

# *Leggendo Galileo: dalla scodella di Luca Valerio agli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e all'Additive Manufacturing*

Luca Nicotra\*

\* Ingegnere. Presidente dell' A. P. S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di:  
«Periodico di Matematica», «Bollettino dell' Accademia di Filosofia delle Scienze  
Umane», «ArteScienza», «ArteScienza\_magazine»;  
luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.064

**Sunto:** *L'esperienza del ragionare matematico e del suo fascino il più delle volte resta nascosta nei rigidi itinerari scolastici. La Fabbricazione a Strati o Additiva (Additive Manufacturing), che ormai da vari decenni si sta affermando come tecnica di costruzione in campi molto diversi, può fornire il punto di partenza per un itinerario didattico, qui delineato prendendo spunto da Galileo Galilei e Luca Valerio, che coinvolge geometria euclidea, concetti di analisi infinitesimale e storia della scienza, nella piena affermazione dell'interdisciplinarietà, del fusionismo e della ricerca, nella realtà fisica, delle tracce del pensiero matematico. Dunque, un esempio attuale, particolarmente apprezzabile dai giovani, di quel leggere "matematicamente" il mondo reale che fu il principio informatore di tutta la splendida e grandiosa opera galileiana, al quale furono particolarmente ligi, in*

*tempi più recenti, Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo, nella loro attività di ricerca e di didattica.*

**Parole Chiave:** *Fabbricazione additiva, scodella di Galileo, Luca Valerio, indivisibili, Bonaventura Cavalieri, analisi infinitesimale.*

**Abstract:** *The experience of mathematical reasoning and its charm often remains hidden in the rigid school itineraries. Additive Manufacturing, which for several decades has been establishing itself as a construction technique in very different fields, can provide the starting point for a didactic itinerary, outlined here inspired by Galileo Galilei and Luca Valerio, which involves Euclidean geometry, concepts of infinitesimal analysis and history of science, in the full affirmation of interdisciplinarity, fusionism and research, in physical reality, of the traces of mathematical thought. Therefore, a current example, particularly appreciated by young people, of that reading "mathematically" the real world which was the guiding principle of all the splendid and grandiose Galilean work, to which Bruno de Finetti and Emma Castelnuovo were particularly loyal in more recent times, in their research and teaching activities.*

**Keywords:** *Additive manufacturing, Galileo's bowl, Luca Valerio, indivisible, Bonaventura Cavalieri, infinitesimal analysis.*

## 1 – Introduzione

L'opera *De centro gravitatis solidorum* (1604) del matematico napoletano Luca Valerio,<sup>1</sup> vissuto in pieno rinascimento e celebrato da Galileo Galilei come «nuovo Archimede dell'età nostra», contiene una originale dimostrazione della formula del volume della sfera basata su considerazioni puramente geometriche, che contengono in *nuce* l'idea del Calcolo Infinitesimale anticipando l'idea degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri (Eugeni, 2022) e, in maniera

---

<sup>1</sup> Napoli, 1553 – Roma, 1618.

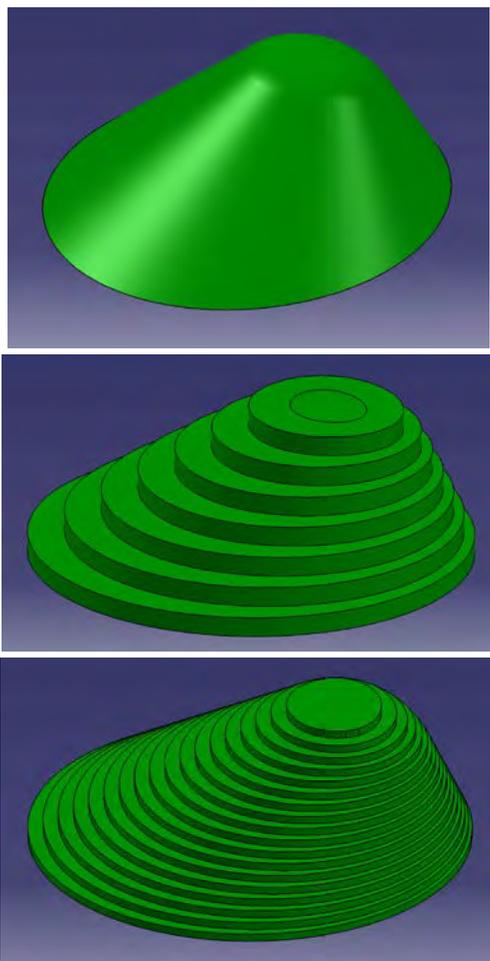
sorprendente, l'idea che è alla base della moderna tecnologia informatica della cosiddetta stampa 3D (Nicotra, 2015). Questa, più propriamente detta *Additive Manufacturing* (Fabbricazione Additiva) o *Layered Manufacturing* (Fabbricazione a Strati),<sup>2</sup> è quella tecnica di costruzione a strati che già da diversi decenni si è affermata nei settori delle protesi biomedicali e della componentistica aerospaziale, ma sta interessando sempre più anche altri settori dell'industria manifatturiera. Si contrappone alle tecniche costruttive tradizionali delle macchine utensili ad asportazione di truciolo, in quanto realizza un pezzo aggiungendo materiale in strati successivi, anziché sottraendolo da un blocco pieno.

Immaginiamo di sezionare un oggetto fisico con un numero finito di piani paralleli e di traslare ciascuna sezione così ottenuta di una lunghezza molto piccola (rispetto alle dimensioni dell'oggetto) in direzione normale ai piani: ciò che otterremo è un oggetto "stratificato a gradini", costituito da tanti cilindretti quante sono le sezioni, che potrà sostituire quello originario con una approssimazione che è tanto migliore quanto meno distanti, e quindi più numerosi, sono i piani sezionanti.<sup>3</sup> Inoltre l'approssimazione alla forma reale è tanto migliore quanto più questa è vicina a quella prismatica.

---

<sup>2</sup> Un'altra denominazione, ancora usata per ragioni storiche ma anch'essa impropria, è Rapid Prototyping (RP) o Prototipazione Rapida.

<sup>3</sup> Si considera il caso più generale di un oggetto delimitato da superfici curve e piane. In tal caso le sezioni sono, in generale, costituite da figure delimitate da profili composti da segmenti rettilinei e curvi. La traslazione di un profilo piano di tal tipo in direzione normale ad esso genera un cilindro finito generico, che risulta circolare soltanto nel caso particolare in cui il profilo è una circonferenza, mentre degenera in un prisma finito nell'altro caso particolare in cui il profilo è un poligono. Nel seguito, per



**Fig. 1 – Diminuendo l'altezza degli strati e aumentandone il numero, ci si avvicina sempre più alla forma originale dell'oggetto. (Modello dell'Autore eseguito con CATIA V5).**

---

semplicità, si userà indifferentemente il termine “strato finito” per indicare ciascuno dei cilindri o dei prismi “elementari” ottenuti con le operazioni poc’anzi indicate.

Questa tecnica, sempre più attuale per i suoi continui miglioramenti ed enormi vantaggi, può fornire il punto di partenza per un itinerario didattico, qui delineato, che coinvolge geometria euclidea, concetti di analisi infinitesimale e storia della scienza, nella piena affermazione del fusionismo, dell'interdisciplinarietà e della ricerca, nella realtà fisica, delle tracce del pensiero matematico.

Un esempio attuale di quel leggere "matematicamente" il mondo reale che fu il principio informatore di tutta la splendida e grandiosa opera galileiana, al quale furono particolarmente ligi, in tempi più recenti, Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo.

## 2 - L'Additive Manufacturing

L'*Additive Manufacturing* (AM) è una tecnologia generativa, cioè automatica, che permette di fabbricare un oggetto quasi direttamente<sup>4</sup> dal suo modello geometrico CAD 3D, suddividendolo tramite un opportuno software (detto genericamente *slicer*) in strati finiti molto sottili, dell'ordine di 10÷150 µm.

---

<sup>4</sup> Nell'*Additive Manufacturing* (AM) le operazioni di *Computer Aided Process Planning* (CAPP), ovvero di scelta dei parametri ottimali per la produzione, sono molto ridotte rispetto al *Subtractive Manufacturing* (SM) proprio delle lavorazioni ad asportazione di truciolo con macchine utensili a controllo numerico (CNC). Per tale motivo spesso, ma impropriamente, si dice che l'AM consente la produzione di un oggetto per lettura "diretta" del modello geometrico CAD 3D, ma non è così. Da qui l'improprietà di espressioni del tipo "stampa 3D diretta" e "stampante 3D".

Il modello geometrico 3D così partizionato in strati finiti viene dato come input a un prototipatore AM (spesso impropriamente detto “stampante 3D”)<sup>5</sup> che “legge” il profilo di ciascuno strato e, secondo diverse tecniche, realizza quest'ultimo fisicamente a partire dallo strato sottostante, aggiungendo quindi progressivamente materiale. Al limite, se gli strati fossero di spessore infinitesimo, e quindi di numero infinito, otterremmo esattamente la forma dell’oggetto, applicando lo stesso procedimento mentale del Calcolo Integrale.

Le fasi di creazione di un manufatto con l’AM sono più in dettaglio le seguenti:

- Sintesi geometrica 3D. Creazione del modello geometrico 3D con un sistema CAD.
- Tessellazione. Il modello geometrico 3D CAD viene convertito in un formato interpretabile dalle macchine AM o prototipatori RP (Rapid Prototyping). Inoltre sono creati i supporti per sostenere l’oggetto durante la fabbricazione. Gli standard ufficiali sono lo STEP AP204 e lo STEP AP214, ma lo standard industriale *de facto* è l’STL (*Standard Triangulation Language*) in cui il modello è tessellato secondo triangoli, di cui sono memorizzate le coordinate dei vertici e le normali esterne (figura 2).
- Pre-processing. Il file STL può presentare errori da correggere. Durante la tessellazione, infatti, possono insorgere molti problemi: strappi nella tessitura; triangoli

---

<sup>5</sup> Le macchine in grado di realizzare la Fabbricazione Additiva o a Strati sono ancora spesso chiamate “prototipatori”, riferendosi all’origine storica delle prime macchine di questo tipo, utilizzate per costruire prototipi.

degeneri, sovrapposti o intersecanti tipicamente dovuti agli algoritmi scelti; buchi dovuti al fatto che l'STL non interpreta sempre correttamente le operazioni booleane presenti nella geometria del modello CAD; presenza di geometrie non-manifold.<sup>6</sup> Questi errori impediscono di fabbricare l'oggetto con la AM., poiché non è più possibile nella successiva fase di *slicing* l'univoca definizione di ciò che deve essere riempito e di ciò che non deve esserlo. Numerosi sono i software esistenti sul mercato allo scopo di riparare questi errori.

- Slicing. Tramite un software detto *slicer*, è effettuata una partizione del modello STL in strati sottili (10-150  $\mu\text{m}$ ) generando così un file in formato SLI (*3D Systems Layer Interface*). Inoltre sono settati i parametri tecnologici che

---

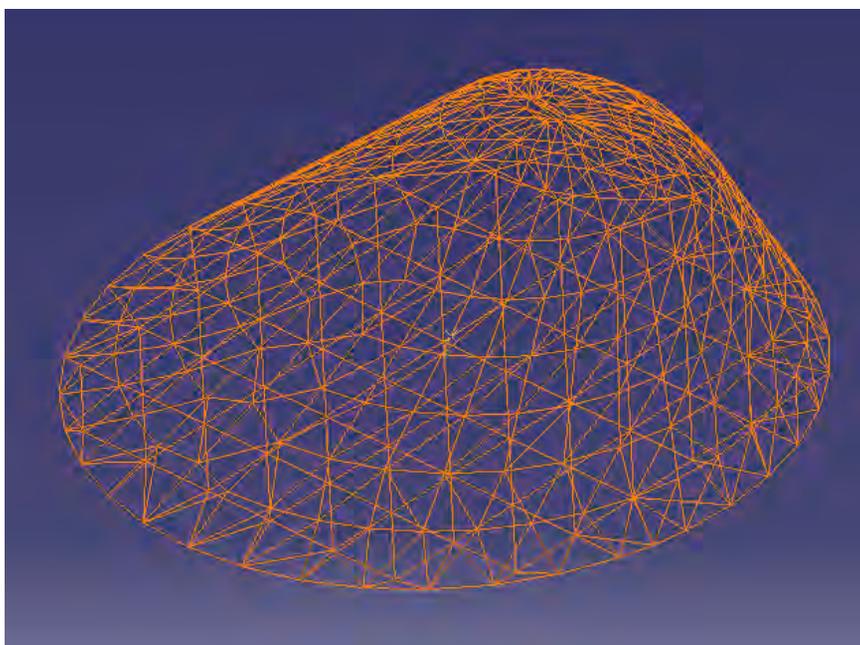
<sup>6</sup> Nella modellazione CAD un solido è definibile come un sottoinsieme dello spazio euclideo  $E^3$  detto R-set che gode delle seguenti proprietà:

1. limitato: ha un'estensione finita, ovvero può essere racchiuso da una sfera di raggio finito;
2. regolare: è omogeneamente tridimensionale, ovvero non ha facce e spigoli isolati ("pendenti"). Un insieme è regolare se è uguale alla chiusura topologica della sua parte interna;
3. semi-algebrico: è il risultato della combinazione di operazioni booleane (unione, intersezione, sottrazione e complemento) applicate a un numero finito di semispazi, ciascuno dei quali è definito da una disequazione algebrica della forma  $(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leq 0$ , dove  $f$  è un polinomio.

Le rappresentazioni dei solidi realizzate dai modellatori geometrici dei sistemi CAD sono dette manifold se sono R-sets, ovvero soddisfano pienamente le tre proprietà caratteristiche degli R-sets. In un solido manifold ciascuno spigolo deve essere condiviso da due facce soltanto e ogni vertice deve essere adiacente a un insieme di facce che formano un singolo cono uscente da esso. In altri termini, un solido manifold è un solido realizzabile fisicamente e quindi reale.

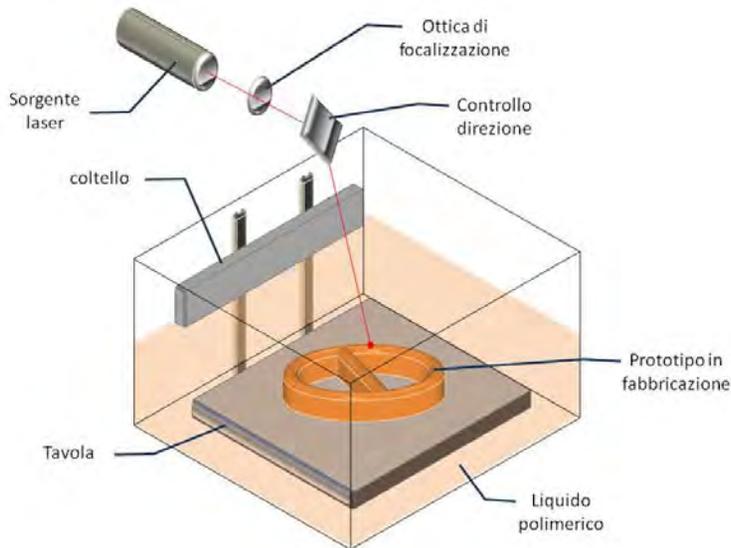
saranno applicati al processo (spessore dello strato, velocità di scansione, ecc.)

- Creazione di eventuali supporti (per sottosquadri).
- Toolpath. Creazione del percorso utensile (*toolpath*): sequenza ordinata delle posizioni dell'utensile durante il lavoro e gli spostamenti a vuoto.
- Realizzazione del file macchina finale costruttivo.
- Processing. Costruzione del modello fisico con macchine AM (prototipatori) secondo una delle tecniche AM.
- Postprocessing: rimozione dei supporti, pulitura, asciugatura e rifinitura del pezzo.



**Fig. 2 – Esempio di tessellazione ottenuta in un file STL. (Modello dell'Autore eseguito con CATIA V5).**

Attualmente sono utilizzate varie tecniche AM per la realizzazione fisica del modello 3D geometrico, ma la più diffusa è ancora la prima apparsa in ordine cronologico nel 1986 (Hull,1986): la stereolitografia (SLA).<sup>7</sup>



**Fig. 3 – Schema di macchina per la stereolitografia (SLA).**

Una tavola mobile verticalmente (elettrolitica) entro una vasca contenente una resina polimerica liquida è inizialmente posta appena al di sotto della superficie libera di questa. Un fascio laser (Ar, He-Cd), tramite un sistema a scansione, si

---

<sup>7</sup>Le principali tecniche AM sono: SLS (Selective Laser Sintering), SLM (Selective Laser Melting), FDM (Fused Deposition Modeling), LOM (Laminated Object Manufacturing), LPF (Laser Powder Forming), LENS (Laser Engineered Net Shaping), Inkjets, 3DP (Three Dimensional Printing). Per una descrizione dettagliata di tali tecniche cfr. Alberto Boschetto, Luca Nicotra, "Prototipazione Rapida" in (Nicotra, Campana, 2014, pp. 341-381).

muove sul piano  $xy$ , colpendo la superficie del liquido, in modo da descrivere la sezione dell'oggetto da creare, leggendone la geometria dal file macchina finale. Al contatto con la luce laser, il polimero solidifica. Non appena uno strato è completato, la tavola si abbassa e viene ricoperta da un nuovo strato di resina: la lavorazione riprende (figura 3). I materiali utilizzati sono soprattutto resine.

Con altre tecniche AM (SLS, SLM, LPF, LENS), invece, sono sempre più utilizzati, oggi, anche materiali metallici.



**Fig. 4 - Piramide a gradoni del faraone Djoser (?-2660 a.C.) nella necropoli di Sakkara in Egitto, vicino Menfi. Costruita dall'architetto Imhotep.**

Le prime "piramidi a gradoni" dell'Antico Egitto forniscono un'immagine antica molto eloquente della possibilità di approssimare la forma di una piramide con la tecnica dell'*Additive Manufacturing*: il risultato è proprio quello che si otterrebbe immaginando di suddividere la piramide in un

numero finito di strati di forma tronco-piramidale, costituiti da mastabe<sup>8</sup> sovrapposte di dimensioni decrescenti (figura 4).

L'*Additive Manufacturing* sta ottenendo oggi sempre più attenzione dal mondo della ricerca e della produzione, per alcuni importanti vantaggi rispetto ai tradizionali metodi di *Subtractive Manufacturing* delle macchine utensili ad asportazione di truciolo: maggiore rapidità, maggiore economicità, possibilità di realizzare geometrie molto complesse e di produrre pochi pezzi, al limite anche uno soltanto.<sup>9</sup> Per contro permangono ancor oggi alcuni importanti limiti, quali la scarsa finitura superficiale, le dimensioni piuttosto contenute dei pezzi realizzabili<sup>10</sup> e le loro proprietà meccaniche generalmente insufficienti per un completo uso funzionale.

### 3 - Origini storiche dell'Additive Manufacturing

Le radici storiche di questa nuova tecnologia appartengono a due campi distinti: la fotoscultura e la topografia della seconda metà del secolo XIX (Bourell, Beaman Jr., Leu, Rosen,

---

<sup>8</sup> La mastaba era la più antica forma di sepoltura dei sovrani dell'Antico Egitto, che consisteva nel sigillare la tomba reale, disposta varie decine di metri sotto il livello del suolo, con una costruzione in muratura di forma tronco-piramidale. Da più mastabe di dimensioni decrescenti disposte l'una sopra l'altra sono derivate le piramidi a gradoni, poi perfezionate nelle piramidi vere e proprie eliminando i gradini.

<sup>9</sup> Impossibile invece con le macchine tradizionali CNC per motivi economici.

<sup>10</sup> Ma in alcuni casi questo limite è stato aggirato con opportune soluzioni, riuscendo a realizzare anche l'intera carrozzeria di una autovettura.

2009).

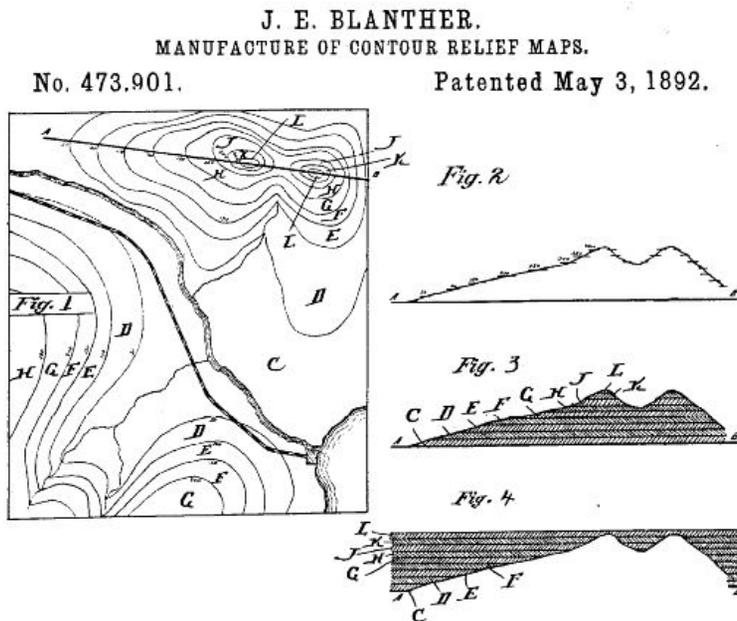
La fotoscultura è nata utilizzando la macchina fotografica per creare un'esatta replica tridimensionale di un oggetto di forma qualunque e quindi anche di una figura umana. Il primo tentativo in tal senso fu la tecnica di fotoscultura ideata e realizzata dal francese François Willème nel 1860.



**Fig. 5 – Attrezzatura per la fotoscultura secondo François Willème.**

L'oggetto (o la persona umana) era collocato sopra una piattaforma circolare e fotografato contemporaneamente da 24 macchine fotografiche equidistanziate angolarmente sulla circonferenza della piattaforma (figura 5). Successivamente un artigiano scolpiva ciascuna delle 24 porzioni della figura, utilizzando la sagoma di ogni fotografia. La tecnica fu poi perfezionata da Carlo Baese (1904).

Più vicina a quella che poi sarà la caratteristica tecnica “a strati” dell’*Additive Manufacturing* fu certamente il primo tentativo di J. E. Blather di costruire mappe topografiche tridimensionali, producendo la prima rudimentale apparecchiatura in grado di produrre oggetti per successivi strati. Essa fu ideata e costruita nel 1892 da Blather, per costruire stampi destinati a realizzare mappe topografiche in rilievo (figura 6).



**Fig. 6 – Mappe topografiche in rilievo di Blather.**

Tale metodo consisteva nell’incidere le linee di livello del terreno su lastre, nel ritagliare queste ultime lungo le linee di livello e nel sovrapporre le lastre così ritagliate le une sulle altre, formando un modello fisico tridimensionale del terreno, che poteva essere utilizzato sia come parte positiva dello

stampo (modello pattern) sia come parte negativa. Questa tecnica fu poi perfezionata da altri: B.V. Perera (1940), E. E. Zang (1964), T. A. Gaskin (1973), K. Matsubara (1974), P. L. Di Matteo (1976), T. Nakagawa (1979).

Soltanto, però, nel 1951 Otto John Munz ideò un sistema, brevettato nel 1956, con le caratteristiche della attuale stereolitografia (Munz, 1956): una vasca, comandata da una piattaforma, contenente una emulsione indurente di tipo fotografico veniva elevata di quantità discrete, strato dopo strato, e trattata in negativo.

Ma la stereolitografia vera e propria, come processo che solidifica tramite luce laser sottili strati di un polimero liquido sensibile alle radiazioni ultraviolette, si affermò soltanto nel 1986 con il brevetto industriale di Charles W. Hull, che fondò anche la famosa società 3D Systems (Hull, 1986).

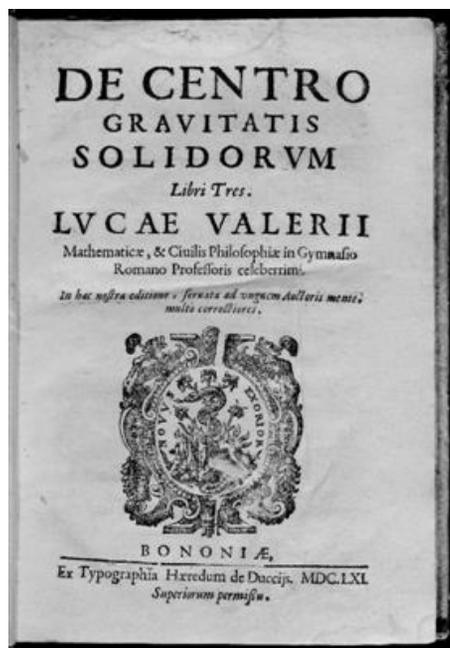
#### **4 - L' Additive Manufacturing: un'idea del 1604 realizzata oltre tre secoli dopo**

Abbiamo precedentemente accennato alle origini storiche dell' *Additive Manufacturing* dal punto di vista "costruttivo" . Ma il principio geometrico su cui è fondata questa moderna tecnica costruttiva a strati, che permette di concepire un oggetto solido come somma di "numerose" sezioni sottilissime,<sup>11</sup> precede di almeno tre secoli i primi tentativi di realizzarla, trovandosi nell'opera *De centro gravitatis solidorum*,

---

<sup>11</sup> Ovviamente si tratta di sezioni non in senso geometrico ma in quello fisico di cui già precedentemente si è precisata la definizione (cilindri finiti elementari).

scritta nel 1604 dal matematico napoletano Luca Valerio, una delle figure più interessanti della matematica rinascimentale (figura 7).



**Fig. 7 - Copertina del *De centro gravitatis solidorum* di Luca Valerio (edizione del 1661).**

In essa il matematico napoletano riottiene la formula del volume della sfera, già ottenuta da Archimede, ma con un procedimento, ispirato ai metodi archimedei, anticipatore del Calcolo Infinitesimale. Tale procedimento viene rielaborato, molti anni dopo, da Bonaventura Cavalieri nella sua opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635) e riportato da Galileo Galilei nella Giornata Prima della sua celebre opera *Discorsi e dimostrazioni*

*matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), dove Luca Valerio viene chiamato «nuovo Archimede dell'età nostra».

Galilei cita il procedimento di Luca Valerio, per trovare il volume della sfera, a proposito dei numerosi paradossi cui dà luogo l'infinito in matematica.

Galileo, per bocca di Salviati, parla di "indivisibili" essendo stata pubblicata già da tre anni, nel 1635, l'opera di Cavalieri sugli indivisibili:

*(Salviati) ....ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprendibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor piccolezza.*

Galileo aveva intenzione di scrivere un libro sull'infinito, che purtroppo però non scrisse. Se lo avesse scritto, probabilmente avrebbe approfondito certe sue intuizioni geniali, evitando ai matematici tutte le diatribe sull'infinito nei due secoli che lo seguirono. Infatti, bisogna arrivare alla fine del secolo XIX per liberarsi definitivamente dai paradossi dell'infinito attuale, assumendo come definizione stessa di insieme infinito ciò che destava tanta meraviglia e sconcerto: il poter essere un insieme infinito equinumeroso o simile a un suo sottoinsieme proprio, ovvero la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca l'insieme con una sua parte.<sup>12</sup> Nel 1872, infatti, Richard Dedekind, nella sua opera *Stetigkeit und irrationale zahlen*, diede per la prima volta la seguente definizione di insieme infinito e di insieme finito: «Un sistema  $S$  si dice infinito quando è simile a una propria parte; in caso

---

<sup>12</sup> Molti autori (fra i quali Bertrand Russell) chiamano similitudine fra due insiemi la corrispondenza biunivoca fra i due insiemi.

contrario  $S$  si dice un insieme finito». George Cantor, qualche anno dopo, accolse la definizione di Dedekind ma mostrò come non tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi o meglio la stessa "infinità" di elementi, che egli chiamò potenza dell'insieme. Per esempio l'insieme dei numeri triangolari  $\{n(n+1)/2\}$ , dei quadrati perfetti, dei numeri pari, delle frazioni razionali sono simili ovvero hanno la stessa potenza, in quanto possono essere posti tutti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali  $\{1, 2, 3, \dots\}$ : sono numerabili. Cantor dimostrò che l'insieme dei numeri reali, invece, ha una potenza maggiore di quella dei numeri naturali: non è numerabile.

Ma in realtà questa definizione, coraggiosamente proposta da Dedekind, la si può leggere fra le righe nelle stesse parole di Galileo che, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, parlando sempre per bocca di Salviati, afferma:

*(Salviati). Io non veggio che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.*

Galileo è chiarissimo: i nostri concetti di minore, uguale, maggiore sono applicabili soltanto agli insiemi finiti ma non a quelli infiniti, che sono caratterizzati proprio dalla loro non applicabilità. Da queste parole alla definizione moderna di insieme infinito il passo è veramente breve.

## 5 - Il paradosso della scodella di Luca Valerio

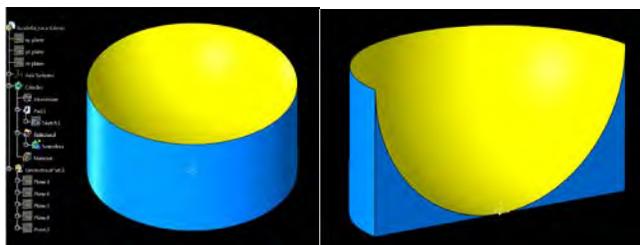
Ricordando il procedimento di Luca Valerio per trovare il volume della sfera, Galileo trova un altro di questi paradossi dell'infinito: un punto risulta uguale a una circonferenza. Dice, infatti, Salviati, rispondendo a Sagredo:

*(Salviati). Così si faccia, poiché tale è il vostro gusto: e cominciando dal primo, che fu come si possa mai capire che un sol punto sia eguale ad una linea....*

e Galileo prosegue nel suo dialogo con Sagredo, rassicurandolo che potrà capire facilmente questo paradosso («in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia») seguendo una dimostrazione veramente breve e facile dovuta a Luca Valerio, fatta non per investigare i problemi dell'infinito ma per «un altro suo proposito»:

*(Salviati). La dimostrazione è anco breve e facile. [...] la troveremo nella duodecima proposizione del libro secondo De centro gravitatis solidorum posta dal Sig. Luca Valerio, nuovo Archimede dell'età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì, sì perché nel caso nostro basta l'aver veduto come le superficie già dichiarate siano sempre eguali, e che, diminuendosi sempre egualmente, vadano a terminare l'una in un sol punto e l'altra nella circonferenza d'un cerchio, maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perché in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia.*

Ma seguiamo la dimostrazione di Luca Valerio. A una semisfera il cui raggio misuri  $r$  (rispetto a una unità di misura arbitraria) viene circoscritto un cilindro rotondo che ha quindi anch'esso pari a  $r$  sia il raggio di base sia l'altezza (figure 8a e 8b).



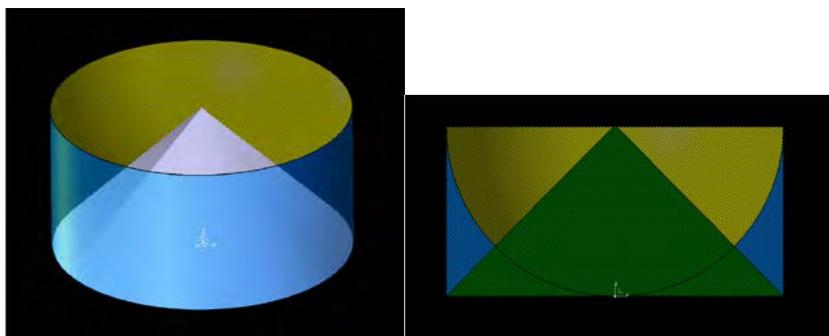
**Figg. 8a e 8b - La scodella di Luca Valerio**  
(modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).

Costruiamo poi il cono rotondo retto inscritto nel cilindro, avente quindi la stessa base e la stessa altezza di questo (figura 9a). Il solido ottenuto sottraendo la semisfera dal cilindro viene chiamato da Galilei "scodella":

*Per tanto intendasi il mezzo cerchio AFB, il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo ADEB, e dal centro a i punti D, E siano tirate le rette linee CD, CE; figurandoci poi il semidiametro CF, perpendicolare a una delle due AB, DE, immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura: è manifesto che dal rettangolo ADEB verrà descritto un cilindro, dal semicircolo AFB una mezza sfera, e dal triangolo CDE un cono. Inteso questo, voglio che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella: della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali;*

Per tale motivo è nota con il nome "scodella di Galileo", ma in realtà è di Luca Valerio, il quale immagina di tagliare con

piani paralleli alla base del cilindro i quattro solidi così costruiti: cilindro, semisfera, scodella e cono. Considerando una sezione longitudinale (figura 9b) dei quattro solidi, Valerio trae alcune semplici relazioni geometriche che lo portano a concludere, nella dodicesima proposizione del secondo libro del *De centro gravitatis solidorum* (riportata per intero in calce a questo articolo), che la semisfera ha volume doppio del cono: «*Hemisferium duplum est conii, cylindri autem subsesquialterum eandem ipsi basim, et eandem altitudinem habentium*».



**Figg. 9a e 9b - La scodella e il cono di Luca Valerio  
(modello 3D CATIA V5 realizzato dall'autore).**

Ciò dimostrato, è immediato ritrovare la formula del volume della sfera, tenuto conto della formula del volume del cono retto inscritto nel cilindro.

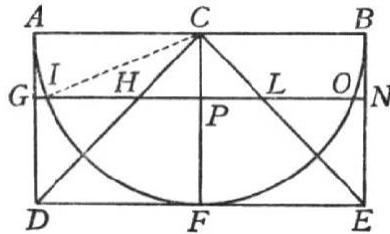
Per seguire la dimostrazione di Valerio conviene, però, utilizzare la figura di Galileo (figura 10) contenuta nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, nella quale la "scodella" è rivolta verso l'alto, come è più naturale e comodo pensare.

Detta  $x$  la misura (rispetto alla stessa unità usata per il raggio della semisfera) della distanza variabile del piano secante GN dalla sommità AB della scodella, dalla figura 10 possiamo facilmente trarre le seguenti relazioni:

$$PG = FD = CF = CI = r$$

$$CP = PH = x \text{ (essendo } \widehat{HCP} = 45^\circ)$$

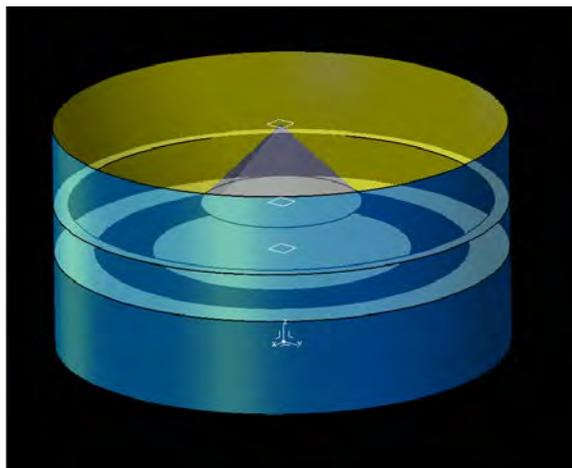
$$PI^2 = CI^2 - CP^2 = r^2 - x^2$$



**Fig. 10 - Scodella di Galileo (da *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata Prima*).**

Inoltre il piano GN taglia :

- il cilindro secondo il cerchio di area  $\pi PG^2 = \pi r^2$
- la semisfera secondo il cerchio di area  $\pi PI^2 = \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2$
- il cono secondo il cerchio di area  $\pi PH^2 = \pi x^2$
- la scodella secondo la corona circolare di area  $\pi PG^2 - \pi PI^2 = \pi r^2 - (\pi r^2 - \pi x^2) = \pi x^2$



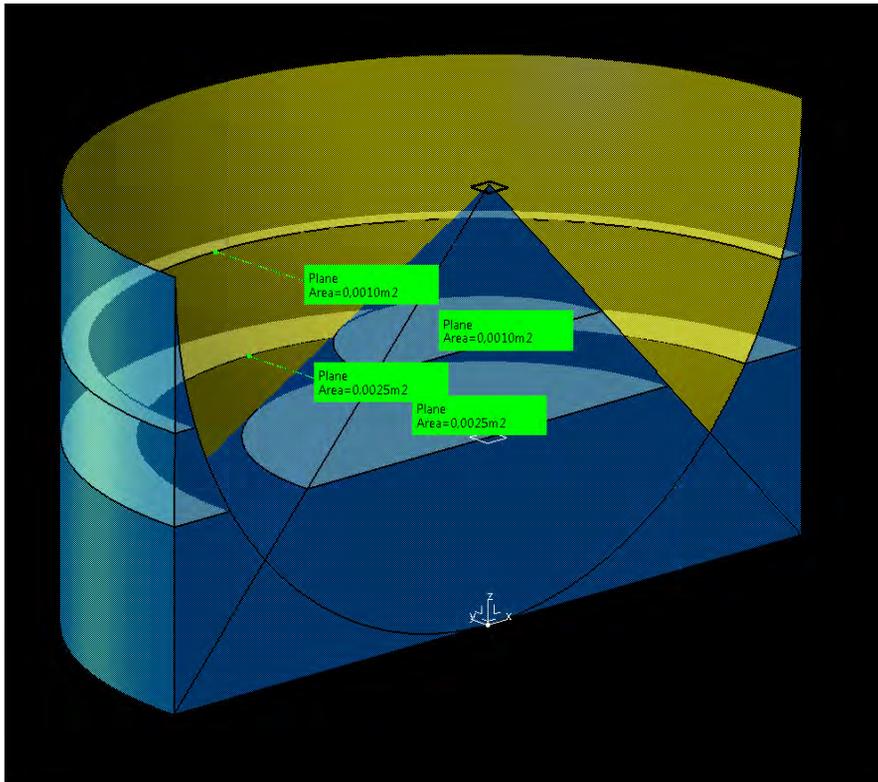
**Fig. 11a -** Sezioni della scodella e del cono ottenute con un qualunque piano parallelo alla base del cono (modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).

Poiché queste relazioni sono state ricavate considerando un piano secante  $GN$  qualunque, Luca Valerio conclude che qualunque sia la sua posizione, *il piano secante  $GN$  taglia la scodella e il cono secondo sezioni di uguale area ( $\pi x^2$ )* (figure 11a e 11b).

La dimostrazione data da Luca Valerio segue esattamente lo sviluppo poc'anzi dato in termini puramente geometrici ma non facilmente comprensibili, come è possibile rendersi conto dall'originale riportato in calce all'articolo. L'applicazione dell'algebra alla geometria, invece, rende molto più comprensibile e breve la dimostrazione, come è stato mostrato poco sopra.

A questo punto è facile capire il paradosso che Galileo aveva scoperto nella dimostrazione di Valerio: il piano  $GN$  nella sua posizione limite coincidente con la sommità della

scodella intercetta il cono nel suo vertice e la scodella nella circonferenza del cilindro. Ma la proprietà dimostrata per un qualunque piano secante GN deve valere pure in questo caso: il vertice del cono è pertanto uguale come estensione alla circonferenza. Ecco come per Salviati (cioè per Galileo) «si possa mai capire che un sol punto sia eguale ad una linea».



**Fig. 11b - Le sezioni della scodella e del cono ottenute con un qualunque piano parallelo alla base del cono hanno sempre uguale area (modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).**

## 6 - Dalla sezione all'intero solido

Dal procedimento seguito nella sua dimostrazione della formula del volume della sfera, Luca Valerio è portato a concepire la scodella e il cono formati dalla sovrapposizione di "tanti sottilissimi fogli" di aree uguali, rispettivamente a forma di corona circolare e di cerchio, concludendo in tal modo con l'uguaglianza dei volumi della scodella e del cono:<sup>13</sup>

$$\text{Vol. scodella} = \text{vol. cono} = \frac{1}{3} \text{vol. cilindro circoscritto} = \frac{1}{3} \pi r^3$$

ma poiché:

$$\begin{aligned} \text{Vol. semisfera} &= \text{vol. cilindro} - \text{vol. scodella} = \\ &= \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

«*Manifestum est propositum*», ovvero è dimostrato l'asserto della proposizione XII del *De centro gravitatis solidorum*: il volume della semisfera è doppio del volume del cono retto avente la stessa base e la stessa altezza del cilindro circoscritto alla semisfera.

In tal modo Luca Valerio ritrova rapidamente la formula del volume della sfera:

$$\text{Volume sfera} = 2 \times \text{Volume semisfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

È implicito nel ragionamento di Valerio che "tanti sottilissimi fogli" voglia dire infiniti fogli di spessore

---

<sup>13</sup> In virtù del postulato 2 delle Nozioni Comuni della geometria euclidea: *se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interi sono uguali.*

infinitesimo, cioè tendente a zero. Questo concetto sarà ripreso diversi anni dopo, nel 1626,<sup>14</sup> da Bonaventura Cavalieri, il quale darà un nome preciso agli infiniti fogli infinitesimi della scodella di Luca Valerio: "indivisibili", una specie di atomi delle figure geometriche, corrispondenti dunque agli infinitesimi del moderno Calcolo Infinitesimale.

La scodella di Luca Valerio porta a una conclusione veramente sorprendente: il principio costruttivo dell'*Additive Manufacturing* non è altro che una "materializzazione" di una fase "finita" del processo matematico "ad infinitum" del passaggio al limite che permette il calcolo del volume di un solido come integrale definito:

$$V = \int_v dv$$

ovvero come "somma di infiniti straterelli infinitesimi", ovvero degli infiniti "indivisibili" di Cavalieri che compongono il solido.

Certamente occorre molto altro affinché un'idea possa tradursi in qualcosa di concreto e utile. E questo è il compito primario del tecnologo. Diceva Herbert Hoover, ingegnere e 31° presidente degli Stati Uniti d'America: «Gran professione quella dell'ingegnere! Con l'aiuto della scienza ha il fascino di trasformare un pensiero in linee di un progetto per realizzarlo poi in pietra o metallo o energia».

Tuttavia il padre dell'idea matematica dell'*Additive Manufacturing* può essere considerato un matematico del secolo XVI: Luca Valerio.

---

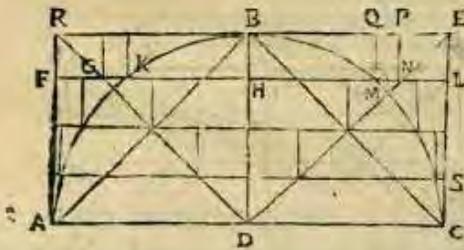
<sup>14</sup> Quindi nove anni prima della pubblicazione ufficiale dell'opera sugli indivisibili *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*.

Luca Valerio, *De centro gravitatis solidorum*  
Edizione del 1661, pagine 83-85.



84 *De Centro gravitatis solidorum*

cum scripta, illa inscripta, ut circumscripta excedat hemisphaerium, minori excessu, inscripta vero deficiat à cono minori defectu quam sit magnitudo proposita, quantacumque illa sit. His constitutis, manifestum est, reliquo cylindri  $AB$  dempto hemisphaerio inscriptam esse figuram ex residuis cylindrorum, in quos cylindrus  $AB$  sectus fuerit, demptis cylindris hemisphaerio circumscriptis, deficientem à reliquo cylindri  $AB$  dempto hemisphaerio minori defectu magnitudinis proposita, eodem scilicet, quo figura hemisphaerio circumscripta excedit hemisphaerium, excepto residuo cylindri infimi  $AS$ , dempta hemisphaerij portione, quam comprehendit. Sit autem omnium praedictorum



cylindri  $AB$  cylindrorum supremus  $FB$ , cuius axis  $BH$ , & communis sectio plani per punctum  $H$  transeuntis basi hemisphaerij cum plano per axim  $BD$ , sit recta  $FGKHMNL$ . Quoniam igitur rectangulum  $DHB$  bis una cum duobus quadratis  $DH$ ,  $BH$ , æquale est  $BD$  quadrato: & rectangulum  $DHB$  bis una cum quadrato  $BH$ , est rectangulum ex  $BD$ ,  $DH$  tamquam una, &  $BH$ ; rectangulum ex  $BD$ ,  $DH$  tamquam una, &  $BH$ , una cum quadrato  $DA$  æquale erit quadrato  $BD$ , hoc est quadrato  $FH$ : quorum quadratum  $KN$  æquale est rectangulo ex  $BD$ ,  $DH$ , tamquam una &  $BH$ ; reliquum igitur quadrati  $FH$  dempto quadrato  $KN$ , æquale erit reliquo quadrato  $DH$ , hoc est quadrato  $GH$ : & quadruplum quadruplo reliquum quadrati  $FL$  dempto quadrato  $MK$  toti  $GN$  quadrato, hoc est reliquum circuli,  $FL$  dempto circulo  $MK$ , æquale circulo  $GN$ . Quare &  $GF$ , cylindrus reliquo cylindri  $FB$  dempto  $QK$ , cylindro æqualis erit, propter æqualita-

*Liber Secundus.*

85

litatem altitudinum. Similiter ostenderemus singula reliqua cylindrorum eiusdem altitudinis, in quos totus cylindrus  $AB$  sectus fuit demptis cylindris hemisphærio circumscriptis æqualia esse singulis cylindris cono  $EDR$  inscriptis, quæ inter eadem plana interijciuntur. Tota igitur figura ex prædictis cylindrorum residuis reliquo cylindri  $AE$ , dempto hemisphærio inscripta æqualis erit figuræ cono  $EDR$  inscriptæ; deficit autem utraque harum figurarum hæc à cono  $ADR$ , illa à residuo cylindri  $AE$ : dempto hemisphærio minori excessu magnitudine utcumque proposita; reliquum igitur cylindri  $AE$  dempto hemisphærio æquale est cono  $EDR$ , sed conus  $EDR$ ; hoc est conus  $AEC$  cylindri  $AE$  est pars tertia; reliquum igitur cylindri  $AE$  dempto hemisphærio, cylindri  $AE$  est pars tertia, hoc est cylindrus  $AE$  triplus dicti residui: quamobrem  $AE$  cylindrus sesquialter hemisphærij  $AEC$ : & conuertendo, hemisphærium cylindri  $AE$  sublesquialterum: conij igitur  $AEC$  duplum. Manifestum est igitur propositum.

PROPOSITIO XIII.

Omnis minor sphaeræ portio, ad cylindrum, cuius basis æqualis est circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam excessus, quo tripla semidiameter sphaeræ excedit tres deinceps proportionales, quarum maxima est sphaeræ semidiameter, media vero quæ inter centra sphaeræ, & basis portionis interijcitur; ad semidiametri sphaeræ triplam.

Sit sphaeræ, cuius centrum  $D$ , semidiameter  $BD$ , minor portio  $ABC$ , cuius axis  $BC$  segmentum semidiameter  $BD$ , basis autem circulus, cuius diameter  $AC$ . Sitque  $EF$ , cylindrus, cuius axis, siue altitudo eadem  $BC$ : basis autem æqualis circulo maximo,

## Bibliografia

ALESSANDRINI A. (1992). "Luca Valerio Linceo", in L. Conti (cur.), *La matematizzazione dell'universo: Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, pp. 238-252. Assisi.

BAESE Carlo (1904). "Photographic Process for the Reproduction of Plastic Objects", *US Patent#774,549*.

BOYER Carl Benjamin (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Courier Dover Publications.

BALDINI U., NAPOLITANI P. D. (1991). Toward a biography of Luca Valerio : published and unpublished sources for a reconstruction of his scientific career (Italian), «*Boll. Storia Sci. Mat.*» **11** (1).

BLANTHER J. E., (1892). "Manufacture of Contour Relief Maps", *US Patent #473,901*.

BOURELL David L., BEAMAN Joseph J. Jr., LEU Ming C. and ROSEN David W. (2009). A Brief History of Additive Manufacturing and the 2009 Roadmap for Additive Manufacturing: Looking Back and Looking Ahead. In *US - TURKEY Workshop On Rapid Technologies, September 24 - 24, 2009*.

BOSMANS H., Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luca Valerio, «*Annales de la Société scientifiques de Bruxelles*» **37** (1912-13), 211-28.

DI MATTEO Paul L. (1976). "Method of Generating and Constructing Three-Dimensional Bodies", *US Patent #3,932,923*.

DIVIZIA F. (1983). Remarks on "De centro gravitatis solidorum" of Luca Valerio (Italian), «*Physis - Riv. Internaz. Storia Sci.*» **25** (2), 227-249.

EUGENI Franco (2022). Dal Metodo di Esaustione alla Teoria degli indivisibili e i principi di Cavalieri e Torricelli. In «Periodico di Matematica» (IV), Vol. IV (1), pp. 197-206.

FRAJESE Attilio (1954). *Che cosa è il calcolo infinitesimale*. Roma: Universale Studium.

FREEDBERG D. (2002). *The Eye of the Lynx: Galileo, His Friends, and the Beginnings of Modern Natural History*. Chicago: University of Chicago Press.

GABRIELI G. (1933). Luca Valerio Linceo, «*Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti*» 9, 691-728.

GASKIN T.A. (1973). "Earth Science Teaching Device ", *US Patent #3,751,827*.

HULL Charles W. (1986). "[Apparatus for production of three-dimensional objects by stereolithography](#), Mar 11, 1986" (SLA).

LOMBARDO RADICE Lucio (1976). *La matematica da Pitagora a Newton*. Roma: Editori Riuniti.

MARACCHIA Silvio (1992). Luca Valerio matematico Linceo, in L. Conti (cur.), *La matematizzazione dell'universo: Momenti della cultura matematica tra '500 e '600 (Assisi,)*, 253-302.

MATSUBARA K. (1974). "Molding Method of Casting Using Photocurable Substance ", *Japanese Kokai Patent Application, Sho 51 [1976]-10813*.

MUNZ Otto John (1956). "Photo-Glyph Recording", *US Patent #2,775,758*.

NAKAGAWA T., et al (1979). "Blanking Tool by Stacked Bainite Steel Plates ", «*Press Technique*», pp. 93-101.

NAPOLITANI P. D. (1982). Method and statics in Valerio : With editions of two early works (Italian), «*Boll. Storia Sci. Mat.*» 2 (1), 3-86.

NAPOLITANI P. D., SAITO K. (2004). Royal road or labyrinth? Luca Valerio's "De centro gravitatis solidorum" and the beginnings of modern mathematics, *«Boll. Stor. Sci. Mat.»* 24 (2), 67-124.

NICOTRA Luca, CAMPANA Francesca (cur.) (2014). *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1*. Roma: UniversItalia, marzo 2014, 2a ed. accresciuta.

NICOTRA Luca (2015). Luca Valerio: padre del principio geometrico dell'Additive Manufacturing. In *«Emmeciquadro»*, n. 59, 30 dicembre 2015, Milano.

<http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-59/2015/12/30/SCIENZAeSTORIA-Luca-Valerio-padre-del-principio-geometrico-dell-Additive-Manufacturing-/653570/>.

PERERA B.V. (1940), "Process of Making Relief Maps ", *US Patent #2,189,592*.

RUSSELL R. (2006). *Margherita Sarrocchi and the Writing of the Scanderbeide*, in *Scanderbeide: The Heroic Deeds of George Scanderberg, King of Epirus*. University of Chicago Press.

STROMHOLM P. (1970-1990). Valerio (or Valeri), Luca in *«Dictionary of Scientific Biography»* (New York 1970-1990). <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904430.html>.

TOSI A. (1957). "De centro gravitatis solidorum "di Luca Valerio, in *«Periodico di matematiche»*, 35 , 189-201.

ZANG E.E. (1964). "Vitavue Relief Model Technique", *US Patent #3,137,080*.

\*\*\*\*\*

## Elogio di Max Planck

*Il tempio della scienza è una costruzione multiforme.*

*Gli uomini che vi si trovano e le forze spirituali che ve li hanno condotti sono molto diverse. Non pochi si occupano della scienza con il lieto sentimento della loro superiorità d'ingegno; per essi la scienza è una specie di sport, che deve procurar loro un'intensa vita personale e soddisfare l'ambizione; ma in questo tempio si trovano anche molti che vi consumano il sacrificio della loro materia cerebrale solo per fini utilitaristici. Ora, se per ipotesi venisse un angelo e scacciasse dal tempio tutti quelli che appartengono a queste due categorie, esso si svuoterebbe in maniera preoccupante ma nel tempio rimarrebbero pur sempre uomini dell'epoca presente e delle epoche passate. Uno di costoro è il nostro Planck; per questo gli vogliamo bene.*

Albert Einstein, *Principi della ricerca (Prinzipien der Forschung)* discorso pronunciato da Albert Einstein nel 1918 per la celebrazione del 60° compleanno di Max Planck, alla Società di Fisica di Berlino. Pubblicato per la prima volta in «Mein Weltbild», Querido Verlag, Amsterdam 1934, riprodotto in italiano in Max Planck, *Scienza, filosofia e religione*, Milano: Fratelli Fabbri, 1973.

\*\*\*\*\*