

Giuseppe Tallini

## Geometria elementare da un punto di vista superiore

### 1. Introduzione

Esistono problemi di geometria elementare, cioè enunciati nell'ambito della geometria euclidea, di non facile soluzione in tale ambiente, ma che si risolvono agevolmente, come vedremo, ponendosi ad un livello superiore. Tali problemi, che sembrano di natura metrica, sono di fatto pertinenti ad un ambito più generale quale quello della geometria proiettiva. Situazioni di questo tipo si presentano in generale non di rado in matematica. Esporremo ora alcuni problemi al riguardo e poi ne daremo la naturale soluzione.

*PROBLEMA I.* Nel piano euclideo reale si considerino due coppie di circonferenze  $A, A'$  e  $B, B'$ . Provare che se i quattro punti d'incontro  $A \cap A'$  e  $B \cap B'$  appartengono ad una circonferenza, i quattro punti  $A \cap B$  e  $B' \cap A'$  appartengono anche essi ad una circonferenza (vedi fig.1).

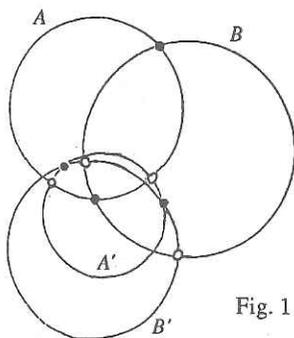


Fig. 1

**PROBLEMA II.** Ricordiamo che due circonferenze  $A$  e  $B$ , intersecanti nei punti  $P$  e  $Q$ , si dicono ortogonali se le tangenti in  $P$  ad  $A$  e  $B$  sono ortogonali ed allora ciò accade anche per il punto  $Q$ . Provare che se  $C_1$  e  $C_2$  sono circonferenze ortogonali a una circonferenza  $C$ , ogni circonferenza del fascio determinato da  $C_1$  e  $C_2$  (cioè passante per i punti d'incontro  $\{H, K\} = C_1 \cap C_2$ ) è ortogonale a  $C$  (vedi fig. 2).

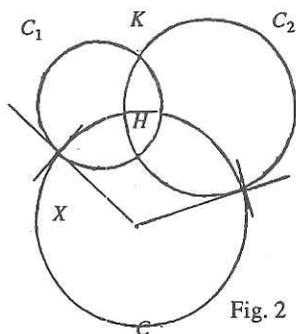


Fig. 2

**PROBLEMA III** (o problema di Apollonio). Date tre circonferenze  $C_1, C_2, C_3$  non formanti fascio provare che esiste una ed una sola circonferenza  $C$  ortogonale a tutte e tre (vedi fig. 3).

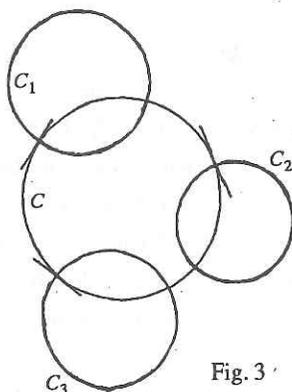
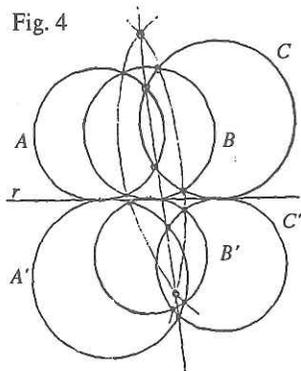


Fig. 3

**PROBLEMA IV** (o problema delle tre coppie di circonferenze tangenti ad una retta). Sia  $r$  una retta,  $A$  ed  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$  tre coppie di circonferenze tangenti ad  $r$  in tre punti distinti. Provare che i quattro punti  $(A \cap B) \cup (A' \cap B')$  stanno su una circonferenza  $C_1$ , così i quattro punti  $(A \cap C) \cup (A' \cap C')$  stanno su una circonferenza  $B_1$  ed i quattro punti  $(B \cap C) \cup (B' \cap C')$  stanno su una circonferenza  $A_1$  e che le tre circonferenze  $A_1, B_1, C_1$  formano fascio (fig.4).

Fig. 4



**PROBLEMA V.** Siano  $X, Y$  due punti interni ad una circonferenza  $C$ . Provare che esiste uno ed uno solo arco di circonferenza per  $X$  ed  $Y$  ortogonale a  $C$ .

## 2. Il modello di Poincaré della geometria non euclidea

Prima di dare la soluzione dei problemi precedenti, vorrei mostrare l'interesse applicativo che per esempio il problema V riveste. Il modello della geometria non euclidea piana di Poincaré risulta, come è noto, il seguente. Nel piano di Argand-Gaus che rappresenta i numeri complessi  $z = x + iy$ , denotiamo con  $P$  l'insieme dei punti interni alla circonferenza  $C$  con centro l'origine e raggio 1,  $|z| = 1$ . Chiameremo "rette" di  $P$  gli archi di circonferenza interni a  $C$ , ortogonali a  $C$ . Per il problema V si ha che per due punti  $X$  e  $Y$  di  $P$  passa una ed una sola "retta". Definiamo lunghezza di una curva  $L$  in  $P$  il numero  $|L|$  seguente:

$$|L| = \int_L \left[ \frac{z dz}{1 - |z|^2} \right].$$

Dati due punti  $X, Y$  si definisce geodetica tra  $X$  ed  $Y$  la curva di lunghezza minima tra  $X$  ed  $Y$ . Si può provare che le geodetiche risultano gli archi di circonferenza, interni a  $P$ , ortogonali a  $C$ , cioè le "rette" su definite. Si definisce poi distanza,  $d(X, Y)$ , tra  $X$  ed  $Y$  la lunghezza da  $X$  ad  $Y$  dell'arco di circonferenza per  $X$  ed  $Y$  orto-

gonale a  $C$ . Lo spazio metrico  $(P,d)$  è il modello di Poincaré della geometria non euclidea piana. Il gruppo dei movimenti di tale geometria è dato dal gruppo delle sue isometrie. I punti di  $C$  si dicono punti ideali, due "rette" si dicono parallele se s'incontrano in un punto ideale. Dal problema  $V$  segue che per un punto  $X$  passano due "rette" parallele ad una data retta non passante per  $X$ .

### 3. Lo spazio dei cerchi

Fissato un riferimento ortogonale monometrico  $O(x,y)$  del piano euclideo reale  $E$  complessificato, una circonferenza  $C$  con centro un punto  $P(\alpha,\beta)$  e raggio  $r$  ha equazione:

$$(3.1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

cioè:

$$(3.2) \quad x^2 + y^2 + ax^2 + bx^2 + c = 0,$$

ove si è posto:

$$(3.3) \quad a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Dall'ultima delle (3.3) otteniamo:

$$(3.4) \quad r = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}).$$

Generalizzando definiamo circonferenza del piano  $E$  ogni curva di equazione (3.2). Si ha allora per la (3.4):

$$(3.5) \quad a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow \text{circonferenza di raggio reale,}$$

$$(3.6) \quad a^2 + b^2 - 4c = 0 \Rightarrow \text{circonferenza di raggio nullo,}$$

$$(3.7) \quad a^2 + b^2 - 4c < 0 \Rightarrow \text{circonferenza di raggio immaginario.}$$

Denoteremo con  $C$  l'insieme delle circonferenze del piano  $E$ . Consideriamo lo spazio  $R^3$  di coordinate  $(a,b,c)$ . Si consideri la biezione:

$$(3.8) \quad \ell : C \in C \rightarrow (a,b,c) \in R^3,$$

Ove  $C$  è la circonferenza di equazione (3.2). In tal modo le circonferenze del piano  $E$  si rappresentano biunivocamente mediante i punti di  $R^3$ .

Si passi ora a coordinate omogenee in  $R^3(a,b,c)$ , ponendo:

$$(3.9) \quad a = \frac{a_1}{a_0}, \quad b = \frac{a_2}{a_0}, \quad c = \frac{a_3}{a_0}.$$

Si amplii poi  $R^3(a,b,c)$  nello spazio proiettivo  $P(3,R)$  di dimensione tre sui reali, di coordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ . L'equazione della circonferenza (3.2) diventa allora:

$$(3.10) \quad a_0(x^2 + y^2) + a_1x^2 + a_2y^2 + a_3 = 0.$$

Denotiamo ora con  $C_0$  l'insieme delle circonferenze e delle rette (che si possono interpretare come circonferenze di raggio infinito) del piano  $E$ .

Si può allora estendere la biezione  $\ell$  alla biezione:

$$(3.11) \quad \ell_0 : C \in C_0 \rightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) \in P(3,R),$$

ove  $C$  è la circonferenza (3.10). In tale rappresentazione alle rette del piano  $E$ , che si ottengono dalla (3.10) per  $a_0 = 0$ , corrispondono i punti impropri di  $P(3,R)$  e viceversa.

Ricordiamo che un fascio di circonferenze del piano  $E$ , o è costituito da tutte le circonferenze aventi uno stesso centro (fascio di circonferenze concentriche, essi si ottiene facendo combinazione lineare di due circonferenze con lo stesso centro), oppure è l'insieme delle circonferenze passanti per due punti  $X, Y$ , esso si ottiene facendo combinazione lineare di due circonferenze passanti per tali punti che prendono il nome di punti base del fascio. La retta  $XY$  dicesi retta radicale. La perpendicolare alla  $XY$  nel punto medio tra  $X, Y$ , chiamasi asse centrale ed è l'insieme dei centri dei cerchi del fascio. Esistono quattro tipi di fasci di circonferenze.

I fasci di circonferenze secanti, se i punti base sono reali e distinti (un tale fascio contiene due circonferenze di raggio nullo complesse e coniugate); i fasci di circonferenze tangenti, se i punti base sono coincidenti in un punto  $T$  ed allora tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in  $T$  ad una retta  $t$  (un tale fascio contiene una sola circonferenza di raggio nullo, data da  $T$ ); i fasci di circonferenze esterne, se i punti base sono complessi e coniugati (un tale fascio contiene due circonferenze di raggio nullo reali e distinte); i fasci di circonferenze concentriche (un tale fascio contiene una sola circonferenza di raggio nullo, data dal centro comune). Mediante la rappresentazione (3.11), da quanto su detto un fascio di circonferenze si muta in una retta di  $P(3,R)$  e viceversa ogni retta di  $P(3,R)$  proviene da un fascio di circonferenze.

Le circonferenze di raggio nullo del piano  $E$  si mutano mediante  $\ell_0$  nella quadrica  $P$  di equazione:

$$(3.12) \quad a_1^2 + a_2^2 - 4a_3 a_0 = 0,$$

cioè in coordinate non omogenee:

$$(3.13) \quad a^2 + b^2 - 4c = 0.$$

Tale quadrica è un paraboloido ellittico rotondo con asse di rotazione l'asse  $c$  ( $a = 0, b = 0$ ) ed ha come unico punto improprio reale il punto  $W = (0,0,0,1)$ . In tal modo i punti del piano  $E$  si rappresentano, mediante  $\ell_0$ , biettivamente nei punti di  $P - \{W\}$ , mentre il punto  $W$  proviene dalla retta impropria di  $E$ .

Dalle (3.5) e (3.7) si ha che le circonferenze di raggio reale di  $E$  si mutano, mediante  $\ell$ , nei punti esterni a  $P$ , quelle di raggio immaginario nei punti interni a  $P$ . Inoltre da quanto precede si ha che i fasci di circonferenze secanti si mutano nelle rette esterne a  $P$ , quelli tangenti nelle rette tangenti a  $P$ , quelli esterni nelle rette esterne a  $P$  ed infine i fasci di circonferenze concentriche si mutano nelle rette parallele all'asse  $c$ , e viceversa. Le rette improprie di  $P(3,R)$  provengono mediante  $\ell_0$ , dai fasci di rette di  $E$  e viceversa.

Il gruppo delle similitudini del piano  $E$  si muta mediante  $\ell_0$ , evidentemente nel gruppo delle omografie (cioè delle trasformazioni lineari invertibili) di  $P(3, R)$  che mutano  $P$  in sé ed il piano improprio  $a_0 = 0$  in sé. Tale gruppo è evidentemente transitivo sui punti di  $P - \{W\}$ .

Si prova analiticamente e facilmente che (tenuto anche conto di quanto ora detto):

**Teorema 3.1** *Due circonferenze  $C$  e  $C'$  del piano  $E$  sono ortogonali se, e solamente se, i punti  $\ell_0(C)$  e  $\ell_0(C')$  sono reciproci rispetto a  $P$  (ossia uno appartiene al piano polare dell'altro rispetto alla quadrica  $P$ ).*

#### 4. Risoluzione dei problemi del n. 1

**PROBLEMA I.** Mediante la biezione  $\ell_0$  (3.11) le circonferenze  $A, A'$  e  $B, B'$  vanno in due coppie di punti  $\ell_0(A), \ell_0(A')$  e  $(B), \ell_0(B')$ . La circonferenza  $\Gamma$  passante per i quattro punti di incontro  $(A \cap A') \cup (B \cap B')$  si muta nel punto  $\ell_0(\Gamma)$ , il quale appartiene sia alla retta  $\ell_0(A), \ell_0(A')$  che alla retta  $\ell_0(B), \ell_0(B')$ . Ne segue che tali due rette in  $P(3, R)$  sono complanari e quindi le rette  $\ell_0(A), \ell_0(B)$  e  $\ell_0(A'), \ell_0(B')$  si incontrano in un punto  $\ell_0(\Gamma')$ . Ma allora i punti  $(A \cap A') \cup (B \cap B')$  appartengono a  $\Gamma'$ .

Ne segue l'asserto.

**PROBLEMA II.** Il piano polare rispetto alla quadrica  $P$  di  $\ell_0(C)$  contiene  $\ell_0(C_1)$  e  $\ell_0(C_2)$  (cfr. Teorema 3.1) e quindi tutta la retta  $\ell_0(C_1) \ell_0(C_2)$ . Ne segue che ogni circonferenza del fascio determinato da  $C_1$  e  $C_2$  è ortogonale a  $C$  (sempre per il Teorema 3.1).

**PROBLEMA III.** I tre piani polari di  $\ell_0(C_1), \ell_0(C_2), \ell_0(C_3)$  rispetto a  $P$  si incontrano in unico punto  $\ell_0(C)$ , in quanto non formano fascio (perché  $C_1, C_2, C_3$  non formano fascio).

Ne segue l'asserto per il Teorema 3.1.

**PROBLEMA IV.** E' il teorema di Desargues in  $P(3, R)$  relativo ai due triangoli omologici  $e_0(A)$ ,  $e_0(B)$ ,  $e_0(C)$  e  $e_0(A')$ ,  $e_0(B')$ ,  $e_0(C')$ , aventi centro di omologia il punto  $e_0(r)$  (la retta  $r$  si considera come circonferenza di raggio infinito).

**PROBLEMA V.** Il fascio di circonferenze aventi come punti base  $X, Y$  si muta, mediante  $e_0$ , in una retta  $P(3, R)$  non appartenente al piano  $\pi$ , polare di  $e_0(C)$  rispetto alla quadrica  $P$ . Tale retta allora incontra  $\pi$  in un unico punto  $e_0(C')$ . Dunque  $C'$  è una circonferenza che passa per  $X$  ed  $Y$  ed è ortogonale a  $C$  (cfr. Teorema 3.1).

Ne segue l'asserto.

### 5. La geometria di Moebius del piano $E$ , cioè la geometria non euclidea di $P(3, R)$ avente come assoluto $P$ .

Ricordiamo che definisce *inversione per raggi vettori reciproci* relativa al cerchio  $C$  di centro  $O$  e raggio  $r$  la biezione  $T$  di  $E - \{O\}$  in sé che al punto  $P$  di  $E - \{O\}$  associa il punto  $P'$  della semiretta  $OP$  tale che sia  $OP \cdot OP' = r$ . Se si sceglie il riferimento che ha  $O$  come origine delle coordinate, la  $T$  ha equazioni:

$$(5.14) \quad x' = \frac{rx}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{ry}{x^2 + y^2}.$$

Dalla (5.14) si ha che ogni retta non per  $O$  viene mutata in una circonferenza, mentre le rette per  $O$  vengono mutate in sé. Inoltre ogni circonferenza non per  $O$  si muta in una circonferenza (più una componente data dalle rette isotrope per l'origine) ed una circonferenza per l'origine si muta in una retta. Ne segue che mediante la rappresentazione  $e_0$  di cui al n. 3, la trasformazione  $T$  si muta in una omografia di  $P(3, R)$  che muta  $P$  in sé, trasformando il punto  $W$  (punto improprio di  $P$ ) nel punto  $P$  rappresentativo della circonferenza di raggio nullo di centro  $O$ .

Chiamasi *gruppo di Moebius* il gruppo generato dalle similitudini e dalle trasformazioni per raggi vettori reciproci di  $E$ . La geometria di Moebius di  $E$  è la geometria del piano  $E$  relativa a tale gruppo. Mediante la rappresentazione  $e_0$  tale gruppo si muta,

per quanto su detto, nel gruppo delle omografie di  $P(3, R)$  che mutano  $P$  in sé. Ne segue che la geometria di Moebius di  $E$  coincide; a meno della rappresentazione  $e_0$ , con la geometria non euclidea  $P(3, R)$  che ammette  $P$  come assoluto.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Tallini, *Strutture grafiche proiettive*, Liguori editore, Napoli, 1973.
- [2] G. Tallini, *Lezioni di Geometria III, Anno Acc. 1977-78: Lo spazio dei cerchi*, Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", 1978.

## Si propone una verifica

Nel Periodico di Matematica del 1912 (pp. 229-230) sono proposti molti problemi di vario tipo. Ad essi è premessa la nota: «*In massima non pubblicheremo la risoluzione di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e le generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.*».

Uno di questi problemi, di cui non si troverà soluzione nei numeri successivi (almeno in quelli dell'annata 1913) è il seguente: «*Dimostrare che l'equazione*

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{9+4x} - \sqrt[3]{9-4x}$$

ha per radice  $x = \sqrt{5}$ , e che per questo valore ciascuno dei membri dell'equazione è  $\sqrt{5}$ . Calcolare le altre radici».

Giriamo la domanda ai nostri lettori.

*Sono disponibili gli Atti del Convegno Nazionale della Mathesis «Matematica moderna e Insegnamento; se ne può riparlarne» Cattolica, 22-26 Aprile 1991.*

*Il prezzo al pubblico, complessivo delle spese di spedizione, è di £. 60.000, i soci della Mathesis possono usufruire di uno sconto del 30%.*

*Il pagamento va effettuato sul c/c postale n° 15323009 intestato a: "Mathesis - Via Vicenza, 3 - Roma".*