

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVI - Serie IV – volume III (2)
settembre 2021**

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

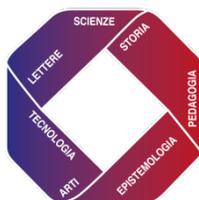
PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVI - Serie IV - Volume III (2)
Settembre 2021



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Salvatore Rao (Napoli)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Alberto Trotta (Salerno)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2021 Edizioni AFSU -
Teramo - ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiarino la fonte.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale edita dall'AFSU e distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

INDICE

Articoli

AA.VV. <i>La scomparsa di Alberto Trotta</i>	7
Franco Eugeni <i>La geometria proiettiva ed affine II: quadrati greco-latini e piani affini finiti</i>	19
Loredana Biacino <i>Curve patologiche nei primi anni del XX secolo</i>	47
Ferdinando Di Martino, Salvatore Sessa <i>I buchi neri: analisi della loro formazione e classificazione</i>	87
Francesco di Paola Bruno <i>Screenshot dell'effetto Doppler</i>	115
Franco Francia <i>Proprietà degli insiemi completi del IV ordine. Parte I</i>	129
<i>Profili biografici degli autori</i>	155

NOTA PER I LETTORI

Su richiesta della Direzione, il «Periodico di Matematica» dal 3 giugno 2021 è registrato sul Registro della Stampa oltre che nella versione on-line anche nella versione cartacea. Inoltre la sua periodicità cambia da semestrale a trimestrale. Pertanto, da questo numero in poi, usciranno quattro fascicoli all'anno, di cui qualcuno eventualmente doppio.



TRIBUNALE DI TERAMO

Il Presidente

Vista l'istanza che precede;

Verificata la regolarità della documentazione prodotta

Visto l'art. 6 della Legge 8.2.1948 n. 47

DISPONE

L'annotazione sul Registro della Stampa, al n. 695 del mutamento intervenuto nel periodico "PERIODICO DI MATEMATICA" che estende la pubblicazione oltre che on line anche cartacea, e del mutamento relativo alla periodicità che da semestrale diventa trimestrale.

Teramo 3.6.2021

Il Presidente

Dott. Carlo Calvaresi



La scomparsa di Alberto Trotta

n. 2-09-1957 – m. 20-09-2021

Nelle parole dei suoi più cari amici

Giuditta Pagano Trotta, Franco Eugeni, Ferdinando Casolaro, Giordano Bruno, Franco Francia, Fabio Manuppella, Renata Santarossa, Giovanna Della Vecchia, Anna Rita Carrafiello, Luca Nicotra.



Giuditta Pagano Trotta

Gli amici, e sono tanti, ora che non c'è più, di Alberto ricordano soprattutto il suo sorriso.

Ed è così, perché succede anche a me, sua compagna per molti anni nella vita, anche nella mia infinita tristezza, ecco affacciarsi a confortarmi quel sorriso dolce e fiducioso attraverso il quale egli comunicava e offriva la sua disponibilità. Alberto amava la vita in tutte le sue manifestazioni: i colori del mare nell'avvicinarsi delle varie stagioni, il verde delle colline, le passeggiate, parlare con la gente, la sua professione d'insegnante i cieli azzurri, le nuvole, quando assumono le forme che la fantasia suggerisce. Ma soprattutto amava i suoi libri, che occupano tutti gli angoli e gli spazi della nostra casa, le cui pagine sfogliava con grande cura. Mio marito era un sognatore, un uomo d'altri tempi; credeva nell'amicizia vera e sincera, senza secondi fini, un altruista che dava prima che tu chiedessi. Adesso voglio credere che sia partito per un lungo viaggio; so che mi mancheranno le sue telefonate e soprattutto mi rimane il rammarico che forse non sono stata capace, in questi anni che abbiamo vissuto insieme, di capire le sue angustie segrete, i suoi sogni mai realizzati, le sue aspirazioni. Questo pensiero mi procura dispiacere perché egli, nella sua grande bontà, ha pensato soprattutto che fossi io quella a cui non mancasse nulla, che ottenesse quello a cui aspiravo e mi aiutava ad alleggerire i miei dispiaceri offrendo la sua collaborazione. Voglio ricordarlo così: dietro la scrivania con lo sguardo sul computer, assorto e sereno, che mi parla con i suoi lunghi silenzi, senza suoni eppure così presente. Io ti ringrazio, Alberto, per avermi fatto vivere giorni sereni, di avermi

incoraggiata e lodata anche nelle mie piccole vittorie, confortata e sorretta nelle mie debolezze.

Grazie, perché la tua vicinanza affettuosa e sicura non mi ha fatto mai sentire sola; con te sono stata bene e ho la certezza che il tuo ultimo pensiero è stato per me e hai pensato di chiamarmi, ma io non ti ho sentito anche se mi trovavo a due passi da te.

Tu vivrai nel mio ricordo, sempre, perché io continuerò a fare le stesse cose quotidiane che facevamo insieme e in quest'altro tratto di viaggio che dovrò percorrere sarai tu a darmi forza e coraggio e a consolarmi nei giorni di smarrimento. Sarai sempre nei miei pensieri e quanto e per quanto tempo potrei parlare di te perché per tanti sei stata una persona speciale.

Franco Eugeni

Alberto carissimo, ci hai preceduto in quel mondo di là dei quali molti di noi sperano nell'esistenza. Se così è troverai tanti amici che hanno preceduto te e con i quali ci ritroveremo.

Ci siamo conosciuti molti anni fa e diventammo subito amici. La tua serietà scientifica si univa a quel modo affettuosi di iniziare l'amicizia che, come subito si capiva, era sincera, solida, duratura.

In questi ultimi anni sei stato un pilastro dell'AFSU, struttura della quale sei stato il Segretario Generale, oltre ad essere uno dei continui ed esperti autori. Molti lavori sono stati da te revisionati e molti autori ti sono grati per i tuoi consigli e revisioni.

Ma questo è ben poco rispetto alla rete di relazioni che avevi saputo costruire attorno a te. Tu stesso mi hai sempre

raccontato come ti meravigliavi del fatto che personaggi, che a tuo dire, erano scientificamente altolocati, si rivolgevano a te con stima e affetto, alla pari! Tu ti meravigliavi di questo! Noi, i tuoi amici, non ci meravigliavamo affatto. Non v'è dubbio colpiva la tua pacata cultura, la tua bontà verso il prossimo, il tuo amore per la conoscenza e la derivante didattica.

Quanti discorsi, quante idee, quanti progetti maturati assieme. Noi continueremo fino a che sarà possibile, con Luca Nicotra, Nello Buonocore, Ferdinando Casolaro, Renata Santarossa, Antonio Lungo e i tuoi più recenti amici Franco Francia e Fabio Manuppella, il figlio di Peppe.

Fabio è rimasto molto scosso per la tua scomparsa, abbiamo parlato dell'affetto con il quale lo hai ricevuto un anno fa e la tua disponibilità. Ma saranno loro a scrivere di te.

Per ora il ricordo, il rimpianto e non altro noi possiamo fare.

Ferdinando Casolaro

Il 20 settembre scorso (2021) ci ha lasciato il prof. Alberto Trotta, mio amico fraterno con cui ho condiviso tante attività e lavori scientifici a due nomi.

Alberto era amico di tutti, con la sua gentilezza e nobiltà d'animo, disponibile in ogni momento, curava la nostra rivista «Periodico di Matematica» in qualità di Segretario dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU).

Docente di Matematica e Fisica nelle Scuole secondarie di secondo grado dall'inizio degli anni Ottanta e cultore nei corsi universitari di discipline Matematiche e Fisiche, è autore di numerose pubblicazioni scientifiche. Nel 2002 aveva fondato la sezione Mathesis di Anzio-Nettuno di cui è stato Presidente

storico in quanto rieletto all'unanimità in ogni mandato triennale. Nell'ambito della sua attività Mathesis è stato l'organizzatore di un importante Congresso nazionale nel 2004, precisamente nel periodo in cui si verificarono significative trasformazioni nei corsi universitari. Con i professori Giordano Bruno e Paolo Allievi ha curato gli atti con la pubblicazione di un volume di 570 pagine, che contiene contributi di circa sessanta docenti sia di Scuola che di Università, dirigenti scolastici e ispettori tecnici.

Da sempre sensibile alle esigenze dei giovani, ha dedicato gran parte del suo percorso professionale alla Didattica.

In collaborazione con il sottoscritto e con il prof. Franco Eugeni, di cui si sentiva allievo prediletto, ha prodotto volumi che assemblavano i principali risultati di ricerca didattica di tanti docenti con i quali teneva continui contatti.

Negli ultimi anni i suoi interessi di studio erano principalmente rivolti ai risultati della Fisica moderna con le interrelazioni tra Fisica e Matematica, senza mai trascurare gli aspetti di divulgazione didattica. Sicuro di interpretare il pensiero di tutti coloro che si sono pregiati della sua conoscenza e del suo insegnamento, rivolgo un affettuoso abbraccio a Giuditta, fedele compagna di vita da oltre quaranta anni, che lo ha sempre sostenuto anche nella sua attività di ricercatore. Ciao Alberto.

Giordano Bruno

Non riesco ancora a darmi pace del fatto che Alberto non sia più tra noi. Per me è stato come un fratello minore. Ogni giorno penso a lui e a quanto da lui ho ricevuto.

La sua spiccata umanità e sensibilità traspariva dalle frequenti telefonate che ci facevamo, nelle quali non perdeva occasione per ringraziarmi di una vicinanza e di una affinità comuni. Lo facevo fare perché sapevo che questo gli dava piacere, anche se ogni tanto mi schermivo, cercando di ricordargli cosa lui avesse fatto per me e per tante altre persone, a partire dai suoi amati studenti.

Nello scrivere questo breve ricordo mi rendo conto che mi è estremamente difficile parlarne al passato. Non sono ancora pronto per onorarne degnamente la memoria.

Da fratelli, come ci siamo considerati anche se non ce lo siamo mai detti – entrambi pervasi da una riservatezza dei sentimenti –, Alberto mi è stato vicino nei momenti più delicati della mia vita: dai più tristi a quelli più felici.

Ma di questi desidero parlarne approfonditamente più in là. Qui mi limito a ricordare, sempre per tracciarne un semplice ritratto che dia il senso del suo stile e del suo animo gentile e signorile, un aneddoto che lui amava rammentarmi spesso.

L'avevo coinvolto nella didattica dell'insegnamento di Analisi matematica che ho tenuto per anni nella sede di Rieti della Facoltà di Ingegneria della Sapienza di Roma. Nonostante il lungo viaggio cui doveva sobbarcarsi – allora abitava a Lavinio – una volta a settimana veniva a tenere le esercitazioni. Era entusiasta di poter trasferire il suo sapere a studenti universitari e questi lo percepivano ed erano molto contenti del suo apporto. Un giorno ci trovavamo nell'aula della segreteria e con noi c'erano il Presidente del corso di laurea di Ambiente e territorio, a cui faceva capo l'insegnamento di Analisi matematica, e il docente di Fisica.

Quest'ultimo vedendoci entrare ci apostrofa così: finalmente riesco a dare dei buoni voti in Fisica, si vede che gli studenti apprendono bene l'analisi matematica! Questa cosa ci fece ovviamente molto piacere. Ma come me la ricordava Alberto, sembrava che il merito fosse solo mio, come se lui non avesse dato nessun contributo! E invece, ovviamente non era così, anzi sono convinto che molto fosse merito suo. Non l'ho mai sentito dire che insieme avevamo raggiunto quel buon risultato! Alberto è stato questo: grande generosità e signorilità d'animo, oltre che grandi capacità didattiche impreziosite dalla sua umanità.

Non lo scorderò mai!

Franco Francia

Nonostante il trascorrere del tempo la scomparsa di Alberto continua a provocare profonda tristezza. Rimane l'amarezza di non aver avuto l'occasione di salutare con una bella stretta di mano l'amico Alberto conosciuto soltanto telefonicamente. Nonostante non ci fossimo mai incontrati avevamo scoperto affinità di idee che comunicavamo reciprocamente mediante lunghe conversazioni telefoniche un po' serie, un po' goliardiche. Sento la tua mancanza Alberto.

Speriamo, in qualche altra dimensione di questo universo, di incontrarci di nuovo e finalmente stringerci la mano.

Fabio Manuppella

Caro Alberto,

ho avuto l'occasione e la fortuna di conoscerti solo di recente quando, per motivi di studio, visitai Salerno.

Non ci eravamo mai conosciuti di persona ma avevamo in comune un grande amico, Franco Eugeni, al quale eri tanto affezionato e del quale mi parlavi sempre con molta stima e ammirazione. Ho da subito apprezzato la tua spontaneità e la tua disponibilità, il saper ascoltare e dispensare tanti consigli, frutto della tua esperienza non solo come professionista ma anche come uomo. Quel giorno mi spiegasti quale fosse per te il significato della vera amicizia. Tu, Franco, io e gli amici che avevamo in comune eravamo parte di un'unica grande squadra, pronti a condividere i propri successi e a sostenersi nei momenti di difficoltà. Non c'era cosa che non avresti fatto per far percepire il tuo supporto, e così fu anche quando io dovetti affrontare il momento più difficile della mia vita, la scomparsa di mio padre. Nonostante le tante restrizioni introdotte per il contenimento dei contagi da Covid-19, non è mai mancata da parte tua una parola di conforto, un consiglio o un incoraggiamento, e di questo non smetterò mai di ringraziarti.

È stato per me un piacere e un orgoglio poter instaurare con te anche un rapporto di collaborazione. Quanti articoli revisionati e inviati per la stampa del «Periodico di Matematica» e del «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane». Non ti fermavi proprio mai!

L'Accademia Piceno-Aprutina dei Velati, Ente di Formazione con il quale hai collaborato diverse volte in qualità di autore per le riviste scientifiche «Ratio Mathematica» e «Science&Philosophy», si unisce all'abbraccio di tutti gli amici che oggi piangono la tua scomparsa. Un grande professionista ma, prima di tutto, un grande uomo. Mancherai tanto a tutti noi.

Renata Santarossa

Ho conosciuto Alberto ad Anzio nel 2003, in occasione di un convegno da lui organizzato, essendo stato il fondatore della sezione Mathesis di Anzio-Nettuno nonché organizzatore dello stesso convegno. In rappresentanza della Mathesis eravamo Ferdinando Casolaro, allora vicepresidente della sezione di Napoli ed io presidente della sezione di Sorrento. Ferdinando conosceva già Alberto, io lo incontravo per la prima volta ed è stato un incontro indimenticabile, cosa confermata anche dallo stesso Alberto che non esitava di parlarne ogni qualvolta ci si rivedeva. Dell'amabile accoglienza, della signorilità e della compostezza con cui Alberto ci ha accolti, resterà in me un sempre vivido ricordo. Successivamente vi sono stati vari incontri di carattere scientifico che hanno permesso a me e ad Alberto di poter parlare e di confrontarci su vari piani, quello scientifico, umano, personale. Sono state queste le occasioni che mi hanno fatto apprezzare non solo il suo valore scientifico ma anche l'uomo che rappresentava tale valore. Le numerosissime pubblicazioni a carattere nazionale e internazionale testimoniano la vasta competenza e lungimiranza nel campo della fisica e della matematica. Impegnato e riflessivo, era aperto a ogni possibile conoscenza che potesse interrelazionarsi con la fisica e la matematica. Un esempio è "Mathematics, Music & Architecture" pubblicato nel 2017 su «Science & Philosophy» n. 1 vol. 5. Sempre molto discreto e mai invadente, ha vissuto in punta di piedi per non calpestare quelle degli altri e avrei voluto che ancora lo continuasse a fare. Purtroppo il destino non è stato clemente nei suoi riguardi, in una battuta di ciglia ci ha portato via una persona

generosa in tutte le sue espressioni, come uomo, come studioso, come docente, come marito, come amico. Il suo insegnamento di vita mi accompagnerà sempre per non dimenticarlo.

Giovanna Della Vecchia

Te ne sei andato così, all'improvviso, senza fare rumore: nella morte come nella vita hai mantenuto integri il tuo stile, la tua discrezione, la tua riservatezza. Hai lasciati sgomenti e addolorati tutti coloro che ti volevano e ti vogliono bene, ma ci hai regalato il ricordo indelebile di un amico onesto e sincero, del grande professionista che sei stato, sempre attento a portare a termine e con rigore gli impegni presi e a condividere con le persone più vicine il risultato delle tue ricerche. Ci mancherai, ci mancherà il tuo sorriso aperto e sincero, il tuo entusiasmo per le piccole cose, ci mancherà molto la persona semplice e generosa che sei stata.

Ciao Alberto, riposa in pace!

Anna Rita Carrafiello

Carissimo Professore Alberto,

ci siamo da poco salutati con un arrivederci, ringraziandola per tutto ciò che, grazie alla sua passione per la conoscenza della Matematica, è riuscito a trasmettere a tutti i suoi studenti. "Nessuno escluso"! La sua scomparsa ci ha lasciati nell'impossibilità di poterla avere nostro gradito ospite in questi primi giorni di ripresa dell'attività didattica.

Tanti sono i ricordi che tornano in mente, tanti sono i momenti trascorsi insieme: tutti intensi e pregni di cultura e

sensibilità. Abbiamo condiviso la Sua Umanità, mista al rigore di chi vive la scuola come una vocazione, consapevole del proprio compito formativo ed educativo. È successo tutto così all'improvviso, proprio quando avevamo più bisogno di Lei. Lei che ben conosceva l'importanza d'insegnare la Matematica, utilizzando altre discipline quali l'Arte, la Musica, le Scienze e la Tecnologia. Oggi si chiede alla Scuola di rivedere questi apprendimenti, declinati in ambiti multidisciplinari, come Lei ha avuto modo di scrivere in testi pubblicati da grandi case editrici e come ha cercato di trasmetterlo a tutti noi e agli studenti. Lei è stato il nostro precursore dell'innovazione didattica in campo scientifico e, grazie al suo lavoro, oggi, siamo avvantaggiati nell'implementare il cambiamento richiesto dalle nuove disposizioni ministeriali al fine di garantire il successo in ambito matematico, scientifico, tecnologico dei nostri studenti.

Siamo privilegiati nel raccogliere il testimone che ci ha lasciato. Ne faremo tesoro!

*Il Dirigente Scolastico Prof.ssa Anna Rita Carrafiello
Il Personale Scolastico dell' I.I.S.S. " S. Caterina da Siena -
Amendola " di Salerno*

Luca Nicotra

Ho voluto inserire per ultimo il mio ricordo di Alberto, non per ritardo nel volergli tributare un doveroso quanto sentito pensiero, ma per una spontanea forma di rispetto verso coloro che ben più di me hanno il diritto di qualificarsi come suoi "più cari amici", avendolo potuto conoscere e apprezzare da molto più tempo di quanto a me sia stato concesso dalle circostanze che ci hanno fatto incontrare.

La mia conoscenza di Alberto, infatti, è avvenuta in occasione della creazione dei due periodici dell'AFSU, il «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane» e il «Periodico di Matematica», quindi nel 2018. Purtroppo c'è stata una sola occasione nella quale ho potuto incontrare Alberto, a Roma, assieme a Franco Eugeni e Ferdinando Casolaro, per discutere in presenza di alcune questioni riguardanti in particolare il «Periodico di Matematica». Quell'incontro fu già sufficiente per rivelarmi le spiccate doti umane e scientifiche di Alberto. Successivamente con Alberto avemmo molti colloqui telefonici sempre per il Periodico, durante i quali emerse chiaramente la nostra comune visione riguardo a varie questioni di gestione della Rivista e non solo. Inevitabilmente si scivolava verso questioni didattiche e scientifiche, sulle quali i nostri punti di vista convergevano.

La sua sensibilità umana mi fu rivelata poi in altre occasioni, riguardanti alcuni miei problemi di salute. La cosa straordinaria era che pur non essendoci fra noi una confidenza consolidata da molti anni di amicizia e di frequentazione, lui invece si comportava come se ciò fosse realmente accaduto. Nelle ultime telefonate mi espresse più volte la sua stanchezza e un certo disagio nell'ambiente lavorativo, non più in sintonia con le sue elevate doti di didatta e uomo di scienza. Non vedeva l'ora di andare in pensione. E ora che ci era riuscito, non ha potuto godere di quel meritato riposo e delle possibilità di dedicarsi pienamente alle sue attività predilette.

La notizia della sua morte improvvisa mi ha lasciato basito e incredulo. Altre parole sarebbero vuota retorica.

La geometria proiettiva ed affine II : quadrati greco-latini e piani affini finiti

Franco Eugeni *

*Già Professore Ordinario di Filosofia della Scienza
Presidente dell'AFSU – eugenif3@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n2.043

Sunto: *Questo è il secondo lavoro di una serie di alcuni lavori divulgativi sulle basi della geometria. Nel lavoro ci occupiamo essenzialmente dei piani proiettivi ed affini finiti e dei loro profondi legami con la teoria dei quadrati greco-latini. È importante ricordare come la costruzione di un quadrato greco-latino si ottiene sovrapponendo due quadrati latini ortogonali, cioè tali che le coppie costruite con gli elementi del primo con quelli del secondo siano tutte distinte. Inoltre l'esistenza di piani affini finiti equivale alla costruzione di sistemi di quadrati latini mutuamente ortogonali. Va ricordato anche che un quadrato latino è la tabella moltiplicativa di un quasigruppo, quindi la classe dei quadrati latini ovvero dei semigruppi è ben più ampia della classe dei gruppi finiti, la cui classificazione è legata al cosiddetto Teorema delle 15 mila pagine. Nella parte finale del lavoro presentiamo alcuni esempi di piani affini non desarguesiani, in particolare legati al concetto di nearfield (quasicampi), idee queste che furono a suo tempo estremamente feconde, e che sono di sicuro interesse per giovani studiosi desiderosi di muoversi in questa direzione.*

Parole Chiave: *piani affini finiti – quadrati greco latini – fibrazioni - piani non desarguesiani*

Abstract: *This is the second paper in a series of some divulgative works on the foundations of geometry. In this paper we we present some constructions of some finite projective and affine planes and their their connections with the theory of Greco-Latin squares. It is important to remember that the construction of a Greek-Latin square is obtained by superimposing two orthogonal Latin squares, that is, such that the pairs constructed with the elements of the first with those of the second, are all distinct. Furthermore, the existence of finite affine planes is equivalent to the construction of mutually orthogonal systems of Latin squares. We like to remember that a Latin square is the multiplicative table of a quasigroup, therefore the class of Latin squares or semigroups is much larger than the class of finite groups, whose classification is the so-called Theorem of 15 thousand pages. In the final part of the work we present some examples of non-Desarguesian affine planes, in particular related to the concept of nearfields. Such topics were extremely useful, in the past time, and they will be of interest to young mathematicians wishing to work in this direction.*

Keywords: *Finite Affine PSanes - Greek Latin squares - Spreads - non desarguesian planes.*

1 - Quadrati latini, quasi-gruppi e quadrati greco-latini

Nel presente paragrafo introdurremo richiami sulle strutture essenziali, del mondo della matematica discreta, che collega-no oggetti matematici apparentemente distanti tra loro, coin-volgendo anche i piani affini e proiettivi finiti. Iniziamo con l'introdurre i quadrati latini.

Una matrice quadrata nella quale ogni riga ed ogni colonna siano una permutazione dei numeri $0, 1, \dots, n-1$, (eventualmente dei simboli a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) si chiama un quadrato latino d'ordine n .

Il nome fu dato da Eulero per il fatto che egli era solito denotare gli elementi della prima riga (e quindi delle altre) con lettere latine.

Un quadrato latino si può riguardare come una *generalizzazione dei gruppi finiti*, in quanto un quadrato latino si può assumere come la tavola di composizione di un struttura algebrica, meno ricca dei gruppi, denominata *quasi-gruppo*.

Definizione. Un *quasigruppo* è una struttura algebrica (S, \cdot) , dove S è un insieme (finito o no) e (\cdot) è una operazione binaria interna, tale che le equazioni di 1° grado:

$$(1) \quad a \cdot x = b,$$

$$(2) \quad y \cdot a = b,$$

quali che siano gli elementi $a, x, y, b \in S$, hanno ciascuna una unica soluzione (in genere differenti).

È ben noto che se indichiamo con $0, 1, \dots, n-1$ gli elementi di un insieme finito S , una operazione binaria su S si rappresenta assegnando un elemento $a_{hk} \in S$, elemento che possiamo collocare in una tabella $n \times n$, all'incrocio della riga h -ma con la colonna k -esima. La tabella prende il nome di *tabella di composizione della struttura algebrica*.

Notiamo che la (1) si traduce nel fatto che ogni elemento di S deve comparire in ogni riga della matrice una ed una sola volta, altrimenti avremmo una equazione di tipo (1) con due soluzioni, analogamente la (2) implica che in ogni colonna della matrice ogni elemento di S compare e compare una ed una sola volta, per analogo motivo. Conseguentemente la matrice $[a_{hk}]$ è un quadrato latino. Inversamente se assumo un

quadrato latino come tabella di composizione di una struttura algebrica avente come insieme S degli elementi quelli che compaiono in una riga (o colonna della matrice), nasce una struttura algebrica che è un quasigruppo, in quanto le proprietà (1) e (2), sono banalmente verificate. Dunque:
tutti e soli i quasi-gruppi finiti sono quelli che hanno per tabella di composizione un quadrato latino.

Un quasigruppo con elemento neutro si chiama *cappio* e un cappio associativo è un *gruppo finito*. Si noti che, poiché esistono gruppi finiti di ogni cardinalità, esistono anche quadrati latini di ogni ordine.

È noto che fissato n esistono esattamente:

$$\#QL(n) = .n!(n-1)! (n-2)! \dots 3! 2! 1!$$

quadrati latini di ordine n . Si noti che:

$$\#QL(3) = 12 , \#QL(4) = 288 , \#QL(5) = 5.760 , \dots$$

ovvero il numero dei quadrati latini ha un crescita enorme all'aumentare di n .

Un esempio è dato dalla matrice d'ordine 5 seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc} \textcircled{2} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

Nell'esempio si noti che la struttura sottesa da tale tabella da luogo ad una struttura algebrica che non è commutativa in quanto, ad esempio, è: $2 \square 3 = 0$, $3 \square 2 = 1$, inoltre nella struttura non esiste un elemento neutro essendo ad esempio l'elemento 1 elemento neutro a sinistra con $1 \square a = a$, ma non a destra essendo $a \square 1 \neq a$ per $a \neq 1$. Non vale la proprietà associativa (quindi la struttura in esame non è un coppia e nemmeno un gruppo), avendosi (ad esempio):

$$(2 \square 1) \square 3 = 3 \square 3 = 2, \quad \text{e} \quad 2 \square (1 \square 3) = 2 \square 3 = 0.$$

Tuttavia le equazioni di 1° grado hanno soluzioni uniche, essendo la tabella un QL, anche se non sempre con il medesimo risultato. Infatti l'equazione $3 \square x = 4$, ha la soluzione $x = 0$, mentre l'equazione $y \square 3 = 4$ ha soluzione $y = 4$.

Una seconda classe di oggetti dei quali vogliamo occuparci sono i *quadrati greco-latini*. Considero due quadrati latini di ordine n :

$$A = [a_{hk}], \quad B = [b_{hk}], \quad h, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definizione: *due quadrati latini sono ortogonali se le n^2 coppie (a_{hk}, b_{hk}) sono tutte distinte. In tale caso si chiama prodotto di A con B, la nuova matrice (composta dalle coppie):*

$$AB = [(a_{hk}, b_{hk})].$$

Tale prodotto non è un quadrato latino, ma un nuovo ente denominato *quadrato greco-latino*, nome introdotto da Eulero che li scriveva usando le lettere latine per il primo quadrato e le lettere greche per il secondo.

Esempio:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \alpha & \gamma & \beta \end{vmatrix}, \quad AB = \begin{vmatrix} a\gamma & b\beta & c\alpha \\ c\beta & a\alpha & b\gamma \\ b\alpha & c\gamma & a\beta \end{vmatrix}.$$

2 - Piani affini finiti desarguesiani

La terza struttura di cui vogliamo ricordare la definizione è la struttura di *piano affine finito d'ordine n*.

Definizione. Una struttura geometrica (A, \mathcal{R}) , dove A è un insieme finito ed \mathcal{R} è una famiglia di blocchi detti rette, si chiama *piano affine* se:

1. Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
2. Ogni retta ha almeno due punti ed esistono tre punti non appartenenti ad una stessa retta.
3. Dati un punto P ed una retta r con P non appartenente ad r , esiste una ed una sola retta per P (detta la parallela) non avente punti in comune con r (l'unicità implica banalmente che la relazione di parallelismo è simmetrica e transitiva).

Se inoltre vale la condizione che:

4. esiste una retta avente n punti (e come si prova ogni retta ha n punti), allora il piano affine si dice *finito di ordine n*, e si denota con α_n .

È fatto ben noto, che un piano affine, finito o no è sempre immergibile in un piano proiettivo,¹ per cui un piano affine è

¹ Cfr. F.Eugeni (2021).

desarguesiano² o no seconda che sia immergibile in un piano proiettivo desarguesiano o no.

Nel caso generale (finito o infinito) di dimensione $n \geq 3$. ricordiamo il:

Teorema di Desargues. Sia (S, \mathcal{B}) uno spazio proiettivo (irriducibile³) di dimensione $n \geq 3$, quindi isomorfo ad uno spazio proiettivo su un campo. Siano ℓ, m, n tre distinte rette concorrenti in un punto O . Siano dati i punti distinti

$$A, A' \in \ell, B, B' \in m, C, C' \in n.$$

Siano

$$U = AB' \cap A'B, V = AC' \cap A'C, W = BC' \cap B'C,$$

allora U, V, W sono allineati.

Il teorema precedente non vale in dimensione 2, si può dimostrare che:⁴

Teorema fondamentale. Dato uno piano proiettivo, se in esso vale anche la configurazione di Desargues, per ogni sistema di punti $\{O, A, A', B, B', C, C', U, V, W\}$ allora e allora soltanto il piano proiettivo è isomorfo ad un piano proiettivo su un campo.

Segue che i piani proiettivi (e quindi i piani affini) si distinguono in piani desarguesiani e in piani non

² Un piano proiettivo si dice desarguesiano se in esso è sempre valido il Teorema di Desargues.

³ Significa che ogni nretta ha almeno 3 punti.

⁴ Segre B. (1961), op.cit. chap.14, n.108.

desarguesiani. Ricordiamo ancora che per i piani affini finiti sussiste il seguente:

Teorema. *Sia dato un piano affine finito di ordine n . Allora ogni retta ha n punti, da ogni punto escono $n+1$ rette, ci sono $n+1$ direzioni, e un fascio di rette parallele è formato da n rette, infine il piano ha n^2 punti e contiene $n^2 + n$ rette.*

Se il piano affine finito α_n è desarguesiano, il piano è a coordinate in un campo di Galois. Risulta quindi $n = q = p^h$ e il campo di Galois sarà denotato come è usuale con $GF(q)$. Il piano α_q si denota con $AG(2,q)$, e la sua unicità, per ogni ordine q , è assicurata dall'unicità, a meno di isomorfismi del suo ampliamento proiettivo.

Quando n non è una potenza di un primo non si conoscono esempi di piani affini (e proiettivi) aventi quell'ordine e pochi sono i casi in cui conosciamo la non esistenza. Si sa che quando $q = 6, 10, 14, 21, 22, 26, 30$ non esistono piani proiettivi e quindi nemmeno piani affini finiti.

A riguardo chiudiamo il paragrafo dei preliminari, ricordando il ben noto:

Teorema di Bruck-Ryser. *Se $q = 1 + 4k$, oppure $q = 2 + 4k$ con $k \geq 3$, ed esiste un piano proiettivo di ordine q , π_q , segue che q è somma di due quadrati.*

Questo sembra attualmente essere l'unico teorema che fornisca qualche indicazione sull'esistenza dei piani proiettivi ed affini finiti di ordine non necessariamente potenza di un primo. Dal precedente Teorema emerge che per $q = 6, 14, 21$,

22, 26, 30 non esistono piani proiettivi di ordine q . Per $q = 10$, si è provato con un tecnorema⁵.

È anche noto⁶ che per $q = 10, 12, 15, 18, 20, 24, 28$ il teorema di Bruck & Ryser non è applicabile.

3 – Il problema dei 36 ufficiali e la nascita dei quadrati latini

Entriamo in argomento enunciando il:

Problema dei 36 ufficiali (L. Euler, 1782). Esiste una delegazione di 36 ufficiali, ognuno dei quali appartiene ad uno dei 6 reggimenti a,b,c,d,e,f. I 6 gradi sono $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta$, cioè generale, colonnello, tenente-colonnello, maggiore, capitano, tenente. Ci si chiede se sia possibile formare un quadrato 6X6 in modo tale che ogni grado e ogni reggimento siano rappresentati in ogni riga e in ogni colonna?

Il quadrato richiesto sarebbe un ipotetico quadrato “greco-latino” d’ordine 6, perché i 36 elementi del quadrato richiesti potrebbero essere rappresentati da simboli del tipo:

$$a\alpha, a\beta, \dots, f\varepsilon, f\theta.$$

Dunque il *problema di Eulero dei 36 ufficiali*, potrebbe oggi enunciarsi nella forma estremamente semplice e significativa: *esiste un quadrato greco latino d’ordine 6?*

Naturalmente lo stesso problema si pone, in modo molto generale, per quadrati latini d’ordine n . Eulero riuscì a trovare

⁵. Si tratta di un teorema provato tutto o in parte mediante l’utilizzo di un computer. Cfr. Cerasoli M, Eugeni F., Protasi M. (1988) pp. 35,231.

⁶ G.Tallini (2005), p.54-56.

soluzioni per ogni n , tranne per quelli per i quali n è il doppio di un dispari, ovvero se n risulta del tipo:

$$n \equiv 2 \pmod{4}, \text{ ovvero } n = 2(2k+1).$$

Ne seguì la seguente:

Congettura di Eulero (1782). Se $n = 2(2k+1)$, ovvero è 2 per un intero dispari, allora non esistono quadrati greco latini di ordine n .

La congettura fu dimostrata (con qualche errore, poi sanato) nel 1900, per il caso minimo $n = 6$, da Gaston Tarry:⁷

Teorema di Tarry. La congettura di Eulero è vera per $n = 6$.

La congettura di Eulero ($n > 6$) generale fu sfatata, grazie alla costruzione dei seguenti due quadrati latini⁸ ortogonali di ordine 10:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 0 7 8 9 3 2 4 6 5	5 8 6 9 0 4 7 2 3 1
2 3 9 4 5 6 1 0 7 8	1 2 3 0 7 8 9 4 5 6
3 2 1 0 7 8 9 5 4 6	7 5 8 6 9 0 4 3 1 2
4 5 6 9 8 7 0 3 2 1	8 9 4 5 1 2 3 6 0 7
5 6 8 7 0 1 4 9 3 2	6 0 7 1 2 3 5 8 9 4
6 7 0 1 2 4 5 8 9 3	9 4 1 2 3 7 8 5 6 0
7 4 5 6 3 9 8 2 1 0	3 6 0 7 8 1 2 9 4 5
8 9 3 2 1 0 7 6 5 4	4 7 5 8 6 9 0 1 2 3
9 8 4 5 6 2 3 1 0 7	2 3 9 4 5 6 1 0 7 8

⁷ Tarry G. (1843-1913), matematico, considerato dilettante, famoso per la sua soluzione della non esistenza di quadrati latini d'ordine 6.

⁸ F.Eugeni (1996, 100 anni) p.93.

Per composizione di coppie si ha un quadrato greco-latino di ordine 10. Tuttavia ad oggi non è nota l'esistenza di un eventuale terzo quadrato latino di ordine 10, che sia ortogonale con i due noti. L'aver provato la non esistenza di un piano affine di ordine 10, sia pure per via informatica, ovvero mediante un tecnorema, ci assicura, mediante un teorema che vedremo più avanti nel testo, che non esiste un sistema completo di 9 quadrati latini, mutuamente ortogonali di *ordine 10*. Ma naturalmente ne potrebbero esistere da 3 ad 8. Si ha anche che:

Proposizione. Esiste una coppia di quadrati latini ortogonali per ogni ordine dispari.

Ritornando al problema generale un primo passo avanti, in questo studio fu fatto nel 1943 da Henry Mann⁹, un eminente statistico, che provò il seguente:

Teorema di Mann (1943). Se n è il doppio di un numero dispari e se $n = a, b, \dots, z$ risultano essere potenze di primi distinti, posto $m = \min(a, b, \dots, z)$, allora esistono $m-1$ quadrati latini mutuamente ortogonali.

Dovranno trascorrere ancora 16 anni, per un totale di 179 anni, dall'enunciato della *congettura di Eulero*, perché il grande

⁹ Henry Berthold Mann (1905- 2000) è stato un matematico statunitense, noto per i suoi contributi in Teoria dei Numeri e Statistica. Gli è stato assegnato il Cole Award nel 1946.

matematico indiano Bose¹⁰, con i suoi collaboratori, dimostrino il teorema conclusivo di questa teoria:

Teorema di Bose-Shirkande¹¹-Parker¹². *La congettura di Eulero è vera solo per $n = 6$.*

In generale possiamo dire, dal Teorema Mann, che il numero massimo $M(n)$ di quadrati latini d'ordine n mutuamente ortogonali verifica la condizione :

$$M(n) \leq n-1$$

Se accade che per un intero n si ha un insieme di $n-1$ quadrati latini mutuamente ortogonali, chiameremo tale insieme un *sistema completo di quadrati latini mutuamente ortogonali*.

Una risposta al problema di sapere quando tali sistemi completi esistono, fu trovata, ancora da Bose e da Stevens, che provarono nel 1938, il teorema seguente:

¹⁰ Raj Chandra Bose (1901-1987), è stato un matematico e statistico indiano, noto soprattutto per i suoi contributi alla teoria dei disegni e alla teoria dei codici correttori di errori. Nel 1949 accettò un posto di professore di statistica alla University of North Carolina a Chapel Hill. Nel 1971, settantenne, andò in pensione, accettando però una cattedra alla Colorado State University di Fort Collins che abbandonò solo nel 1980.

¹¹ Sharadchandra Shankar Shrikhande (1917-2020) matematico e statistico indiano, specialista in Combinatoria. Morto a 103 anni. <https://thewire.in/science/ss-shrikhande-math-latin-square-euler>.

¹² Ernest Tiden Parker (1926-1991) fu professore nella University of Illinois. Suo referente per il PhD (1961) fu Marshall Hall jr.

Teorema (di Bose- Stevens¹³). *Esiste un sistema completo di quadrati latini d'ordine n , mutuamente ortogonali se e solo se, esiste un piano affine α_n di ordine n .*

4 - Quadrati latini e piani affini

Nel campo di Galois $GF(3)$ di ordine 3, gli elementi sono le classi resto mod 3, indicate con 0,1,2. Nel piano affine $AG(2,3)$ di ordine 3, le uniche rette uscenti dall'origine, diverse dagli assi $x = 0$, $y = 0$, sono le rette di equazioni $y = x$ ed $y = 2x$, che danno luogo a due classi di parallelismo:

$$y = x + k \quad (k = 0,1,2), \quad y = 2x + k \quad (k = 0,1,2)$$

che si intersecano, come da calcoli elementari, nei 9 punti seguenti, formanti un quadrato greco latino d'ordine 3:

$$\begin{vmatrix} 21 & 02 & 10 \\ 12 & 20 & 01 \\ 00 & 11 & 22 \end{vmatrix}$$

dal quale otteniamo due quadrati latini, ortogonali:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \dots \dots \dots \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

costituenti nel nostro caso, di ordine 3, un sistema completo di 2 quadrati latini d'ordine 3 ortogonali.

¹³ W. L. Stevens fu professore di matematica e statistica nella Università di San Paulo del Brasile. Lavorò con il Prof. R. A. Fisher, nel Galton Laboratory, University College, London, durante il periodo 1935-41.

Un procedimento del tutto analogo si può applicare al piano affine $AG(2,5)$ costruito sul campo di Galois $GF(5)$, di ordine 5. Escludendo le due rette $x = 0, y = 0$ consideriamo la retta $y = x$ e le rette $y = m x$ con $m = 2,3,4$. La prima coppia che consideriamo è data dalle rette $y = x$ con $y = 2x$. Intersecando tra loro le rette dei due fasci: $y = x + a, y = 2x + b$ con $a, b = 1,2,3,4$ si ha il quadrato greco latino d'ordine 5 seguente:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 43 & 04 & 10 & 21 & 32 \\ \hline 31 & 42 & 03 & 14 & 20 \\ \hline 24 & 30 & 41 & 02 & 13 \\ \hline 12 & 23 & 34 & 40 & 01 \\ \hline 00 & 11 & 22 & 33 & 44 \\ \hline \end{array}$$

Dove la 4° riga è l'insieme dei punti della $y = x$, e la 1° colonna è l'insieme dei punti della retta $y = 2x$; i rimanenti punti sono quelli di intersezione delle rette dei due fasci, le righe sono le parallele alla $y = x$ e le colonne sono le parallele alla retta $y = 2x$. Dal quadrato greco-latino generato dalle due rette nascono i seguenti due quadrati latini ortogonali.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Ripetendo il procedimento con $y = x$ fissa ed $y = m x$ variabile con $m = 3, 4$ troviamo altri due quadrati greco latini di ordine 5. In ciascuno di essi, per separazione, abbiamo due quadrati latini dei quali uno è già noto, il secondo è nuovo e ortogonale ai precedenti. In totale abbiamo dunque 4 quadrati

latini mutuamente ortogonali, quindi un sistema completo di ordine 5.

5 - L'idea base della costruzione dei piani non desarguesiani di Bose

Il presente paragrafo è dedicato ad esempi di costruzione di piani affini e proiettivi non desarguesiani.

Nel *caso infinito*, trattiamo di piani proiettivi reali, e per dare esempi non desarguesiani, si utilizza il modello proposto da Bose, dei cosiddetti *piani di traslazione*, derivati da spazi proiettivi reali $\mathbf{P}_4 = \text{PG}(4, \mathbb{R})$, 4-dimensionali. In tale costruzione si definisce sull'iperpiano improprio H (che è un S_3) di \mathbf{P}_4 , una *fibrazione totale* \mathcal{F} . Ricordiamo che una fibrazione \mathcal{F} di rette su $\mathbf{P}_r = \text{PG}(r, \mathbb{K})$ è un insieme di rette di \mathbf{P}_r tali che:

- a) le rette di \mathcal{F} sono a due a due sghembe;
- b) l'unione delle rette di \mathcal{F} è parte di \mathbf{P}_r .

Una fibrazione \mathcal{F} di rette si dice *totale* o *parziale* se ricopre o no \mathbf{P}_r . Una fibrazione parziale \mathcal{F} si dice *massimale* se la parte $\mathbf{P}_r \setminus \mathcal{F}$ residua, non contiene rette. È ben noto che esistono fibrazioni totali di rette in \mathbf{P}_r , se e solo se $r = 2m + 1$.

Nel caso in cui lo spazio sia reale \mathbb{R} , in $\text{PG}(2m+1, \mathbb{R})$, possiamo costruire una fibrazione totale di tale spazio, utilizzando una immersione in $\text{PG}(2m+1, \mathbb{C})$. In tale spazio fissiamo due sottospazi S_m , S_m' , complessi e coniugati. Consideriamo la famiglia di rette reali, che congiungono ciascun punto di S_m con il suo coniugato su S_m' . Si ottiene una famiglia di rette reali, che sono una fibrazione totale, che per definizione si chiama *fibrazione regolare*.

Torniamo al modello di Bose sullo spazio $\mathbf{P}_4 = \text{PG}(4, \mathbb{R})$ immerso in $\text{PG}(4, \mathbb{C})$. Sia H un iperpiano di \mathbf{P}_4 , da chiamarsi “*iperpiano improprio*”, che avendo dimensione dispari 3 possiede una fibrazione (totale) \mathcal{F} di rette su H . Denotiamo con L l’insieme dei piani in $\text{AG}(4, \mathbb{R}) = \mathbf{P}_4 \setminus H$ che contengono una retta di \mathcal{F} . Tali piani si dicono “*piani caratteristici*”.

Consideriamo la struttura (A, \mathcal{R}) definita nel modo seguente:

- 1) $A = \mathbf{P} \setminus H$, i cui elementi sono chiamati A-punti;
- 2) $\mathcal{R} = \{ \alpha \setminus (\alpha \cap H) \mid \alpha \in L \}$, i cui elementi si chiamano A-rette. (Le A-rette essendo i *piani caratteristici*).

Tale struttura (A, \mathcal{R}) , come da semplice verifica, è un piano affine, che si amplia in un piano proiettivo chiamando “*punti impropri*” le rette di \mathcal{F} e “*retta impropria*” l’insieme \mathcal{F} .

Supponiamo ora che un generico punto di $\text{PG}(4, \mathbb{R})$ abbia coordinate omogenee $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, x, y, z, w)$, e sia $t=0$ l’equazione di H . Un punto di H avrà coordinate proiettive (x, y, z, w) . In H possiamo scegliere¹⁴ come “*piano improprio*” di H , quello di equazione $w = 0$. Nell’ampliamento complesso di H , consideriamo le due rette complesse e coniugate r ed \bar{r} di rispettive equazioni ;

$$r) \quad x = (a+ib)u, \quad y = (b-ia)u, \quad z = iu, \quad w = 1, \quad t = 0$$

$$\bar{r}) \quad x = (a-ib)u, \quad y = (b+ia)u, \quad z = -iu, \quad w = 1, \quad t = 0$$

¹⁴ Da notare che a rigore di termini essendo H il piano improprio di $\text{AG}(4, \mathbb{R})$, tutte le sue rette sono improprie, quindi H è uno spazio proiettivo 3-dimensionale, nel quale non vi sono “*a priori*” rette distinguibili. Siamo noi ad eleggere quella di equazione $w=0$ come retta impropria speciale tra le tante, per ottenere in H una struttura affine.

essendo u un parametro reale. Le rette che congiungono un generico punto di r con il coniugato in \bar{r} , formano una famiglia \mathcal{F}_r di rette che hanno le seguenti equazioni, di immediato ricavo, con a, b parametri reali:

$$(3) \quad x = aw + bz, \quad y = b w - az, \quad t = 0$$

alle quali va ovviamente aggiunta la retta, esclusa dalla precedente rappresentazione, seguente:

$$(3') \quad z = 0, \quad w = 0, \quad t = 0.$$

La suddetta famiglia \mathcal{F} è una fibrazione *regolare* di H , per costruzione. Segue allora che la struttura (A, L) associata è un piano affine desarguesiano sui reali, avente come sostegno $P \setminus H$ e come rette i cosiddetti piani caratteristici di $AG(4, R)$. Per arrivare ad un caso *non desarguesiano* consideriamo una quadrica rigata Q immersa in \mathcal{F} . Ogni quadrica rigata è anche doppiamente rigata, nel senso che su di essa sono costruibili due fibrazioni in rette che si chiamano i “regoli” della quadrica.¹⁵ La quadrica Q può essere data mediante una relazione lineare tra i parametri a e b , ad esempio ponendo:

$$a = b := \lambda$$

relazione che determina ∞^1 rette su Q , formanti uno dei due regoli di Q , dato dalle equazioni:

$$(4) \quad x = \lambda (w + z), \quad y = \lambda (w - z), \quad t = 0.$$

¹⁵ E' noto che date tre rette di un regolo, l'altro regolo si ottiene come insieme delle rette incidenti le tre rette date. Noi procediamo in altro modo.

Dalle (4) eliminando il parametro λ si ottiene l'equazione della quadrica Q su H di equazioni:

$$xy + yz - xw + w y = 0, \quad t = 0$$

che è una quadrica non specializzata e non degenera, che dal punto di vista affine (rispetto a $w = 0, t = 0$) è un paraboloide iperbolico (a sella) che taglia sul piano improprio di $H, w = 0$ la conica degenera

$$y(x+z) = 0, w = 0, t = 0.$$

Per trovare il secondo regolo operiamo un artificio, scrivendo le (4), nella forma:

$$\lambda = x/(w+z) = y/(w-z) \quad \text{da cui}$$

$$\mu := x/y = (w+z)/(w-z).$$

È ora facile scrivere le equazioni dei due regoli (il 1° è per costruzione contenuto nella fibrazione regolare \mathcal{F}):

$$1^\circ \text{ regolo: } \quad x = \lambda (w+z) \quad , \quad y = \lambda (w-z) \quad , \quad t = 0$$

$$2^\circ \text{ regolo: } \quad x = \mu y \quad , \quad w+z = \mu (w-z) \quad , \quad t = 0$$

Costruiamo una nuova fibrazione $F' := F_1 \cup F_2 \cup F_3$, di rette non regolare, così definita:

$$F_1.- \text{ le rette di } \mathcal{F} \text{ con } a \neq b : x = aw+bz, y = b w-az, t = 0$$

$$F_2.- \text{ le rette del } 2^\circ \text{ regolo : } x = \mu y, w+z = \mu (w-z), t = 0$$

$$F_3.- \text{ la retta } z = 0, w = 0, t = 0.$$

La corrispondente struttura (A,L) è un piano affine non desarguesiano, per quanto noto dalla letteratura classica.¹⁶

6 - Sui piani finiti non desarguesiani e sui nearfields

Nel *caso finito* esiste una costruzione analoga, teoricamente utile per avere piani finiti d'ordine q , non desarguesiani, che sappiamo esistere per l'ordine $q \geq 9$.

Nel caso che lo spazio $S_{2m+1} = PG(2m+1,q)$, sia uno spazio di Galois di dimensione dispari sul campo $GF(q)$, consideriamo lo spazio ampliato $PG(2m+1,q^2)$ su $GF(q^2)$, ampliamento quadratico di $GF(q)$, e il coniugio $a \rightarrow a^q$, su $GF(q^2)$. Si può allora procedere in completa analogia con il caso infinito.

Ma è più semplice operare per altra via. Introduciamo una nuova struttura:

Definizione. Un *nearfiel* (quasicorpo) è una struttura algebrica $(K, +, \cdot)$ tale che:¹⁷

1.- $(K,+)$ è un gruppo (sia 0, l'elemento neutro additivo, ed indichiamo con $-$ a l'opposto dell'elemento a);

2.- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo (sia 1 l'elemento neutro moltiplicativo, ed indichiamo con a' , l'inverso dell'elemento a);

3.- $x \cdot 0 = 0, \quad \forall x \in K$;

4.- $(x+y)z = xz + yz, \quad \forall x, y, z \in K$.

Un nearfield si dice *planare* se vale inoltre la condizione seguente:

¹⁶ Lombardo -Radice L. (1961), Barlotti A.(1971).

¹⁷ Dembowski P. (1968) p. 33

5.- L'equazione $-xa+xb = c$, $\forall a,b,c,x,y,z \in K$, ha una unica soluzione in K .

Si prova facilmente che:

Proposizione 1.- Sia $(K,+)$ la parte additiva di un nearfield, allora $(K,+)$ è commutativa.

Proposizione 2.- Se il nearfield è finito allora è planare.

Prima di procedere oltre occorre ricordare le nozioni di *quadrato* e *non quadrato* in $GF(q)$, $q=p^h$ (p primo).

Si dice che $a \in GF(q) \setminus \{0\}$, è un *quadrato* se esiste un elemento $x \in GF(q) \setminus \{0\}$, tale che: $x^2=a$. Se tale equazione in x , non è risolvibile, si dice che a è un *non quadrato*. Sappiamo a riguardo che:¹⁸

Se $q=2^h$, ovvero se il campo è di ordine pari, ogni elemento di $GF(2^h) \setminus \{0\}$ è un *quadrato*. Se invece l'ordine q è dispari in $GF(q) \setminus \{0\}$, ci sono $(q-1)/2$ elementi che sono *quadrati* e $(q-1)/2$ che sono *non quadrati*.

Indichiamo con S (square) l'insieme dei quadrati e con N l'insieme dei non quadrati. Si ha:¹⁹

Il prodotto di due quadrati ovvero di due non quadrati è un quadrato, mentre il prodotto di un quadrato per un non quadrato è un non quadrato. Simbolicamente:

¹⁸ Tallini G.(2005) pp. 4-5.

¹⁹ Dal punto di vista moltiplicativo, gli insiemi Q ed N si comportano in modo analogo agli insiemi dei positivi e dei negativi nei numeri reali, purchè si prescindano dall'aspetto additivo, non essendo Q ed N chiusi rispetto alla operazione $(+)$.

$$S \cdot S = S, N \cdot N = S, N \cdot S = S \cdot N = N.$$

Mostriamo come da un campo di Galois $GF(q^2)$, si possa costruire un near-field $(K, +, *)$ con q^2 elementi, come segue:

- a.- Gli elementi di K , sono quelli di $GF(q^2)$;
- b.- $(K, +)$ coincide con la parte addittiva di $GF(q^2)$;
- c.- La moltiplicazione $(*)$ in $K \setminus \{0\}$ è definita $\forall x, y \in K \setminus \{0\}$

da:

$$x * y = x \cdot y \text{ se } y \text{ è un quadrato in } GF(q^2);$$

$$x * y = x^q \cdot y \text{ se } y \text{ non è un quadrato in } GF(q^2).$$

Considero un piano affine $AG(2, q)$ d'ordine q dispari, sia e $GF(q^2)$ un ampliamento quadratico di $GF(q)$. Utilizziamo una rappresentazione del piano affine $AG(2, q^2)$ dovuta a Bose.

Siano α, β, γ lettere greche) gli elementi di $GF(q^2) \setminus GF(q)$ e a, b, c, \dots (lettere latine) gli elementi di $GF(q)$. Sia θ un elemento primitivo di $GF(q^2)$, cioè un elemento, sempre esistente,²⁰ tale che ogni elemento non nullo di $GF(q^2)$ si può esprimere come potenza, nel modo seguente:

$$\theta^0 = 1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{q^2-2}, \dots, \theta^{q^2-1} = \theta^0 = 1,$$

È noto che θ è soluzione dell'equazione di 2° grado:

$$\theta^2 - s\theta + e = 0, \text{ con } s, e \in GF(q)$$

equazione che ha le due soluzioni seguenti: θ, θ^q , così che tutti gli elementi non nulli di $GF(q)$, possono essere scritti come:

²⁰ Cf. ad esempio Bose R.C. (1973), pp.27-29.

$$e^0 = 1, e, e^2, \dots, e^{q-2},$$

$$e^{q-1} = (\theta^{q+1})^{q-1} = \theta^{q^2-1} = \theta^0 = 1.$$

Sia $A(q^2) = AG(2, q^2)$ il piano affine su $GF(q^2)$, e consideriamo per tale piano *la rappresentazione di Bose*.²¹

I "punti" sono le coppie ordinate (X, Y) di elementi di $GF(q^2)$, e le *rette* hanno equazioni:

$$Y = \mu X + \beta, \quad X = \gamma.$$

dove $\mu, \beta, \gamma \in GF(q^2)$. Due rette con il medesimo coefficiente di X sono parallele, come sono tra loro parallele due rette del tipo $X = \text{cost}$. Precisiamo ulteriormente

Una retta di $A(q^2) = AG(2, q^2)$ si dice di *retta di tipo I*, se nella sua equazione il parametro $\mu \in GF(q^2) \setminus GF(q)$, ovvero se $\mu = m + n\theta$, con $n \neq 0$, $m, n \in GF(q)$.

Vi sono esattamente $q^4 - q^3$ rette del I tipo. Infatti x varia in $GF(q^2)$, in q^2 modi. Per x passano $q^2 + 1$ rette di $A(q^2)$, delle quali $q+1$ di $A(q)$ che sono q -secanti, dunque per ciascun x passano $q^2 - q$ rette 1-secanti $A(q)$ e in totale $q^2(q^2 - q)$.

Si osservi che ciascuna di tali rette, è 1-secante $A(q)$. Se (a, b) è il punto nel quale la retta $Y = \mu X + \beta$, incontra $A(q)$, detto *vertice*, la sua equazione si può scrivere nella forma:

$$Y = \mu (X - a) + b$$

Da notare che se (a', b') fosse un ulteriore vertice della retta

²¹ La costruzione riportata appare in Bose R.C. (1973).

su $A(q)$ si avrebbe la relazione $b' - b = \mu (a' - a)$, chiaramente assurda per essere $(b' - b)/(a' - a)$ in $GF(q)$, con μ esterno.

Una retta di $A(q^2) = AG(2, q^2)$ si dice di *retta di tipo IIa* se la sua equazione è del tipo :

$$Y = m X + \beta, \quad m \in GF(q), \quad \beta \in GF(q^2) \setminus GF(q)$$

Una retta si dice di *II retta di tipo IIb* se la sua equazione è del tipo :

$$Y = m X + b, \quad m, b \in GF(q)$$

Vi sono esattamente q^3 rette del II tipo. Per un punto x di $A(q)$ che varia in q^2 modi, passano $q+1$ rette dalle quali va esclusa una retta $X = \text{cost}$ (che chiameremo di III tipo) per un totale di q rette nel punto. Dunque in tutto q^3 .

Le rette del *tipo IIa* sono esterne ad $A(q)$, in quanto se un punto (a, b) di $A(q)$, appartenesse ad una di tali rette si avrebbe $b = m a + \beta$, una contraddizione. Tali rette sono tante quante il numero delle coppie (m, β) , in numero di:

$$q(q^2 - q) = q^3 - q^2$$

Le rette del *tipo IIb* sono tutte rette q -secanti $A(q)$ e sono tante quante le coppie (m, b) di $A(q)$ ovvero sono q^2 , in accordo con il numero totale delle rette di II tipo che sono q^3 .

Una retta di $A(q^2) = AG(2, q^2)$ si dice di *retta di tipo IIIa* se la sua equazione è del tipo :

$$X = \gamma \quad , \quad \gamma \in \text{GF}(q^2) \setminus \text{GF}(q)$$

mentre si dice *retta di tipo IIIb* se la sua equazione è del tipo:

$$X = c \quad , \quad c \in \text{GF}(q)$$

Ci sono ovviamente $q^2 - q$ rette di tipo IIa, che sono tutte rette esterne ad $A(q)$ tante quanti i valori di γ e q rette di tipo IIb, che sono al contrario rette q -secanti $A(q)$, per un totale di q^2 rette di tipo III.

Il nearfield $(K, +, *)$ permette di modificare una parte delle rette di $AG(2, q^2)$ ottenendo un piano non desarguesiano, cioè, il ben noto piano affine di Hughes $HG(2, q^2)$ definito come segue:²²

a.- I "punti" di tale piano $HG(2, q^2)$ sono i punti del piano affine $AG(2, q^2)$. Le "rette" di $HG(2, q^2)$, tenuto conto del nearfield $(K, +, *)$, sono dei seguenti tre tipi:

- I tipo) $Y = \mu * (X-a) + b, \quad \forall \mu \in K \setminus \text{GF}(q), \forall a, b \in \text{GF}(q),$
- II tipo) $Y = mX + \beta, \quad \forall \mu \in K \setminus \text{GF}(q), \forall m \in \text{GF}(q),$
- III tipo) $X = \gamma.$

Tale piano può essere ampliato in una struttura proiettiva $PH(2, q^2)$ chiamando punti le terne ordinate (X_0, X_1, X_2) di elementi di K , non contemporaneamente nulli e definiti a meno di un fattore in K . Il legame con le coordinate del piano di Hughes si esprime dalle ovvie relazioni:

$$X := X_1 / X_0 \quad , \quad Y := X_2 / X_0 \quad , \quad X_0 \neq 0$$

²² Bose (1973) p.40-42.

mentre se $X_0 = 0$, i punti del tipo $(0, h, k)$ sono associati alle direzioni delle rette nel modo che segue:

a.- se $k = 0$, allora il punto $(0, h, 0) = (0, 1, 0)$ è associato alla retta di III tipo $X = \gamma$;

b.- se $k \neq 0$ allora il punto $(0, h, k) = (0, h/k, 1)$ è $(0, m, 1)$ per le rette di II tipo e $(0, \mu, 1)$ per le rette di I tipo.

Si può dimostrare²³ che le equazioni delle rette di $PH(2, q^2)$ si possono esprimere mediante le equazioni seguenti:

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + j (b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2) = 0$$

con $a_i, b_i \in GF(q)$ ed $j \in K \setminus GF(q)$. Le medesime equazioni possono essere espresse in forma non omogenea dalle:

$$(a_1 + j b_1) X_1 + (a_2 + j b_2) X_2 + (a_0 + j b_0) X_0 = 0.$$

Da questi oggetti può essere sviluppata l'intera teoria dei piani di Hughes, che non essendo a coordinate in un campo sono non desarguesiani, ma per i dettagli rimandiamo a Dembowski.²⁴

²³ Hughes D. (1957), vedi anche Dembowski P. (1968) pp246-251.

²⁴ Dembowski P., op.cit.

Bibliografia

Barlotti A (1971). Alcuni procedimenti per la costruzione di piani grafici non desarguesiani, *Conf. Sem. Mat.Univ. Bari*,127, pp.1-17.

Bose R. C. (1939). On the construction of balanced incomplete block designs, *Annals of Eugenics*, 9 pp. 358–399.

Bose R. C., Shrikhande S. S. (1959). On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order $4t+2$, *Proceedings of the national Academy of Science USA*, 45, pp.734–737.

Bose, R. C.; Shrikhande, S. S.; Parker, E. T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture, *Canad. Journal of Math.* 12, 189-203.

Bose R.C. (1973). On a representation of Hughes plane, *Proc. Of the international Conference on projective planes*, Washington University Press, pp.27-58.

Cerasoli M., Eugeni F., Protasi M. (1988). *Elementi di Matematica discreta*, Bologna: Zanichelli.

Dembowski P. (1968), *Finite Geometries*, Berlin-Heidelberg-NewYork: Springer-Verlag.

Eugeni F. (1996). La matematica discreta attraverso i problemi, in: Cento anni di Matematica, Atti del Convegno “Mathesis Centenario”, Roma, Ed. FF. Palombi -Editori pp.84-102.

Eugeni F. (2021). La geometria proiettiva ed affine I: la via assiomatica e i piani finiti, *Periodico di Matematica, anno 36 (serie IV) Vol. III (1)* _7-24.

Lombardo Radice L. (1961). Non-desarguesian finite graphic planes, in Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry*, Roma: Cremonese.

Segre B. (1961). *Lectures on modern geometry*, Roma: Cremonese (CNR - Monografie Matematiche).

Stinson D.R. (1984). A short proof of the Nonexistence of a Pair of Orthogonal Latin Squares of Order Six, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 36(1984), pp. 373-376.

Tallini G. (2005). *Lezioni di Geometria Combinatoria*, Bologna: Pitagora.

Tarry, G. (1900). Le Problème de 36 Officiers, *Comptes Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel* 1, 122-123.

Tarry, G. (1901). Le Problème de 36 Officiers, *Comptes Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel* 2, 170-203.

Una bella frase sui matematici.

«I buoni matematici riescono a vedere le analogie. I grandi matematici riescono a vedere le analogie tra le analogie».

Aforisma che Stanisław Marcin Ulam, attribuisce, a Stefan Banach (1892-1945).

Spigolature sui numeri primi

1- Nella corrispondenza di Eulero con Christian Goldbach, quest'ultimo formulò inoltre la famosa *congettura di Goldbach*, ancora oggi non dimostrata, asserente che *ogni numero pari n da 4 in poi è somma di due primi*, che assieme all'*ipotesi di Riemann*, e alla *infinità o meno dei primi gemelli*, rimangono

problematiche indimostrate a più di un secolo dalla loro formulazione. Si noti che allo stato attuale la congettura di Goldbach è vera per $n < 2 \cdot 10^{18}$.

I migliori risultati in questa direzione sono dati dal Teorema di Chen²⁵: *ogni numero pari sufficientemente grande è la somma o di due numeri primi, oppure di un primo e di un semiprimo (prodotto di due primi anche coincidenti).*

2 - Una lunga interessante sequenza di numeri composti è la seguente:

$$(n+1)! + 2, \dots, (n+1)! + m, \dots, (n+1)! + n + 1$$

è una sequenza di numeri composti, perché essendo $m < n + 2$, segue che m è un divisore di $(n+1)! + m$. Si noti che la sequenza cresce e si allarga al crescere di n secondo il fattoriale di n .

3 - Già nel XVIII secolo era nota una curiosissima serie di numeri primi: 31, 331, 3.331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331. E poi? Basta: il numero successivo, 333.333.331, non è primo, essendo uguale a $17 \times 19.607.843$.

4 - Il numero primo 73.939.133 è molto particolare: rimuovendo una cifra per volta dalla destra si ottengono sempre e solo numeri primi: 7.393.913, 739.391, 73.939, 7.393, 739, 73, 7. È il numero primo più grande (tra quelli conosciuti finora, naturalmente) a godere di questa proprietà.

²⁵ Chen Jingrun(1933-1996) è stato uno dei più importanti e celebrati matematici cinesi. Diede importanti contributi alla teoria dei numeri .

Curve patologiche nei primi anni del XX secolo

Rigore contro intuizione

Loredana Biacino*

*Già professore associato Università di Napoli Federico II;
loredana.biacino2@unina.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v3n2.044

Sunto: *Si espone una breve storia di alcune curve variamente patologiche introdotte nell'Ottocento e nei primi anni del Novecento durante il processo di rigorizzazione che ha investito la matematica, con la conseguente crisi dell'intuizione. Si sottolinea come tale processo si inserisca in un generale movimento di astrazione della scienza che ha tra i suoi esiti la nascita della teoria della misura secondo Lebesgue e, più di recente, l'affermarsi della teoria dei frattali.*

Parole chiave: *La curva di Peano, insiemi di Cantor, dimensione frattale.*

Abstract: *Some pathological curves were introduced in mathematics in the eighteenth century and at the beginning of the twentieth century: a brief history of them is sketched and the consequent crisis of intuition as a guideline in the study of mathematics is investigated. This process is inserted in a general movement toward abstraction of the science: among its consequences there were the born of Lebesgue measure theory and more recently the achievement of fractal theory.*

Keywords: *Peano's curve, Cantor's sets, fractal dimension.*

1 - Introduzione

... la matematica non è altro che un'arte; una sorta di scultura in una materia estremamente dura e resistente come certi porfidi che a volte usano, credo, gli scultori.
(André Weil, S. e A. Weil, *L'arte della matematica*, p.18)

All'inizio del ventesimo secolo, il grande fermento della scienza e delle arti degli ultimi trent'anni del secolo precedente approda ad uno sviluppo tumultuoso di molti aspetti della vita sociale e culturale: a livello politico esso è infatti caratterizzato dai segni premonitori della Grande Guerra e della successiva rivoluzione bolscevica.

Nelle arti spesso sfocia in movimenti ispirati all'innovazione e al vitalismo e in alcuni casi evolve verso l'astrattismo. Così alcune forme artistiche dei secoli passati sono profondamente messe in discussione: soprattutto uno dei principi fondamentali su cui si basava la cultura occidentale - lo stretto legame tra l'arte e il mondo reale - è in molti casi completamente spezzato.

In matematica si osserva un capovolgimento del punto di vista in qualche modo simmetrico e contrario a quello avvenuto più di duemila anni prima con la scoperta delle grandezze incommensurabili. In quel caso si era constatato in modo sconvolgente che i numeri interi naturali non riuscivano a dar conto di tutte le costruzioni geometriche e poiché nell'antichità solo i numeri naturali erano a disposizione, si considerò la geometria come fondamento di tutta la matematica, una geometria però in cui il punto era senza dimensioni e tutte le figure schematizzazioni astratte di analoghi reperibili nel mondo fisico, anche se non ad essi

riducibili. All'inizio del Novecento gli studi effettuati nell'ultimo trentennio del secolo precedente e l'apparizione di funzioni e di curve in vario modo patologiche, non suscettibili di rappresentazione grafica, portano all'evidenza che non tutta la conoscenza matematica può fondarsi sull'intuizione geometrica e la matematica deve costituirsi come pura teoria astratta. In questo lavoro si intende dare uno sguardo da vicino a questi oggetti matematici emergenti. E anche a constatarne l'utilità nella modellizzazione di alcuni fenomeni del mondo reale.

2 - Le funzioni, gli insiemi e le curve patologiche: una galleria di mostri¹

Abbandonare l'intuizione geometrica dello spazio rappresentò un momento conflittuale per i matematici: ma essi vi furono gradualmente costretti per il successivo emergere nell' '800 di una serie di insiemi, curve e funzioni molto particolari, che non si possono rappresentare graficamente in quanto mancano loro i requisiti che permettono di apparentarli a un disegno o a un'immagine reale. Il contatto dei sensi forniva infatti una sensazione di conforto e di sicurezza, basata sul presupposto, conscio o meno, che il mondo che si tocca con i sensi sia completamente non contraddittorio: abbandonare il terreno sperimentale per

¹ «Museo d'arte» matematico secondo Vilenkin (Mandelbrot, 1987, p.12).

fondare le proprie argomentazioni su procedure puramente mentali causava riluttanza.²

La prima di questa serie fu una curva continua ma priva di tangente in un insieme di punti numerabile e denso sulla curva, ottenuta come limite di una successione di poligonali; tale curva fu trovata in un cassetto di Bernard Bolzano, il “padre dell’aritmetizzazione secondo Klein. Probabilmente Bolzano (1781-1848) non si rese nemmeno conto dell’importanza che la curva rivestiva e che fu studiata in seguito al ritrovamento, avvenuto nel 1921: è comunque un frutto del suo interessamento all’investigazione della relazione teorica tra continuità e derivabilità. Ovviamente

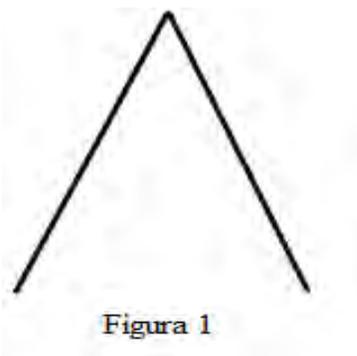
² Per comprendere lo spirito con cui in generale tali nuovi enti furono accolti, sono indicative le seguenti parole di Poincaré:

La logica talvolta genera mostri. Da mezzo secolo a questa parte si sono viste spuntare una miriade di bizzarre funzioni, che sembrano sforzarsi di assomigliare il meno possibile alle oneste funzioni che servono a qualcosa: niente continuità, oppure continuità ma non derivate, eccetera. Ma c’è di più: dal punto di vista della logica, sono proprio queste strane funzioni a essere le più generali, mentre quelle che si trovano senza averle cercate appaiono soltanto come casi particolari; sono relegate in un angolino.

Un tempo, se si inventava una nuova funzione, era in vista di una qualche applicazione pratica: oggi si inventano nuove funzioni apposta per cogliere in fallo i ragionamenti dei nostri predecessori, funzioni da cui non si trarranno mai altri frutti. Se la logica fosse l’unica guida del pedagogo, bisognerebbe cominciare dalle funzioni più generali, vale a dire da quelle più bizzarre; è al principiante che bisognerebbe far affrontare questo museo teratologico.” Aggiunge Poincaré: “... non possiamo tenere in così poco conto la realtà, e non intendo solo la realtà del mondo sensibile, che ha nondimeno il suo valore, giacché i nove decimi dei vostri studenti vi richiedono armi per lottare appunto contro di essa. Esiste una realtà più sottile, che costituisce la vita stessa degli enti matematici, e che è altro dalla logica. (Poincaré, 1997, p.107).

questo esempio passò del tutto inosservato dai contemporanei.

Nelle figure seguenti appaiono le prime fasi della costruzione di una curva continua che non ha tangente in alcun punto ottenuta col procedimento, molto simile a quello usato da Bolzano, esposto in (Hahn, 1933).



Partiamo dalla figura 1, molto semplice, costituita da una linea ascendente e da una discendente. Al posto della linea ascendente sostituiamo, come nella figura 2, una linea spezzata costituita da sei segmenti, di cui il primo dalla base arriva a metà dell'altezza della linea originale, il secondo ridiscende fino alla linea della base, il terzo risale fino a mezza altezza e continua poi fino all'intera altezza, il quinto ridiscende a metà altezza e il sesto risale fino al vertice della figura originaria. Similmente si sostituisce la linea discendente con una linea spezzata in 6 segmenti, simmetrica della precedente rispetto alla bisettrice dell'angolo originario. Si ottiene in tal modo una figura composta da 12 segmenti.

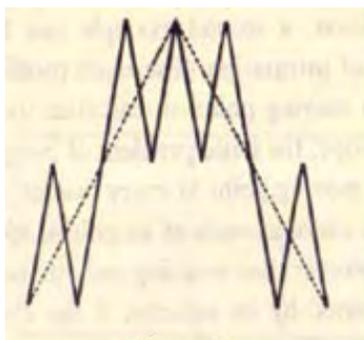


Figura 2

Con metodo analogo passiamo alla figura 3 che è una spezzata composta da 72 segmenti, che è stata ottenuta rimpiazzando ogni segmento della figura 2 con una spezzata costituita da 6 segmenti. La procedura impiegata può essere ripetuta e porta a figure ad ogni passo più complicate cui faticosamente può tener dietro l'intuizione. Si può dimostrare rigorosamente che la successione delle infinite figure geometriche che possono ottenersi con questa regola tende ad una curva continua sprovvista di tangente in ogni punto. Solo il pensiero e la logica possono immaginare lo strano oggetto matematico ottenuto come limite (ma già dopo poche altre iterazioni della procedura la figura perde la sua chiarezza e ci appare come un tutto indistinto). Conclude Hahn che se dovessimo attenerci all'intuizione dovremmo dedurre che non esistono curve continue sprovviste di tangente in ogni punto.

Una ventina di anni dopo il tentativo di Bolzano fu ideata da Riemann una funzione $f(x)$ limitata e continua tranne nei punti $x = \frac{p}{2n}$, con p e n primi tra loro, dove presenta delle discontinuità di prima specie, che è integrabile secondo Riemann.

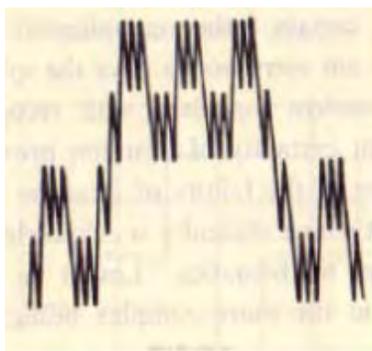


Figura 3

La funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

è una funzione continua non derivabile nell'insieme numerabile e denso costituito dai punti $x = \frac{p}{2n}$ con p e n primi fra loro.

Qualche anno dopo, nel 1861, ebbero anche grande risonanza le lezioni all'università di Berlino di Weierstrass, in cui veniva presentata la famosa funzione che porta il suo nome (pubblicata nel 1872 sulle Memorie dell'Accademia di quella città) e che inauguravano l'epoca della grande rigorizzazione dell'analisi. La funzione di Weierstrass è assegnata mediante una serie trigonometrica:

$$f(x) = \sum b^n \cos(a^n \pi x)$$

dove a è un intero dispari, $0 < b < 1$ e $ab > 1 + 3\pi/2$.

Si tratta di una funzione continua come si constata facilmente, che però non è dotata di derivata in alcun punto e questo si può provare con un calcolo arduo e complicato che evitiamo. Un'analogia funzione, ideata nel 1860, fu pubblicata solo nel 1890 da Cellier.

Oltre alle precedenti funzioni, che possiamo definire di tipo Weierstrass, bisogna tenere presente che dopo la prima metà del secolo vengono introdotti altri nuovi insiemi e altre nuove funzioni particolarmente elaborati per costruire controesempi nell'ambito della teoria dell'integrazione di Riemann.

Il matematico tedesco Hankel (1839-1873), allievo di Riemann³, aveva cercato di dimostrare che è integrabile secondo Riemann una funzione discontinua ma tale che l'insieme delle sue discontinuità costituisca un insieme rado, cioè tale che nessun intervallo (non degenere) possa essere incluso nella sua chiusura⁴. Questo perché pensava che un siffatto insieme fosse trascurabile, cioè potesse essere incluso in una unione finita d'intervalli di ampiezza complessiva piccola a piacere. Il primo a provare l'erroneità di tale ragionamento, subito dopo la morte precoce di Hankel, fu H. J. S. Smith in un articolo sui *Proceeding of the London Mathematical Society* dove costruiva un insieme rado non trascurabile. Qualche anno dopo, nel 1881, V. Volterra proponeva un insieme dello stesso tipo grazie al quale poteva dimostrare che esistono funzioni derivate limitate non integrabili secondo Riemann⁵. Si tratta di insiemi

³ Hankel per primo pubblicò il controesempio ideato da Riemann della funzione continua non derivabile nei punti di un insieme denso.

⁴ Ad esempio l'insieme dei razionali dell'intervallo $[0, 1]$ non è rado, mentre un insieme con un numero finito di punti di accumulazione lo è (ed è trascurabile nel senso che ha misura di Peano-Jordan nulla).

⁵ Per rendersi conto delle difficoltà che un insieme di questo genere può presentare si ricorda che in (Volterra, 1881) ne è costruito uno al seguente modo: nell'intervallo $[0, 1]$ si consideri la successione decrescente a_1, \dots, a_n, \dots che tende a 0, con $a_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$ e le distanze tra punti consecutivi minori di $\frac{1}{2^2}$; a sinistra di ciascuno di tali punti a_n si consideri

notevolmente complicati, a partire dai quali potevano essere costruite funzioni molto patologiche, ad esempio le loro funzioni caratteristiche. Sono insiemi anche molto lontani dagli insiemi cui ci ha abituato la geometria classica, la cui chiusura in generale è regolare, cioè coincide con la chiusura dell'interno.

Si ricordi che George Cantor nel 1872, studiando le serie trigonometriche, perviene non solo alla definizione dei numeri reali ma introduce anche il concetto di insieme derivato di un insieme di numeri reali. In quello stesso anno, per caso, incontra in Svizzera Dedekind, che ha appena pubblicato a sua volta, la sua teoria dei numeri reali. Si stabilisce tra i due un'amicizia, cui seguono numerose interessanti lettere. Il 7 dicembre del 1873 infatti in una lettera a Dedekind, Cantor fornisce la prima dimostrazione della non esistenza di una applicazione biunivoca tra N e $[0,1]$, teorema di enorme portata perché introduce in analisi ragionamenti di carattere completamente nuovo. Tre anni dopo, a più riprese, il 20, 22, 25 giugno del 1877 fornisce la prima dimostrazione della esistenza di una applicazione biunivoca dell'intervallo $[0,1]$ sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Il 29 giugno chiede conferma

una successione a'_m che tenda decrescendo ad a_{n+1} , tale che la distanza tra a_n e a'_1 sia $\frac{1}{2^4}(a_n - a_{n+1})$ e le distanze fra due sue punti consecutivi siano tutte minori di $\frac{1}{2^4}(a_n - a_{n+1})$. A sinistra di ogni punto a'_n si consideri una successione a''_m che tenda decrescendo ad a'_{n+1} , tale che la distanza tra a'_n e a''_1 sia $\frac{1}{2^6}(a'_n - a'_{n+1})$ e le distanze fra due sue punti consecutivi siano tutte minori di $\frac{1}{2^6}(a'_n - a'_{n+1})$. Si continui indefinitamente allo stesso modo a partire dagli a''_m . Si consideri l'insieme costituito da tutti i punti che vengono così a formarsi e dai loro punti limite. Si dimostra che si tratta di un insieme rado e non trascurabile.

all'amico, che non gli ha ancora risposto, sull'esattezza della dimostrazione e afferma: «*Lo vedo ma non lo credo*». Nella successiva risposta di Dedekind appare come conseguenza la prima formulazione del teorema sulla non esistenza di un'applicazione biunivoca e continua tra R^n e R^m , con $n \neq m$.

A Cantor si deve la descrizione di un insieme chiuso, avente la potenza del continuo e privo di punti interni, di misura lineare nulla (Cantor, 1884, p. 386); anche questo insieme, come quelli di Smith e di Volterra (ma di più semplice enunciazione), si allontana da quanto intuitivamente pensiamo possa essere un insieme di numeri reali ed è all'origine di molti esempi e controesempi nella teoria della misura secondo Lebesgue.

Possiamo in generale considerare tutta una classe di insiemi del tipo Cantor al seguente modo: si consideri l'intervallo $[0,1]$ e si elimini da esso l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\sigma < 1$, si elimini poi dalla parte centrale di ognuno dei due intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^2 , e poi dalla parte centrale di ognuno dei quattro intervalli rimanenti un intervallo aperto di ampiezza σ^3 e si proceda allo stesso modo indefinitamente. L'ampiezza totale degli intervalli che si tolgono, la cui unione denotiamo con E, è data da $\sigma + 2\sigma^2 + \dots + 2^n \sigma^{n+1} + \dots = \frac{\sigma}{1-2\sigma}$.

Ora tale quantità vale 1 se $\sigma = 1/3$. In tal caso $[0,1]-E$ è un insieme chiuso, privo di punti interni, trascurabile e quindi misurabile secondo Peano-Jordan. I suoi elementi sono numeri reali del tipo $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$, dove, per ogni n , a_n è in $\{0, 2\}$, e quindi sono tanti quanti i numeri del tipo $t = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots$, dove, per ogni n , b_n è in

$\{0, 1\}$, cioè sono tanti quanti i numeri dell'intervallo $[0,1]$. Ne segue che tale insieme, detto "insieme di Cantor" e denotato con C , ha la potenza del continuo.

Se $\sigma > 1/3$ è evidente che $[0,1]-E$ si riduce all'insieme vuoto, ma se $0 < \sigma < 1/3$, allora $\frac{\sigma}{1-2\sigma} < 1$, quindi il complemento $C_\sigma = [0,1]-E$ è un insieme chiuso, rado, non trascurabile, come quelli di Smith e di Volterra, la cui misura vale $1 - \frac{\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$: si tratta, però, in questo caso di un insieme di costruzione facilmente descrivibile. Consideriamo in particolare il caso $\sigma = 1/4$. Arntzenis⁶ chiama isole gli intervalli che via via si considerano e che qui abbiamo sottratto all'intervallo $[0,1]$ e arcipelago la loro unione E . In tal caso l'arcipelago ha misura $\frac{1}{2}$ e quindi il nostro insieme C_σ ha misura $\frac{1}{2}$. È chiuso e si verifica facilmente che nessun intervallo può essere incluso in esso, quindi è rado. Esso coincide con la completa frontiera dell'insieme E ; ne deduciamo che l'arcipelago E ha frontiera di misura positiva secondo Lebesgue e quindi, nonostante il nome suggestivo, non è misurabile secondo Peano-Jordan al pari di C_σ . Questo rende l'insieme controintuitivo: infatti l'intuizione ci porterebbe a credere che la misura di E anche in tal caso, come

⁶ Questo caso è studiato in dettaglio in (Arntzenius, 2012, p. 141 e segg.) dove le isole sono intervalli chiusi. L'insieme E differisce dal suo regolarizzato (il più piccolo insieme contenente E e coincidente con l'interno della sua chiusura), cioè l'intervallo $[0,1]$, per un insieme di misura positiva: questo è punto di partenza per un discorso in cui si sottolineano notevoli complicazioni nel definire una misura anche solo finitamente additiva sull'algebra di Boole degli insiemi regolari della retta che estenda la misura ordinaria degli intervalli.

nel caso del complemento dell'insieme di Cantor (ottenuto per $\sigma = 1/3$) sia eguale a 1 e quindi la misura di C_σ sia 0.

Con l'insieme di Cantor, a mio parere, arriviamo al limite estremo cui può spingersi la nostra intuizione geometrica nell'immaginare un insieme. È naturale pensare che la frontiera di un insieme ben fatto, un insieme che possiamo disegnare, abbia misura nulla. La frontiera di misura positiva ci fa pensare che essa presenti delle nebulosità e delle sfumature che mal si adattano alla nostra quotidiana esperienza degli oggetti e delle figure della geometria tradizionale, che, fatte alcune particolarissime eccezioni, hanno tutte un ben preciso contorno (nei problemi tradizionali ci sono magari piramidi e cerchi, ma sono esclusi gas in estensione, spugne, nuvole etc...). È allora il passaggio dalla classe degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan alla classe dei misurabili secondo Lebesgue il passo che ci porta dal mondo dell'intuizione geometrica ad un rigoroso universo dove tutte le proprietà della teoria della misura e dell'integrazione trovano la loro giusta collocazione, e che necessita di un più raffinato tipo di intuizione matematica per essere indagato.⁷

⁷ Sul ruolo positivo che gioca l'intuizione in matematica si sofferma Salomon Feferman nel suo saggio su Synthese del 2000 *Mathematical intuition vs. Mathematical monsters*, dove il mostro rappresenta la possibilità di percorsi alternativi. Paladino dell'inaffidabilità dell'intuizione è invece, come abbiamo già avuto modo di vedere, Hans Hahn, che in (Hahn, 1933) osserva che l'asserzione di Kant secondo la quale lo spazio è una delle forme dell'intuizione pura mentre poteva avere una sua motivazione nel Settecento, periodo dominato dalla fisica newtoniana e da una matematica di carattere geometrico, alla luce dei recenti studi di fisica, con l'apparizione della teoria della relatività da parte di Einstein, e della

Inoltre nel caso dell'insieme di Cantor abbiamo un insieme chiuso con la potenza del continuo che però può essere rinchiuso in un numero finito di intervalli commettendo un errore piccolo quanto si vuole, in altri termini tale insieme è limite di insiemi che dominiamo bene geometricamente. Con gli insiemi radi non trascurabili questo non avviene più: gli stessi insiemi approssimanti non sono di natura elementare e facilmente afferrabili intuitivamente.

Ritornando alle funzioni di tipo Weierstrass ricordiamo che, sull'onda della moda della ricerca di funzioni patologiche, a sua volta H. A. Schwarz, uno studente di Weierstrass, nel 1873 fornì l'esempio di una funzione molto singolare: si tratta di una funzione strettamente crescente non derivabile nell'insieme dei numeri razionali (Darboux, 1875, pp. 98-99). Un'idea più semplice di una tale funzione può essere fornita dalla scala del diavolo o funzione di Cantor: si tratta di una funzione crescente nell'intervallo $[0,1]$ e non derivabile in un insieme infinito non numerabile di punti, ottenuta, a partire dall'insieme di Cantor C , come limite della successione di funzioni: $f_0(x) = x$ per ogni x , e per ogni n : $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x)$ continua e lineare a tratti e tale che in corrispondenza dei 2^{n-1} intervalli di lunghezza 3^{-n} eliminati all' n -simo passo della costruzione di C assume successivamente i valori: $\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$.

Il diagramma dei primi elementi di tale successione è tracciato nella figura 4. Si può dimostrare che la successione converge uniformemente nell'intervallo $[0,1]$ e quindi la

matematica astratta, dove sono state introdotte entità che non trovano alcuna giustificazione a livello intuitivo (quei fenomeni che abbiamo detto patologici), si è dimostrata del tutto inattendibile.

funzione di Cantor è continua, inoltre è evidente che non può essere derivabile nei punti dell'insieme di Cantor.

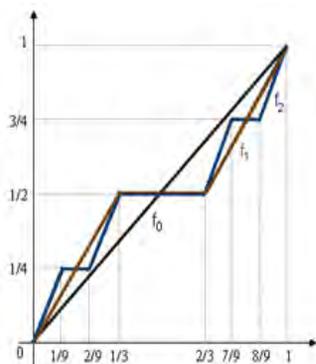


Figura 4

Darboux descrive molto bene la situazione che si era creata: fino all'apparizione della memoria di Riemann sulle serie trigonometriche nessun dubbio si era levato sull'esistenza della derivata delle funzioni continue. Dei bravissimi geometri, tra cui Ampère, avevano cercato di dare una dimostrazione rigorosa dell'esistenza della derivata. Nessuno di tali tentativi era stato coronato dal successo, ma ciò non di meno nessuno avrebbe dubitato dell'esistenza della derivata per le funzioni continue. Lo stesso Darboux fornisce un gran numero di esempi di funzioni continue che non hanno derivata in un numero infinito di punti: tra l'altro fornisce l'esempio di una funzione che non è né crescente né decrescente in nessun intervallo. Conclude la sua serie di esempi definendo la funzione:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin [(n+1)!x]}{n!}$$

che non ha derivata per nessun valore della variabile indipendente (Darboux, 1875).

Delle funzioni di Riemann e di Weierstrass vennero a conoscenza tutti i matematici del tempo: la funzione di Weierstrass ebbe un impatto maggiore di quella di Riemann in quanto comporta che la continuità non implica in alcun modo la derivabilità: ciò generò spesso reazioni di disappunto. Anche la memoria di Darboux ebbe grande influenza sulla comunità dei matematici. Hermite commentò il fatto in una lettera a Stieltjes del 1893 con le parole:

Mi ritraggo con spavento ed orrore da questa lamentevole disgrazia delle funzioni che non posseggono derivata.

La situazione quindi, in seguito alla scoperta dei casi singolari sopra descritti e di altri analoghi, faceva sorgere dei dubbi sui principi fondamentali dell'analisi e sulle sue dimostrazioni: in Germania alcuni valenti matematici, quali Schwarz di cui si è già detto e Heine, sollevavano nelle loro memorie negli anni 70-71 dubbi forse ancora maggiori e cercavano di porre su solide basi i principi dell'analisi infinitesimale: il matematico italiano Ulisse Dini, anch'egli assalito da dubbi analoghi, scrisse a Schwarz e da questi fu edotto sui metodi di Weierstrass e dei suoi allievi. Così venne a conoscenza dei lavori di Hankel, allievo di Riemann, e di Dedekind, Cantor, Heine: usò questo materiale per il suo corso di Analisi Superiore all'università a partire dall'a.a. 1871-72 e cominciò a stampare le sue lezioni. Il suo testo, pubblicato nel 1878 fu tradotto in tedesco. In esso tutta la materia intervenuta in modo disorganico negli esempi precedenti si avvia ad una rigorosa sistemazione. Le funzioni

continue trovano ampia discussione ma lo stesso avviene per le “punteggiate discontinue”, cioè quelle funzioni discontinue, introdotte da Hankel, tali che in ogni intervallo cada almeno un punto di continuità. Per queste funzioni l’allievo di Riemann aveva ideato il “principio di condensazione delle singolarità”, grazie al quale, data una funzione che presenta una singolarità (funzioni con un numero al più finito di singolarità sono di fatto la regola) se ne possono costruire altre con un numero infinito denso di singolarità. Dini trasforma questo principio in un metodo assolutamente rigoroso. Determina poi una classe di funzioni analitiche abbastanza semplici che non sono mai derivabili. Studia quindi le funzioni continue in relazione all’esistenza delle derivate: introduce la definizione di rapporto incrementale e per primo definisce le derivate destra e sinistra, inferiore e superiore, fornendo una grande quantità di risultati teorici.

Dini riteneva molto probabili funzioni definite e continue in un intervallo che abbiano in ogni sotto-intervallo massimi e minimi e siano ovunque derivabili (Dini, 1878, p. 283). Un primo tentativo in tal senso fu compiuto da Hankel (*Math. Annalen*, XX, 1882, p.81) ma la funzione ottenuta non era ovunque oscillante. Una costruzione molto complicata di una tale funzione fu data da Kopche (*Math. Ann.* XXXIV, 1889 e XXXV, 1890). La costruzione fu semplificata da Pereno (*Giornale di Matematica* XXXV, 1897).

È davvero interessante ricordare che, in seguito all’attenzione che Darboux e Dini riservano alle funzioni reali e in particolare a quelle singolari, anche in Italia l’argomento interessa alcuni matematici: ad esempio Peano ci informa nel 1889 che Genocchi, sebbene non ne avesse conoscenza prima

del 1875, aveva in seguito fatto dei seminari sulle funzioni continue sprovviste di derivata.

Il risultato più originale e famoso di Peano, quello che maggiormente risente del generale proposito di rigorizzazione dell'analisi e il più citato dei suoi lavori, è l'articolo sui *Math. Annalen* relativo alla curva continua che riempie un quadrato (Peano, 1890). Si tratta di un'applicazione continua dell'intervallo $I = [0,1]$ sull'intervallo I^2 , di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t appartenente ad I , essendo $x(t)$ e $y(t)$ funzioni continue. Peano non fornì in un primo momento una rappresentazione analitica di tale curva e nemmeno una rappresentazione geometrica, ma solo una formulazione algebrica.

L'anno dopo, sempre sui *Math. Annalen*, compare un articolo analogo da parte di Hilbert, dove viene data per la prima volta una rappresentazione geometrica di una curva simile a quella di Peano. Nella figura 5 seguiamo i primi sei passi della costruzione:

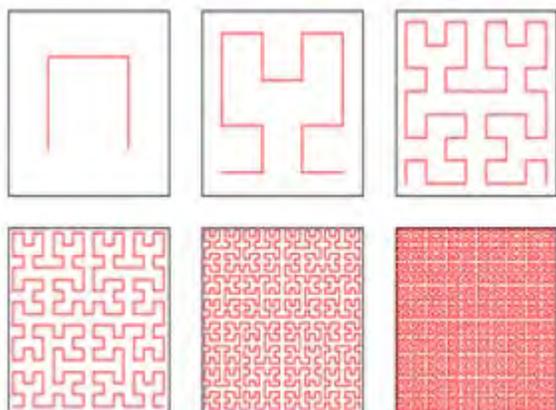


Figura 5

Le forchette che si rincorrono dalla terza delle precedenti immagini sembrano anche dominanti in figura 6, una veduta aerea dell'edificio del Bauhaus a Dessau, ideato dall'architetto Walter Gropius (1926).



Figura 6

Nel 1897 Cesaro pubblica la prima rappresentazione analitica della curva di Peano (Cesaro, 1897) e nel 1900 il matematico statunitense Moore fornisce una rappresentazione geometrica dei primi passi della costruzione (Moore, 1900), riprodotti in figura 7.

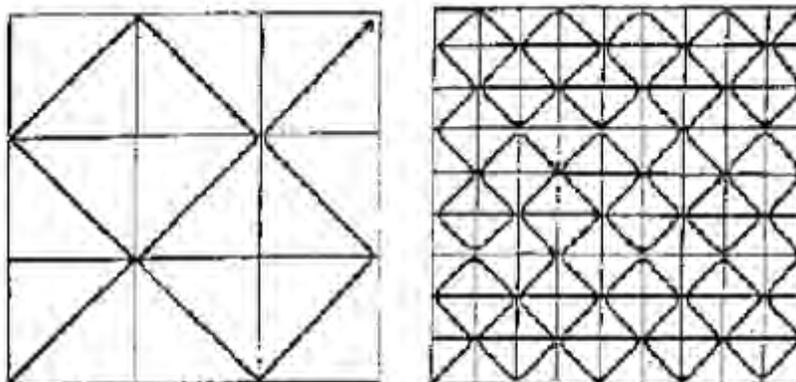


Figura 7

È un tratto caratteristico di Peano la sua ricerca del rigore e di controesempi che contraddistinguono gran parte della sua attività: così negli anni '90 egli propone anche un semplice esempio di una funzione crescente e discontinua in ogni intervallo (Peano, 1892). Successivamente nel suo *Formulario*, nel 1908, pubblicava una successione di curve come quelle di Hilbert. Inoltre, ammirandone la geniale formulazione geometrica, faceva pure costruire una curva della successione approssimante sul terrazzo della villa di Cavoretto, acquistata nell'estate del 1891: era formata da mattonelle nere che si stagliavano su uno sfondo bianco (H. C. Kennedy, 1983).

È interessante osservare come nel seguente dipinto di Mondrian del 1915, intitolato *Molo e oceano*, sia evidente un tentativo di afferrare la bidimensionalità con scarni tratti di linea retta.

Una rappresentazione algebrica molto semplice di una curva continua che riempie il quadrato unitario, analoga a quelle di Peano e di Hilbert, fu fornita da Lebesgue nelle sue *Leçons*.



Figura 8, Piet Mondrian, 1915, Pier and Ocean

Lebesgue pone, alla maniera di Peano e sulla scia di Cantor:

$$x = 1/2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \dots + \frac{a_{2n-1}}{2^n} + \dots\right)$$

$$y = 1/2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_6}{2^3} + \dots + \frac{a_{2n}}{2^n} + \dots\right)$$

in corrispondenza di $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$, dove, per ogni n , $a_n = 0, 2$ cioè t appartiene all'insieme di Cantor C . Se t non appartiene a C allora esso appartiene a uno degli intervalli soppressi nella costruzione di C , sia (t_0, t_1) un tale intervallo, ai cui estremi corrispondono i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Allora a ogni $t \in (t_0, t_1)$ si fa corrispondere il punto: $x(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0)$; $y(t) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} (t - t_0)$ e per $t \in (t_0, t_1)$ la curva si riduce ad un segmento. Le funzioni così definite sono continue: per questo basta provare che sono continue nei punti di C . Ora se $t \in C$ è molto vicino ad un punto $\vartheta \in C$ le prime $2n$ cifre di t , scritto in base 3, sono eguali alle prime $2n$ cifre di ϑ e quindi le prime n cifre di $x(t)$ e $x(\vartheta)$ sono eguali, come le prime n cifre di $y(t)$ e $y(\vartheta)$. È infine evidente che si tratta di un'applicazione suriettiva anche se non iniettiva. La

curva corrispondente è misurabile secondo Jordan, riempie tutto il quadrato unitario e quindi ha misura piana eguale a quella del quadrato; essa passa più volte per certi punti e non potrebbe essere altrimenti, in quanto se così non fosse il segmento base della rappresentazione ed il quadrato dovrebbero avere la stessa dimensione. Esistono però, come vedremo, delle curve senza punti multipli e non misurabili secondo Jordan (Lebesgue, 1904, p.44).⁸

Questi esempi ponevano un serio problema a proposito della dimensione: fino ad allora si era ritenuto che la dimensione di una figura fosse rappresentata dal minimo numero di parametri atti a determinarne un punto. Ad esempio un punto di una figura triangolare piana è determinato da due parametri, le coordinate cartesiane; una curva era ritenuta un ente a una dimensione, perché basta un parametro per rappresentarla, ma ora questo risultava ben strano visto che già Cantor aveva messo in relazione biunivoca un segmento con un quadrato: Si poteva obiettare che quella già sorprendente relazione era non continua, ma ora si provava che le curve, continue, di Peano e di Hilbert riempiono un quadrato. Non si tratta di curve di Jordan, in

⁸ Si osservi che, procedendo con le stesse notazioni usate in precedenza, se consideriamo la curva dello spazio di equazioni:

$$x = 1/2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_7}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-2}}{2^n} + \dots\right)$$

$$y = 1/2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_8}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-1}}{2^n} + \dots\right)$$

$$z = 1/2\left(\frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2^2} + \frac{a_9}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^n} + \dots\right)$$

essa riempie il cubo unitario. In (Lebesgue, 1905, 211) è costruita in modo simile una curva che riempie un dominio dello spazio a un'infinità numerabile di dimensioni.

quanto non sono rappresentative di una corrispondenza biunivoca: delle curve definite come immagini biunivoche e continue di un intervallo, Jordan si occupa nella prima edizione del terzo volume del suo *Cours d'analyse* del 1887, dimostrando che se sono rettificabili hanno misura bidimensionale nulla, cioè sono rinchiudibili in un numero finito di intervalli del piano di misura complessiva piccola quanto si vuole (sono cioè trascurabili). All'inizio nel 1903 un matematico statunitense, William F. Osgood (1864-1943), avrebbe provato che quel teorema non sussiste più se la curva è non rettificabile fornendo l'esempio di una curva di Jordan, cioè una curva continua che non si sovrappone a sé stessa, che ha misura piana positiva (e quindi, pur essendo limitata, ha lunghezza infinita). Osgood negli anni 1887-90 era venuto in Europa, a Gottinga, per perfezionare i suoi studi con Klein: in Europa aveva trovato un'atmosfera matematica molto vivace ed attiva, attraversata dall'acceso dibattito ideale tra la liceità dell'uso dell'intuizione ed il riferimento ad argomenti di carattere fisico abituale in Riemann e nella sua scuola e lo stretto rigorismo delle definizioni e delle dimostrazioni di Weierstrass. Osgood, come molti, nella sua carriera scelse il meglio delle due scuole, usando l'intuizione nel momento in cui inventava possibili nuovi risultati che venivano poi in seguito rigorosamente dimostrati. Si interessò alle funzioni di variabile reale, nel 1897 scrisse un importante lavoro sull'integrazione termine a termine delle successioni limitate di funzioni continue e oltre a vari altri risultati fornì in particolare il precedente interessante risultato sulle curve (Osgood 2003).

Riguardo le curve che si auto intersecano, Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969), fondatore della scuola matematica polacca, rappresentativo, al pari di Lebesgue, della visione platonica della matematica, nel 1912 presenta un lavoro su una curva continua che riempie un quadrato visibile in figura 9 e successivamente (Sierpinski, 1915) scrive un lavoro dove sono presentati il famoso tappeto di Sierpinski e la curva triangolare.

Nei primi anni del '900 era stata pubblicato un lavoro che poneva all'attenzione una curva continua e non dotata di tangente in nessun punto, la curva di von Koch (von Koch, 1903-04) cui era seguito uno studio delle curve piane da parte dello stesso autore (von Koch, 1906).

La curva di von Koch si ottiene come limite di una successione di curve poligonali partendo da un segmento di lunghezza unitaria, al primo passo a tale segmento è eliminata la parte centrale e sostituita da due segmenti di lunghezza eguale alla parte rimossa, che formano un triangolo privo di base; al secondo passo da ognuno dei quattro lati della figura ottenuta in precedenza si sottrae la parte centrale e la si sostituisce con due segmenti ognuno di lunghezza eguale a quella del segmento rimosso; si ottiene una poligonale con 16 lati eguali per la quale si può ripetere la precedente costruzione.

Si ottiene al passo n una poligonale costituita da 4^n lati tutti della stessa lunghezza 3^{-n} e quindi di lunghezza $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Ne segue che la curva che si ottiene al limite ammette come poligonali inscritte tutte le curve precedenti e quindi ha lunghezza infinita.

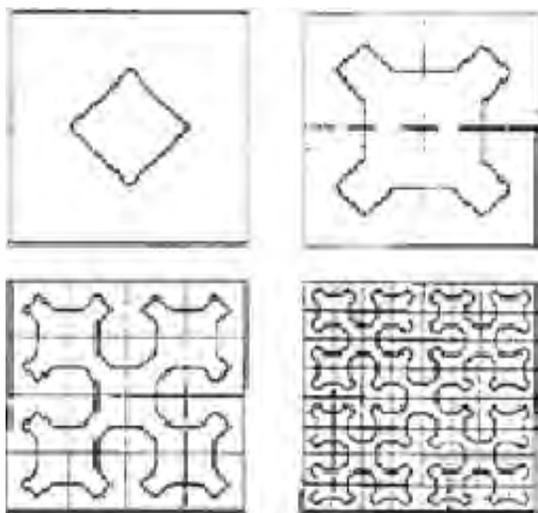


Figura 9

Ovviamente è una curva continua, ma sprovvista di tangente in ogni punto e priva di punti doppi, al contrario della curva di Peano, che ne presenta infiniti. Inoltre è auto-similare, cioè matematicamente generata da un processo che si ripete indefinitamente sempre eguale a sé stesso, sempre con lo stesso fattore di proporzionalità. Ovviamente se lo schema di partenza è diverso avremo uno sviluppo diverso, ma nello stesso ordine d'idee.

Della curva di von Koch si occupò Ernesto Cesaro, che approssima la funzione dall'esterno, al passo n mediante una congiungente i vertici delle figure triangolari ottenute nella costruzione della curva allo stesso passo (Cesaro, 1905). Come è evidente in figura 10, si viene così a formare una intercapedine, tra la poligonale al passo n della curva data e quella ottenuta da Cesaro, la cui area egli dimostra essere infinitesima.

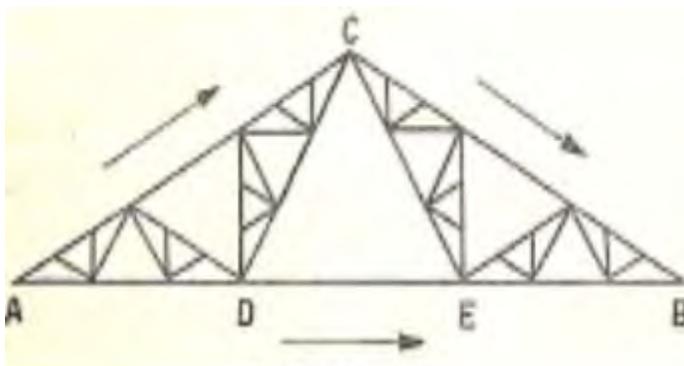


Figura 10

Quindi la curva pur non essendo rettificabile ha misura piana nulla (figura 11).

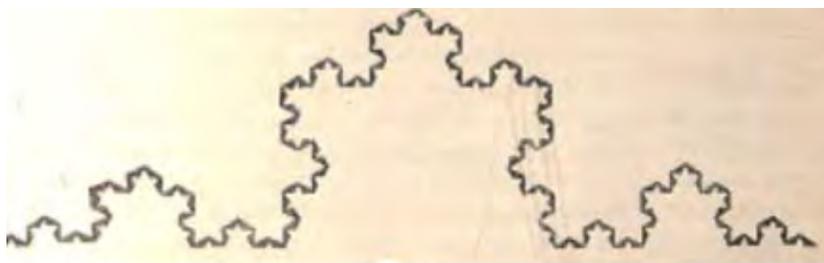


Figura 11

La maggior parte delle curve a misura positiva sono curve che non sono di Osgood, nel senso che si sovrappongono a sé stesse. Gli esempi forniti da Osgood sono però relativi a curve che intorno ad alcuni punti hanno misura positiva mentre hanno misura nulla intorno ad alcuni altri punti.

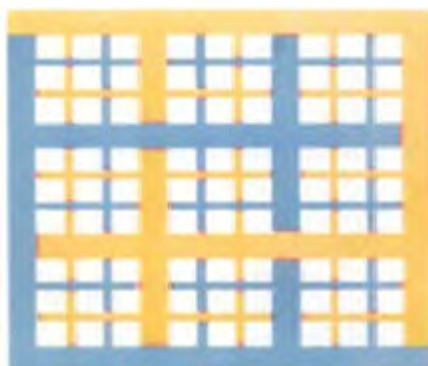


Figura 12

Può essere interessante confrontare la figura 12, che appare nell'articolo di Osgood con la figura 13, riproduzione di un quadro di Mondrian, dove, oltre a un simile intreccio di linee, troviamo esattamente gli stessi colori, blu, giallo, rosso e bianco che compaiono nell'articolo dello statunitense.

Nel 1917 Konrad Knopp (1882-1957) riuscì a migliorare l'esempio di Osgood determinando una curva che ha misura positiva nell'intorno di ogni suo punto. Essa si ottiene, alla maniera della curva di von Koch, considerando triangoli e disponendo sui lati di questi ricorsivamente triangoli più piccoli che costituiscono dei cunei triangolari come è mostrato in figura 14.

Se le ampiezze dei cunei introdotti ad ogni livello sono di 60° abbiamo al limite la curva di von Koch, se tali ampiezze si trovano comunque in un rapporto costante allora si ottiene al limite una curva del tipo von Koch, ma se il rapporto non è costante e diminuisce abbastanza rapidamente, si ottiene una curva uniforme di Osgood.

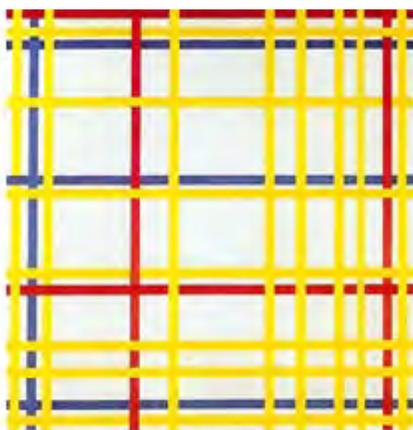


Figura 13 - Piet Mondrian, 1942, New York City I



Figura 14

3 - Un modo nuovo di guardare a curve e funzioni anomale.

Ciò che si era preso l'abitudine di classificare come patologia matematica deve essere ripreso in considerazione e riclassificato come espressione della "robusta complessità del reale" (Mandelbrot, 1987).

Grandi discussioni sorsero in seno ad alcuni gruppi di matematici circa le preesistenti nozioni topologiche relative alla dimensione delle figure date. Fu proprio uno dei fondatori della topologia moderna, F. Hausdorff (1868-1942), a chiarire molte nozioni al riguardo. In (Hausdorff, 1919) l'autore introduce un concetto di dimensione topologica in modo molto complesso. Il punto di partenza consiste nel fatto che oltre a figure geometriche di dimensione intera, possono esserci insiemi della retta di dimensione maggiore di 0 e minore di 1, curve piane limitate non rettificabili cioè di lunghezza infinita, che hanno una dimensione maggiore di 1 e minore di 2, superfici con dimensione superiore a 2 e minore di 3 e così via. Il matematico russo A. Besicovitch (1891-1970) avrebbe successivamente elaborato la definizione di Hausdorff e dato grandi contributi alla teoria della dimensione topologica, sviluppandone alcuni interessanti problemi. Qui daremo un'applicazione del calcolo della dimensione frattale in una forma estremamente semplificata, dimostrando che la curva di von Koch ha dimensione $\log_3 4$, cioè un numero non intero compreso tra 1 e 2.

Cominciamo con l'osservare che, dato il segmento unitario, lo possiamo ricoprire con 3^n segmenti tutti della stessa lunghezza 3^{-n} . Ognuno di questi segmenti può essere pensato, introdotto un parametro δ , come se avesse un peso $3^{-n\delta}$. Quindi nel valutare la somma totale dei pesi troviamo il valore

$$\frac{3^n}{3^{n\delta}} \quad (1)$$

Tale somma, al divergere di n , per $\delta < 1$ tende a $+\infty$, mentre per $\delta > 1$ tende a 0. Quindi, conformemente alla nostra concezione di dimensione, possiamo dire che la dimensione è data da $\delta = 1$, valore che si presenta come elemento di

separazione di due insiemi separati, il primo costituito dai $\delta < 1$ per cui (1) tende a $+\infty$ e il secondo costituito dai valori $\delta > 1$ per cui (1) tende a 0. Analogamente possiamo ricoprire il quadrato unitario con 3^{2n} quadrati di lato 3^{-n} che possiamo pensare abbiano un peso $3^{-n\delta}$ sommare i pesi ottenendo $3^{(2-\delta)n}$. In tal caso la dimensione, 2, è il valore tale che la somma precedente tende a 0 se $\delta > 2$, tende a $+\infty$ se $\delta < 2$.

Consideriamo ora la curva di von Koch e usiamo lo stesso metodo. Al primo passo abbiamo 4 segmenti che pesano ognuno $3^{-\delta}$. Al passo successivo ognuno di questi 4 segmenti dà luogo ad altri quattro segmenti che pesano $3^{-2\delta}$, per un contributo complessivo di $4^2 3^{-2\delta}$. Ripetiamo la stessa procedura in tutti i passaggi successivi, al passo n avremo 4^n segmenti ognuno dei quali pesa $3^{-n\delta}$, per un contributo complessivo di $\left(\frac{4}{3^\delta}\right)^n$. Tale quantità tende a 0 se $4 < 3^\delta$, cioè $\delta > \log_3 4$, tende a $+\infty$ se $0 < \delta < \log_3 4$. Ne segue che la dimensione della curva di von Koch non è intera, ma è eguale a $\log_3 4$, numero compreso tra 1 e 2. Si osservi che la lunghezza della curva è, come si è già detto, infinita.

Allo stesso modo si può provare che l'insieme di Cantor ha dimensione frattale eguale a $\log_3 2$. Fatto interessante: gli insiemi generalizzati di Cantor considerati in precedenza per valori positivi di $\sigma < 1/3$ hanno tutti dimensione 1. Infatti si vede subito che gli spazi fra due isole consecutive allo stesso passo della costruzione sono eguali e dopo il primo passo ci sono due spazi a lato dell'isola centrale di ampiezza $b_1 = 1/2(1-\sigma)$, dopo il secondo passo ci sono 4 spazi eguali di ampiezza $b_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2\right]$, dopo il terzo passo ci sono 8

spazi eguali di ampiezza $b_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2-\sigma^3 \right]$, dopo il quarto passo ci sono 16 spazi eguali di ampiezza

$$b_4 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1-\sigma)-\sigma^2 \right] - \sigma^3 \right] = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-4\sigma^3-8\sigma^4}{2^4}$$

e in generale dopo n passi ci sono 2^n spazi eguali di ampiezza ciascuno:

$$b_n = \frac{1-\sigma-2\sigma^2-\dots-2^{n-1}\sigma^n}{2^n} = \frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)}$$

Pertanto la somma da considerare al fine del calcolo della dimensione di C_σ è:

$$2^n \left(\frac{1-3\sigma+\sigma(2\sigma)^n}{2^n(1-2\sigma)} \right) \delta \tag{2}$$

Se $0 < \sigma < 1/3$ tale quantità tende a $+\infty$ se $\delta < 1$ e tende a zero se $\delta > 1$. Ne segue che in tali casi la dimensione frattale di C_σ è 1. Si noti che da (2) nel caso $\sigma = 1/3$ riotteniamo il valore $\log_3 2$ per la dimensione che presenta quindi una discontinuità quando σ passa dai valori compresi tra 0 e 1/3, in corrispondenza dei quali essa vale 1, al valore 1/3 in corrispondenza del quale essa assume il valore $\log_3 2$: ciò appare coerente con il fatto che se $0 < \sigma < 1/3$ la misura di C_σ è positiva, mentre è nulla per $\sigma = 1/3$ (ma la misura varia con continuità). Si osservi ancora che per $\delta = 1$ il limite di (2) fornisce la misura di C_σ , eguale a $\frac{1-3\sigma}{1-2\sigma}$, valore già determinato per altra via in precedenza.

Possiamo considerare un insieme piano, simile al tappeto di Sierpinski, costruito nello stesso ordine di idee dell'insieme di Cantor al seguente modo: dato il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$, si divida Q in nove quadrati mediante i segmenti di equazione $x = \frac{i}{3}$ $i = 1,2$ e $y = \frac{i}{3}$ $i = 1, 2$. Si elimini il quadrato centrale aperto. Si divida ognuno degli 8 quadrati rimasti in 9 quadrati uguali di lato $1/9$ con lo stesso procedimento e si elimini poi il quadrato centrale aperto. Si iteri indefinitamente il procedimento. L'insieme di Cantor del piano C_2 è ciò che si ottiene eliminando successivamente tutti i quadrati così ottenuti. Si verifica subito che la misura di C_2 è zero. Per il calcolo della dimensione, poiché l'insieme è dato nel piano, ora lo ricopriremo con quadrati (o con cerchi) in modo opportuno: osserviamo che C_2 può essere ricoperto da 8 quadrati di lato $1/3$, 64 quadrati di lato $1/9$, in generale 8^n quadrati di lato $1/3^n$ che, al fine del calcolo della dimensione frattale, danno un contributo pari a $\frac{8^n}{3^{n\delta}}$, valore che tende a 0 se $8 < 3^\delta$ cioè se $\delta > \log_3 8$ e tende a $+\infty$ se $\delta < \log_3 8$, da cui si trae che la dimensione frattale di C_2 è $\log_3 8$. Si può ripetere il ragionamento precedente in dimensione 3 e si ottiene una polvere C_3 detta spugna di Menger, dal nome del matematico austriaco Karl Menger (1902-1985) che per primo la definì. La spugna di Menger ha misura tridimensionale nulla e dimensione frattale $\log_3 26$. Quindi:

$$\dim C < 1 < \dim C_2 < 2 < \dim C_3 < 3.$$

Possiamo anche considerare gli analoghi degli insiemi C_σ con $\sigma < 1/3$ in 2 dimensioni, dividendo il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ in nove rettangoli mediante i segmenti di equazione

$x = \frac{1-\sigma}{2}$, $x = \frac{1+\sigma}{2}$ e $y = \frac{1-\sigma}{2}$, $y = \frac{1+\sigma}{2}$. Si elimini il quadrato centrale aperto. Si divida ognuno degli 8 rettangoli rimasti in 9 rettangoli ottenuti allo stesso modo inserendo in ognuno di essi un quadrato centrale di lato σ^2 . Si eliminino i quadrati centrali aperti. Si iteri indefinitamente il procedimento.

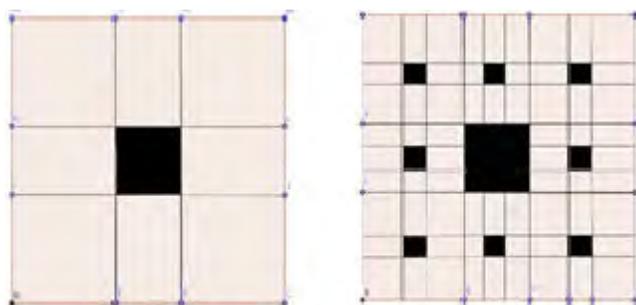


Figura 15

La misura complessiva dei quadrati che togliamo è $\sigma^2 + 8\sigma^4 + 64\sigma^6 + \dots = \frac{\sigma^2}{1-8\sigma^2}$ numero che è minore di 1 se $\sigma < 1/3$, eguale a 1 per $\sigma = 1/3$. Se ne deduce che la polvere bidimensionale che si ottiene in questo caso ha misura 0 per $\sigma = 1/3$, mentre ha misura positiva per $\sigma < 1/3$ data da $\frac{1-9\sigma^2}{1-8\sigma^2}$. Si può poi provare che per $\sigma < 1/3$ la polvere bidimensionale ha dimensione frattale eguale a 2, mentre la polvere tridimensionale ha dimensione eguale a 3. Infatti nel caso della polvere bidimensionale si vede che al passo n essa è ricoperta da più di $4n$ quadrati di lato b_n . Quindi la quantità da prendere in considerazione è minorata da $4nb_n^\delta$ e si verifica facilmente che essa tende a $+\infty$ se $\delta < 2$. Ne deduciamo che la dimensione della polvere bidimensionale non è inferiore a 2; poiché maggiore di 2 non può essere essa è proprio eguale a 2.

Quindi anche in questo caso la dimensione frattale presenta una discontinuità in corrispondenza di $\sigma = 1/3$ caso in cui, come si è detto, la dimensione è $\log_3 8$, numero strettamente compreso tra 1 e 2.

La curva di Koch e le altre figure frattali finora considerate si presentano come oggetti matematici risultanti dall'iterazione infinita di certe operazioni elementari, lineari, rispetto alle quali risultano poi invarianti. All'inizio del secolo Pierre Fatou (1878-1929) compiva studi sulla iterazione di funzioni complesse, che pubblicava nel 1917. Nello stesso periodo anche Gaston Julia faceva studi sullo stesso argomento e anche se con tecniche diverse approdava agli stessi risultati: ma entrambi dovevano arrestarsi per la difficoltà dell'elaborazione dei calcoli relativi alla loro analisi. B. B. Mandelbrot fu allievo di Julia all'École Polytechnique di Parigi e venne così messo al corrente di questo tipo di indagini.

Negli anni 78-79, dopo il grande sviluppo delle macchine calcolatrici, pensò di studiare al calcolatore oggetti matematici che fossero invarianti per trasformazioni non lineari: in particolare alla fine del 1979 pensò di studiare il comportamento della funzione z^2+c , dove la variabile z e la costante c sono numeri complessi. Si tratta dello studio di un processo iterativo in cui a ogni punto variabile x_n del piano complesso al passo n corrisponde un punto x_{n+1} al passo $n+1$ ottenuto dal precedente mediante la legge $x_{n+1} = x_n^2 + c$. Se si procede indefinitamente i punti all'interno del cerchio unitario tendono ad avvicinarsi al punto c , che rappresenta così un attrattore, quelli all'esterno tendono all'infinito, quelli della circonferenza unitaria tendono alla circonferenza di centro c e

raggio 1. Quindi il piano viene distinto in due diverse regioni di attrazione una esterna e l'altra interna al cerchio di centro c e raggio 1. Mandelbrot, come è descritto in (Devlin, 1999), vide al calcolatore che per valori di c diversi da zero ci può essere più di un attrattore e la figura compresa tra le due zone non è necessariamente una circonferenza, ma può avere un notevole interesse estetico. Nella figura 16 è rappresentato l'insieme di Mandelbrot, cioè l'insieme che appare per $-2,25 < Re c < 0,75$ e $-1,5 < Im c < 1,5$.

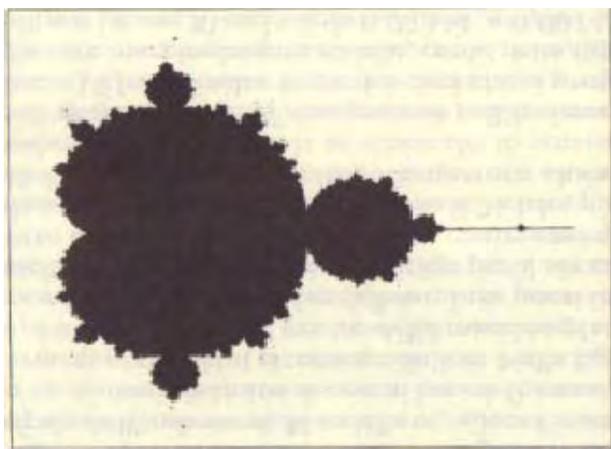


Figura 16

Se si osserva il comportamento della figura 16 in un intorno della zona di frontiera, usando un calcolatore come ingrandimento, che corrisponde ad ulteriori iterazioni, si osserva una figura del tutto simile alla figura complessiva. Questo era stato presagito da Fatou e Julia, in quanto l'intera frontiera si riproduce con la stessa legge che regola il tutto, ma i due matematici non avevano a disposizione dei calcolatori per poterlo andare a verificare. Per questo motivo a tale zona di frontiera, rappresentata nella figura 17, viene oggi dato il

nome di insieme di Julia. Come si vede l'insieme di Mandelbrot appare come una figura a forma di scarafaggio: questa caratteristica si presenta per particolari valori di c .



Figura 17

Quando si parla di curve senza tangente e di funzioni senza derivate si ritiene in generale che la natura non presenti simili complicazioni. Invece secondo Mandelbrot la complessità che simili condizioni comportano spesso sono presenti nel mondo reale, anche se non abbiamo la possibilità di rendercene conto; infatti se osserviamo un fiocco bianco di quelli che si ottengono salando l'acqua saponata si vede che mentre da lontano il suo contorno può apparire netto, avvicinandosi non si riesce più a fissare la tangente in un punto. Questo problema permane se si prende una lente e si ingrandisce il fiocco perché allora si vedono comparire delle nuove anfrattuosità.

Allo stesso modo, come è descritto nelle pagine 12 e 13 di (Mandelbrot, 1987), se si prende una carta della costa della

Gran Bretagna, la tangente in un punto varia a seconda della scala e comunque si può determinare perché la carta non può essere costruita in modo tale da rispettare strettamente il mondo reale. Ma se si guarda il litorale al naturale, è impossibile fissare la tangente perché si intravedono dettagli tali che ne rendono impossibile la determinazione. Allo stesso modo se osserviamo il moto browniano che agita una particella in sospensione in un fluido, siamo incapaci di trovare anche solo approssimativamente il limite della direzione di una retta che congiunge le posizioni della particella in due istanti vicini, in quanto tale direzione varia follemente al tendere a zero dell'intervallo di tempo.

Fatto interessante allora, la curva di von Koch può essere considerata come un modello sommario di un tratto di costa: però il modello risulta non accettabile, non perché sia troppo irregolare, ma perché al contrario è troppo regolare rispetto alle irregolarità che si presentano nella realtà. A questo problema Mandelbrot dedica molta attenzione e nel 1967 pubblica su *Science* il suo lavoro sulla lunghezza della costa della Gran Bretagna dove, come mostrano i ricoprimenti in figura 18, usa la teoria dei frattali allo scopo della determinazione della sua dimensione.

Concludendo abbiamo ricordato che la teoria di Hausdorff, dopo un lungo periodo di indifferenza, è stata ripresa nella seconda metà del '900 da Benoit B. Mandelbrot che la ha sviluppata al fine di trattare fenomeni fisici che non possono essere inquadrati negli schemi della matematica classica, fenomeni che egli inquadra nell'ambito della teoria dei frattali.



Figura 18

Questa teoria, che comunemente è nota perché ha permesso di costruire immagini con un interessante aspetto estetico ed è stata conseguentemente usata in ambito cinematografico per la creazione di paesaggi fantascientifici, ha anche il merito di aver rappresentato un momento di rinascita del punto di vista geometrico-costruttivista, perché nonostante le sue origini siano state determinate come abbiamo visto, dal lavoro di Hausdorff e dagli studi topologici di inizio del secolo XX, impregnati di considerazioni di carattere platonico, essa è strettamente legata all'uso della tecnica computeristica, che è la sola che permette di generare e indagare gli oggetti frattali.

Bibliografia

Arntzenius F. (2012). *Space, Time and Stuff*, Oxford University Press.

Cantor G. (1884). De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, Vol. 4, 381-396.

Cesaro E. (1897). Sur la representation analytique des régions et des courbes qui le remplissent, *Bull.Sc. Math. (2) 21, Opere Scelte, Cremonese, Vol. II*, 1963, 423-431.

Cesaro E. (1905). Remarque sur la courbe de von Koch, *Atti Acc. Sci. Napoli* (2) 12.

Darboux G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (2), t. IV, 57-112.

Devlin K. (1999). *Dove va la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Diedonné J. (1996). *Abregé d'histoire de mathématiques*. Paris: Herman.

Dini U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. UMI, 1990.

Hahn H. (1933). *The crisis in intuition, The Word of Mathematics by James R. Newman*. New York, 1956-1976.

Hausdorff F. (1919). Dimension und äusseres Mass, *Mathematische Annalen*, LXXIX, 157-79.

Kennedy H. C. (1983). *Peano – Storia di un matematico*. Torino: Boringhieri.

Von Koch E. (1903-04). Sur une courbe continue sans tangente obtenu par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv für Mathematik, Astronomie och Fysik I*, 681-702.

Von Koch E. (1906). Une méthode géométrique pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Math.* 30, 145-175.

Lebesgue H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris : Gauthier- Villars.

Mandelbrot B. B. (1987). *Gli oggetti frattali*, Biblioteca Einaudi (Prima edizione 1975).

Manheim J. H. (1964). *The Genesis of Point Set Topology*. Pergamon.

Moore E. H. (1900). On Certain Crikly curves. *Trans. AMS*, Vol 1, 72-90.

Osgood W. F. (1903). A Jordan curve of positive area. *AMS*, Vol. 4, No. 1, pp. 107-112.

Peano G. (1890). Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Math. Annalen* 36, 157-160, anche in *Opere Scelte*, Vol. I, 110-114.

Peano G. (1892). Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo. *Rivista di Matematica*, 2, 41-42.

Poincarè J.H. (1997). *Scienza e metodo*. Torino: Einaudi.

Sierpinski W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C.R. Ac.Sci. Paris* 60, 302-305.

Smith H. J. S. (1874-1875). On the Integration of Discontinuous Functions. *Proceeding of the London Math. Soc.*, 6, 140-153.

Volterra V. (1881). Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. *Giornale di Matematiche*, XIX.

Numeri di Fibonacci primi

Sia $F(n)$ il generico numero di Fibonacci. Una interessante proprietà è la seguente:

$F(mn)$ è divisibile sia per $F(m)$ che per $F(n)$

ne consegue che, se un numero $F(k)$ è numero primo, anche l'intero k è primo, fatta eccezione per il caso che sia $F(4) = 3$. Infatti se fosse $k = mn$, con $m > 1$, $n > 1$, allora sarebbe $F(k)$ divisibile sia per $F(m)$ che per $F(n)$, con $F(m) > 1$, $F(n) > 1$, mentre $F(k)$ è primo.

Non è vero il contrario.

Il più grande numero di Fibonacci primo noto F sé tato segnalato in aprile 2001 da David Broadbent e Bouk de Water.

La serie di numeri indice dei numeri primi di Fibonacci, ad oggi nota, è la sequenza:

3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511, 50833, 81839, 104911, 130021, 148091, 201107, 397379, 433781, 590041, 593689, 604711, 931517, 1049897, 1285607, 1636007, 1803059, 1968721, 2904353, 3244369, 3340367.

I buchi neri: analisi della loro formazione e classificazione

Ferdinando Di Martino, Salvatore Sessa²

¹Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Architettura

Centro Interdipartimentale di Ricerca Calza Bini

Via Toledo 402, 80134 Napoli, Italy

(fdimarti@unina.it, sessa@unina.it)



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n2.045

Sunto: *Con il solo supporto degli strumenti della fisica di base, in questo articolo è stata analizzata la formazione dei buchi neri stellari, raccontando il processo evolutivo seguito da una stella, a partire dalla sua formazione, alla conclusione della sua permanenza in sequenza principale e al successivo collasso gravitazionale che condurrà, per le stelle molto massicce, alla formazione di buchi neri stellari. Nell'ultima sezione sono stati analizzati i tipi possibili di classificazione di un buco nero, evidenziando come, a partire da buchi neri stellari si possano formare buchi neri super-massicci nei centri galattici e trattando di altri tipi di buchi neri, come i buchi neri primordiali che modelli cosmologici prevedano si siano formati successivamente al Big Bang.*

Parole Chiave: *raggio di Schwarzschild, buchi neri stellari, buchi neri super-massicci, buchi neri primordiali*

Abstract: *Using only the tools of basic physics, in this article the formation of stellar black holes has been analyzed, describing the evolutionary process followed*

by a star, starting from its formation to the conclusion of its permanence in the main sequence and to the subsequent gravitational collapse, which will lead, for very massive stars, to the formation of stellar black holes. In the last chapter, the possible types of classification of a black hole were analyzed, highlighting how super-massive black holes can be formed starting from stellar black holes in the galactic centers and dealing with other types of black holes, such as black holes primordial that cosmological models predict arose after the Big Bang.

Keywords: *Schwarzschild radius, stellar black holes, super-massive black holes, primordial black holes*

1 - Introduzione

I buchi neri sono oggetti misteriosi ormai da tempo entrati nella letteratura fantastica e fantascientifica per il fascino che trasmette l'impossibilità di comprenderne appieno i segreti con le leggi fisiche di cui siamo a conoscenza. Nulla, neanche la radiazione elettromagnetica, può sfuggire all'attrazione gravitazionale di un buco nero e nessuno sa come si trasforma e dove finisce la materia inghiottita da un buco nero. Questo alone di mistero che avvolge la fisica dei buchi neri ha così visto fiorire una varietà di romanzi fantastici in cui si immagina un'astronave inghiottita da un buco nero e fuoriuscire in una lontana zona del nostro universo o, addirittura, in un universo parallelo.

Lo studio della fisica dei buchi neri è materia assai complessa, che necessita di conoscenze avanzate di relatività generale e meccanica quantistica; ma è possibile a un non addetto ai lavori ricorrere a conoscenze di base di fisica per poter avere un'idea chiara di ciò che sono i buchi neri. È ciò che si intende fare con questo articolo in cui, per arrivare a

capire come si generano i buchi neri nel nostro universo concentreremo l'attenzione sulla formazione dei buchi neri stellari, ovvero su come stelle super-massicce, al termine della loro vita, evolvono trasformandosi in buchi neri.

È importante offrire una breve sintesi del processo evolutivo che compiono tali stelle, che ci permetterà di comprendere come una nube di gas a basse densità e temperatura si sia potuta trasformare in una o più stelle e come una stella super-massiccia all'estinzione del suo carburante, segua una evoluzione che la trasformerà in un in un buco nero.

Inizieremo, quindi, a dare uno sguardo ai processi fisici che permettono la nascita di una stella da una nube di gas e polveri a temperature vicine allo zero assoluto che incomincia lentamente a collassare sotto l'azione costante della forza di gravità. Poi analizzeremo il processo scatenante che fa nascere una stella: la fusione termonucleare nel suo nucleo, e cosa accade quando il combustibile necessario alla fusione si esaurisce. In particolare, osserveremo come una stella super-massiccia nel suo collasso possa trasformarsi in un buco nero, e prenderemo in considerazione tre parametri fondamentali:

- il limite di Chandrasekhar pari a $1.44 M_{\odot}$, dove M_{\odot} è la massa del Sole ($\approx 2 \times 10^{33}$ g); esso è dato dalla massa residua limite di una stella che si sta contraendo al termine della sua vita, oltre la quale la forza elettrica di repulsione tra gli elettroni non sarà in grado di contrastare la forza gravitazionale;
- il limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff pari a circa $3.8 M_{\odot}$; esso è costituito dalla la massa residua limite di

una stella che si sta contraendo al termine della sua vita, oltre la quale neanche la forza nucleare prodotta dalla degenerazione quantistica dei neutroni sarà in grado di contrastare la forza gravitazionale;

- il raggio di Schwarzschild, che è il raggio al di sotto del quale, nel processo di contrazione della stella, neanche la radiazione elettromagnetica riuscirà a sfuggire alla gravità e la stella morente si sarà trasformata in un buco nero.

Infine, a partire dai buchi neri stellari, saranno esplorate le classificazioni vigenti dei vari tipi di buco nero nell'universo analizzando sinteticamente come essi si siano formati.

2 – La nascita di una stella

La nascita di una stella può essere spiegata in maniera semplice utilizzando un famoso teorema che regola l'equilibrio energetico di un sistema di particelle in moto, enunciato per la prima volta da Clausius nel 1870: *il teorema del viriale*. Tale teorema afferma che il sistema di particelle è in equilibrio se l'energia cinetica è pari al doppio dell'energia potenziale.

$$2K + U = 0 \quad (1)$$

dove K è l'energia cinetica e U l'energia potenziale gravitazionale.

Possiamo ottenere facilmente l'equazione (1) se pensiamo ad una particella di massa m in orbita circolare a distanza r dal centro di massa M . Eguagliando la forza centripeta alla forza di attrazione gravitazionale, si ottiene:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad (2)$$

da cui

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}U \quad (3)$$

che ci fornisce la (1). La stessa soluzione si determina considerando un sistema di particelle in orbita circolare rispetto al proprio centro di massa.

Il nostro sistema di particelle è costituito da una nube di gas interstellare (prevalentemente idrogeno neutro con tracce di gas più pesanti e polveri) le cui molecole si attraggono reciprocamente e tendono a collassare per effetto della gravità verso il centro della nube. Il moto caotico delle molecole esercita una pressione verso l'esterno che si oppone al collasso della nube. Questa condizione di equilibrio è governata dall'equazione del viriale (1), dove l'energia cinetica è generata dal moto caotico delle molecole e l'energia potenziale è dovuta alla forza di gravità.

Le nubi di gas interstellare sono molto grandi, con masse di gas fino ad un milione di volte quella del Sole, e hanno temperature molto basse, da circa una decina a poche centinaia di gradi sopra lo zero assoluto.

In alcuni casi l'equilibrio energetico è rotto da interventi esterni, quali urti con altre nubi di gas o compressioni della nube causate da materiale espulso da supernovae o stelle vicine; questi interventi esterni rendono la pressione esercitata dal moto caotico delle molecole insufficiente a bilanciare l'azione della forza di gravità.

La nascita di una struttura stellare è allora assimilabile a una progressiva contrazione di una sfera di gas auto-gravitante che determina un progressivo innalzamento della

temperatura del gas. La nube comincia a collassare e a frammentarsi in nubi di dimensioni minori; ognuna di queste nubi, attraverso un meccanismo detto di Kelvin-Helmoltz, perde parte della sua energia sotto forma di radiazione e comincia a contrarsi. Metà dell'energia guadagnata dalla contrazione causa un aumento di temperatura e l'altra metà compensa le perdite radiative. Le particelle di gas si muovono più rapidamente e il nucleo si riscalda. In questa fase, che prende il nome di *protostella*, il nucleo, che ha raggiunto una temperatura tra i 2 e i 3 milioni di gradi, emette energia sotto forma di radiazione a discapito dell'energia gravitazionale. La protostella resta avvolta da un disco di gas che lentamente cade su di essa, assorbendone la radiazione emessa e riemettendola a frequenze più basse, nell'infrarosso spinto. A temperature così elevate anche gli elettroni negli stati quantici più interni si dissociano dai propri atomi e la protostella si comporrà di una miscela di particelle cariche: il *plasma*.

La contrazione della protostella continua sotto effetto della gravità, finché al suo interno la protostella non raggiunge temperature così elevate (intorno a 10^7 °K) da poter dare inizio alla sua fusione nucleare. Da questo momento in poi la protostella si è trasformata in una stella; l'energia che essa emette non è più prodotta a spese della propria energia gravitazionale, ma mediante reazioni nucleari; esse consistono nella fusione di più nuclei atomici in un nucleo solo, di massa leggermente minore rispetto alla somma delle masse dei nuclei di partenza. La massa che viene persa nel processo è quella che si trasforma in energia secondo la famosa equazione di Einstein.

La principale reazione nucleare che avviene nel nucleo di una stella, detta reazione termonucleare, è una reazione nucleare che produce nuclei di elio da nuclei di idrogeno; in stelle con massa minore di $1.5 M_{\odot}$ è eseguito un ciclo detto *catena protone-protone*. Il plasma è formato principalmente da idrogeno ionizzato H^+ ; nel primo processo della catena avviene la reazione di due protoni H^+ , che formano un nucleo di deuterio, un positrone e un neutrino, liberando 1.44 MeV di energia. Un'altra principale reazione con produzione di una enorme quantità di energia è ottenuta mediante la produzione di un nucleo di elio (particella alpha) e un neutrone dalla fusione di un nucleo di deuterio e di un nucleo di trizio.

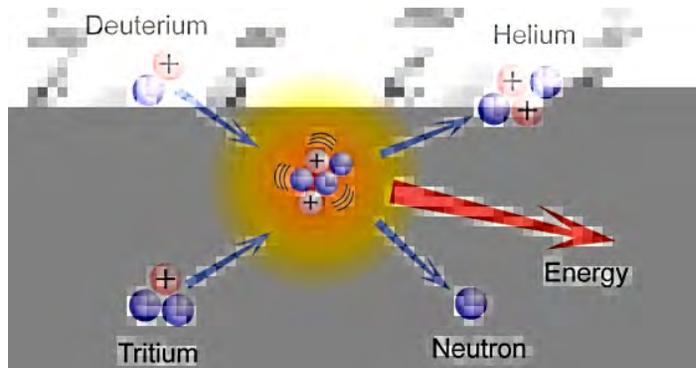


Fig. 1 - Processo di fusione termonucleare con produzione di un nucleo di elio da un nucleo di deuterio e un nucleo di trizio.

In stelle con massa superiore a $1.5 M_{\odot}$ la fusione dell'idrogeno in elio è compiuta mediante una sequenza di reazioni, nota come ciclo CNO, che sfruttano come

catalizzatori gli atomi di carbonio, azoto e ossigeno (Castellani, 1985; Salaris & Cassisi, 2005).

3 - La vita di una stella in sequenza principale

La stella ha raggiunto l'equilibrio tra la forza gravitazionale e contrastata dalla pressione di radiazione del nucleo di plasma. L'energia prodotta nel nucleo dalle reazioni termonucleari è trasportata attraverso gli strati superiori tramite irraggiamento o convezione, a seconda del gradiente di temperatura e dell'opacità; alla fine raggiunge la fotosfera, da cui è irradiata nello spazio sotto forma di energia radiante. Le stelle di sequenza principale con una massa superiore alle $1.5 M_{\odot}$ possiedono un nucleo convettivo, mentre fra il nucleo e la superficie l'energia viene trasportata per irraggiamento. Nelle stelle di massa compresa fra $1,5 M_{\odot}$ e $0,5 M_{\odot}$ avviene il contrario: esse possiedono un nucleo in cui la trasmissione dell'energia avviene per irraggiamento, mentre la convezione si innesca al di sopra del nucleo, in prossimità della superficie. Infine, le stelle di sequenza principale con massa inferiore a $0.5 M_{\odot}$ hanno un interno completamente convettivo.

Dal momento della sua nascita la stella entra in una fase chiamata *Sequenza principale*, in cui resterà fino a quando tutti i nuclei di idrogeno non saranno stati trasformati in nuclei di elio nei processi termonucleari. La sequenza principale è ben visibile nel ben noto diagramma di Hertzsprung-Russel (H-R) che mette in relazione la temperatura superficiale della stella con la sua luminosità assoluta.

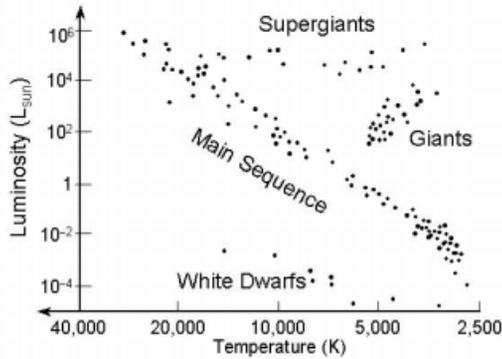


Fig. 2 - Diagramma di H-R.

Per comprendere perché le stelle appaiono di diverso colore bisogna ricorrere alla legge di Wien che stabilisce la relazione tra la temperatura di un corpo nero (un corpo ideale che assorbe tutta l'energia incidente senza rifletterla) e la lunghezza d'onda di massima intensità d'emissione dell'energia assorbita:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad b = 2.898 \times 10^{-6} \text{ K} \quad (4)$$

Approssimando la stella a un corpo nero e calcolando la temperatura superficiale della stella è possibile stimare dalla (4) la lunghezza d'onda di massima intensità emissiva della stella. Le

stelle hanno a una temperatura superficiale tra 2×10^3 e 4×10^4

°K. La classificazione spettrale delle stelle o classificazione di Harward, divide le stelle in 7 classi, O-B-A-F-G-K-M. Ad ogni classe spettrale è associato un intervallo di temperatura

superficiale e un colore corrispondente alla lunghezza d'onda della massima intensità emissiva. Ogni classe è divisa in 10 sottoclassi, da 0 a 9. La tabella successiva riporta la temperatura media, il colore e il colore apparente delle stelle, nonché la loro massa, raggio e luminosità complessiva per le stelle in sequenza principale.

Class	Temperatura ^[16] (Kelvin)	Colore convenzionale	Colore apparente ^{[17][18][9]}	Massa ^[10] (masse solari)	raggio ^[10] (raggi solari)	Luminosità ^[10] (bolometrica)
O	≥ 33 000 K	blu	blu	≥ 16 M _☉	≥ 6,6 R _☉	≥ 30 000 L _☉
B	10 000–33 000 K	azzurro	blu chiaro	2,1–16 M _☉	1,8–6,6 R _☉	25–30 000 L _☉
A	7 500–10 000 K	bianco	azzurro	1,4–2,1 M _☉	1,4–1,8 R _☉	5–25 L _☉
F	6 000–7 500 K	bianco-giallo	bianco	1,04–1,4 M _☉	1,15–1,4 R _☉	1,5–5 L _☉
G	5 200–6 000 K	giallo	bianco-giallo	0,8–1,04 M _☉	0,96–1,15 R _☉	0,6–1,5 L _☉
K	3 700–5 200 K	arancione	giallo-arancione	0,45–0,8 M _☉	0,7–0,96 R _☉	0,08–0,6 L _☉
M	≤ 3 700 K	rosso	arancio-rosso	0,08–0,45 M _☉	≤ 0,7 R _☉	≤ 0,08 L _☉

Tab. 1 - Caratteristiche delle stelle di diversa classe in sequenza principale.

Le stelle più calde sono quelle della classe O; esse hanno una temperatura superficiale superiore a 3.3×10^4 °K e una intensità emissiva della radiazione elettromagnetica con picco nel blu. Il Sole è una stella di classe G2 con temperatura superficiale pari a 5.5×10^3 °K, cui è associato un colore convenzionale giallo.

La massa M e la luminosità L di una stella possono essere messe in relazione dalla legge di potenza:

$$L \sim M^{3.5} \quad (5)$$

Più la stella è massiccia, minore è il tempo in cui permane nella sequenza principale; ciò perché, maggiore è la sua massa, maggiore è la rapidità dei processi termonucleari

necessari a contrastare la gravità ed evitare il collasso della stella.

Se $m=M/M_{\odot}$ è la massa della stella rispetto alla massa del sole, allora il tempo τ_S in cui la stella rimane in sequenza principale è:

$$\tau_S \sim \frac{1}{m^{2.5}} 10^{10} \quad \text{anni} \quad (6)$$

Quindi, ad esempio, stelle rosse di massa minore di $0.1 M_{\odot}$ restano in sequenza principale per un periodo superiore a 10^{12} anni, ben superiore all'attuale età dell'universo. Il Sole, che ha una età di circa 4.5 miliardi di anni, è a circa metà del suo ciclo in sequenza principale, mentre una stella appena nata con massa pari a $0.1 M_{\odot}$ resterà in sequenza principale soltanto una trentina di milioni di anni.

Ciò significa che tutte le stelle meno massicce con massa minore di $0.1 M_{\odot}$ dalla loro nascita sono sempre rimaste in sequenza principale, mentre stelle molto massicce già dopo qualche milione di anni dalla nascita bruciano tutto il loro combustibile e lasciano la sequenza principale (Castellani, 1985; Salaris & Cassisi, 2005; Carroll & Ostile, 2017).

4 - Stadi finali di vita di una stella

Dopo che il quantitativo di idrogeno nel nucleo si è completamente convertito in elio, la stella esce dalla sequenza principale, seguendo differenti tragitti a seconda della sua massa.

Se la massa della stella ha una massa superiore a $0.2 M_{\odot}$ e inferiore a $8 M_{\odot}$ il suo nucleo continua a contrarsi compiendo

la fusione dei nuclei di elio, mentre la parte esterna della stella si espande fino ad un raggio di 10^8 km. A causa della sua espansione la stella si raffredda e diventando così una gigante rossa. Quando il nucleo della stella avrà bruciato tutto l'elio, fino ad arrivare a bruciare nuclei di carbonio, gli strati esterni arriveranno a collassare e la forza gravitazionale, non più bilanciata dalla forza di espansione termonucleare, contrae la stella, che emette gli strati gassosi più esterni. Tali strati gassosi, nelle stelle meno massicce formano un vento stellare, per stelle di massa maggiore formano una nebulosa planetaria attorno alla stella.

La massa residua della stella sarà inferiore ad una massa limite detta limite di Chandrasekhar e denotata col simbolo M_{CH} , dove:

$$M_{CH} = 1.44M_{\odot} \quad (7)$$

La fase di contrazione termina quando la forza di gravità è bilanciata dalla forza di repulsione elettromagnetica degli elettroni. La stella si troverà in una configurazione detta degenere, ossia ad elevata densità, in cui la pressione del gas segue la distribuzione di Fermi-Dirac, non più la distribuzione classica di Maxwell-Boltzmann; la stella si sarà trasformata in una nana bianca, con un raggio circa uguale a quello terrestre, una elevata densità (circa 10^6 kg/m³) e una elevata temperatura (circa 10^8 °K).

Nelle stelle con massa maggiore di $8 M_{\odot}$, al termine del processo di fusione nucleare degli elementi pesanti la stella comincerà a contrarsi e le forze di repulsione elettromagnetica che determinano la pressione degli elettroni verso l'esterno

non saranno in grado di bilanciare la forza di gravità. La stella continuerà a contrarsi e l'urto tra protoni e elettroni liberi darà luogo a neutroni che riempiranno in maniera sempre crescente la materia degenere della stella. L'onda d'urto generata dal collasso della stella produrrà una esplosione, che per stelle molto massicce, sarà estremamente violenta e di enorme potenza: l'esplosione di una supernova. Essa libererà una tale quantità di energia da consentire anche la nucleosintesi di elementi molto pesanti, quali il magnesio e l'oro.

Il nucleo della stella avrà una massa residua maggiore del limite di Chandrasekhar M_{CH} ; esso sarà costituito da materia degenere formata da neutroni ad elevatissima densità, circa 10^{14} g/cm³, il neutronio. La pressione del gas di neutroni riuscirà a bilanciare la forza gravitazionale se la massa residua della stella sarà inferiore a una ulteriore massa limite detta Tolman-Oppenheimer-Volkoff M_{TOV} , dato da:

$$M_{TOV} = 3.8M_{\odot} \quad (8)$$

Se, invece, la massa residua del nucleo è inferiore al limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff M_{TOV} , la pressione del gas di neutroni contrasterà la forza gravitazionale e la stella si stabilizzerà, formando una stella di neutroni, elettricamente neutra e della dimensione di qualche chilometro. A causa della sua densità elevatissima la stella di neutroni possiede un campo gravitazionale enorme, circa 10^{11} volte quello della Terra ed un intenso campo magnetico generato dagli elettroni allontanati dalla stella che ruotano intorno ad essa ad elevata velocità, formando sorgenti di raggi X e gamma chiamate Pulsar.

Se la massa residua della stella è superiore al limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff M_{TOV} nessuna forza sarà in grado di contrastare il collasso gravitazionale ed il nucleo collassa fino a raggiungere dimensioni inferiori ad un raggio limite detto *raggio di Schwarzschild*.

Il raggio di Schwarzschild r_s rappresenta il raggio limite di un oggetto sferico dotato di una massa M che si contrae; raggiunto tale raggio l'oggetto dà origine all'orizzonte degli eventi; se l'oggetto si contrae ulteriormente assumendo un raggio minore di r_s neanche la radiazione elettromagnetica riuscirà a sfuggire al campo gravitazionale e si origina così un buco nero. La materia costituente il buco nero si trova in un particolare stato, altamente degenere, che i fisici non sono ancora riusciti a trattare.

L'espressione matematica del raggio di Schwarzschild può essere ottenuta anche senza ricorrere al complesso formalismo matematico della relatività generale, cercando il raggio di un corpo di massa M per il quale la velocità di fuga sia pari alla velocità della luce. Nell'approssimazione classica è possibile determinare il raggio di Schwarzschild eguagliando energia cinetica e gravitazionale per un corpo di massa m con velocità pari alla velocità c della luce soggetto al campo gravitazionale generato da un corpo massiccio di massa M .

Supponiamo che la velocità della luce c sia la velocità di fuga dal corpo M di raggio r_s . Otteniamo, per le espressioni di energia cinetica ed energia potenziale:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mc^2 \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_s^2} \quad (10)$$

avendo posto $v = c$ e $r = r_s$. Ponendo $K = U$, si ottiene per r_s :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (11)$$

Per la Terra si ottiene $r_s = 8.87 \times 10^{-3}$ m., il che significa che se la Terra avesse un raggio minore di 10 mm, e quindi, una densità di circa 2×10^{27} g, allora neanche la luce potrebbe sfuggire al campo gravitazionale terrestre.

Per una stella che, al suo collasso, avrà una massa residua pari al limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff M_{TOV} si ottiene $r_s = 1.12 \times 10^4$ m, circa 11 km. Quando, nel suo collasso, la stella si sarà ridotta ad una sfera di raggio pari a 11 km, neanche la radiazione elettromagnetica potrà sfuggire alla sua attrazione gravitazionale e la stella sarà diventata un buco nero stellare (Carroll & Ostlie, 2017).

5 - I buchi neri e la loro classificazione

Dopo aver compreso come si origina un buco nero stellare, siamo in grado di comporre un quadro sulle tipologie di buchi neri che sono presenti nel nostro universo o è possibile ipotizzarne la presenza.

In primo luogo, come detto in precedenza, con le conoscenze attuali non è possibile riuscire a dare un quadro completo della fisica di un buco nero. Un risultato teorico relativistico raggiunto grazie agli sforzi di vari cosmologi e fisici teorici, tra cui Stephen Hawking e Roger Penrose, è il *teorema dell'essenzialità* o *teorema della calvizie*, in inglese *no hair*

theorem (Straumann, 2004) che afferma che sono solo tre le caratteristiche osservabili di un buco nero da parte un osservatore esterno: massa, carica elettrica e momento angolare; tutte le altre informazioni che si riferiscono alle caratteristiche del buco nero o degli oggetti che ne sono risucchiati sono oscurate dietro il suo orizzonte degli eventi e inaccessibili a un osservatore esterno. Pertanto, non è possibile distinguere due buchi neri aventi stessa massa, carica e momento angolare. Inoltre, quando un oggetto è catturato da un buco nero, ogni sua caratteristica risulterà persa per l'osservatore esterno. Il nome di questo importante teorema è dovuto al fisico statunitense John Archibald Wheeler, che affermò che: "*a black hole has no hair*", volendo sottolineare che le informazioni di un buco nero sono perse come i capelli in una calvizie.

Poiché un buco nero non dispone di una specifica carica elettrica propria, le uniche informazione che ci permettono di classificare un buco nero sono la sua massa e il suo momento angolare di rotazione attorno a un asse o spin.

In questo paragrafo daremo un quadro dei tipi di classificazione di un buco nero costruite in base alle informazioni rilevabili.

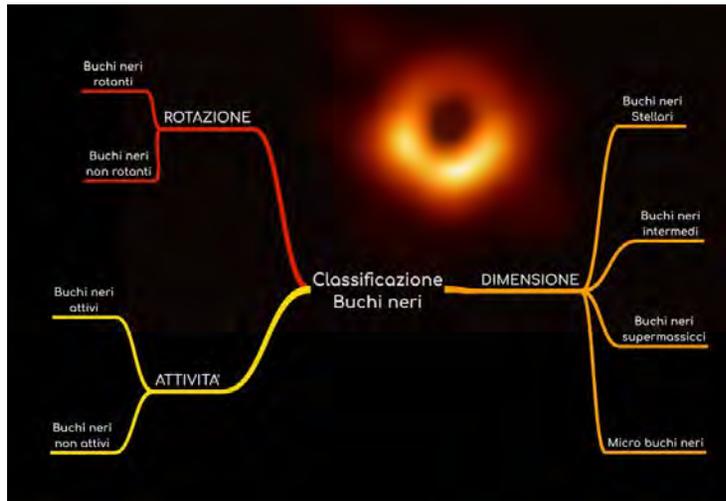


Fig. 3 - Tipologie di classificazione di un buco nero.

Dalla caratteristica relativa alla massa di un buco nero è possibile classificare i buchi neri in tre tipologie:

Buchi neri stellari: essi, come raccontato nelle sezioni precedenti, sono stelle che, al termine della loro evoluzione di massa residua superiore al limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff, sono collassate fino ad oltre il proprio raggio di Schwarzschild. I buchi neri stellari hanno generalmente una massa mediamente inclusa tra le $5 M_{\odot}$ e $20 M_{\odot}$ ed una estensione minore di 20 km di raggio. Essi possono essere localizzati sia in regioni dense e centrali di galassie che in regioni periferiche. Recentemente sono stati scoperti diversi buchi neri stellari nella nostra galassia e in galassie vicine. In molti casi tali scoperte sono compiute grazie alla forte emissione nella banda X dello spettro elettromagnetico di stelle compagne cui il buco nero sottrae materia che forma un

disco di accrescimento che, surriscaldandosi, emette raggi X. Il più noto buco nero rilevato nella via Lattea è Cygnus X1, un buco nero di massa pari all'incirca a $15 M_{\odot}$ situato nella costellazione del Cigno e legato gravitazionalmente ad una stella supergigante blu. Si ritiene che Cygnus X1 abbia circa 5 milioni di anni e che sia stata una stella gigante con una massa di oltre $40 M_{\odot}$ prima di terminare la sua evoluzione in sequenza principale.



Fig. 4 - Il sistema binario con il buco nero Cygnus X1.

Un'importante evidenza della presenza di buchi neri stellari è stata riscontrata dagli interferometri LIGO e Virgo che rilevano la presenza di onde gravitazionali prodotti da collisioni di oggetti stellari massicci. L'11 febbraio 2016, la

LIGO Scientific Collaboration e la Virgo Collaboration pubblicarono un articolo sulla prima osservazione diretta di onde gravitazionali, costituita da un segnale distinto il 14 settembre 2015, che correla perfettamente con il segnale prodotto da un'onda gravitazionale predetta dalla relatività generale dalla rotazione di due buchi neri aventi $\sim 30 M_{\odot}$ che si fondono tra loro a circa 1,3 miliardi di anni-luce dalla Terra (Abbott et al, 2016).

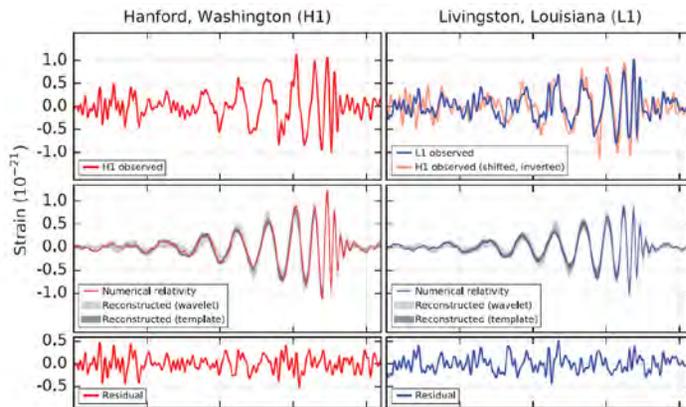


Fig. 5 - Segnale rilevato dai due interferometri LIGO nel 2015 confrontato con quello predetto dalla relatività generale

Buchi neri super-massicci: essi sono oggetti di massa superiore a 150 masse solari, generalmente relegati nei centri galattici dove le densità stellari sono molto elevate e un buco nero riesce con facilità a risucchiare masse stellari e nubi di gas in gran quantità accrescendo la propria massa. Infatti, il modello più accreditato di formazione di un buco nero super-massiccio è quello che prevede l'accrescimento graduale di

gas e polveri da parte di un buco nero formatisi al termine dell'evoluzione di una stella.

La prova dell'esistenza dei buchi neri super-massicci è il buco nero super-massiccio Sagittarius A nel centro della Via Lattea la cui massa è superiore a $2.5 \times 10^6 M_{\odot}$.

I buchi neri super-massicci si sono formati in epoche remote e hanno avuto il tempo per l'accrescimento continuo delle loro masse inglobando stelle gas e polveri nelle aree dense dei centri galattici.

È ormai ritenuto molto probabile che al centro della maggior parte delle galassie si trovi un buco nero super-massiccio. Infatti, è stata riscontrata sperimentalmente una stretta correlazione tra la dispersione delle velocità stellari in un nucleo galattico (il buldge) e la massa M del buco nero nel suo centro; essa è nota come relazione M - σ , essendo σ la dispersione di velocità delle stelle nel buldge, suggerisce che la formazione della galassia e del buco nero al suo centro siano tra loro collegate. Possiamo immaginare che questa relazione sia dovuta al fatto che più è forte il campo gravitazionale attorno ad esse, maggiore è l'energia cinetica rotazionale delle stelle e maggiore sarà, quindi, la dispersione delle loro velocità.

In recenti lavori basati su osservazioni compiute su diversi buldge galattici (Kormendy & Ho, 2013; Davies et al, 2017) è stata stimata la seguente formula empirica tra la massa del buco nero super-massiccio al centro di una galassia e la dispersione di velocità delle stelle nel buldge:

$$\frac{M}{M_{\odot}} \approx 1.9 \times 10^{-8} \left(\frac{\sigma}{200} \right)^{5.1} \quad (12)$$

Anche se una spiegazione dettagliata della correlazione tra i due eventi non è ancora stata fornita, si tende a ritenere che questa suggerisce che il buco nero e la sua galassia ospitante si siano sviluppati insieme, sebbene i modelli proposti divergano sul fatto che sia stato il buco nero a innescare la formazione della galassia o viceversa.

La vicina Galassia di Andromeda, sita a 2,5 milioni di anni luce da noi, ospita nel suo centro un buco nero avente una massa compresa tra $1,1 \times 10^8$ e $2,3 \times 10^8$ masse solari, ben superiore a quella del buco nero centrale della Via Lattea. Il maggior buco nero super-massiccio nelle nostre vicinanze sembra essere quello della galassia ellittica M87, distante 53,5 milioni di anni luce, la cui massa è stimata in $(6,4 \pm 0,5) \times 10^9$ masse solari.

L'interferometro spaziale rilevatore di onde gravitazionali LISA, in fase di progettazione e il cui lancio è previsto nel 2034, permetterà di rilevare onde gravitazionali con frequenze molto basse, tra 10^{-4} Hz e 1 Hz., che, da quanto previsto dalla relatività generale, corrispondono a quelle prodotte dal merging di buchi neri super-massicci. Grazie all'interferometro spaziale LISA sarà possibile, allora, rilevare fenomeni di collisione tra buchi neri super-massicci.

Buchi neri intermedi: essi sono buchi neri di massa superiore a $10^2 M_{\odot}$ ma non superiore a $10^6 M_{\odot}$ che, a differenza dei buchi neri super-massicci, si sono formati in zone galattiche periferiche, quali, ad esempio, ammassi globulari o in epoche più recenti e non hanno avuto ancora il

tempo per un accrescimento della loro massa fino a quella di un buco nero super-massiccio.

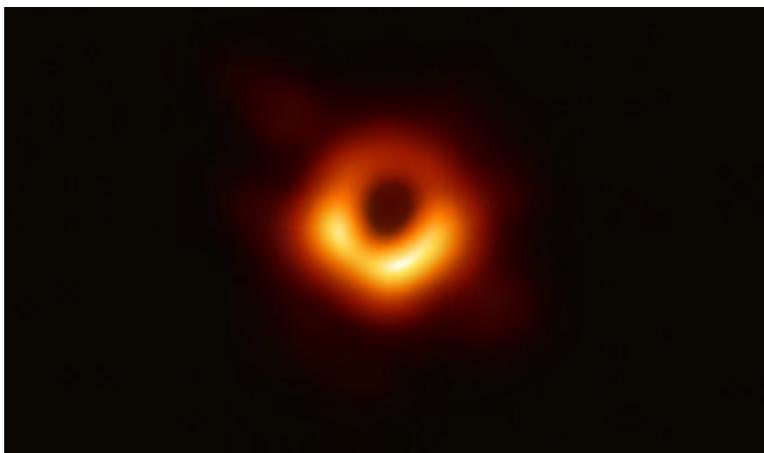


Fig. 6 - Buco nero super-massiccio nel centro della galassia ellittica M87.

I buchi neri intermedi rilevati sono più rari rispetto a quelli stellari e super-massicci. Recentemente, da una analisi di picchi di luminosità nello spettro di emissione nella banda X, è stato rilevato un buco nero intermedio in un ammasso globulare di una galassia lenticolare (Lin et al., 218). Gli autori ritengono che sia possibile che esistano molti buchi neri intermedi nelle zone periferiche delle galassie, e che il residuo numero di buchi neri intermedi finora rilevati sia dovuto alla difficoltà di rilevarli rispetto ai buchi neri super-massicci.

Buchi neri primordiali: sono buchi neri di massa molto piccola e raggio di Schwarzschild minore di 1 nm. Si ritiene si siano formati all'epoca del Big Bang, in condizione di estrema densità della materia. Sono stati teorizzati dall'astrofisico

Stefen Hawking che mostrò teoricamente che, a causa di fenomeni quantistici, i buchi neri debbano emettere una radiazione termica, detta, radiazione di Hawking che li fa evaporare nel tempo fino a farli esplodere con una forte emissione di radiazioni. Secondo questa teoria il tempo di evaporazione completa di un buco nero di massa M è (Hawking, 1975):

$$t_{ev} = 1.02 \times 10^4 \frac{\pi^2 G^2 M^3}{hc^4} \quad (13)$$

dove h è la costante di Plank e G la costante di gravitazione universale. Buchi neri primordiali di massa pari a 10^{12} Kg, formatesi a temperature molto elevate durante il Big Bang, dovrebbero completamente evaporare ed esplodere in circa 10^{10} anni, corrispondente all'età dell'universo; buchi neri primordiali di massa maggiore esploderanno in tempi più lunghi, ma dovrebbero continuare ad emettere radiazione di Hawking, che dovremmo riuscire a rilevare. Secondo Hawking i buchi neri primordiali costituiscono gran parte della materia oscura nel nostro universo, ma altri studi affermano che essi, ove esistessero, possono contribuire a formare non più del 10% della materia oscura nell'universo. Attualmente ancora non si è ancora riusciti a rilevare la radiazione di evaporazione di buchi neri primordiali.

Una ulteriore classificazione dei buchi neri è data dall'analisi dell'altra caratteristica misurabile, il loro momento angolare di spin. Secondo questa classificazione i buchi neri sono divisibili in:

Buchi neri rotanti: essi sono chiamati anche *buchi neri di Kerr* se sono privi di carica o *buchi neri di Kerr-Newman* se la loro carica complessiva è diversa da zero. I buchi neri rotanti ruotano su sé stessi attorno ad un asse, conservando il momento angolare della stella che li ha generati al termine della sua evoluzione. Poiché essi hanno una massa e un raggio inferiori alla massa e al raggio della stella che li ha generati, affinché il momento angolare si conservi è necessario che la velocità del buco nero sia molto elevata.

I buchi neri rotanti sono caratterizzati dalla presenza di una zona dello spazio tempo di forma ellissoidale distorta dalla rotazione del buco nero chiamata *ergosfera*. Ogni oggetto che è inglobato nell'ergosfera tenderà a ruotare seguendo la rotazione del buco nero. L'ergosfera coincide con il centro degli eventi e lo interseca nei poli; maggiore è la velocità di rotazione del buco nero più l'ergosfera, tenderà a coincidere con l'orizzonte degli eventi.

Buchi neri non rotanti: essi sono detti anche *buchi neri di Schwarzschild*, se sono privi di carica, o *buchi neri di Reissner-Nordström*, se la loro carica complessiva è diversa da zero. La loro caratteristica è di non avere alcun movimento rotatorio attorno a un asse. Non è ben chiaro come possano formarsi buchi neri non rotanti giacché tutte le stelle hanno uno spin e quindi anche ogni buco nero da esse generato. Un possibile modello di generazione di buchi neri non rotanti è detto processo di Penrose (Penrose & Floyd, 1975), teorizzato da Roger Penrose, afferma che è possibile sottrarre energia rotazionale a un buco nero rotante, se essa è localizzata al

difuori dello spazio degli eventi, nell'ergosfera. Ad oggi non sono stati ancora osservati buchi neri non rotanti.

Una ultima classificazione dei buchi neri è basata sul riscontro della presenza o meno di attività da parte del buco nero. Tale classificazione divide i buchi neri in:

Buchi neri attivi: essi sono buchi neri che in questo momento stanno interagendo con la materia circostante composta di stelle, gas o polveri, attirandola verso il proprio orizzonte degli eventi.

Quando la materia entra nel buco nero, lo fa ad una velocità altissima. Essa si surriscalda emettendo radiazioni in tutto lo spettro visibile.

Questo fenomeno permette di osservare anche nello spettro visibile la regione attorno al buco nero; in alcuni casi la radiazione emessa dalla materia surriscaldata rende i buchi neri molto luminosi in diverse zone dello spettro elettromagnetico, come si osserva in radiosorgenti e quasar.

Buchi neri non attivi: essi, al contrario dei buchi neri attivi, non stanno inglobando materia e non sono quindi rilevabili in quanto non emettono forme di radiazione. Possiamo rilevare la presenza di un buco nero attivo solo mediante lo studio del moto di stelle vicine distorto dal campo gravitazionale del buco nero. In questo modo sono stati scoperti una serie di buchi neri non attivi nella nostra galassia, quali QVTelAb nel sistema stellare HR6819 e A0620-00 nella costellazione Monoceros.

6 - Conclusioni

In questo articolo abbiamo cercato di comprendere cosa sia un buco nero senza fare riferimento alle teorie e agli approcci matematici complessi di vari campi della fisica moderna. A partire dallo studio dell'evoluzione di una stella, in questo articolo abbiamo analizzato come si originano i buchi neri stellari al termine della vita di una stella supergigante. Se la massa restante di una stella morente supera il limite di Chandrasekhar di $1.44 M_{\odot}$, essa degenera in una stella di neutroni, ma se tale massa superasse il limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff di $3.8 M_{\odot}$, la stella continua a contrarsi fino ridursi in una sfera di raggio minore del raggio di Schwarzschild, trasformandosi in un buco nero stellare.

In Sezione 4 sono stati discussi i diversi tipi di classificazione di un buco nero compiuti mediante l'analisi delle caratteristiche osservabili.

La fisica dei buchi neri resta un campo apertissimo; probabilmente solo nuove rilevazioni e nuove scoperte permetteranno di confermare l'esattezza di modelli proposti nella recente letteratura o di produrre modelli alternativi.

Bibliografia

Abbott B., P. et al. (2016). LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letter* 116, 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

Carroll B. V., Ostlie D. A. (2017). *Modern Astrophysics*. Cambridge: University Press; 2° edition. 1359 pp, ISBN: 978-1108422161.

Castellani V. (1985). *Astrofisica Stellare*. Bologna: Zanichelli. ISBN: 978-8808060402.

Davis B. L., Graham A. W., Seigar M. S. (2017). Updating the (supermassive black hole mass)-(spiral arm pitch angle) relation: a strong correlation for galaxies with pseudobulges. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(2), 2187–2203. DOI: 10.1093/mnras/stx1794.

Hawking S., W. (1975). Particle creation by Black Holes. *Comm. Math. Phys.* 43(3), 199–220. DOI: 10.1007/BF02345020.

Kormendy J., Ho L. C. (2013). Coevolution (Or Not) of Supermassive Black Holes and Host Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 51(1), 511–653. DOI: 10.1146/annurev-astro-082708-101811.

Lin D., Strader S., Carrasco E. R. et al. (2018). A luminous X-ray outburst from an intermediate-mass black hole in an off-centre star cluster. *Nature Astronomy*, 2, 656–661. DOI:10.1038/s4155001804931.

Penrose R., Floyd R. M. (1971). Extraction of Rotational Energy from a Black Hole. *Nature Physical Science* 229, 177. DOI:10.1038/physci229177a0.

Salaris M., Cassisi S. (2005). *Evolution of Stars and Stellar Populations*, Ed. John Wiley & sons. 394 pp, ISBN: 978-0470092200.

Straumann N. (2004). *General Relativity with application to Astrophysics*, Ed. Springer. 692 pp, ISBN: 978-3642060137.

Il valore della scienza secondo Richard Phillips Feynman

«La conoscenza scientifica è il potere di fare il bene o il male, ma non contiene istruzioni sul modo di usarla. È un potere il cui valore è ovvio, anche se può essere smentito da ciò che ne facciamo.

Un altro pregio della scienza è quella forma di divertimento, chiamato piacere intellettuale, che essa procura a chi ne legge, la impara, ci pensa e a quelli che ci lavorano.

Non vorrei però sminuire il valore della visione del mondo che scaturisce dal lavoro scientifico. Essa ci ha portati a immaginare cose infinitamente più affascinanti delle fantasie dei poeti e sognatori del passato. Ciò dimostra che la fantasia della natura supera di gran lunga quella dell'uomo.

Vorrei parlarvi di un terzo valore della scienza. Quando uno scienziato non sa la risposta a un problema, è ignorante; quando ha una vaga idea della possibile soluzione, è incerto; e quando, dannazione, è sicuro del risultato, ha ancora qualche dubbio. Abbiamo scoperto che per poter progredire è fondamentale riconoscere la nostra ignoranza e lasciare spazio al dubbio. La conoscenza scientifica è un insieme di affermazioni il cui grado di certezza è variabile: di alcune non siamo affatto sicuri, altre sono quasi certe, nessuna lo è assolutamente. La nostra libertà di dubitare è nata da una lotta contro l'autorità, agli albori della scienza».

(Da Richard Phillips Feynman, *Il piacere di scoprire*, Milano: Adelphi, 2002, pp. 151-160)

Screenshot dell'effetto Doppler

Francesco di Paola Bruno*

* Liceo Scientifico Statale "F. Severi" – Castellammare di Stabia (NA);
effe.bruno@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n2.046

Sunto: Viene descritta un'attività didattica svolta in una classe quarta di liceo scientifico, nata dall'esigenza pratica di generare dinamicamente a livello informatico un'immagine digitale che illustra l'effetto Doppler. L'uso della trigonometria, consente di generalizzare la classica formula presentata nei testi di fisica del liceo e valida per alcuni casi particolari, mostrando interessanti e inaspettati risultati. Infine viene presentato un semplice programma di esempio che, utilizzando la formula trovata, permette di creare l'immagine cercata.

Parole Chiave: Doppler, trigonometria, computer grafica, Python

Abstract: Here is a teaching activity performed in a fourth-year class of scientific high school; this activity arose from the practical necessity to create a digital image by dynamic computing, describing the Doppler effect. The use of trigonometry allows to generalize the classical formula shown in high school physics textbooks, which is valid in some particular cases, and this brought us to interesting and unexpected results. Finally, a simple example program is presented, which allows to generate the image we looked for, by using the formula we found.

Keywords: Doppler, trigonometry, computer graphics, Python

1 - Introduzione

Con la mia quarta di liceo scientifico opzione scienze applicate stavamo trattando l'effetto Doppler e il collega di Informatica aveva colto l'occasione per far realizzare ai ragazzi dei programmi sull'elaborazione dei dati relativi a tale effetto. Fu così che un alunno, avendo avuto l'idea di aggiungere al suo programma anche la visualizzazione grafica della situazione fisica, mi chiese come poter fare per generare in maniera dinamica, di volta in volta in base ai dati forniti, l'immagine che alcuni libri e vari siti web proponevano [1].



Fig. 1 - Visualizzazione grafica dell'effetto Doppler

Dico subito che per l'immagine di figura 1 non occorrono citazioni e riferimenti a copyright perché non è tratta da pubblicazioni ma è una delle tante generate come risultato del presente lavoro.

Il problema, molto semplice e chiaro nella sua formulazione, richiedeva un minimo di studio che andava oltre la stereotipata trattazione fatta da tutti i testi di Fisica per il liceo, dove è presentata la classica ambulanza che, a sirene spiegate, procede dritto verso lo stoico osservatore il quale,

per amore della Fisica, aspetta fermo in mezzo alla strada per poi riapparire, qualche istante dopo, alle spalle dell'ambulanza in allontanamento. A conclusione di tale "esperimento", l'osservatore forse potrebbe raccontare che in fase di avvicinamento aveva udito la sirena emettere un suono con una certa frequenza, diventata poi percettibilmente più bassa in fase di allontanamento, secondo la classica formula con doppio segno relativa al caso di sorgente in movimento con osservatore fermo:

$$f = \frac{v_0}{v_0 \pm v} f^*$$

dove f^* è la frequenza propria emessa dalla sorgente in movimento con velocità v , f è la frequenza percepita dall'osservatore fermo, v_0 è la velocità del suono. Va poi scelto il segno - se la sorgente è in avvicinamento oppure il segno + se la sorgente è in allontanamento.

Si trattava di estendere la formula, data per i due casi particolari, al caso generale in cui l'osservatore può stare in una qualsiasi posizione intorno alla sorgente sonora, ossia su di una generica semiretta formante un angolo α con la direzione del suo moto, come è più normale che sia, visto che in genere l'osservatore magari sta sul marciapiedi e quindi rileva il fenomeno lateralmente al passaggio dell'ambulanza.

2 - Analisi del problema

La questione posta, si configura come un "problema di realtà", effettivamente "reale" rispetto a tanti che spesso artificialmente vengono creati. È intrigante come talvolta sia

difficile rispondere al volo senza rischiare di fare affermazioni errate. Infatti, intersecando una semiretta con la successione di circonferenze, di centro e raggio diversi, rappresentanti i fronti d'onda successivi, oltre a non essere immediato trovare la lunghezza d'onda cercata, diventa addirittura difficile anche stabilire solo se la distanza tra due punti consecutivi sia costante. D'altra parte, ipotizzando che l'osservatore corra sul marciapiedi di fianco all'ambulanza, alla sua stessa velocità e formando con essa un certo angolo costante, da un punto di vista fisico, non c'è motivo di pensare che venga percepita una lunghezza d'onda e quindi una frequenza variabili nel tempo. Quindi, almeno intuitivamente, c'è da aspettarsi che le varie circonferenze intercettino sulla semiretta dei punti equidistanti.

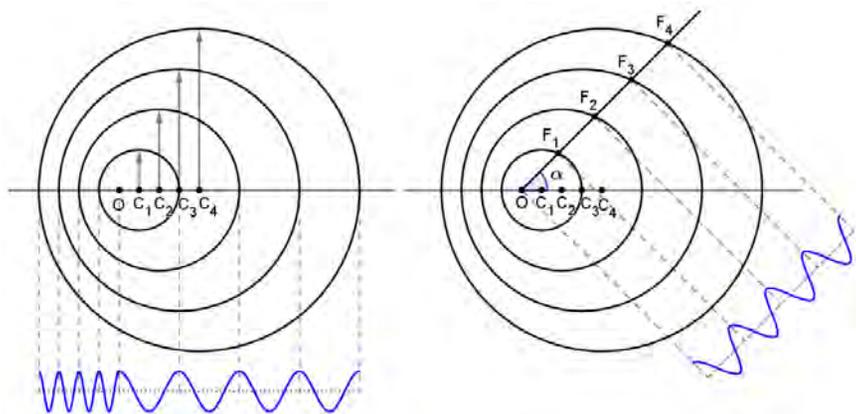


Fig. 2 - Modello geometrico dei fronti d'onda con lunghezze d'onda percepite davanti e dietro alla sorgente in movimento (fig. sinistra) e lungo una generica direzione (fig. destra)

In figura 2 sono rappresentati, mediante circonferenze, i fronti d'onda emessi, in successione con periodo temporale T

e quindi con frequenza propria $f^* = 1/T$, da una sorgente puntiforme che si sta muovendo verso sinistra a velocità costante v e che nell'istante t_0 , in cui "fotografiamo" l'effetto, occupa la posizione O . Chiaramente T secondi prima occupava la posizione C_1 , T secondi ancora prima occupava la posizione C_2 e in generale, andando a ritroso nel tempo, all'istante $t_0 - nT$ occupava la posizione C_n . Posto che sia v_0 la velocità di propagazione del suono, al tempo t_0 il fronte d'onda emesso quando la sorgente stava in C_1 avrà raggio v_0T , quello emesso quando stava in C_2 avrà raggio $2v_0T$ e così via; quindi la generica circonferenza di centro C_n rappresenta il fronte d'onda emesso nT secondi prima di t_0 e ha raggio nv_0T .

Nel seguito considereremo sempre:

$$v < v_0$$

cioè sorgenti sonore con velocità inferiore a quella del suono.

In figura 2 sono anche mostrate le lunghezze d'onda percepite in avvicinamento, in allontanamento e lungo una direzione generica con origine in O .

Il nostro scopo è determinare appunto la lunghezza d'onda $\lambda(\alpha)$, percepita lungo la semiretta che forma l'angolo α con la direzione del moto della sorgente, con $0 \leq \alpha \leq \pi$.

La figura 3 mostra come i punti O, F_1, F_2, F_3, \dots in cui la semiretta citata interseca i fronti d'onda, sono posizionati in relazione alle velocità v_0 e v , rispettivamente del suono e della sorgente.

Ora è facile rispondere alla questione posta all'inizio sull'equidistanziamento dei punti F_n , in quanto tutti i triangoli OC_nF_n sono simili tra loro. Essi hanno i due lati C_nF_n e OC_n in proporzione con rapporto v_0/v , hanno l'angolo α di vertice O in comune e gli angoli β di vertici F_n tutti uguali, infatti da

$v < v_0$ segue che $\beta < \alpha$ da cui $(\pi - \beta) + \alpha > \pi$ cosa che, ricavando $\sin \beta$ col teorema dei seni, rende accettabile, come unica soluzione, il solo valore β escludendo $(\pi - \beta)$.

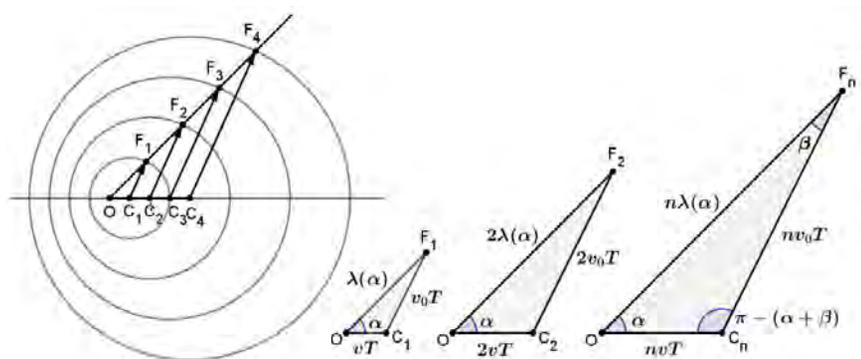


Fig. 3 - Relazione tra raggi dei fronti d'onda, spazi percorsi dalla sorgente sonora e lunghezza d'onda percepita

Quindi la lunghezza d'onda $\lambda(\alpha)$ è proprio la distanza tra due punti F_n e F_{n+1} consecutivi.

3 - Calcolo della lunghezza d'onda cercata

Per procedere al calcolo di $\lambda(\alpha)$, incominciamo col determinare seno e coseno degli angoli che ci serviranno.

Applicando il teorema dei seni al triangolo OC_1F_1 si ha:

$$\frac{\sin \beta}{v T} = \frac{\sin \alpha}{v_0 T}$$

$$\sin \beta = \frac{v}{v_0} \sin \alpha \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0} \sin \alpha\right)^2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0} \sin \alpha\right)^2} + \cos \alpha \frac{v}{v_0} \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha}{v_0} \left(\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} + v \cos \alpha \right)$$

Riapplicando il teorema dei seni al triangolo OC_1F_1 si ha:

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{v_0 T}{\sin \alpha} \quad \lambda(\alpha) = \frac{v_0 T}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\lambda(\alpha) = T \left(\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} + v \cos \alpha \right)$$

Tenendo conto che $f = v_0/\lambda$ e che $1/T = f^*$ la frequenza percepita nella direzione considerata sarà:

$$f(\alpha) = \frac{v_0}{\left(\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} + v \cos \alpha \right)} f^*$$

In particolare, con riferimento alla figura 2, se la sorgente è in avvicinamento si ha:

$$\alpha = \pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{v_0}{v_0 - v} f^*$$

Se invece la sorgente è in allontanamento si ha:

$$\alpha = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{v_0}{v_0 + v} f^*$$

Ritrovando, così, le espressioni della classica formula con doppio segno riportata all'inizio.

4 – Una curiosità controintuitiva

A questo punto sorge spontanea la curiosità di conoscere in quale direzione venga percepita la frequenza propria f^* emessa dalla sorgente, senza alcuna alterazione.

In altre parole vogliamo sapere per quale angolo α si avrà $\lambda(\alpha) = v_0/f^*$ cioè $\lambda(\alpha) = v_0T$

$$T \left(\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} + v \cos \alpha \right) = v_0T$$

$$\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} = v_0 - v \cos \alpha$$

$$(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2 = (v_0)^2 - 2v_0v \cos \alpha + (v \cos \alpha)^2$$

$$\frac{v_0}{v} \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos \alpha = \frac{v}{2v_0}$$

Tale risultato ha una ben precisa interpretazione geometrica illustrata in figura 4, dove il triangolo OC_1F_1 è isoscele.

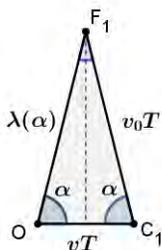


Fig. 4 - Triangolo isoscele corrispondente al caso in cui lungo la direzione OF_1 si percepisce la frequenza propria della sorgente

Inoltre questo risultato è alquanto inaspettato, perché a intuito si è tentati di dire che la frequenza propria f^* si

percepisce stando di fianco alla sorgente, perpendicolarmente alla sua direzione di movimento, cioè con $\alpha = \pi/2$.

Invece lungo tale direzione si percepisce la seguente frequenza:

$$f(\pi/2) = \frac{v_0}{\sqrt{(v_0)^2 - (v)^2}} f^*$$

Essa è diversa da quella propria f^* ma in ogni caso gode di una singolare proprietà. Rappresenta la media geometrica tra la frequenza $f(\pi)$ percepita davanti alla sorgente e la frequenza $f(0)$ percepita dietro, infatti:

$$f(\pi/2) = \sqrt{f(\pi) f(0)}$$

$$\frac{v_0}{\sqrt{(v_0)^2 - (v)^2}} f^* = \sqrt{\frac{v_0}{v_0 - v} f^* \frac{v_0}{v_0 + v} f^*}$$

Si può poi facilmente verificare che questa proprietà vale in generale per qualsiasi coppia di direzioni simmetriche rispetto alla perpendicolare al moto, cioè per qualsiasi coppia di angoli supplementari $\alpha, \pi - \alpha$.

5 - Dalla formula all'immagine

Ora non ci resta che utilizzare la formula di $\lambda(\alpha)$ per generare l'immagine di figura 1.

Consideriamo un sistema di riferimento con l'origine in O e l'asse delle ascisse orientato sui punti C_1, C_2, \dots, C_n . Un punto P del piano cartesiano di coordinate rettangolari (x, y) e coordinate polari (ρ, α) dovrà essere colorato con una tonalità

di grigio proporzionale al valore h assunto in P da un'onda armonica di lunghezza d'onda $\lambda(\alpha)$, che si propaga linearmente da O verso P.

C'è da osservare che per i punti P, corrispondenti ad angoli α tali che $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$, andrebbe ripetuto tutto il precedente procedimento, con i triangoli OC_nF_n della figura 3, capovolti simmetricamente rispetto alla direzione del moto OC_1 . Si verifica però facilmente che continuano a essere valide le formule di $\lambda(\alpha)$ e $f(\alpha)$ trovate, in quanto il termine $\sin \alpha$, che sarebbe negativo, compare al quadrato.

Tenuto conto che $\overline{OP} = \rho$ si ha:

$$h = k \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad h = k \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda(\alpha)} \rho\right)$$

Se poniamo l'ampiezza dell'onda $k = 1$ abbiamo:

$$h = \cos\left(\frac{2\pi}{T(\sqrt{(v_0)^2 - (v \sin \alpha)^2} + v \cos \alpha)} \rho\right)$$

che restituisce valori nell'intervallo $[-1, 1]$.

Con la trasformazione:

$$c = \frac{255}{2}(h + 1)$$

otteniamo invece valori c nell'intervallo $[0, 255]$ che possono essere utilizzati, a livello informatico, per impostare la tonalità con cui colorare il punto.

Riassumendo, per generare lo "screenshot" dell'effetto Doppler di figura 1, occorre fare una scansione di tutti i pixel dello schermo del dispositivo, prelevando le coordinate grafiche di ogni singolo pixel. Per ogni pixel si calcolano le

coordinate polari nel riferimento scelto di origine O e, applicando le due formule precedenti, si calcolano h e c per generare la terna RGB del colore da assegnare al pixel in esame.

6 - Programma di esempio in Python

Per sperimentare almeno in parte la soddisfazione che quello studente ha provato quando ha visto realizzato il suo desiderio, scriviamo un semplice programma. Quello riportato a titolo di esempio è scritto in *Python* e può essere eseguito sulla calcolatrice grafica *NumWorks*¹ che ha l'ambiente di programmazione *Python* con la libreria di istruzioni grafiche *Kandinsky*.

```

1 from math import *
2 from Kandinsky import *
3
4 def grafico_doppler():
5     v=150
6     v0=300
7     f=120
8     for xp in range(320):
9         x=-9+xp/319*28.82
10        for yp in range(222):
11            y=-10+yp/221*20
12            d=sqrt(x**2+y**2)
13            a=atan2(y,x)
14            lung_onda=v/f*(sqrt((v0/v)**2-sin(a)**2)+cos(a))
15            h=cos(2*pi*d/lung_onda)
16            c=255/2*(h+1)
17            colore=(c,c,c)
18            set_pixel(xp,yp,colore)

```

¹ Progetto di calcolatrice grafica open-source e open-hardware, cioè con software e schemi elettronici pubblici, programmabile in Python.

In ogni caso, in mancanza della calcolatrice fisica, è sempre possibile utilizzare liberamente il simulatore sul web [2].

Nelle linee 1 e 2 vengono richiamate le librerie di funzioni matematiche e di istruzioni grafiche.

Dalla linea 4 alla 18 viene definito il blocco di programma che sarà eseguito col comando: *grafico_doppler()*.

Nelle linee 5, 6, 7 sono assegnati i valori di v , v_0 , f .

Alla linea 8 viene definito il ciclo che scorre orizzontalmente i pixel dello schermo, con esecuzione delle istruzioni dalla linea 9 alla 10, iterativamente per xp che varia da 0 a 319.

Nella linea 9 la posizione orizzontale xp del pixel viene convertita nell'ascissa x di un punto, variabile da -9 a $+19.82$.

Alla linea 10 viene definito un altro ciclo, nidificato nel precedente, che per ogni fissato xp scorre la colonna di pixel sullo schermo, con esecuzione delle istruzioni dalla linea 11 alla 18, iterativamente con yp che varia da 0 a 221.

Nella linea 11 la posizione verticale yp del pixel viene convertita nell'ordinata y del punto, variabile da -10 a $+10$.

Nelle linee 12 e 13 vengono calcolate le coordinate polari d e a del punto a partire dalle sue coordinate rettangolari x e y .

Alla linea 14 è applicata la formula per calcolare $\lambda(\alpha)$.

Alla linea 15 è applicata la formula per calcolare h .

Alla linea 16 è applicata la formula per calcolare c .

Nella linea 17 viene costruita la terna RGB corrispondente a una tonalità di grigio dal nero (0, 0, 0) al bianco (255, 255, 255).

Alla linea 18 il colore preparato viene attribuito al pixel corrente di posizione (xp, yp) .

In esecuzione, il programma impiega alcuni secondi per creare l'immagine sull'intero schermo della calcolatrice, perché il blocco di istruzioni dalla linea 11 alla linea 18 viene eseguito $320 \times 222 = 71040$ volte per colorare ogni singolo pixel.

7 - Conclusioni

Questo lavoro, scaturito quasi per caso da un'esigenza pratica mista alla curiosità di conoscere, sembrerebbe legato alla peculiarità del liceo scientifico opzione scienze applicate per la presenza dell'informatica. Vale però la pena notare come attualmente l'elaborazione e la rappresentazione di una gamma sempre più vasta di risultati di Matematica e di Fisica siano alla portata di tutti con la diffusione capillare dell'informatica a costi irrisori grazie anche a calcolatrici grafiche o app per smartphone. La cosa ha il suo risvolto anche nei programmi d'esame dei concorsi a cattedre per Matematica dove compare l'esplicita richiesta di conoscenza da parte dei candidati, futuri docenti di Matematica, di almeno un linguaggio di programmazione.

Infine, senza entrare in spinose questioni sulle difficoltà dell'anno scolastico appena terminato e sugli indubbi vantaggi della tradizionale didattica in presenza, posso dire che quando si ha la fortuna di incontrare ragazzi ben motivati, anche con la didattica a distanza, durante il cammino, si possono trovare e raccogliere autentiche gemme preziose, che

forse in altre circostanze, ritenute più normali, non sarebbero state nemmeno notate.

Sitografia

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Effetto_Doppler

[2] <https://www.numworks.com/it>

Proprietà degli insiemi completi del IV ordine

Parte I

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v3n2.047

Sunto: *Nell'articolo: "Insiemi completi del terzo ordine" di Francia F., pubblicato sul Periodico di matematica, Vol. I(1-2), sono esposte le condizioni di completezza di un insieme ternario di punti materiali posizionati su una retta; da quello studio risulta che la completezza di un insieme ternario deriva dalle distanze intercorrenti fra i punti dell'insieme di sostegno e le relative masse. Anche nel presente articolo si ricercano le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali che, a differenza del caso precedente, sono posizionati sul piano. I risultati di questo studio sono formalmente analoghi a quelli precedentemente citati: le condizioni di completezza di un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π derivano dalla relazione intercorrente fra le masse degli elementi dell'insieme completo I e le aree dei triangoli i cui vertici sono i punti di sostegno di J.*

Parole Chiave: Insiemi di punti materiali equivalenti, Quadrato di un insieme di punti materiali.

Abstract: *In the article: "Complete sets of the third order" by Francia F., published in the Periodical of Mathematics, Vol. I(1-2), are exposed the conditions of completeness of a ternary set of material points placed on a straight line; from that study it results that the completeness of a ternary set derives from the distances between the points of the set and their masses. Also in the present paper, we search for the conditions of completeness of a set of material points*

which, unlike the previous case, are positioned on the plane. The results of this study are formally analogous to those previously mentioned: the conditions of completeness of a quaternary set containing triads of unaligned points belonging to the plane π are derived from the relation between the masses of the elements of the complete set I and the areas of the triangles whose vertices are the support points of J .

Keywords: *Equivalent sets of material points, Square of a set of material points.*

1 - Cenni sugli insiemi quaternari

Nota 1: Per rendere più agevole la lettura del presente articolo, evitando consultazioni di lavori pregressi, sono richiamati, in modo sommario, alcuni enunciati di teoremi e alcune definizioni contenute nell'articolo: "Insiemi del IV ordine appartenenti al piano".

Sia J un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano π . Siano (X,Y) e (W,Z) gli elementi di una qualsiasi partizione di J in coppie di punti; siano r e t le rette passanti, rispettivamente, per (X,Y) e (W,Z) . Fra le partizioni consideriamo quelle contenenti coppie che individuano rette r e t con intersezione H (escludiamo coppie appartenenti a rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Caso a)

Se il punto H è interno ai segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$, diciamo che i due insiemi ternari (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di $J = (X,Y,W,Z)$ sono esterni (o aderenti) (fig.1). I segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$ sono detti diagonali. Il poligono $P(J)$ è detto

quadrilatero.

Caso b)

Se H è esterno ai segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$ diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di J sono esterni (o aderenti) all'insieme (fig.2)

Anche in questo caso $P(J)$ è detto quadrilatero

Caso c)

Se H è esterno al segmento $[X,Y]$ ed interno a $[W,Z]$ (o viceversa) diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni; in particolare (X,H,Y) è detto coniugato esterno di J e (W,H,Z) è detto coniugato interno di J (o viceversa). In questo caso si dimostra che J contiene un punto interno; i rimanenti punti di J sono esterni (o aderenti) (fig.3)

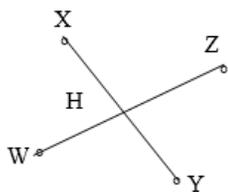


Fig.1

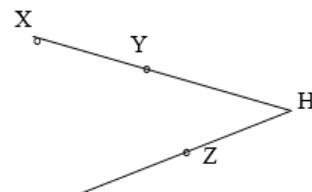


fig.2

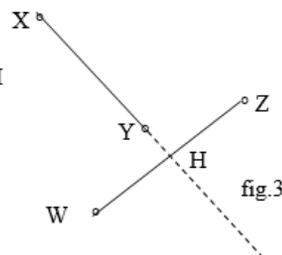


fig.3

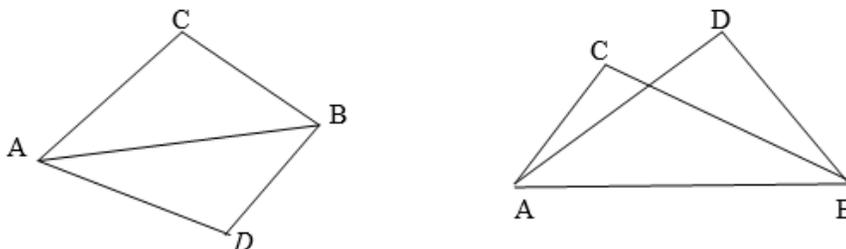
Fig.1 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni.

Fig.2 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni.

Fig.3 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni

Def.1: Sia (A, B) la coppia di punti comuni ai due insiemi ternari $J' = (A,B,C)$ e $J'' = (A,B,D)$ appartenenti al piano π . Se C e D appartengono, rispettivamente, ai semipiani opposti

individuati dalla retta r passante per A, B , allora J' e J'' sono detti adiacenti. In caso contrario sono dette non adiacenti.



Nota 2: Per procedere più speditamente nell'esposizione che segue introduciamo alcuni simboli.

Con $T(J)$ intendiamo riferirci al triangolo i cui vertici sono i punti dell'insieme $J = (A, B, C)$. Indichiamo con S_{ABC} l'area del triangolo $T(J)$. Analogamente, con $Q(J)$, intendiamo riferirci ad un quadrilatero i cui vertici sono gli elementi di $J = (A, B, C, D)$. Indichiamo con S_{ABCD} l'area del rettangolo $Q(J)$.

2 - Masse e superfici

TH.1 Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme di punti del piano π . Se (A, H, B) e (C, H, D) sono coniugati interni, allora, l'insieme $(S_{CBD} \ A, S_{DAC} \ B, -S_{BDA} \ C, -S_{ACB} \ D)$ è completo.

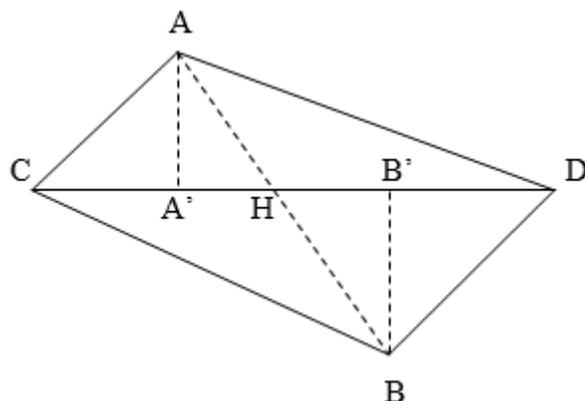
Siano A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su $[C, D]$. Posto $d(A, A') = h_1$ e $d(B, B') = h_2$, si ha: $S_{ACH} = \frac{1}{2} d(C, H) \cdot h_1$ e $S_{AHD} = \frac{1}{2} d(H, D) \cdot h_1$ da cui:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C, H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H, D)} \quad (2,1)$$

Analogamente, essendo $S_{BCH} = \frac{1}{2} d(C, H) \cdot h_2$ e

$S_{BH D} = \frac{1}{2} d(H,D) \cdot h_2$ si ha:

$$\frac{S_{BCH}}{d(C,H)} = \frac{S_{BH D}}{d(H,D)} \quad (2,2)$$



Sommando membro a membro la (2,1) e la (2,2), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C,H)} + \frac{S_{BCH}}{d(C,H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H,D)} + \frac{S_{BH D}}{d(H,D)} .$$

Essendo $S_{ACH} + S_{BCH} = S_{ACB}$ e $S_{AHD} + S_{BH D} = S_{ABD}$, la precedente relazione diviene: $\frac{S_{ACB}}{d(C,H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H,D)}$.

Posto $\frac{S_{ACB}}{d(C,H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H,D)} = \frac{1}{K'}$, con $K \in \mathbb{R}^*$, si ha:

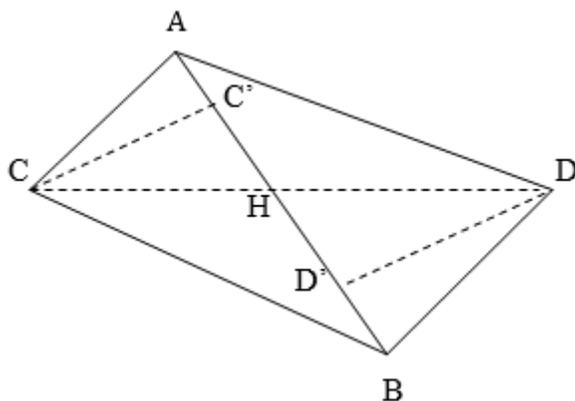
$$\begin{aligned} d(C,H) &= K' \cdot S_{ACB}, \quad d(H,D) = \\ &= K' \cdot S_{ABD}, \quad d(C,D) = K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \end{aligned} \quad (2,3)$$

Analogamente, siano C' e D' le proiezioni ortogonali di C e D su $[A,B]$. Posto $d(C,C') = h_3$, $d(D,D') = h_4$, si ha:

$$S_{ACH} = \frac{1}{2} d(A,H) \cdot h_3 \text{ e } S_{CHB} = \frac{1}{2} d(H,B) \cdot h_3$$

da cui:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} \quad (2,1')$$



$$S_{AHD} = \frac{1}{2} d(A,H) \cdot h_4 \text{ e } S_{BHD} = \frac{1}{2} d(H,D) \cdot h_4, \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)} \quad (2,2')$$

Sommando membro a membro la (2,1') e la (2,2'), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} + \frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} + \frac{S_{BHD}}{d(H,B)},$$

che possiamo riscrivere così:

$$\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)}$$

Posto $\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)} = \frac{1}{K''}$, con $K'' \in \mathbb{R}^*$, si ha:

$$\begin{aligned} d(A,H) &= K'' \cdot S_{ACD}, & d(H,B) &= K'' \cdot S_{CBD}, & d(A,B) &= \\ &= K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) & & & & (2,3') \end{aligned}$$

Sostituendo le (2,3) e le (2,3') negli insiemi completi:

$$I' = [d(H,D) \cdot C, -d(C,D) \cdot H, d(C,H) \cdot D]$$

e

$$I'' = [d(H,B) \cdot A, -d(A,B) \cdot H, d(A,H) \cdot B] \text{ si ha:}$$

$$I' = [K' \cdot S_{ABD} \cdot C, -K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, K' \cdot S_{ACB} \cdot D]$$

$$I'' = [K'' \cdot S_{CBD} \cdot A, -K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, K'' \cdot S_{ACD} \cdot B]$$

Dividendo I' per K' , I'' per K'' , sottraendo un insieme all'altro, tenendo conto dell'eguaglianza:

$$\begin{aligned} (S_{ACB} + S_{ABD}) &= (S_{ACD} + S_{CBD}), \text{ si ha: } I = \frac{1}{K''} I'' - \frac{1}{K'} I' = \\ &= [S_{CBD} \cdot A, - (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, S_{ACD} \cdot B] - \\ &- [S_{ABD} \cdot C, - (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, S_{ACB} \cdot D] = \\ &= (S_{CBD} \cdot A, S_{ACD} \cdot B, -S_{ABD} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D). \end{aligned}$$

TH.2 Siano (A,H,B) e (C,H,D) i coniugati interni dell'insieme quaternario del piano $J = (A,B,C,D)$ contenente terne di punti non allineati. Se $I' = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ è un insieme completo, con $m,n,s,h \in \mathbb{R}^+$, allora, sussistono le seguenti eguaglianze:

$$\begin{aligned} m &= K \cdot S_{BCD}, n = K \cdot S_{ACD}, s = K \cdot S_{BDA}, h = K \cdot S_{ABC}, \\ \text{con } K &\in \mathbb{R}^*. \end{aligned} \quad (2,4)$$

Supponiamo che $I' = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ sia completo; per il TH.1, anche l'insieme

$I = (S_{CBD} \cdot A, S_{DAC} \cdot B, -S_{BDA} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D)$ è completo. Conseguentemente è completo

$$I'' = I' - K \cdot I = [(m - K \cdot S_{CBD}) \cdot A, (n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B,$$

$$-(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D] .$$

Attribuiamo a K un reale che annulli una qualsiasi massa di I'' . Ad esempio, posto:

$$K = \frac{m}{S_{CBD}}, \text{ si ha: } (m - K \cdot S_{CBD}) = 0 \text{ e } I \text{ diviene:}$$

$$I''' = [(n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B, -(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D] .$$

Poiché I''' è un insieme ternario di punti non allineati, essendo completo deve essere improprio: tutte le masse di I''' devono essere nulle:

$$(n - K \cdot S_{DAC}) = 0, (s - K \cdot S_{BDA}) = 0, (h - K \cdot S_{ACB}) = 0 .$$

Conseguentemente le (2,4) risultano verificate.

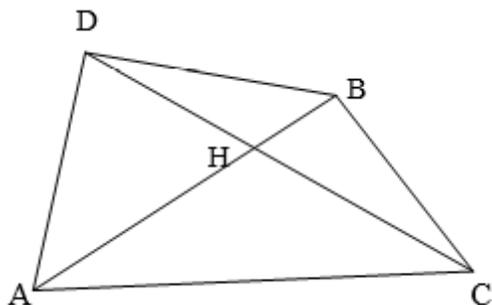
Il precedente teorema permette di affermare che il rapporto fra masse di punti materiali di I e I' , egualmente posizionati, è costante. Diciamo, allora, che I' appartiene alla stessa classe individuata da I . Gli insiemi I e I' sono detti equivalenti.

TH.3 Sia $I = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ un insieme quaternario completo con sostegno

$J = (A, B, C, D)$ e masse $m, n, s, h \in \mathbb{R}^+$. Il poligono $P(J)$ è un quadrilatero le cui diagonali sono $[A, B]$ $[C, D]$.

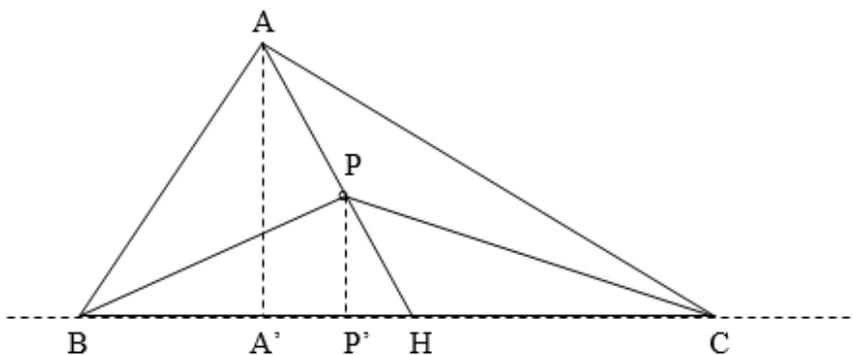
Sia $-(m+n) H$ il complementare di $m \cdot A$ e $n \cdot B$. Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo $I' = [m \cdot A, -(m+n) H, n \cdot B]$, risulta che il punto H è interno a (A, H, B) . Effettuando la differenza $I' - I = I''$, essendo $m + n = s + h$, si ha:

$$I'' = [s \cdot C, -(m + n) H, h \cdot D] = [s \cdot C, -(s + h) H, h \cdot D] .$$



Anche in questo caso il punto H di $J'' = (C, H, D)$, sostegno dell'insieme completo I'' , è interno a (C, D) . Così, essendo gli insiemi di sostegno di $I' = [m \cdot A, -(m+n)H, n \cdot B]$ e $I'' = [s \cdot C - (s+h)H, h \cdot D]$ coniugati interni, per la nota 1, caso a), $P(J)$ è un quadrilatero e $[A, B]$, $[C, D]$ sono le diagonali.

TH.4 Sia $J = (A, B, C, P)$ un insieme di punti appartenenti a π . Se (A, P, H) e (B, H, C) sono coniugati alterni, (cioè H è interno di $[B, H, C]$ ed esterno di $[A, P, H]$), allora, l'insieme $(S_{PCB} \cdot A, S_{PCA} \cdot B, S_{ABP} \cdot C, -S_{ABC} \cdot P)$ è completo.



Siano A' e P' le proiezioni ortogonali di A e P su $[B, C]$.

Posto $d(A,A') = h_1$ e $d(P,P') = h_2$, si ha: $S_{ABH} = \frac{1}{2} d(B,H) \cdot h_1$
 e $S_{AHC} = \frac{1}{2} d(H,C) \cdot h_1$ da cui: $\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H)}$ (2,5)
 $S_{PBH} = \frac{1}{2} d(B,H) \cdot h_2$ e $S_{PCH} = \frac{1}{2} d(C,H) \cdot h_2$ da cui:

$$\frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{PCH}}{d(C,H)} \quad (2,6)$$

Sottraendo la (2,5) alla (2,6), si ha:

$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} - \frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H)} - \frac{S_{PCH}}{d(C,H)}.$$

Essendo $S_{ABH} - S_{PBH} = S_{ABP}$ e $S_{AHC} - S_{PCH} = S_{APC}$, la precedente relazione diviene:

$$\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)}$$

Posto $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)} = \frac{1}{K'}$, si ha:

$$\begin{aligned} d(B,H) &= K' \cdot S_{ABP}, d(C,H) = \\ &= K' \cdot S_{APC}, d(B,C) = K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \end{aligned} \quad (2,7)$$

Analogamente, siano C' e B' le proiezioni ortogonali di C e B sulla retta s passante per (A,P) .

Posto $d(B,B') = h_3$ e $d(C,C') = h_4$; si ha:

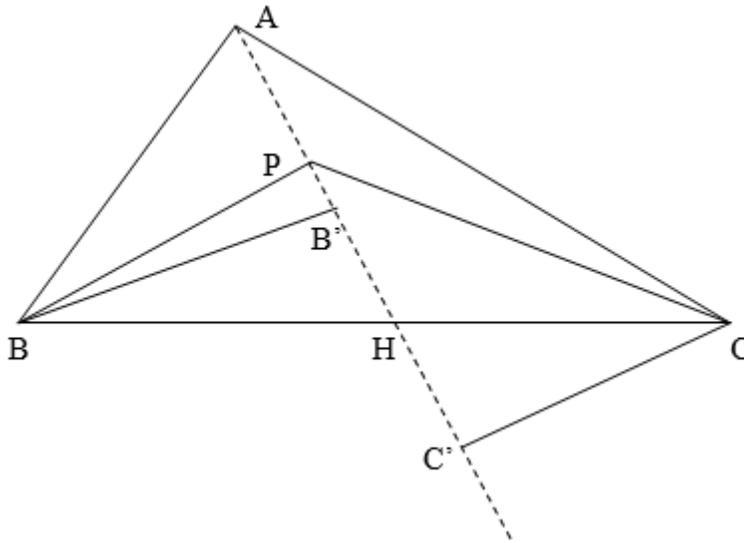
$$S_{ABP} = \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_3, S_{BP'H} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_3$$

da cui:

$$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} = \frac{S_{BP'H}}{d(P,H)} \quad (2,5')$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_4, S_{PCH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_4 \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \tag{2,6'}$$



Sommando membro a membro la (2,5') e la (2,6'), si ha:

$$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} + \frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H)} + \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \text{ da cui, posto } \frac{S_{ABP}+S_{APC}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPC}}{d(P,H)} = \frac{1}{K''}, \text{ si ha:}$$

$$d(A,P) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}), d(P,H) = K'' \cdot S_{BPC}, d(A,H) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \tag{2,7'}$$

Sostituendo le (2,7) e le (2,7') negli insiemi completi:

$$I_1 = [d(H,C) \cdot B, -d(B,C) \cdot H, d(B,H) \cdot C] \text{ e } I_2 = [d(P,H) \cdot A, -d(A,H) \cdot P, d(A,P) \cdot H] \text{ si ha:}$$

$$I_1 = [K' \cdot S_{APC} \cdot B, -K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H, K' \cdot S_{ABP} \cdot C]$$

$$I_2 = [K'' \cdot S_{BPC} \cdot A, -K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P, \\ K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H]$$

Dividendo I_1 per K' e I_2 per K'' si ottengono gli equivalenti

$$I' = [S_{APC} \cdot B, -(S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H, S_{ABP} \cdot C]$$

$$I'' = [S_{BPC} \cdot A, -(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P, (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H]$$

Effettuando l'unione degli insiemi I' e I'' si ottiene:

$$I' \cup I'' = [S_{BPC} \cdot A, S_{APC} \cdot B, S_{ABP} \cdot C, -(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P].$$

Tenendo conto che $(S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) = S_{ABC}$, si ha la tesi.

Così come i teoremi 2 e 3 sono strettamente collegati al TH.1, allo stesso modo, al TH.4 sono collegati i teoremi 5 e 6 che enunciamo omettendone la dimostrazione.

TH.5 Sia $J = (A, B, C, P)$ un insieme di punti del piano π . Se (A, P, H) e (B, H, C) sono coniugati alterni essendo P interno ad (A, H) ed H interno a $[B, C]$, allora, se $I = (m \cdot A, n \cdot B, s \cdot C, -h \cdot P)$ è un insieme completo, le masse $m, n, s, h \in \mathbb{R}^*$ sono così definite:

$$m = K \cdot S_{BCP}, n = K \cdot S_{ACP}, s = K \cdot S_{BPA}, h = K \cdot S_{ABC}$$

TH.6 Sia J il sostegno dell'insieme quaternario I contenente tre punti materiali di segno concorde ed un punto di segno discorde rispetto ai precedenti. L'insieme J contiene un punto interno.

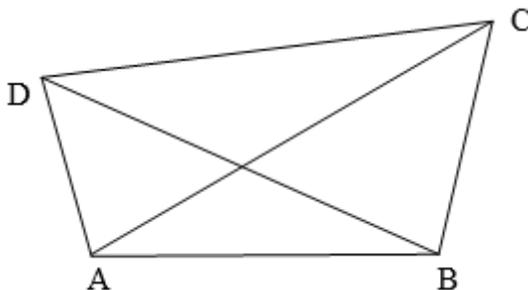
3 - Applicazioni

Applicazione 1: Siano (A, B, D) e (A, D, C) due insiemi ternari non adiacenti e risulti: $d(A, B) = 6$, $d(B, D) = 4\sqrt{5}$, $d(A, D) = 2\sqrt{5}$, $d(A, C) = 7\sqrt{2}$, $d(D, C) = 3\sqrt{10}$. Trovare $d(B, C)$.

L'insieme completo con sostegno $J = (A, B, C, D)$ è:

$$(S_{BCD} A, S_{ACD} B, S_{ABD} C, S_{ABC} D).$$

Utilizzando la formula di Eulero:



$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \text{ si ha: } S_{ABD} = 12, S_{ACD} = 21.$$

Posto $S_{ABC} = x, S_{BCD} = y$, essendo: $S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$ si ha: $12 + y = 21 + x$ da cui $S_{BCD} = x + 9$. Affinché l'insieme $I = [(x + 9) A, -21 B, 12 C, -x D]$ sia completo deve risultare: $A \cdot I = D \cdot I$. Sviluppando si ha:

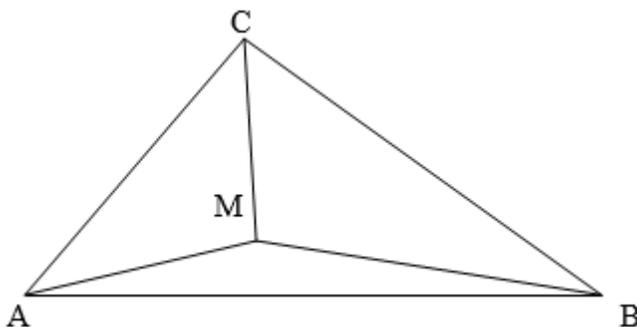
$$\begin{aligned} -21[d(A, B)]^2 + 12[d(A, C)]^2 - x[d(A, D)]^2 &= (x+9)[d(D, A)]^2 \\ -21[d(D, B)]^2 + 12[d(D, C)]^2 & \end{aligned}$$

da cui $x = 21$. Sostituendo si ha: $S_{ABD} = 12, S_{ADC} = 21, S_{BCD} = 30, S_{ABC} = 21$ e l'insieme I diviene: $I = [30 \cdot A, -21 \cdot B, 12 \cdot C, -21 \cdot D]$.

Per calcolare $d(B, C)$ risolviamo l'equazione $B \cdot I = D \cdot I$:
 $30[d(B, A)]^2 + 12[d(B, C)]^2 - 21[d(B, D)]^2 = 30[d(D, A)]^2$
 $-21[d(D, B)]^2 + 12[d(D, C)]^2$, da cui $d(B, C) = 5\sqrt{2}$.

Applicazione 2: Sia $J = (A,B,C,M)$ un insieme di punti del piano con M interno a J e risultati: $d(A,M) = 2\sqrt{5}$, $d(B,M) = 2\sqrt{17}$, $d(C,M) = 5\sqrt{2}$. Trovare $d(A,B)$, $d(B,C)$, $d(C,A)$. Sapendo che si ha:

$$\frac{S_{BCM}}{9} = \frac{S_{CAM}}{5} = \frac{S_{ABM}}{4} = K. \quad (3,1)$$



Dalla (3,1) si ha: $S_{BCM} = 9 \cdot K$, $S_{CAM} = 5 \cdot K$, $S_{ABM} = 4 \cdot K$,
 $S_{ABC} = 18 \cdot K$, con $K \in \mathbb{R}^*$; per il TH.4, l'insieme $(9K \cdot A, 5k \cdot B, 4K \cdot C, -18K \cdot M)$ è completo e completo è l'equivalente $I = (9 \cdot A, 5 \cdot B, 4 \cdot C, -18 \cdot M)$ pertanto si ha: $A \cdot I = M \cdot I$, $B \cdot I = M \cdot I$, $C \cdot I = M \cdot I$, da cui

$$\begin{cases} 5[d(A,B)]^2 + 4[d(A,C)]^2 - 18[d(A,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,B)]^2 + 4[d(B,C)]^2 - 18[d(B,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,C)]^2 + 5[d(B,C)]^2 - 18[d(C,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \end{cases}$$

Posto $d(A,B) = x$, $d(B,C) = y$, $d(C,A) = z$, si ha:

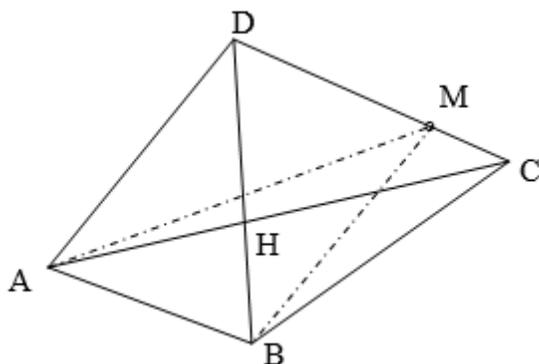
$$\begin{cases} 5x^2 + 4z^2 = 1080 \\ 9x^2 + 4y^2 = 1944 \\ 9z^2 + 5y^2 = 1620 \end{cases} \quad \text{da cui } x = 12, y = 9\sqrt{2}, z = 3\sqrt{10}$$

Applicazione 3: Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero T(J), con $J = (A,B,C,D)$, e risulti:

$$S_{CBD} = 36, S_{DAC} = 72, S_{BDA} = 108, S_{ACB} = 72. \quad (3,2)$$

Sia M un punto sul lato [D,C] e risulti: $\frac{d(D,M)}{d(M,C)} = 3$.

Trovare: $S_{BMD}, S_{MDA}, S_{ABM}$.



Per il TH.1 l'insieme completo con sostegno J è:

$I' = (S_{CBD} \cdot A, -S_{DAC} \cdot B, S_{BDA} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D)$ da cui

$$I' = (36 \cdot A, -72 \cdot B, 108 \cdot C, -72 \cdot D).$$

L'insieme completo avente sostegno (C,M,D) è

$I'' = (D, -4 M, 3 C)$. Ricaviamo l'insieme completo con

sostegno $J''' = (A,B,M,D)$: $I''' = \{I' \cup [(-36)I'']\} = (36 A, -108 D, -72 B, 144 M)$. Poiché, per il TH.2, deve risultare:

$$6 = K \cdot S_{BMD}, 108 = K \cdot S_{ABM}, 144 = K \cdot S_{BDA}, 72 = K \cdot S_{ADM} \quad (3,3)$$

con $K \in \mathbb{R}^*$, essendo per le (3,2) $144 = K \cdot S_{BDA} = K \cdot 108$, si ha $K = \frac{4}{3}$; sostituendo la costante K così ricavata nelle (3,3), si ha:

$$S_{BDA} = 108, S_{BMD} = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27, S_{ABM} = 108 \cdot \frac{3}{4} = 81,$$

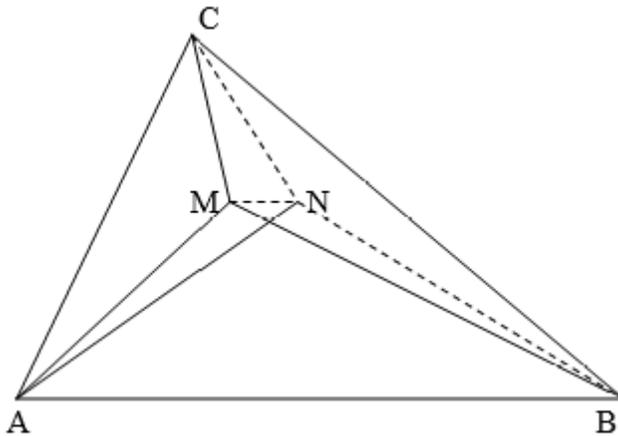
$$S_{ADM} = 72 \cdot \frac{3}{4} = 54.$$

Applicazione 4: Sia $J' = (A,B,C,M)$ un insieme di punti del piano con M interno a J' e risulti:

$$S_{ABM} = 64, S_{BCM} = 28, S_{AMC} = 20, S_{ABC} = 112. \quad (3,4)$$

Sia N interno di $J'' = (C,M,B,N)$ e risulti:

$$S_{MBN} = 12, S_{BCN} = 7, S_{MNC} = 9, S_{MBC} = 28. \text{ Trovare } S_{MNA}.$$



L'insieme completo I' , avente sostegno J' , è:

$$I' = (28 A, 20 B, 64 C, -112 M).$$

L'insieme completo I'' , avente sostegno J'' , è:

$$I'' = (9 B, 7 M, 12 C, -28 N).$$

Effettuando l'unione dei due insiemi I' e I'' moltiplicati, rispettivamente, per $\frac{9}{4}$ e per -5 , riducendo e dividendo per 7 si ha :

$$\text{rid. } \left[\left(\frac{9}{4} I' \right) \cup \left(-5 I'' \right) \right] = (63 A, 45 B, 144 C, -252 M, -45 B -$$

$35 M, - 60 C, 140 N) =$
 $= (63 A, 84 C, 140 N, - 287 M).$ Dividendo per 7
 l'equivalente è: $(9 A , 12 C, 20 N, - 41 M)$

Per il TH.4, essendo:

$$S_{ANM} = 12 \cdot K, S_{NCM} = K \cdot 9, S_{AMC} = K \cdot 20, S_{ANC} = K \cdot 41 \quad (3,5)$$

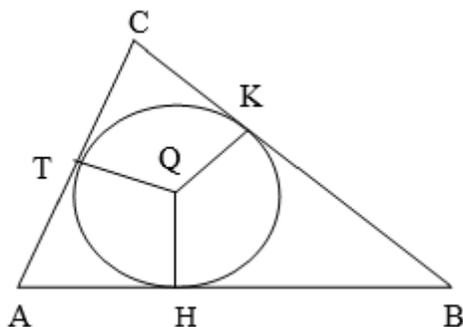
con $K \in \mathbb{R}^*$, tenendo conto della (3,4) si ha:

$$S_{ACM} = 20 = K \cdot 20 = S_{ACM} \text{ da cui } K = 1.$$

Sostituendo nelle (3,5) si ha: $S_{ANM} = 12 \cdot 1 = 12.$

Applicazione 5: Sia Q l'incentro del triangolo T(J')

con $J' = (A,B,C)$. Siano H,K,T le proiezioni ortogonali di Q, rispettivamente, sui lati [A,B], [B,C], [C,A]. Trovare l'insieme completo I con sostegno $J = (A,B,C,Q)$.



Posto $d(A,B) = c, d(B,C) = a, d(C,A) = b$, essendo r il raggio della circonferenza inscritta in T(J), si ha:

$$S_{B,C,Q} = \frac{1}{2} a r, S_{CAQ} = \frac{1}{2} b r, S_{ABQ} = \frac{1}{2} c r,$$

$$S_{A,B,C} = S_{B,C,Q} + S_{CAQ} + S_{ABQ} = \frac{1}{2} (a+b+c) r.$$

Tenendo conto del TH.4 si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{2} a r \right) A, \left(\frac{1}{2} b r \right) B, \left(\frac{1}{2} c r \right) C, - \left(\frac{1}{2} (a + b + c) r \right) Q \right]$$

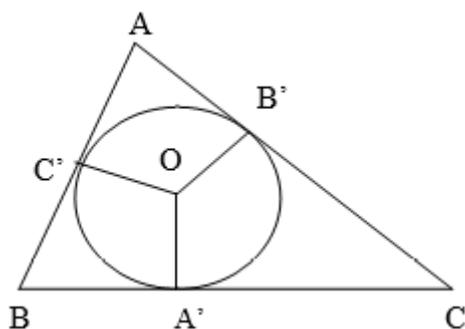
Moltiplicando per $\frac{2}{r}$ si ha l'equivalente:

$$I = [a \cdot A, b \cdot B, c \cdot C, - (a+b+c) \cdot Q].$$

Applicazione 6 Sia S la circonferenza di centro O inscritta nel triangolo $T(J)$, con $J = (A,B,C)$ e A',B',C' siano i punti di tangenza di S , rispettivamente, con i lati $[B,C]$, $[A,C]$, $[A,B]$.

Mostrare che: $S_{AOB} = K \cdot S_{A'O'B'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'O'C'}$,

$S_{COA} = K \cdot S_{C'O'A'}$ con $K \in \mathbb{R}$.



Dalla geometria elementare risulta:

$$d(A,C')=d(A,B')=u, d(B,C')=d(B,A')=v, d(C,A')=d(C,B')=w.$$

Tenendo conto dell'applicazione 5 l'insieme:

$I^{\circ} = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O]$ risulta completo. Anche gli insiemi $I' = [vA, - (u + v)C', uB]$,

$I'' = [wB, - (w + v)A', vC]$, $I''' = [uC, - (u + w)B', wA]$, risultano completi. Dall'unione di I', I'', I''' si ottiene:

$$I^* = I' \cup I'' \cup I''' = [(v + w)A, (u + w)B, (v + u)C, - (u + v)C', - (w + v)A', - (u + w)B'].$$

Effettuando la differenza dei due insiemi $I^{\circ} - I^*$ si ottiene:

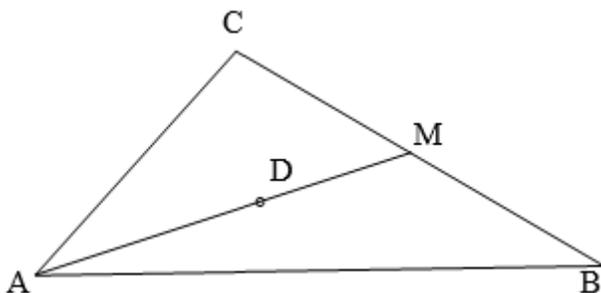
$$\begin{aligned} I &= [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O - (v + w)A, \\ &- (u + w)B, - (v + u)C, (u + v)C', (w + v)A', (u + w)B'] = \\ &= [(w + v)A', (u + w)B', (u + v)C', -2(u + v + w)O]. \end{aligned}$$

Confrontando i due insiemi completi

$I^\circ = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O]$ e
 $I = [(w + v)A', (u + w)B', (u + v)C', -2(u + v + w)O]$
 risulta che le masse di I° , riferite ai punti A, B, C, O, sono uguali, rispettivamente, alle masse di A', B', C', O pertanto si ha:

$$S_{AOB} = K \cdot S_{A'O'B'}, S_{BOC} = K \cdot S_{B'O'C'}, S_{COA} = K \cdot S_{C'O'A'}, \text{ con } K \in \mathbb{R}^*.$$

Applicazione 7: Sia D il punto interno di $J = (A, B, C, D)$, insieme contenente terne di punti non allineati del piano π . Risultati: $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, con $K \in \mathbb{R}^*$. Ricavare l'insieme completo con sostegno J e verificare che $d(A, D) = 2 d(D, M)$.



Essendo $S_{ABC} = 3 K$, $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, si ha:

$$(K \cdot A, K \cdot B, K \cdot C, -3K \cdot D).$$

Dividendo per K si ha:

$$I = (A, B, C, -3 \cdot D) \tag{3,6}$$

Indicando con $-2 M$ il complementare di (B,C) risulta completo l'insieme $I' = (B, -2 M, C)$ (3,7)

da cui si deduce: $\frac{d(B, M)}{d(M, C)} = 1$.

Sottraendo la (3,7) alla (3,6) si ottiene l'insieme completo

$$I'' = I - I' = (A, -3D, 2M) \text{ da cui si deduce: } \frac{d(A, D)}{d(D, M)} = 2.$$

Nota 3. Dato un insieme quaternario completo

$I = (s_1 \cdot P_1, s_2 \cdot P_2, s_3 \cdot P_3, s_4 \cdot P_4)$ è sempre possibile trovare l'equivalente I' le cui masse siano espresse mediante due parametri: m, n . Infatti, moltiplicando le masse di I per un $K \in \mathbb{R}^*$ si ottiene un insieme completo equivalente a I' ; ponendo, ad esempio, $K = \frac{1}{s_3}$, si ha: $I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_2, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_3, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_4 \right)$ (3,8)

Effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\frac{s_1}{s_3} = m, \frac{s_2}{s_3} = n, \text{ essendo } \frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0, \text{ si ha:}$$

$$m + n + 1 + \frac{s_4}{s_3} = 0$$

da cui $\frac{s_4}{s_3} = -(m + n + 1)$. Sostituendo nella (3,81) si ha:

$$I' = [m \cdot P_1, n \cdot P_2, 1 \cdot P_3, -(m + n + 1) \cdot P_4]$$

da cui risulta che le masse sono espresse mediante m e n . Naturalmente I' non è l'unico insieme equivalente a I . E' possibile ricavarne altri, formalmente distinti da I' , elaborando diversamente le masse di I .

Una ulteriore elaborazione di un insieme completo le cui masse siano espresse mediante due parametri è la seguente:

Nota 4. Siano $J' = (A, H, C)$ e $J'' = (B, H, D)$ i coniugati interni di un insieme quaternario del piano: $J = (A, B, C, D)$. Gli insiemi completi aventi sostegno J' e J'' sono:
 $[m A, -(m + s) H, s C]$ e $[(n B, -(n + h) H, h D)$.
 Dividendo i due insiemi, rispettivamente, per $(m + s)$ e per $(n + h)$ si ottiene:

$$\left(\frac{m}{m+s} A, -H, \frac{s}{m+s} C \right) \text{ e } \left(\frac{n}{n+h} B, -H, \frac{h}{n+h} D \right).$$

Sottraendo l'uno dall'altro si ha:

$$\left(\frac{m}{m+s} A, \frac{s}{m+s} C, -\frac{n}{n+h} B, -\frac{h}{n+h} D \right) \quad (3,9)$$

$$\text{Posto } \frac{m}{m+s} = u \text{ e } \frac{n}{n+h} = v \quad (3,10)$$

si ha:

$$\frac{s}{m+s} = 1 - \frac{m}{m+s} = 1 - u \text{ e } \frac{h}{n+h} = 1 - \frac{n}{n+h} = 1 - v \quad (3,11)$$

Sostituendo le (3,10) e le (3,11) nella (3,9) si ha:

$$I = [u A, (1 - u)C, -v B, -(1 - v)D]$$

Risulta evidente che l'insieme completo I dipende da due parametri: u e v.

4 - L'equazione $I^2 = 0$ essendo I completo

Def.2: Il prodotto di due insiemi di punti materiali I' e I'' , e scriviamo $I' \cdot I''$, è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascun punto materiale di I' per ciascun punto materiale di I'' .

Nota 5. È facile mostrare che il prodotto di due insiemi di punti materiali gode della proprietà commutativa e distributiva.

$$1) I' \cdot I'' = I'' \cdot I'$$

$$2) I \cdot I^* = I \cdot (I' \cup I'') = (I \cdot I' + I \cdot I'')$$

essendo I' e I'' una partizione di I^* .

Def.3: È detto quadrato di un insieme di punti materiali, e scriviamo I^2 , il prodotto $I \cdot I$.

Th.7: Supponiamo che le masse degli elementi dell'insieme di punti materiali di ordine n, $H = (m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + \dots + m_n Q_n)$, soddisfino la seguente condizione: $\sum m_i = 0$.

Il prodotto $H \cdot I$, essendo I un insieme completo di ordine s , è identicamente nullo.

Sia $I = (n_1 P_1, n_2 P_2, \dots, n_s P_s)$ un insieme completo. Effettuando il prodotto $H \cdot I$, si ottiene:

$$H \cdot I = (m_1 Q_1 \cdot I + m_2 Q_2 \cdot I + \dots + m_n Q_n \cdot I) \quad (4,1)$$

Essendo I completo si ha: $Q_1 \cdot I = Q_2 \cdot I = \dots = Q_n \cdot I = K$, con $K \in \mathbb{R}$.

Sostituendo nella (4,1), si ha:

$$H \cdot I = (m_1 \cdot K + m_2 \cdot K + \dots + m_n \cdot K) = K \cdot \sum m_i = K \cdot 0 = 0.$$

I teoremi successivi potrebbero essere riferiti ad insiemi completi di qualsiasi ordine. Preferiamo svolgerli prendendo in considerazione, esclusivamente, insiemi completi quaternari conformemente al contesto della trattazione.

Th.8: Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ è un insieme quaternario completo, si ha: $I^2 = 0$.

Svolgendo il quadrato si ha:

$$I^2 = m_1 P_1 \cdot I + m_2 P_2 \cdot I + m_3 P_3 \cdot I + m_4 P_4 \cdot I \quad (4,1)'$$

La completezza di I implica che sia: $P_i \cdot I = K$, con $K \in \mathbb{R}$ costante, pertanto la (4,1)' diviene:

$$I^2 = (m_1 K + m_2 K + m_3 K + m_4 K) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) K.$$

Essendo I completo si ha: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$ da cui: $I^2 = 0$.

Th.9: Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ un insieme quaternario completo del IV ordine e I_i sia il sottoinsieme ternario: $I_i = I - m_i P_i$, per $i \in \{1,2,3,4\}$. Si ha, allora:

$$2 m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \text{ per } k \in \{1,2,3,4\}.$$

Per il TH.8, essendo $I^2 = 0$, si ha:

$$I^2 = [(m_i P_i) \cup I_i]^2 = (m_i P_i)^2 + 2 \cdot (m_i P_i) \cdot I_i + (I_i)^2 = 0.$$

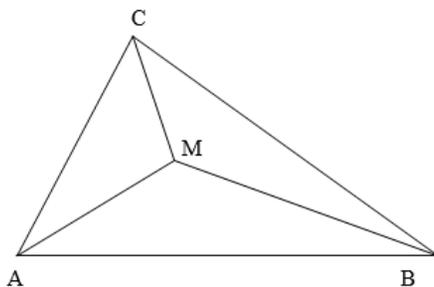
Poiché $(m_i P_i)^2 = (m_i)^2 [d(P_i, P_i)]^2 = 0$ la precedente diviene:

$$2 m_i (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0 .$$

Inoltre, essendo $P_i \cdot I_i = P_i \cdot I = P_k \cdot I$, la precedente diviene:

$$2 m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \quad \text{per qualsiasi } k \in \{1,2,3,4\}.$$

Applicazione 8: Sia $J = (A,B,C,M)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati, complanari, con M punto interno. Siano $d(A,B) = 6$, $d(B,M) = 2\sqrt{5}$, $d(M,A) = 2\sqrt{2}$. Sapendo che $S_{AMC} = 4$, $S_{BCM} = 5$, $S_{ABM} = 6$, $S_{ABC} = 15$, trovare: $d(A,C)$, $d(M,C)$, $d(B,C)$.



L'insieme completo avente sostegno J è: $I = (5A, 4B, 6C, -5M)$.

Scegliamo il sottoinsieme ternario I_C di I il cui sostegno

$J_C = (A,B,M)$ contiene punti di cui si conoscono le distanze:

$$I_C = (5 A, 4 B, - 15 M). \text{ Per il TH.9,}$$

si ha:

$$I^2 = [(6 \cdot C) \cup I_C]^2 = (6 \cdot C)^2 + 2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I_C) + (I_C)^2 = 0$$

Essendo $(6 \cdot C)^2 = 0$ e $C \cdot I_C = C \cdot I$, la precedente diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I) + (I_C)^2 = 0 . \tag{4,2}$$

Il prodotto $(C \cdot I)$ della (4,2) contiene i quadrati dei seguenti moduli: $d(C,A) = x$, $d(C,M) = y$, $d(C,B) = z$; il prodotto $(A \cdot I)$ contiene, invece, la lunghezza incognita del

solo segmento $[C,A]$.

a) Per calcolare $d(C,A) = x$, essendo $(C \cdot I) = (A \cdot I)$, effettuiamo nella (4,2) la sostituzione:

$$2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) + (I_C)^2 = 0. \quad (4,3)$$

Posto $d(A, C) = x$, sviluppiamo separatamente $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I)$ e $(I_C)^2 = 0$: $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) = 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(A, A)]^2 + 4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2\} = 2 \cdot 6 \cdot \{4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2\} = 2 \cdot 6 \cdot \{4 \cdot 36 + 6x^2 - 15 \cdot 8\} = 2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\}$
 $(I_C)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 [d(A,B)]^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15 [d(B,M)]^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15 [d(M,A)]^2 =$
 $= 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 36 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 8 = 2 \cdot (-1080)$
 Sostituendo nella (4,3) si ha: $2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$
 da cui $d(A, C) = \sqrt{26}$.

b) Per calcolare $d(C,M)$ si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $M \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito $d(C,M) = y$.
 L'equazione diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (M \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \text{ da cui } 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(M, A)]^2 + 4[d(M, B)]^2 + 6[d(M, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{5 \cdot 8 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot y^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0 \text{ da cui } d(C,M) = \sqrt{10}.$$

c) Per calcolare $d(C,B)$ si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $B \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito $d(C,B) = z$.
 L'equazione diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (B \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \text{ da cui } 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(B, A)]^2 - 15 [d(B, M)]^2 + 6[d(B, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot [5 \cdot 36 - 15 \cdot 20 + 6 \cdot z^2] - 2 \cdot 1080 = 0$$

 da cui $d(C,B) = 5\sqrt{2}$.

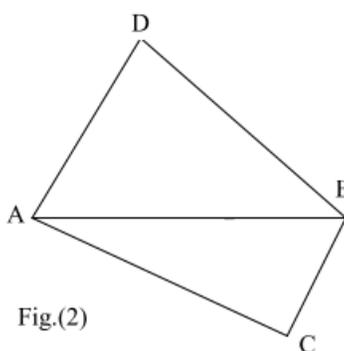
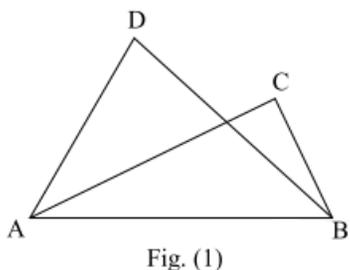
Applicazione 9: Fra i punti dell'insieme $J = (A,B,C,D)$ sussistono le seguenti distanze:

$$d(A,B)= 6, d(B,C)= 2, d(A,C) = 2 \sqrt{10} ,$$

$$d(A,D) = 2 \sqrt{5} , d(B,D) = 4 \sqrt{2} .$$

Trovare l'insieme completo con sostegno J e la distanza (D,C).

Formalmente, $[- m A, (m + n - 1) B, - n C, D]$ (4,4)
 è l'insieme completo avente sostegno J indipendentemente dal fatto che le terne (A,B,C) e (A,B,D) siano adiacenti o non adiacenti



Nella fig. (1) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono non adiacenti;
 nella fig. (2) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono adiacenti.

Come nell'esercizio precedente, posto $I_D = [- mA, (m+n- 1) B, -nC]$ si ha:

$$I^2 = [I_D \cup (I \cdot D)]^2 = (I_D)^2 + 2 \cdot (D \cdot I_D) + (D)^2 = 0 \quad (4,5)$$

Tenendo conto che $D \cdot I_D = D \cdot I$, $(D)^2 = 0$ e che, essendo I completo, si ha: $D \cdot I = A \cdot I = B \cdot I$, dalla (4,5) si ricavano le seguenti equazioni.

$$\begin{cases} (I_D)^2 + 2 \cdot (B \cdot I) = 0 \\ (I_D)^2 + 2 \cdot (A \cdot I) = 0 \end{cases} \quad (4,6)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \text{a) } (I_D)^2 &= [-m \cdot A, (m+n-1) \cdot B, -n \cdot C]^2 = \\ &= 2\{-m(m+n-1)[d(A,B)]^2 - n(m+n-1)[d(B,C)]^2 + m n [d(A,C)]^2\} = \\ &= 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2 \cdot (B \cdot I) &= 2\{-m [d(B,A)]^2 + [d(B,D)]^2 - n [d(B,C)]^2\} = \\ &= 8(-9m + 8 - n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2 \cdot (A \cdot I) &= 2\{[d(A,D)]^2 - n [d(A,C)]^2 + (m+n-1)[d(A,B)]^2\} \\ &= 8(9m - n - 4) \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (4,6), si ha:

$$\begin{cases} 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(-9m + 8 - n) = 0 \\ 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(9m - n - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m_2 = \frac{2}{3} \\ n_2 = -2 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) si ottengono i seguenti insiemi completi:

$$I' = (-2A, 5B, -6C, 3D) \quad \text{e} \quad I'' = (-2A, -7B, 6C, 3D)$$

contenenti entrambi punti esterni. Per calcolare $d(D,C)$ svolgiamo le seguenti equazioni:

$$D \cdot I' = C \cdot I' \quad (4,7') \quad \quad D \cdot I'' = C \cdot I'' \quad (4,7'')$$

Dalla (4,7') si ha:

$$-2[d(D,A)]^2 + 5[d(D,B)]^2 - 6[d(D,C)]^2 = -2[d(C,A)]^2 + 5[d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$$

Posto $d(D,C) = x$, si ha $x = 2\sqrt{5}$; dalla (4,7'') si ha:

$$-2[d(D,A)]^2 - 7[d(D,B)]^2 + 6[d(D,C)]^2 = -2[d(C,A)]^2 - 7[d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$$

Posto $d(D,C) = y$, si ha $y = 2\sqrt{13}$.

Profili biografici degli Autori

Franco Eugeni (Teramo) – eugenif3@gmail.com

Coordinatore PHD. Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Logica e Filosofia della Scienza in varie Università (Modena, L'Aquila, Chieti, Milano, Roma). È stato presidente nazionale della Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", direttore di dipartimento e delegato rettorale per la Didattica. È membro onorario della "Romanian Society for Fuzzy Systems" a Iasi. Direttore dei periodici telematici «Ratio Mathematica», «Eiris (Epistemologia dell'Informatica e Ricerca Sociale)», «SEM Bollettino dell'AFSU, Vol. I (1), 2018.(Skills for Economic Management)», «Divulgazione della Scienza e della Filosofia». È stato Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV, fondata nel 1598). È presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). È condirettore dei periodici «Science & Philosophy» e «Bollettino dell'AFSU» ed è fondatore della rinata rivista "Periodico di Matematica", dopo 100 anni dalla sua chiusura nel 1918. È membro dei Consigli Scientifici delle Riviste «Italian J. of Applied Mathematics» e «J.of Interdisciplinary Mathematics». È stato membro dei Consigli Scientifici dei «Rendiconti di Matematica» e del «Journal of Optimization and Economic Science». È Commendatore della Repubblica e professore onorario nell'Università A. Cuza di Iasi (Romania). Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Loredana Biacino (Napoli) – loredana.biacino2@unina.it

Professore a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell'Università del Sannio. E' autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche e vari libri. Fa parte dell'Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico) della rivista "Science & Philosophy", e Socio fondatore del "Periodico di Matematica" nella sua nuova rinascita 100 anni dopo la sospensione del 1918. E' Presidente della sezione di

Napoli della Mathesis, Società di Matematica e Fisica, di cui è stato Segretario nazionale ed ha fatto parte del Consiglio Direttivo nel periodo 2003-2014.

Ferdinando Di Martino (Napoli) - fdimarti@unina.it

Ferdinando Di Martino, laureato in fisica con Ph.D in computer sciences, è attualmente è ricercatore di Informatica nel Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, e membro del collegio di dottorato nazionale in intelligenza artificiale. Ha pubblicato oltre un centinaio di lavori su ben note riviste scientifiche internazionali in tematiche connesse alla fuzzy logica, alla soft computing e alla computational intelligence. È associate editor di numerose riviste internazionali, quali "Soft Computing" (Springer), "Advances in Computational Intelligence" (Springer) e "Advances in Fuzzy Systems" (Hindawi).

Salvatore Sessa (Napoli) - sessa@unina.it

Salvatore Sessa received the laurea degree in Mathematics from Naples University in 1973. Sessa is past Director of Course post-laurea "Sistemi Informativi Territoriali for the governance of urban systems and complex systems" from 2004 till 2020. He received the Italian Fuzzy Pioneer Award on 10/07/217 during "IEEE 2017 International Conference on Fuzzy Systems", 9-12/07/2017, Naples. Editor of the *International Journal of Soft Computing, Fuzzy Sets and Systems and others*. Referee of many international journals. He was involved in numerous research projects and author of many academic publications (refer to orcid.org/0000-0002-4303-2884).

His interests: fixed point theory, optimization, pattern recognition, clustering in large/very large data, fuzzy relation equations, image processing, fuzzy quantum computing. He retired at 1 november 2020.F

Francesco di Paola Bruno ((Castellammare di Stabia - NA) -
effe.bruno@virgilio.it

Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "F. Severi" di Castellammare di Stabia (NA). Nel 1981 ha conseguito con lode la Laurea in Matematica a indirizzo applicativo numerico presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e nel 2001 ha frequentato il Corso Annuale di Perfezionamento post-laurea "Modelli e Metodi Matematici Applicati ai Problemi dell'Ambiente". Negli anni '80 ha lavorato in azienda come programmatore di computer e poi come insegnante di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di 1° grado. Da oltre trenta anni insegna Matematica al liceo scientifico e da quindici anche Fisica. Negli ultimi venti anni ha svolto attività di formazione per docenti, ha partecipato come relatore in numerosi convegni sulla didattica della Matematica e pubblicato vari articoli, presentando sempre originali problemi e spunti didattici per l'insegnamento della Matematica spesso supportato dalle tecnologie informatiche, indispensabili per affrontare particolari tematiche. Nell'ultimo quinquennio i suoi interessi sono orientati alla ricerca di percorsi originali per l'insegnamento della Matematica e della Fisica nel liceo musicale, sfruttando analogie e collegamenti tra Matematica, Fisica e Musica.

Franco Francia (La Spezia) - franco.francia40@virgilio.it

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguito la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G.Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»:

Insiemi di punti materiali - «Archimede», N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.