprietà geometriche dello spazio e sfrutta le più recenti caratteristiche grafiche dei computer, per “fare geometria”. Come impostazione iniziale per rappresentare le figure dello spazio usa la prospettiva, che corrisponde alla visione naturale.

Il software 3D permette di costruire facilmente figure nello spazio, in cui è possibile spostare il punto di vista dal quale osservarle e modificarle, interagendo in modo dinamico con la figura. Lo studente, con l'uso di questi software, può quindi

concentrare la sua attenzione sull'esplorazione dinamica delle proprietà geometriche della figura, senza dover affrontare il problema della rappresentazione degli oggetti.

3.1 – La vista Grafici 3D di GeoGebra

Il software GeoGebra presenta diverse viste. Per la geometria dello spazio occorre aprire la vista Grafici 3D ed inizialmente nascondere gli assi cartesiani (figura 1). A volte conviene visualizzare, accanto alla vista 3D, anche la vista Grafici (in 2D) che rappresenta il piano Oxy della vista in tre dimensioni. Nel software le figure sono rappresentate in prospettiva. Il software ha un menu dedicato alla geometria 3D e permette di costruire punti, rette, piani e di eseguire le costruzioni fondamentali dello spazio, per esempio retta per un punto parallela a una retta data; retta perpendicolare a un piano passante per un punto dato, ecc.

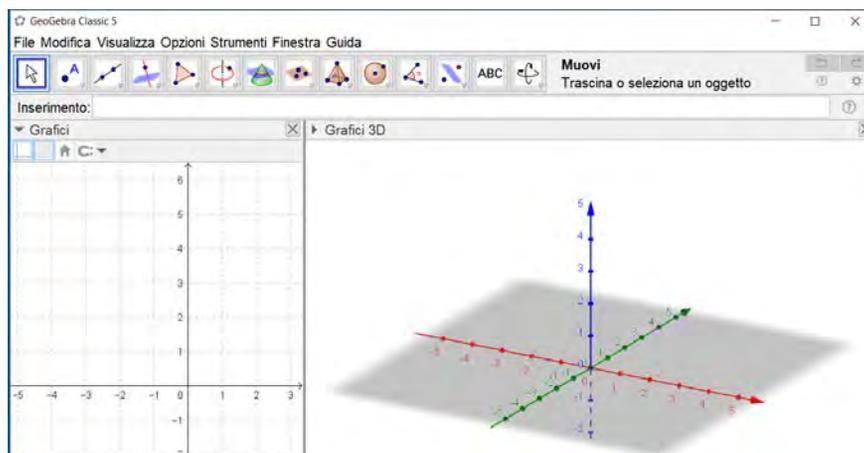


Fig. 1

3.2 - La rappresentazione di una circonferenza in 3D

Disegniamo una circonferenza (figura 2) nella vista grafici 3D. Che cosa si vede? Quasi tutti gli studenti rispondono che si tratta di una circonferenza; altri possono rispondere che si tratta di un'ellisse. Chi ha ragione? Si propone una discussione in classe sulla rappresentazione in prospettiva e sulla visualizzazione.

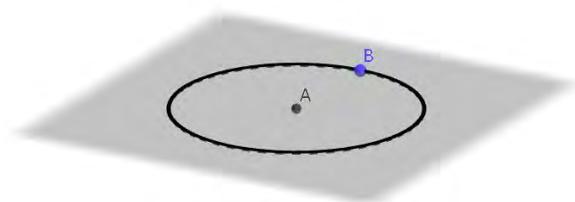


Fig. 2

3.3 - Parallelismo e perpendicolarità nello spazio

Inizialmente si analizzano le posizioni reciproche, nello spazio, di due rette, di due piani e di una retta e un piano. In particolare si studiano le relazioni di parallelismo e di ortogonalità.

3.4 - Angolo tra una retta e un piano

Si disegna una retta incidente a un piano e si definisce l'angolo tra la retta e il piano. Si definisce successivamente la perpendicolarità tra una retta e un piano.

3.5 - Rette sghembe: qual è la loro distanza?

Nello spazio due rette non complanari si dicono sghembe. Disegnare due rette sghembe (figura 3). Qual è la distanza (minima) tra due rette? Eventualmente si può proporre la costruzione per determinare la distanza tra due rette sghembe.

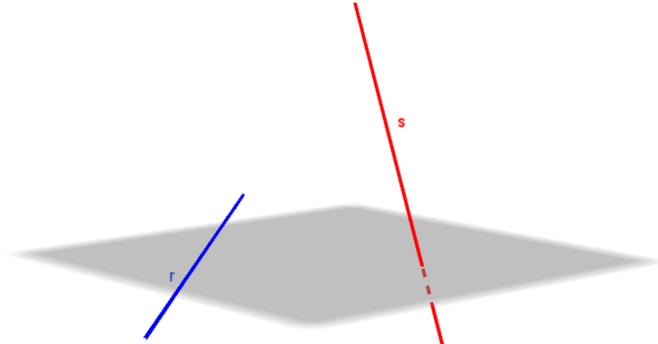


Fig. 3

3.6 - Teorema «delle tre perpendicolari»

Se una retta r è perpendicolare ad un piano α e se dal piede della perpendicolare A consideriamo, sul piano α , una retta s che sia perpendicolare ad un'altra retta t del piano, allora quest'ultima retta (t) è perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette (r ed s).

Questo teorema è fondamentale e di solito occorre presentare la dimostrazione nella scuola secondaria di II grado.

3.7 - Poliedri e sviluppo (dallo spazio al piano e viceversa)

Nella vista Grafici 3D è facile costruire dei poliedri: prismi, piramidi e poliedri regolari. La casella di strumenti «Solidi» del software permette di costruire questi solidi usando vari metodi di costruzione, in particolare quello, molto comodo,

«per estrusione». Costruire un poligono di base, un prisma, una piramide, un cubo e (un) loro sviluppo piano.

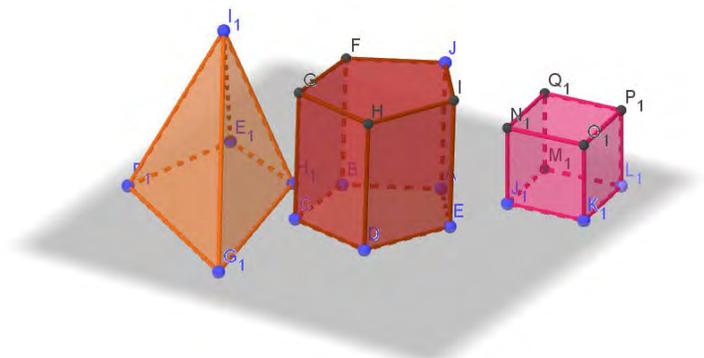


Fig. 4

3.8 - Le mediane di un tetraedro (esplorazione di proprietà)

Nello spazio il tetraedro è una figura fondamentale perché svolge lo stesso ruolo che ha il triangolo nella geometria del piano. Le mediane di un tetraedro; come si definiscono? Si incontrano in un unico punto? Costruire la figura 5 riportata qui sotto. Il punto E è il baricentro della faccia ABC ed F è il baricentro di ABD . Il punto G , intersezione tra DE e CF , è il baricentro del tetraedro. Esaminare le proprietà del baricentro.

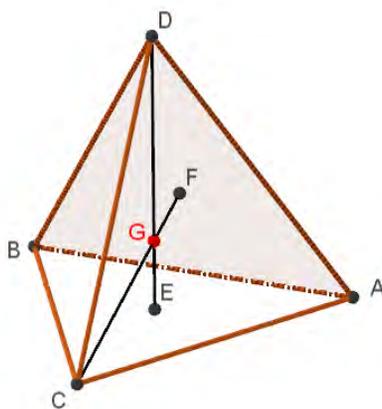


Fig. 5

3.9 - Le altezze di un tetraedro

Costruire due altezze di un tetraedro. Ad esempio DH è l'altezza del tetraedro relativa alla base ABC e AK è l'altezza relativa alla faccia BCD .

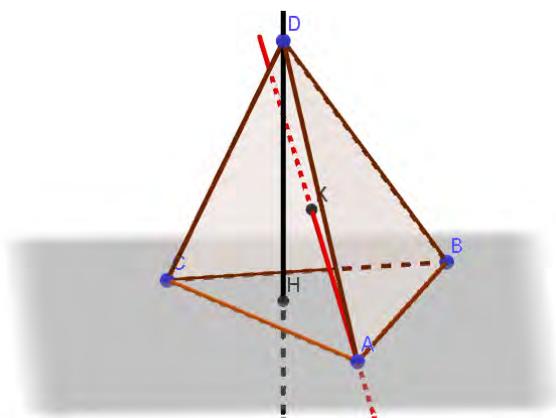


Fig. 6

Le altezze si incontrano in unico punto? Costruire la figura 6. Modificare il tetraedro trascinando uno dei suoi vertici e osservare se le altezze di un tetraedro si incontrano in un unico punto. Si scopre che, in generale, le altezze di un tetraedro non si intersecano.

3.10 - Sviluppo di un poliedro e costruzione di un modello (dallo spazio al piano)

Disegnare un cubo e costruire lo sviluppo piano del cubo (usare lo strumento «Sviluppo piano» del software). Nella vista Grafici (in 2D) viene creato lo sviluppo del cubo a forma di «croce latina» e uno slider: trascinandolo è possibile osservare dinamicamente lo sviluppo del cubo ottenuto (figura 7).

Problema: questo è l'unico sviluppo possibile del cubo?
Quanti sono i possibili sviluppi di un cubo?

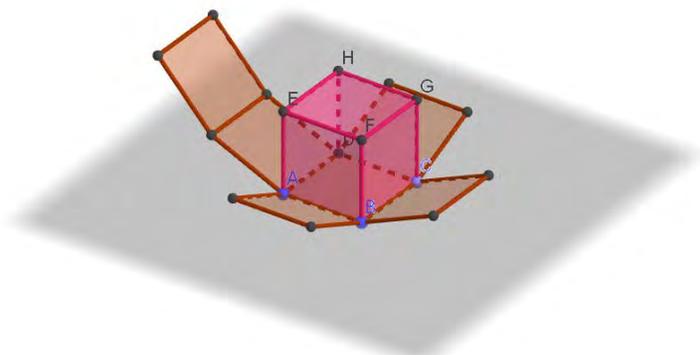


Fig. 7

3.11 - Dallo sviluppo al solido (dal piano allo spazio)

Disegnare la figura 8 con *GeoGebra* nella vista Grafici (2D).

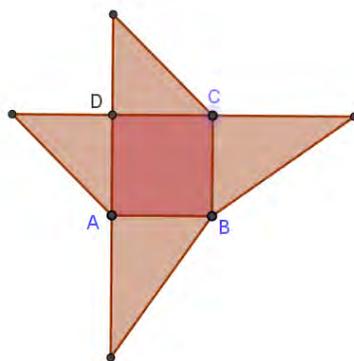


Fig. 8

Questo è lo sviluppo di un poliedro? Che tipo di poliedro?
Descrivere questo solido. Come è possibile stabilire se questa
figura è lo sviluppo di un solido? Può essere utile costruire
questo solido, con il cartoncino oltre che con *GeoGebra*.

3.12 – Dal solido a un suo sviluppo piano

Costruire la fig. 9 con *GeoGebra* a partire da un cubo, un suo vertice e dai punti medi di suoi opportuni spigoli. Si forma una piramide che ha per base un esagono regolare. Esplorare la figura con il software e costruire uno sviluppo piano di questo poliedro.

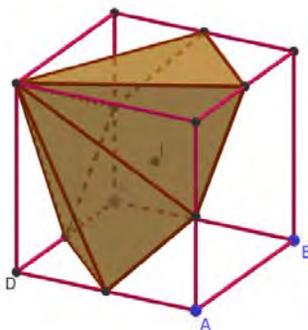


Fig. 9

3.13 – Con la piegatura della carta e con il software

Osservare la figura 10: questa figura rappresenta lo sviluppo piano di un cubo? Se sì, perché?

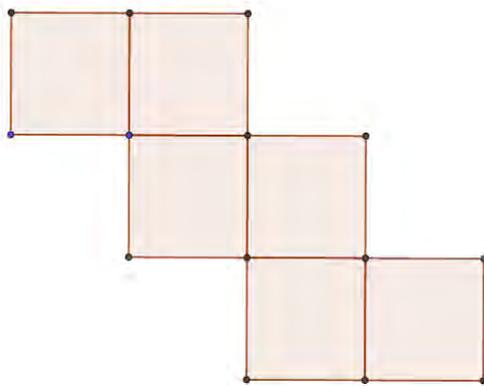


Fig. 10

Disegnare questa figura con *GeoGebra* nella vista Grafici (2D). Come si fa a stabilire se questa figura è lo sviluppo di un cubo? Costruirlo in cartoncino e poi con il software nella vista Grafici 3D.

3.14 - Dal piano allo spazio, con il software 3D

Disegnare questa figura nella vista Grafici (2D). Questo è lo sviluppo di un poliedro? Quale? Descriverlo. Come si fa a stabilire se questa figura rappresenta lo sviluppo di un poliedro? Costruiscilo in cartoncino. E poi con il software.

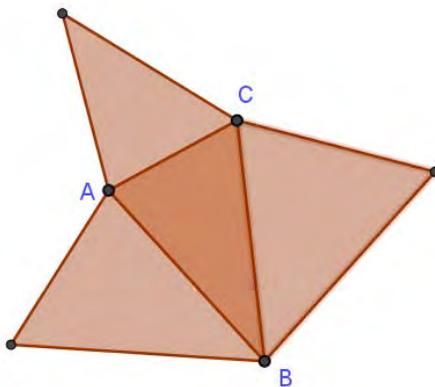


Fig. 11

3.15 - Un problema di *Flatlandia* (aprile 2020), rubrica di problemi di geometria

Problema. Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura 12). Determinare l'ampiezza dell'angolo \widehat{XYZ} .

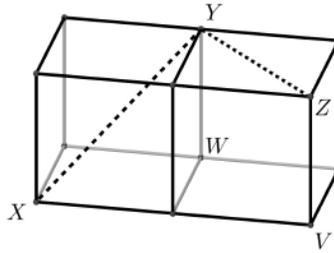


Fig. 12

Il software permette facilmente di scoprire che l'angolo \widehat{XYZ} è retto. Dopo aver esplorato la figura con il software, si chiede di dimostrare quel che si è osservato.

3.16 - I poliedri regolari (solidi platonici)

GeoGebra ha una casella «Solidi» in cui è presente il cubo e il tetraedro regolare. Gli altri tre solidi platonici si possono ottenere dalla riga di inserimento, tramite per esempio l'istruzione: Ottaedro(<Punto>, <Punto>), oppure creando dei nuovi strumenti. Il tema dei poliedri regolari (figura 13) è particolarmente affascinante; in particolare si può esaminare la formula di Eulero che dà una relazione tra il numero dei vertici V , il numero delle facce F e il numero degli spigoli S :

$$V + F - S = 2.$$

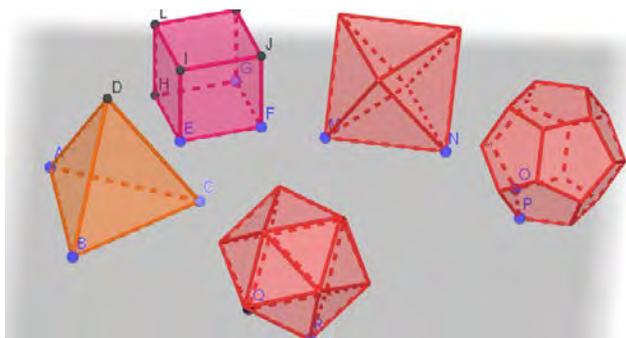


Fig. 13

3.17 - Dualità tra i poliedri regolari

Con il software 3D è facile scoprire la dualità tra i poliedri regolari; per esempio il numero di facce del cubo è uguale al numero dei vertici dell'ottaedro regolare, e viceversa, e analogamente per il dodecaedro e l'icosaedro regolari.

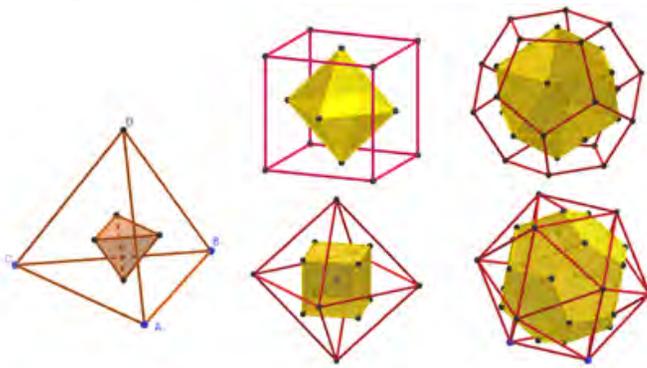


Figura 14

3.18 - Solidi di rotazione elementari: cilindro, cono e sfera

Nella vista Grafici 3D del software è facile costruire i solidi di rotazione elementari (cilindro, cono, sfera). Nella casella di

strumenti «Solidi» si possono usare i vari metodi di costruzione, in particolare quello, molto comodo, «per estrusione». Costruire un cerchio di base, un cilindro, un cono, una sfera con i vari metodi.

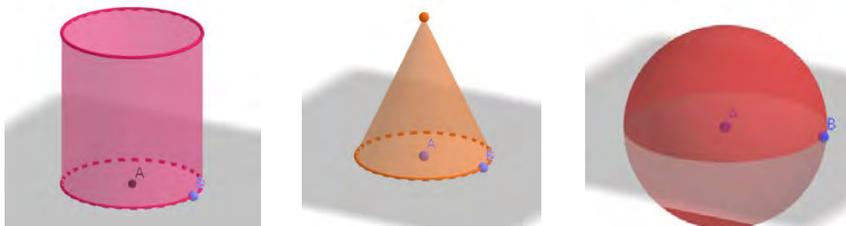


Figura 15

3.19 - Le coniche nello spazio (come sezioni di un cono)

Nella vista Grafici 3D è possibile costruire le coniche (ellisse, parabola, iperbole) come sezioni piane di un cono oppure di una “clessidra”, formata da due coni “opposti al vertice”.

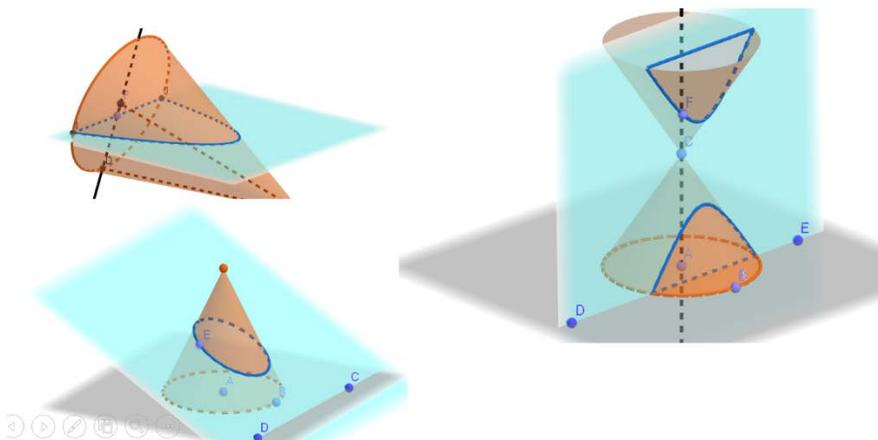


Figura 16

3.20 – Geometria sulla sfera: un problema interessante

Roma e New York sono quasi sullo stesso parallelo. Un aereo che parte da Roma per New York quale percorso segue? Descrive un arco di parallelo? Qual è la via più breve per andare da Roma a New York?

È un problema che si può presentare negli ultimi anni di scuola secondaria di II grado. Richiede di studiare un po' di geometria della sfera. *GeoGebra* permette di proporre un'ottima visualizzazione dinamica del problema e di risolverlo.

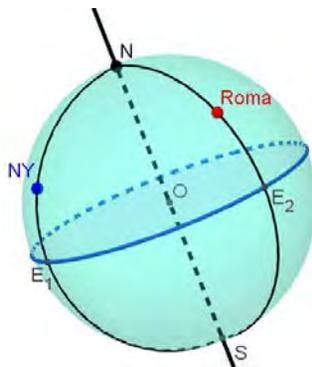


Figura 17

3.21 – Come funziona il GPS (la geolocalizzazione)?

Problema: perché occorrono tre satelliti per individuare la posizione di un punto sulla superficie terrestre (tramite il GPS)? Il problema può essere visualizzato e risolto con il software; il punto P si ottiene come intersezione di tre sfere, di centri rispettivi i tre satelliti S_1, S_2, S_3 , con la superficie terrestre.

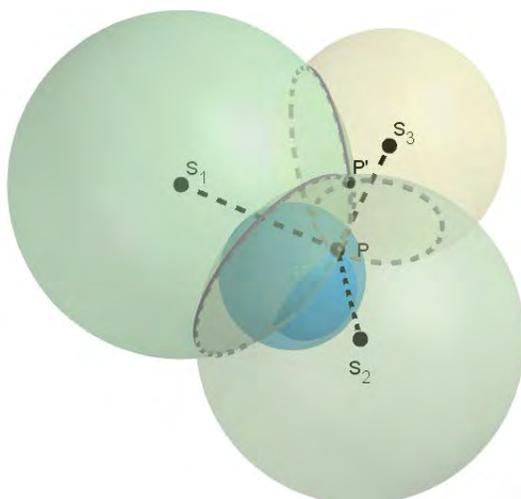


Fig. 18

3.22 - Simmetrie del cubo: assi di rotazione e piani di simmetria

Problema: determinare gli assi di simmetria (di rotazione) e i piani di simmetria di un cubo.

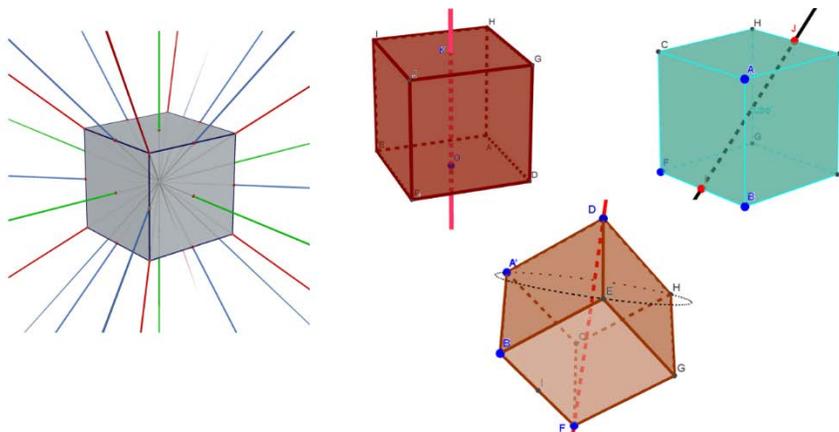


Figura 19

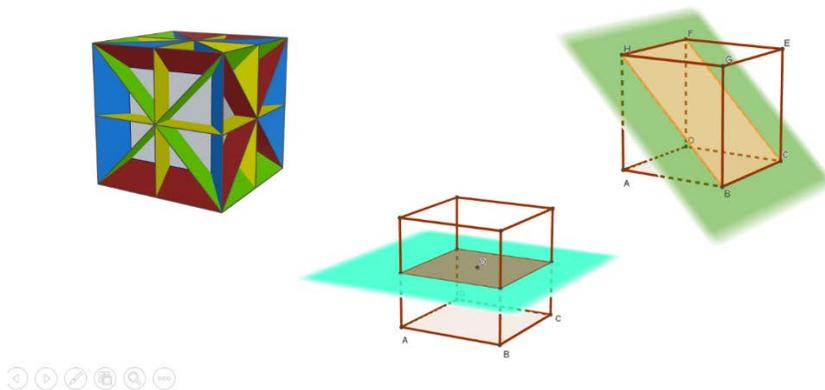


Fig. 20

3.23 - Principio di Cavalieri (visualizzazione dinamica)

Il principio di Cavalieri è fondamentale per affrontare lo studio dei volumi dei solidi. Sappiamo che si tratta di un assioma. La figura qui di seguito permette di visualizzare in modo dinamico l'equivalenza tra due prismi riconducendola alla equivalenza tra poligoni nel piano.

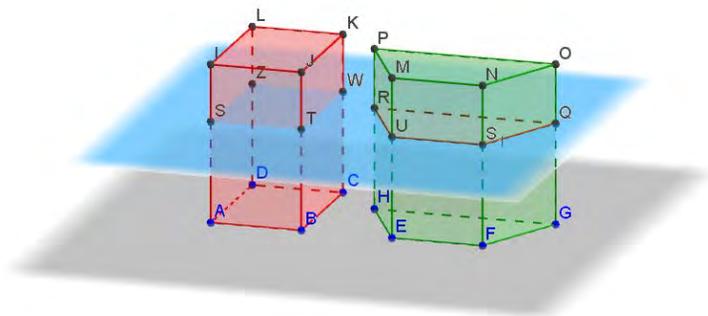


Fig. 21

3.24 – Cubo e scomposizione in tre piramidi equivalenti

Scomposizione di un cubo in tre piramidi equivalenti (anzi, addirittura congruenti). Costruire in cartoncino le tre piramidi (oblique) di base una faccia del cubo e altezza lo spigolo del cubo. Qual è lo sviluppo piano di una di queste piramidi? Costruire le piramidi con il software e con il cartoncino.

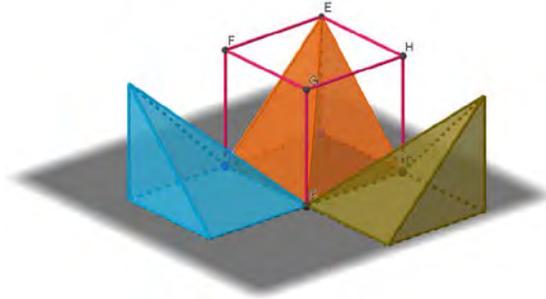


Fig. 22

3.25 – Prisma a base triangolare e la sua scomposizione in tre piramidi equivalenti

La scomposizione di un prisma triangolare in tre piramidi (tetraedri) equivalenti costituisce un teorema fondamentale quando si studia l'equivalenza di solidi. Si può fare la costruzione delle tre piramidi con il software e poi costruirle in cartoncino. Si ricava che il volume di una di queste piramidi è un terzo del volume del prisma.

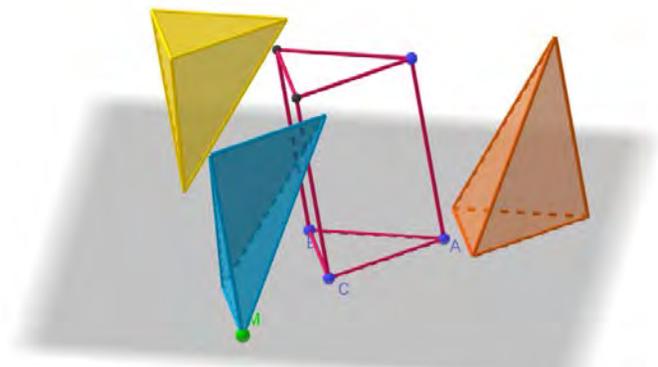


Fig. 23

3.26 - Superfici e volumi

La vista Grafici 3D offre anche degli strumenti per determinare la superficie e il volume dei solidi più importanti. Per esempio, si può verificare con il software il *grande teorema* di Archimede per la sfera e il cilindro equilatero circoscritto (figura 24):

$$\frac{S_{sfera}}{S_{cil}} = \frac{V_{sfera}}{V_{cil}} = \frac{2}{3}$$

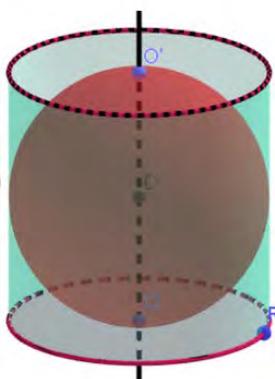


Fig. 24

3.27 – Geometria analitica nello spazio

La vista Grafici 3D permette agevolmente di affrontare lo studio della geometria analitica dello spazio, con la rappresentazione di punti, vettori, piani, rette, sfere, quadriche e in generale di altre superfici che sono grafici di funzioni in due variabili.

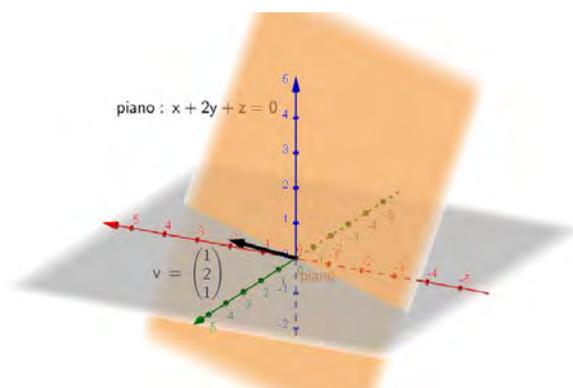


Fig. 25

3.28 – Superfici di rotazione

La vista Grafici 3D permette anche di rappresentare superfici di rotazione, generate da curve che ruotano attorno a un asse dato. Nella figura 26 si vede una superficie toroidale generata dalla rotazione, di tre quarti di giro attorno all'asse z, di una circonferenza.

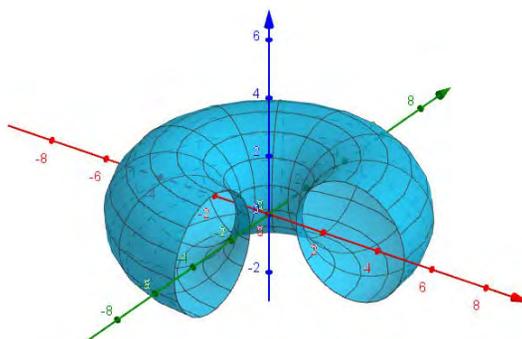


Fig. 26

4 - Conclusioni (da sperimentare in classe)

Un software come *GeoGebra* (3D) permette di unificare maggiormente la geometria dello spazio con la geometria piana. Si può effettivamente insegnare a “vedere nello spazio”. Un software 3D permette di visualizzare facilmente fatti geometrici nello spazio e permette di progettare delle attività didattiche che portino a formulare congetture anche in situazioni geometriche, come avvio alla dimostrazione. E, infine, con un software di geometria dinamica 3D si può rendere più attivo l’insegnamento e l’apprendimento della geometria dello spazio e affrontare l’argomento in modo più motivante per gli allievi.

Bibliografia e sitografia

AA.VV. (2004). *Matematica 2003 (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario)*. Lucca: Liceo Scientifico Vallisneri.

Tomasi L. (2018). Percorsi di geometria per la Scuola secondaria di II grado (con l'uso del software), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 41AB, N.5, pp. 669-680.

Villani V. (2004). *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*, Bologna: Pitagora Editrice.

I "problemi di Flatlandia" (rubrica mensile di problemi di geometria sintetica in rete, per studenti della scuola secondaria):

<http://dm.unife.it/fardicono/flatlandia/>

Esperienza e ragione in Leonardo da Vinci

Ma prima farò alcuna esperienza avanti ch'io più oltre proceda, perché mia intenzione è allegare prima l'esperienza e poi colla ragione dimostrare perché tale esperienza è costretta in tal modo ad operare. E questa è la vera regola come li speculatori delli effetti naturali hanno a procedere, e ancora che la natura cominci dalla ragione e termini nella esperienza, a noi bisogna seguitare in contrario, cioè cominciando, come di sopra dissi, dalla esperienza, e con quella investigare la ragione.

Nessun effetto è in natura senza ragione; intendi la ragione e non ti bisogna esperienza. La natura è piena d'infinite ragioni, che non furon mai in esperienza.

Leonardo da Vinci (*Aforismi*)
