

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVII - Serie IV – volume IV (1)
marzo 2022**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

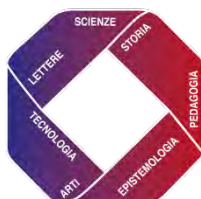
PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXVII - Serie IV - Volume IV (1)
Marzo 2022**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Alberto Trotta (Salerno)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2022 Edizioni AFSU -
Teramo - ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati
Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale edita dall'AFSU e distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

INDICE

Articoli

Luca Nicotra	7
<i>Leggendo Galileo: dalla scodella di Luca Valerio agli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e all'Additive Manufacturing</i>	
Antonio Maturo	39
<i>Geometrie Join e Misure di Incertezza</i>	
Ferdinando Casolaro, Umberto Salzano	57
<i>Le geometrie non euclidee nel mondo reale</i>	
Onofrio Casoria	87
<i>Fisica e Geometria: un inseparabile binomio</i>	
Giovanna Della Vecchia	97
<i>La divina proporzione "vera ispiratrice di bellezza"</i>	
Giuseppe Conti, Raffaella Paoletti, Alberto Trotta	127
<i>L'Icosaedro e le Cupole Geodetiche</i>	
Cesare Labianca	147
<i>I punti isodinamici di un triangolo</i>	
Alessandra Rotunno	157
<i>La Geometria Proiettiva si può ancora ignorare nell'insegnamento di oggi?</i>	
Luigi Tomasi	171
<i>Percorsi didattici di geometria dello spazio</i>	
Franco Eugeni	197
<i>Dal Metodo di Esaustione alla Teoria degli indivisibili e i principi di Cavalieri e Torricelli</i>	
Luca Paladino	207
<i>"Come si fa il problema di geometria" di Alessandra De Falco</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	211



“Studenti in cattedra, docenti nei banchi”

Giochi matematici per la Scuola - Premio “Aldo Morelli” XV edizione, 27-28 maggio 2022

Nei giorni 27-28 maggio 2022, l'Accademia Piceno-Aprutina in Teramo (APAV), in collaborazione con l'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU) e con l'associazione “Mathemare” di Castellammare di Stabia, aderente alla Federazione Italiana Mathesis, organizza un incontro durante il quale verranno premiati gli studenti vincitori del concorso *“Giochi matematici per la scuola, Premio Aldo Morelli”*, di cui le prime due fasi si sono svolte in modalità remota a febbraio e marzo 2022, nelle sedi delle scuole partecipanti. L'iniziativa, che ha visto la partecipazione di scuole dell'intero territorio nazionale si propone di coinvolgere allievi e docenti di matematica, al fine di non disperdere il grande bagaglio scientifico e didattico lasciato dal Prof. Aldo Morelli. Tutte le scuole partecipanti sono invitate a intervenire con gli studenti e i docenti interessati. Oltre ai premi fissati per i vincitori si rilascerà a tutti i finalisti un attestato di partecipazione e un gadget. I lavori inizieranno alle ore 16.00 di venerdì 27 maggio e si chiuderanno alle ore 18.00 di sabato 28 maggio 2022. Durante l'incontro, dal titolo *“Studenti in cattedra docenti nei banchi”*, in parallelo all'espletamento della fase finale coordinata dal prof. Raffaele Prosperi e della gara a squadre coordinata dalla prof.ssa Ilaria Veronesi, sono previsti interventi di studenti coordinati dai propri docenti, che hanno partecipato al concorso, e di brevi relazioni di dirigenti scolastici e docenti universitari e di scuola secondaria.

Il programma del Convegno è disponibile nel sito dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU):
www.afsu.it

Leggendo Galileo: dalla scodella di Luca Valerio agli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e all'Additive Manufacturing

Luca Nicotra*

* Ingegnere. Presidente dell'A. P. S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di:
«Periodico di Matematica», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze
Umane», «ArteScienza», «ArteScienza_magazine»;
luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.064

Sunto: *L'esperienza del ragionare matematico e del suo fascino il più delle volte resta nascosta nei rigidi itinerari scolastici. La Fabbricazione a Strati o Additiva (Additive Manufacturing), che ormai da vari decenni si sta affermando come tecnica di costruzione in campi molto diversi, può fornire il punto di partenza per un itinerario didattico, qui delineato prendendo spunto da Galileo Galilei e Luca Valerio, che coinvolge geometria euclidea, concetti di analisi infinitesimale e storia della scienza, nella piena affermazione dell'interdisciplinarietà, del fusionismo e della ricerca, nella realtà fisica, delle tracce del pensiero matematico. Dunque, un esempio attuale, particolarmente apprezzabile dai giovani, di quel leggere "matematicamente" il mondo reale che fu il principio informatore di tutta la splendida e grandiosa opera galileiana, al quale furono particolarmente ligi, in*

tempi più recenti, Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo, nella loro attività di ricerca e di didattica.

Parole Chiave: *Fabbricazione additiva, scodella di Galileo, Luca Valerio, indivisibili, Bonaventura Cavalieri, analisi infinitesimale.*

Abstract: *The experience of mathematical reasoning and its charm often remains hidden in the rigid school itineraries. Additive Manufacturing, which for several decades has been establishing itself as a construction technique in very different fields, can provide the starting point for a didactic itinerary, outlined here inspired by Galileo Galilei and Luca Valerio, which involves Euclidean geometry, concepts of infinitesimal analysis and history of science, in the full affirmation of interdisciplinarity, fusionism and research, in physical reality, of the traces of mathematical thought. Therefore, a current example, particularly appreciated by young people, of that reading "mathematically" the real world which was the guiding principle of all the splendid and grandiose Galilean work, to which Bruno de Finetti and Emma Castelnuovo were particularly loyal in more recent times, in their research and teaching activities.*

Keywords: *Additive manufacturing, Galileo's bowl, Luca Valerio, indivisible, Bonaventura Cavalieri, infinitesimal analysis.*

1 – Introduzione

L'opera *De centro gravitatis solidorum* (1604) del matematico napoletano Luca Valerio,¹ vissuto in pieno rinascimento e celebrato da Galileo Galilei come «nuovo Archimede dell'età nostra», contiene una originale dimostrazione della formula del volume della sfera basata su considerazioni puramente geometriche, che contengono in *nuce* l'idea del Calcolo Infinitesimale anticipando l'idea degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri (Eugeni, 2022) e, in maniera

¹ Napoli, 1553 – Roma, 1618.

sorprendente, l'idea che è alla base della moderna tecnologia informatica della cosiddetta stampa 3D (Nicotra, 2015). Questa, più propriamente detta *Additive Manufacturing* (Fabbricazione Additiva) o *Layered Manufacturing* (Fabbricazione a Strati), ² è quella tecnica di costruzione a strati che già da diversi decenni si è affermata nei settori delle protesi biomedicali e della componentistica aerospaziale, ma sta interessando sempre più anche altri settori dell'industria manifatturiera. Si contrappone alle tecniche costruttive tradizionali delle macchine utensili ad asportazione di truciolo, in quanto realizza un pezzo aggiungendo materiale in strati successivi, anziché sottraendolo da un blocco pieno.

Immaginiamo di sezionare un oggetto fisico con un numero finito di piani paralleli e di traslare ciascuna sezione così ottenuta di una lunghezza molto piccola (rispetto alle dimensioni dell'oggetto) in direzione normale ai piani: ciò che otterremo è un oggetto "stratificato a gradini", costituito da tanti cilindretti quante sono le sezioni, che potrà sostituire quello originario con una approssimazione che è tanto migliore quanto meno distanti, e quindi più numerosi, sono i piani sezionanti.³ Inoltre l'approssimazione alla forma reale è tanto migliore quanto più questa è vicina a quella prismatica.

² Un'altra denominazione, ancora usata per ragioni storiche ma anch'essa impropria, è Rapid Prototyping (RP) o Prototipazione Rapida.

³ Si considera il caso più generale di un oggetto delimitato da superfici curve e piane. In tal caso le sezioni sono, in generale, costituite da figure delimitate da profili composti da segmenti rettilinei e curvi. La traslazione di un profilo piano di tal tipo in direzione normale ad esso genera un cilindro finito generico, che risulta circolare soltanto nel caso particolare in cui il profilo è una circonferenza, mentre degenera in un prisma finito nell'altro caso particolare in cui il profilo è un poligono. Nel seguito, per

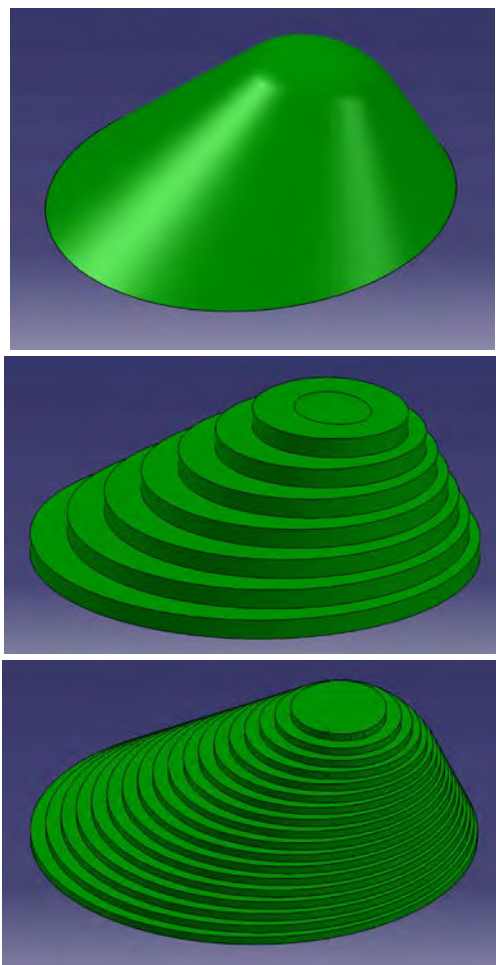


Fig. 1 – Diminuendo l'altezza degli strati e aumentandone il numero, ci si avvicina sempre più alla forma originale dell'oggetto. (Modello dell'Autore eseguito con CATIA V5).

semplicità, si userà indifferentemente il termine “strato finito” per indicare ciascuno dei cilindri o dei prismi “elementari” ottenuti con le operazioni poc’anzi indicate.

Questa tecnica, sempre più attuale per i suoi continui miglioramenti ed enormi vantaggi, può fornire il punto di partenza per un itinerario didattico, qui delineato, che coinvolge geometria euclidea, concetti di analisi infinitesimale e storia della scienza, nella piena affermazione del fusionismo, dell'interdisciplinarità e della ricerca, nella realtà fisica, delle tracce del pensiero matematico.

Un esempio attuale di quel leggere "matematicamente" il mondo reale che fu il principio informatore di tutta la splendida e grandiosa opera galileiana, al quale furono particolarmente ligi, in tempi più recenti, Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo.

2 - L'Additive Manufacturing

L'*Additive Manufacturing* (AM) è una tecnologia generativa, cioè automatica, che permette di fabbricare un oggetto quasi direttamente⁴ dal suo modello geometrico CAD 3D, suddividendolo tramite un opportuno software (detto genericamente *slicer*) in strati finiti molto sottili, dell'ordine di 10÷150 µm.

⁴ Nell'*Additive Manufacturing* (AM) le operazioni di *Computer Aided Process Planning* (CAPP), ovvero di scelta dei parametri ottimali per la produzione, sono molto ridotte rispetto al *Subtractive Manufacturing* (SM) proprio delle lavorazioni ad asportazione di truciolo con macchine utensili a controllo numerico (CNC). Per tale motivo spesso, ma impropriamente, si dice che l'AM consente la produzione di un oggetto per lettura "diretta" del modello geometrico CAD 3D, ma non è così. Da qui l'improprietà di espressioni del tipo "stampa 3D diretta" e "stampante 3D".

Il modello geometrico 3D così partizionato in strati finiti viene dato come input a un prototipatore AM (spesso impropriamente detto “stampante 3D”)⁵ che “legge” il profilo di ciascuno strato e, secondo diverse tecniche, realizza quest'ultimo fisicamente a partire dallo strato sottostante, aggiungendo quindi progressivamente materiale. Al limite, se gli strati fossero di spessore infinitesimo, e quindi di numero infinito, otterremmo esattamente la forma dell’oggetto, applicando lo stesso procedimento mentale del Calcolo Integrale.

Le fasi di creazione di un manufatto con l’AM sono più in dettaglio le seguenti:

- Sintesi geometrica 3D. Creazione del modello geometrico 3D con un sistema CAD.
- Tessellazione. Il modello geometrico 3D CAD viene convertito in un formato interpretabile dalle macchine AM o prototipatori RP (Rapid Prototyping). Inoltre sono creati i supporti per sostenere l’oggetto durante la fabbricazione. Gli standard ufficiali sono lo STEP AP204 e lo STEP AP214, ma lo standard industriale *de facto* è l’STL (*Standard Triangulation Language*) in cui il modello è tessellato secondo triangoli, di cui sono memorizzate le coordinate dei vertici e le normali esterne (figura 2).
- Pre-processing. Il file STL può presentare errori da correggere. Durante la tessellazione, infatti, possono insorgere molti problemi: strappi nella tessitura; triangoli

⁵ Le macchine in grado di realizzare la Fabbricazione Additiva o a Strati sono ancora spesso chiamate “prototipatori”, riferendosi all’origine storica delle prime macchine di questo tipo, utilizzate per costruire prototipi.

degeneri, sovrapposti o intersecanti tipicamente dovuti agli algoritmi scelti; buchi dovuti al fatto che l'STL non interpreta sempre correttamente le operazioni booleane presenti nella geometria del modello CAD; presenza di geometrie non-manifold.⁶ Questi errori impediscono di fabbricare l'oggetto con la AM., poiché non è più possibile nella successiva fase di *slicing* l'univoca definizione di ciò che deve essere riempito e di ciò che non deve esserlo. Numerosi sono i software esistenti sul mercato allo scopo di riparare questi errori.

- Slicing. Tramite un software detto *slicer*, è effettuata una partizione del modello STL in strati sottili (10-150 μm) generando così un file in formato SLI (3D Systems Layer Interface). Inoltre sono settati i parametri tecnologici che

⁶ Nella modellazione CAD un solido è definibile come un sottoinsieme dello spazio euclideo E^3 detto R-set che gode delle seguenti proprietà:

1. limitato: ha un'estensione finita, ovvero può essere racchiuso da una sfera di raggio finito;
2. regolare: è omogeneamente tridimensionale, ovvero non ha facce e spigoli isolati ("pendenti"). Un insieme è regolare se è uguale alla chiusura topologica della sua parte interna;
3. semi-algebrico: è il risultato della combinazione di operazioni booleane (unione, intersezione, sottrazione e complemento) applicate a un numero finito di semispazi, ciascuno dei quali è definito da una disequazione algebrica della forma $(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leq 0$, dove f è un polinomio.

Le rappresentazioni dei solidi realizzate dai modellatori geometrici dei sistemi CAD sono dette manifold se sono R-sets, ovvero soddisfano pienamente le tre proprietà caratteristiche degli R-sets. In un solido manifold ciascuno spigolo deve essere condiviso da due facce soltanto e ogni vertice deve essere adiacente a un insieme di facce che formano un singolo cono uscente da esso. In altri termini, un solido manifold è un solido realizzabile fisicamente e quindi reale.

saranno applicati al processo (spessore dello strato, velocità di scansione, ecc.)

- Creazione di eventuali supporti (per sottosquadri).
- Toolpath. Creazione del percorso utensile (*toolpath*): sequenza ordinata delle posizioni dell'utensile durante il lavoro e gli spostamenti a vuoto.
- Realizzazione del file macchina finale costruttivo.
- Processing. Costruzione del modello fisico con macchine AM (prototipatori) secondo una delle tecniche AM.
- Postprocessing: rimozione dei supporti, pulitura, asciugatura e rifinitura del pezzo.

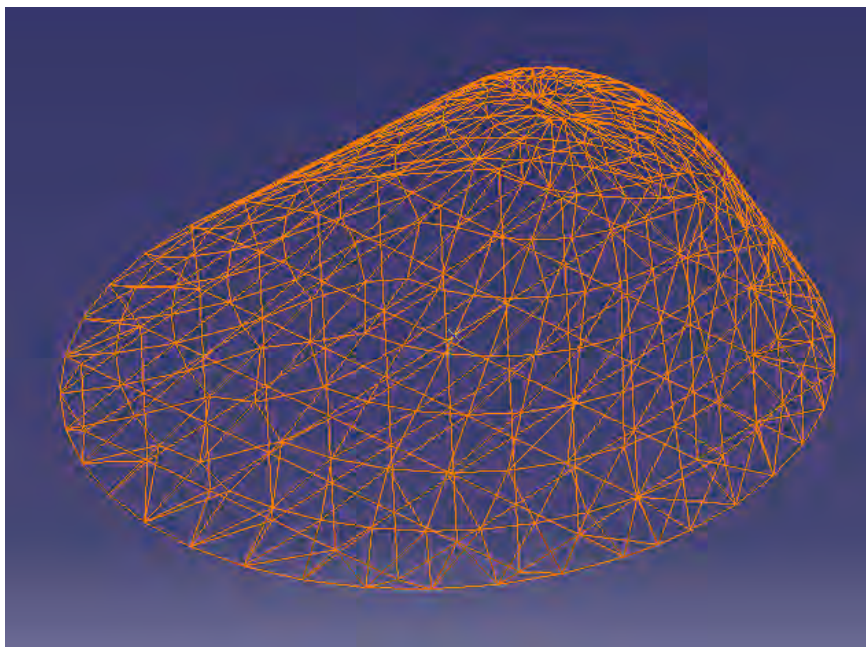


Fig. 2 – Esempio di tessellazione ottenuta in un file STL. (Modello dell'Autore eseguito con CATIA V5).

Attualmente sono utilizzate varie tecniche AM per la realizzazione fisica del modello 3D geometrico, ma la più diffusa è ancora la prima apparsa in ordine cronologico nel 1986 (Hull,1986): la stereolitografia (SLA).⁷

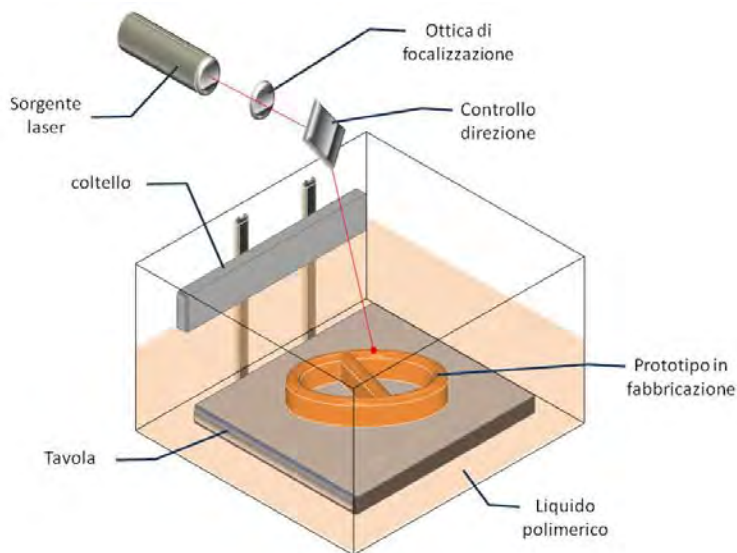


Fig. 3 – Schema di macchina per la stereolitografia (SLA).

Una tavola mobile verticalmente (elevatore) entro una vasca contenente una resina polimerica liquida è inizialmente posta appena al disotto della superficie libera di questa. Un fascio laser (Ar, He-Cd), tramite un sistema a scansione, si

⁷Le principali tecniche AM sono: SLS (Selective Laser Sintering), SLM (Selective Laser Melting), FDM (Fused Deposition Modeling), LOM (Laminated Object Manufacturing), LPF (Laser Powder Forming), LENS (Laser Engineered Net Shaping), Inkjets, 3DP (Three Dimensional Printing). Per una descrizione dettagliata di tali tecniche cfr. Alberto Boschetto, Luca Nicotra, "Prototipazione Rapida" in (Nicotra, Campana, 2014, pp. 341-381).

muove sul piano xy, colpendo la superficie del liquido, in modo da descrivere la sezione dell'oggetto da creare, leggendone la geometria dal file macchina finale. Al contatto con la luce laser, il polimero solidifica. Non appena uno strato è completato, la tavola si abbassa e viene ricoperta da un nuovo strato di resina: la lavorazione riprende (figura 3). I materiali utilizzati sono soprattutto resine.

Con altre tecniche AM (SLS, SLM, LPF, LENS), invece, sono sempre più utilizzati, oggi, anche materiali metallici.



Fig. 4 - Piramide a gradoni del faraone Djoser (?-2660 a.C.) nella necropoli di Sakkara in Egitto, vicino Menfi. Costruita dall'architetto Imhotep.

Le prime "piramidi a gradoni" dell'Antico Egitto forniscono un'immagine antica molto eloquente della possibilità di approssimare la forma di una piramide con la tecnica dell'*Additive Manufacturing*: il risultato è proprio quello che si otterrebbe immaginando di suddividere la piramide in un

numero finito di strati di forma tronco-piramidale, costituiti da mastabe⁸ sovrapposte di dimensioni decrescenti (figura 4).

L'*Additive Manufacturing* sta ottenendo oggi sempre più attenzione dal mondo della ricerca e della produzione, per alcuni importanti vantaggi rispetto ai tradizionali metodi di *Subtractive Manufacturing* delle macchine utensili ad asportazione di truciolo: maggiore rapidità, maggiore economicità, possibilità di realizzare geometrie molto complesse e di produrre pochi pezzi, al limite anche uno soltanto.⁹ Per contro permangono ancor oggi alcuni importanti limiti, quali la scarsa finitura superficiale, le dimensioni piuttosto contenute dei pezzi realizzabili¹⁰ e le loro proprietà meccaniche generalmente insufficienti per un completo uso funzionale.

3 – Origini storiche dell'Additive Manufacturing

Le radici storiche di questa nuova tecnologia appartengono a due campi distinti: la fotoscultura e la topografia della seconda metà del secolo XIX (Bourell, Beaman Jr., Leu, Rosen,

⁸ La mastaba era la più antica forma di sepoltura dei sovrani dell'Antico Egitto, che consisteva nel sigillare la tomba reale, disposta varie decine di metri sotto il livello del suolo, con una costruzione in muratura di forma tronco-piramidale. Da più mastabe di dimensioni decrescenti disposte l'una sopra l'altra sono derivate le piramidi a gradoni, poi perfezionate nelle piramidi vere e proprie eliminando i gradini.

⁹ Impossibile invece con le macchine tradizionali CNC per motivi economici.

¹⁰ Ma in alcuni casi questo limite è stato aggirato con opportune soluzioni, riuscendo a realizzare anche l'intera carrozzeria di una autovettura.

2009).

La fotoscultura è nata utilizzando la macchina fotografica per creare un'esatta replica tridimensionale di un oggetto di forma qualunque e quindi anche di una figura umana. Il primo tentativo in tal senso fu la tecnica di fotoscultura ideata e realizzata dal francese François Willème nel 1860.



Fig. 5 – Attrezzatura per la fotoscultura secondo François Willème.

L'oggetto (o la persona umana) era collocato sopra una piattaforma circolare e fotografato contemporaneamente da 24 macchine fotografiche equidistanziate angularmente sulla circonferenza della piattaforma (figura 5). Successivamente un artigiano scolpiva ciascuna delle 24 porzioni della figura, utilizzando la sagoma di ogni fotografia. La tecnica fu poi perfezionata da Carlo Baese (1904).

Più vicina a quella che poi sarà la caratteristica tecnica “a strati” dell’*Additive Manufacturing* fu certamente il primo tentativo di J. E. Blather di costruire mappe topografiche tridimensionali, producendo la prima rudimentale apparecchiatura in grado di produrre oggetti per successivi strati. Essa fu ideata e costruita nel 1892 da Blather, per costruire stampi destinati a realizzare mappe topografiche in rilievo (figura 6).

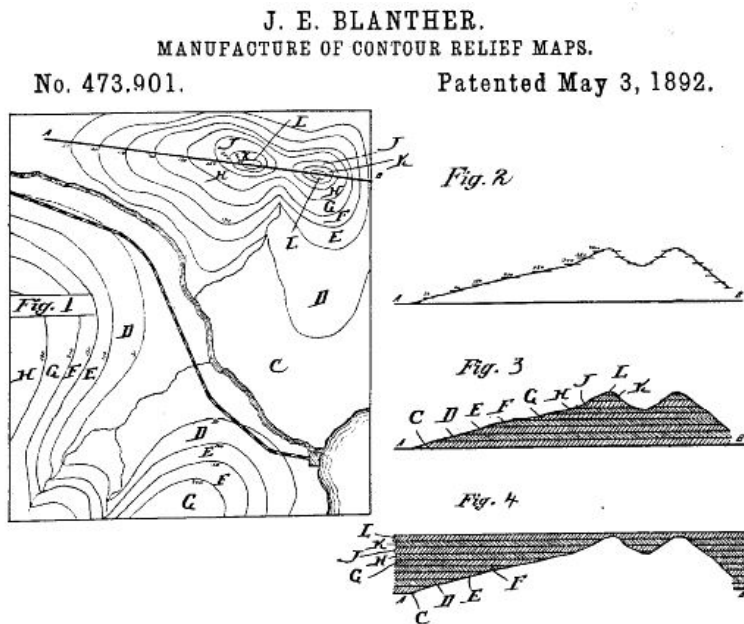


Fig. 6 – Mappe topografiche in rilievo di Blather.

Tale metodo consisteva nell’incidere le linee di livello del terreno su lastre, nel ritagliare queste ultime lungo le linee di livello e nel sovrapporre le lastre così ritagliate le une sulle altre, formando un modello fisico tridimensionale del terreno, che poteva essere utilizzato sia come parte positiva dello

stampo (modello pattern) sia come parte negativa. Questa tecnica fu poi perfezionata da altri: B.V. Perera (1940), E. E. Zang (1964), T. A. Gaskin (1973), K. Matsubara (1974), P. L. Di Matteo (1976), T. Nakagawa (1979).

Soltanto, però, nel 1951 Otto John Munz ideò un sistema, brevettato nel 1956, con le caratteristiche della attuale stereolitografia (Munz, 1956): una vasca, comandata da una piattaforma, contenente una emulsione indurente di tipo fotografico veniva elevata di quantità discrete, strato dopo strato, e trattata in negativo.

Ma la stereolitografia vera e propria, come processo che solidifica tramite luce laser sottili strati di un polimero liquido sensibile alle radiazioni ultraviolette, si affermò soltanto nel 1986 con il brevetto industriale di Charles W. Hull, che fondò anche la famosa società 3D Systems (Hull, 1986).

4 - L' Additive Manufacturing: un'idea del 1604 realizzata oltre tre secoli dopo

Abbiamo precedentemente accennato alle origini storiche dell' *Additive Manufacturing* dal punto di vista "costruttivo" . Ma il principio geometrico su cui è fondata questa moderna tecnica costruttiva a strati, che permette di concepire un oggetto solido come somma di "numerosi" sezioni sottilissime,¹¹ precede di almeno tre secoli i primi tentativi di realizzarla, trovandosi nell'opera *De centro gravitatis solidorum*,

¹¹ Ovviamente si tratta di sezioni non in senso geometrico ma in quello fisico di cui già precedentemente si è precisata la definizione (cilindri finiti elementari).

scritta nel 1604 dal matematico napoletano Luca Valerio, una delle figure più interessanti della matematica rinascimentale (figura 7).

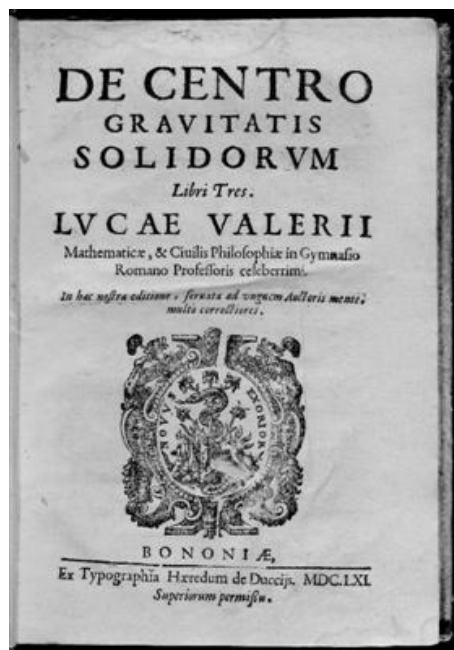


Fig. 7 - Copertina del *De centro gravitatis solidorum* di Luca Valerio (edizione del 1661).

In essa il matematico napoletano riottiene la formula del volume della sfera, già ottenuta da Archimede, ma con un procedimento, ispirato ai metodi archimedei, anticipatore del Calcolo Infinitesimale. Tale procedimento viene rielaborato, molti anni dopo, da Bonaventura Cavalieri nella sua opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635) e riportato da Galileo Galilei nella Giornata Prima della sua celebre opera *Discorsi e dimostrazioni*

matematiche intorno a due nuove scienze (1638), dove Luca Valerio viene chiamato «nuovo Archimede dell'età nostra».

Galilei cita il procedimento di Luca Valerio, per trovare il volume della sfera, a proposito dei numerosi paradossi cui dà luogo l'infinito in matematica.

Galileo, per bocca di Salviati, parla di “indivisibili” essendo stata pubblicata già da tre anni, nel 1635, l'opera di Cavalieri sugli indivisibili:

(Salviati)ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor piccolezza.

Galileo aveva intenzione di scrivere un libro sull'infinito, che purtroppo però non scrisse. Se lo avesse scritto, probabilmente avrebbe approfondito certe sue intuizioni geniali, evitando ai matematici tutte le diatribe sull'infinito nei due secoli che lo seguirono. Infatti, bisogna arrivare alla fine del secolo XIX per liberarsi definitivamente dai paradossi dell'infinito attuale, assumendo come definizione stessa di insieme infinito ciò che destava tanta meraviglia e sconcerto: il poter essere un insieme infinito equinumeroso o simile a un suo sottoinsieme proprio, ovvero la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca l'insieme con una sua parte.¹² Nel 1872, infatti, Richard Dedekind, nella sua opera *Stetigkeit und irrationale zahlen*, diede per la prima volta la seguente definizione di insieme infinito e di insieme finito: «Un sistema S si dice infinito quando è simile a una propria parte; in caso

¹² Molti autori (fra i quali Bertrand Russell) chiamano similitudine fra due insiemi la corrispondenza biunivoca fra i due insiemi.

contrario S si dice un insieme finito». George Cantor, qualche anno dopo, accolse la definizione di Dedekind ma mostrò come non tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi o meglio la stessa "infinità" di elementi, che egli chiamò potenza dell'insieme. Per esempio l'insieme dei numeri triangolari $\{n(n+1)/2\}$, dei quadrati perfetti, dei numeri pari, delle frazioni razionali sono simili ovvero hanno la stessa potenza, in quanto possono essere posti tutti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, \dots\}$: sono numerabili. Cantor dimostrò che l'insieme dei numeri reali, invece, ha una potenza maggiore di quella dei numeri naturali: non è numerabile.

Ma in realtà questa definizione, coraggiosamente proposta da Dedekind, la si può leggere fra le righe nelle stesse parole di Galileo che, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, parlando sempre per bocca di Salviati, afferma:

(Salviati). Io non veggio che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Galileo è chiarissimo: i nostri concetti di minore, uguale, maggiore sono applicabili soltanto agli insiemi finiti ma non a quelli infiniti, che sono caratterizzati proprio dalla loro non applicabilità. Da queste parole alla definizione moderna di insieme infinito il passo è veramente breve.

5 - Il paradosso della scodella di Luca Valerio

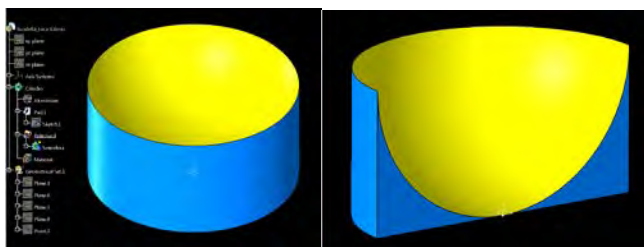
Ricordando il procedimento di Luca Valerio per trovare il volume della sfera, Galileo trova un altro di questi paradossi dell'infinito: un punto risulta uguale a una circonferenza. Dice, infatti, Salviati, rispondendo a Sagredo:

(Salviati). Così si faccia, poiché tale è il vostro gusto: e cominciando dal primo, che fu come si possa mai capire che un sol punto sia eguale ad una linea....

e Galileo prosegue nel suo dialogo con Sagredo, rassicurandolo che potrà capire facilmente questo paradosso («in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia») seguendo una dimostrazione veramente breve e facile dovuta a Luca Valerio, fatta non per investigare i problemi dell'infinito ma per «un altro suo proposito»:

(Salviati). La dimostrazione è anco breve e facile. [...] la troveremo nella duodecima proposizione del libro secondo De centro gravitatis solidorum posta dal Sig. Luca Valerio, nuovo Archimede dell'età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì, sì perché nel caso nostro basta l'aver veduto come le superficie già dichiarate siano sempre eguali, e che, diminuendosi sempre egualmente, vadano a terminare l'una in un sol punto e l'altra nella circonferenza d'un cerchio, maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perché in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia.

Ma seguiamo la dimostrazione di Luca Valerio. A una semisfera il cui raggio misuri r (rispetto a una unità di misura arbitraria) viene circoscritto un cilindro rotondo che ha quindi anch'esso pari a r sia il raggio di base sia l'altezza (figure 8a e 8b).



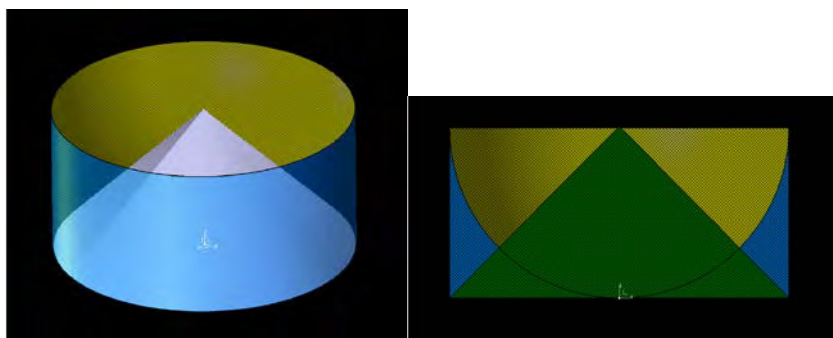
Figg. 8a e 8b - La scodella di Luca Valerio
(modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).

Costruiamo poi il cono rotondo retto inscritto nel cilindro, avente quindi la stessa base e la stessa altezza di questo (figura 9a). Il solido ottenuto sottraendo la semisfera dal cilindro viene chiamato da Galilei "scodella":

Per tanto intendasi il mezzo cerchio AFB, il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo ADEB, e dal centro a i punti D, E siano tirate le rette linee CD, CE; figurandoci poi il semidiametro CF, perpendicolare a una delle due AB, DE, immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura: è manifesto che dal rettangolo ADEB verrà descritto un cilindro, dal semicircolo AFB una mezza sfera, e dal triangolo CDE un cono. Inteso questo, voglio che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella: della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali;

Per tale motivo è nota con il nome "scodella di Galileo", ma in realtà è di Luca Valerio, il quale immagina di tagliare con

piani paralleli alla base del cilindro i quattro solidi così costruiti: cilindro, semisfera, scodella e cono. Considerando una sezione longitudinale (figura 9b) dei quattro solidi, Valerio trae alcune semplici relazioni geometriche che lo portano a concludere, nella dodicesima proposizione del secondo libro del *De centro gravitatis solidorum* (riportata per intero in calce a questo articolo), che la semisfera ha volume doppio del cono: «*Hemisferium duplum est coni, cylindri autem subsesquialterum eandem ipsi basim, et eandem altitudinem habentium*».



**Figg. 9a e 9b - La scodella e il cono di Luca Valerio
(modello 3D CATIA V5 realizzato dall'autore).**

Ciò dimostrato, è immediato ritrovare la formula del volume della sfera, tenuto conto della formula del volume del cono retto inscritto nel cilindro.

Per seguire la dimostrazione di Valerio conviene, però, utilizzare la figura di Galileo (figura 10) contenuta nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, nella quale la "scodella" è rivolta verso l'alto, come è più naturale e comodo pensare.

Detta x la misura (rispetto alla stessa unità usata per il raggio della semisfera) della distanza variabile del piano secante GN dalla sommità AB della scodella, dalla figura 10 possiamo facilmente trarre le seguenti relazioni:

$$PG = FD = CF = CI = r$$

$$CP = PH = x \text{ (essendo } \widehat{HCP} = 45^\circ)$$

$$PI^2 = CI^2 - CP^2 = r^2 - x^2$$

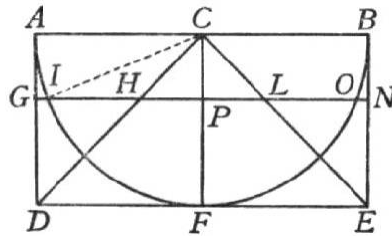


Fig. 10 - Scodella di Galileo (da *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata Prima*).

Inoltre il piano GN taglia :

- il cilindro secondo il cerchio di area $\pi PG^2 = \pi r^2$
- la semisfera secondo il cerchio di area $\pi PI^2 = \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2$
- il cono secondo il cerchio di area $\pi PH^2 = \pi x^2$
- la scodella secondo la corona circolare di area $\pi PG^2 - \pi PI^2 = \pi r^2 - (\pi r^2 - \pi x^2) = \pi x^2$

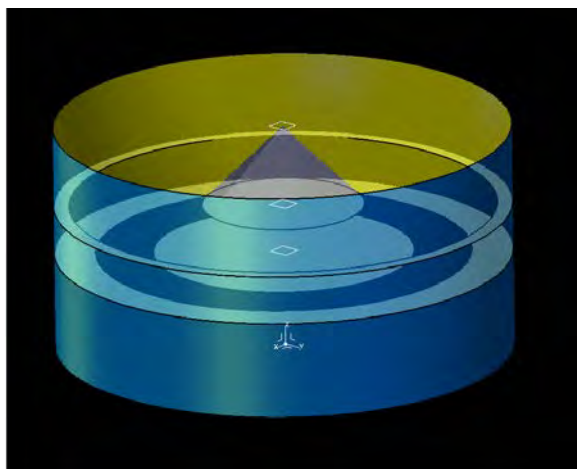


Fig. 11a - Sezioni della scodella e del cono ottenute con un qualunque piano parallelo alla base del cono (modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).

Poiché queste relazioni sono state ricavate considerando un piano secante GN qualunque, Luca Valerio conclude che qualunque sia la sua posizione, *il piano secante GN taglia la scodella e il cono secondo sezioni di uguale area (πx^2)* (figure 11a e 11b).

La dimostrazione data da Luca Valerio segue esattamente lo sviluppo poc'anzi dato in termini puramente geometrici ma non facilmente comprensibili, come è possibile rendersi conto dall'originale riportato in calce all'articolo. L'applicazione dell'algebra alla geometria, invece, rende molto più comprensibile e breve la dimostrazione, come è stato mostrato poco sopra.

A questo punto è facile capire il paradosso che Galileo aveva scoperto nella dimostrazione di Valerio: il piano GN nella sua posizione limite coincidente con la sommità della

scodella intercetta il cono nel suo vertice e la scodella nella circonferenza del cilindro. Ma la proprietà dimostrata per un qualunque piano secante GN deve valere pure in questo caso: il vertice del cono è pertanto uguale come estensione alla circonferenza. Ecco come per Salviati (cioè per Galileo) «si possa mai capire che un sol punto sia eguale ad una linea».

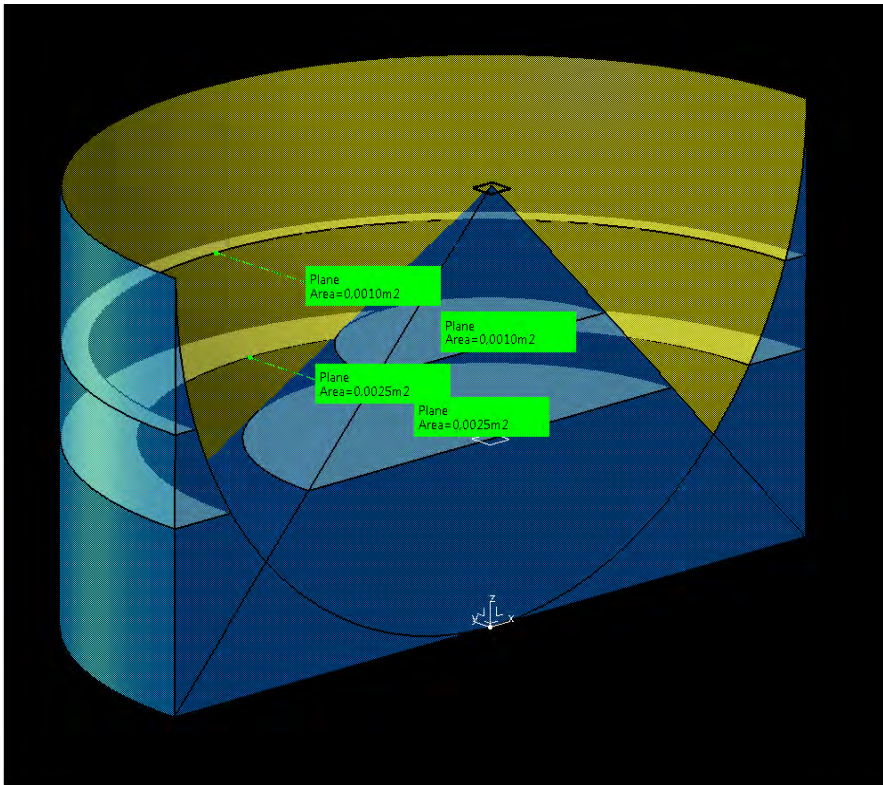


Fig. 11b - Le sezioni della scodella e del cono ottenute con un qualunque piano parallelo alla base del cono hanno sempre uguale area (modello 3D CATIA V5 realizzato dall'Autore).

6 - Dalla sezione all'intero solido

Dal procedimento seguito nella sua dimostrazione della formula del volume della sfera, Luca Valerio è portato a concepire la scodella e il cono formati dalla sovrapposizione di “tanti sottilissimi fogli” di aree uguali, rispettivamente a forma di corona circolare e di cerchio, concludendo in tal modo con l'uguaglianza dei volumi della scodella e del cono:¹³

$$\text{Vol. scodella} = \text{vol. cono} = \frac{1}{3} \text{vol. cilindro circoscritto} = \frac{1}{3} \pi r^3$$

ma poiché:

$$\begin{aligned} \text{Vol. semisfera} &= \text{vol. cilindro} - \text{vol. scodella} = \\ &= \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

«*Manifestum est propositum*», ovvero è dimostrato l'asserto della proposizione XII del *De centro gravitatis solidorum*: il volume della semisfera è doppio del volume del cono retto avente la stessa base e la stessa altezza del cilindro circoscritto alla semisfera.

In tal modo Luca Valerio ritrova rapidamente la formula del volume della sfera:

$$\text{Volume sfera} = 2 \times \text{Volume semisfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

È implicito nel ragionamento di Valerio che “tanti sottilissimi fogli” voglia dire infiniti fogli di spessore

¹³ In virtù del postulato 2 delle Nozioni Comuni della geometria euclidea: *se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interi sono uguali.*

infinitesimo, cioè tendente a zero. Questo concetto sarà ripreso diversi anni dopo, nel 1626,¹⁴ da Bonaventura Cavalieri, il quale darà un nome preciso agli infiniti fogli infinitesimi della scodella di Luca Valerio: “indivisibili”, una specie di atomi delle figure geometriche, corrispondenti dunque agli infinitesimi del moderno Calcolo Infinitesimale.

La scodella di Luca Valerio porta a una conclusione veramente sorprendente: il principio costruttivo dell'*Additive Manufacturing* non è altro che una “materializzazione” di una fase “finita” del processo matematico “ad infinitum” del passaggio al limite che permette il calcolo del volume di un solido come integrale definito:

$$V = \int_v dv$$

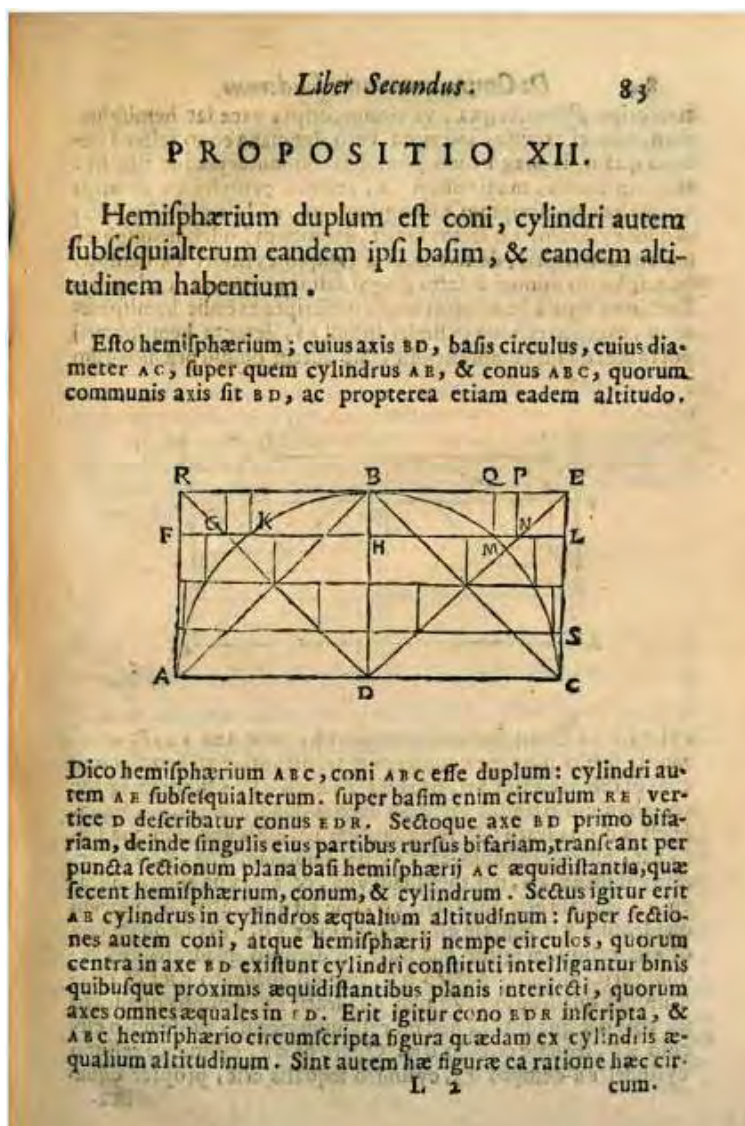
ovvero come “somma di infiniti straterelli infinitesimi”, ovvero degli infiniti “indivisibili” di Cavalieri che compongono il solido.

Certamente occorre molto altro affinché un'idea possa tradursi in qualcosa di concreto e utile. E questo è il compito primario del tecnologo. Diceva Herbert Hoover, ingegnere e 31° presidente degli Stati Uniti d'America: «Gran professione quella dell'ingegnere! Con l'aiuto della scienza ha il fascino di trasformare un pensiero in linee di un progetto per realizzarlo poi in pietra o metallo o energia».

Tuttavia il padre dell'idea matematica dell'*Additive Manufacturing* può essere considerato un matematico del secolo XVI: Luca Valerio.

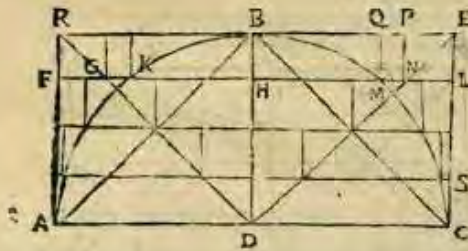
¹⁴ Quindi nove anni prima della pubblicazione ufficiale dell'opera sugli indivisibili *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*.

Luca Valerio, *De centro gravitatis solidorum*
Edizione del 1661, pagine 83-85.



84 *De Centro gravitatis solidorum*

cum scripta, illa inscripta, ut circumscripta excedat hemisphaerium, minori excessu, inscripta vero deficiat à cono minori defectu quam sit magnitudo proposita, quantacumque illa sit. His constitutis, manifestum est, reliquo cylindri AB dempto hemisphaerio inscriptam esse figuram ex residuis cylindrorum, in quos cylindrus AB sectus fuerit, demptis cylindris hemisphaerio circumscriptis, deficientem à reliquo cylindri AB dempto hemisphaerio minori defectu magnitudinis proposita, eodem scilicet, quo figura hemisphaerio circumscripta excedit hemisphaerium, excepto residuo cylindri infimi AS , dempta hemisphaerij portione, quam comprehendit. Sit autem omnium praedictorum



cylindri AB cylindrorum supremus FB , cuius axis BN , & communis sectio plani per punctum N transeuntis basi hemisphaerij cum plano per axim BD , sit recta $FGKHMNL$. Quoniam igitur rectangulum DNB bis una cum duobus quadratis DN , BN , æquale est BD quadrato: & rectangulum DNB bis una cum quadrato BN , est rectangulum ex BD , DN tamquam una, & BN ; rectangulum ex BD , DN tamquam una, & BN , una cum quadrato DN æquale erit quadrato BD , hoc est quadrato FN : quorum quadratum KN æquale est rectangulo ex BD , DN , tamquam una & BN ; reliquum igitur quadrati FN dempto quadrato KN , æquale erit reliquo quadrato DN , hoc est quadrato GN : & quadruplum quadruplo reliquum quadrati FL dempto quadrato MK toti ON quadrato, hoc est reliquum circuli, FL dempto circulo MK , æquale circulo GN . Quare & GF , cylindrus reliquo cylindri FB dempto QK , cylindro æqualis erit, propter æqualita-

Liber Secundus.

85

litatem altitudinum. Similiter ostenderemus singula reliqua cylindrorum eiusdem altitudinis, in quos totus cylindrus AB sectus fuit demptis cylindris hemisphaerio circumscriptis æqualia esse singulis cylindris cono EDR inscriptis, quæ inter eadem plana interijciuntur. Tota igitur figura ex prædictis cylindrorum residuis reliquo cylindri AE , dempto hemisphaerio inscripta æqualis erit figuræ cono EDR inscriptæ: deficit autem utraque harum figurarum hæc à cono ADR , illa à residuo cylindri AB : dempto hemisphaerio minori excessu magnitudine utcumque proposita; reliquum igitur cylindri AB dempto hemisphaerio æquale est cono EDR , sed conus EDR ; hoc est conus ABC cylindri AB est pars tertia; reliquum igitur cylindri AB dempto hemisphaerio, cylindri AB est pars tertia, hoc est cylindrus AB triplus dicti residui: quamobrem AE cylindrus sesquialter hemisphaerii ABC : & convertendo, hemisphaerium cylindri AB sublesquialterum: conus igitur ABC duplum. Manifestum est igitur propositum.

P R O P O S I T I O XIII.

Omnis minor sphaeræ portio, ad cylindrum, cuius basis æqualis est circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam excessus, quo tripla semidiameter sphaeræ excedit tres deinceps proportionales, quarum maxima est sphaeræ semidiameter, media vero quæ inter centra sphaeræ, & basis portionis interijcitur; ad semidiametri sphaeræ triplam.

Sit sphaeræ, cuius centrum D , semidiameter BD , minor portio ABC , cuius axis BC segmentum semidiameter BD , basis autem circulus, cuius diameter AC . Sitque EF , cylindrus, cuius axis, siue altitudo eadem BC : basis autem æqualis circulo maximo,

Bibliografia

ALESSANDRINI A. (1992). "Luca Valerio Linceo", in L. Conti (cur.), *La matematizzazione dell'universo: Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, pp. 238-252. Assisi.

BAESE Carlo (1904). "Photographic Process for the Reproduction of Plastic Objects", *US Patent#774,549*.

BOYER Carl Benjamin (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Courier Dover Publications.

BALDINI U., NAPOLITANI P. D. (1991). Toward a biography of Luca Valerio : published and unpublished sources for a reconstruction of his scientific career (Italian), «*Boll. Storia Sci. Mat.*» **11** (1).

BLANTHER J. E., (1892). "Manufacture of Contour Relief Maps", *US Patent #473,901*.

BOURELL David L., BEAMAN Joseph J. Jr., LEU Ming C. and ROSEN David W. (2009). A Brief History of Additive Manufacturing and the 2009 Roadmap for Additive Manufacturing: Looking Back and Looking Ahead. In *US - TURKEY Workshop On Rapid Technologies, September 24 - 24, 2009*.

BOSMANS H., Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luca Valerio, «*Annales de la Société scientifiques de Bruxelles*» **37** (1912-13), 211-28.

DI MATTEO Paul L. (1976). "Method of Generating and Constructing Three-Dimensional Bodies", *US Patent #3,932,923*.

DIVIZIA F. (1983). Remarks on "De centro gravitatis solidorum" of Luca Valerio (Italian), «*Physis - Riv. Internaz. Storia Sci.*» **25** (2), 227-249.

EUGENI Franco (2022). Dal Metodo di Esaustione alla Teoria degli indivisibili e i principi di Cavalieri e Torricelli. In «Periodico di Matematica» (IV), Vol. IV (1), pp. 197-206.

FRAJESE Attilio (1954). *Che cosa è il calcolo infinitesimale*. Roma: Universale Studium.

FREEDBERG D. (2002). *The Eye of the Lynx: Galileo, His Friends, and the Beginnings of Modern Natural History*. Chicago: University of Chicago Press.

GABRIELI G. (1933). Luca Valerio Linceo, «Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti» **9**, 691-728.

GASKIN T.A. (1973). "Earth Science Teaching Device ", *US Patent #3,751,827*.

HULL Charles W. (1986). "[Apparatus for production of three-dimensional objects by stereolithography](#), Mar 11, 1986" (SLA).

LOMBARDO RADICE Lucio (1976). *La matematica da Pitagora a Newton*. Roma: Editori Riuniti.

MARACCHIA Silvio (1992). Luca Valerio matematico Linceo, in L. Conti (cur.), *La matematizzazione dell'universo: Momenti della cultura matematica tra '500 e '600 (Assisi,)*, 253-302.

MATSUBARA K. (1974). "Molding Method of Casting Using Photocurable Substance ", *Japanese Kokai Patent Application, Sho 51 [1976]-10813*.

MUNZ Otto John (1956). "Photo-Glyph Recording", *US Patent #2,775,758*.

NAKAGAWA T., et al (1979). "Blanking Tool by Stacked Bainite Steel Plates ", «*Press Technique*», pp. 93-101.

NAPOLITANI P. D. (1982). Method and statics in Valerio : With editions of two early works (Italian), «*Boll. Storia Sci. Mat.*» **2** (1), 3-86.

NAPOLITANI P. D., SAITO K. (2004). Royal road or labyrinth? Luca Valerio's "De centro gravitatis solidorum" and the beginnings of modern mathematics, *«Boll. Stor. Sci. Mat.»* 24 (2), 67-124.

NICOTRA Luca, CAMPANA Francesca (cur.) (2014). *Ingegneria Assistita dal Computer*, vol. 1. Roma: UniversItalia, marzo 2014, 2a ed. accresciuta.

NICOTRA Luca (2015). Luca Valerio: padre del principio geometrico dell'Additive Manufacturing. In *«Emmeciquadro»*, n. 59, 30 dicembre 2015, Milano.

<http://www.ilsussidiario.net/News/emmeciquadro/Emmeciquadro-n-59/2015/12/30/SCIENZAeSTORIA-Luca-Valerio-padre-del-principio-geometrico-dell-Additive-Manufacturing-/653570/>.

PERERA B.V. (1940), "Process of Making Relief Maps ", *US Patent #2,189,592*.

RUSSELL R. (2006). *Margherita Sarrocchi and the Writing of the Scanderbeide*, in *Scanderbeide: The Heroic Deeds of George Scanderberg, King of Epirus*. University of Chicago Press.

STROMHOLM P. (1970-1990). Valerio (or Valeri), Luca in *«Dictionary of Scientific Biography»* (New York 1970-1990). <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904430.html>.

TOSI A. (1957). "De centro gravitatis solidorum "di Luca Valerio, in *«Periodico di matematiche»*, 35, 189-201.

ZANG E.E. (1964). "Vitavue Relief Model Technique", *US Patent #3,137,080*.

Elogio di Max Planck

Il tempio della scienza è una costruzione multiforme.

Gli uomini che vi si trovano e le forze spirituali che ve li hanno condotti sono molto diverse. Non pochi si occupano della scienza con il lieto sentimento della loro superiorità d'ingegno; per essi la scienza è una specie di sport, che deve procurar loro un'intensa vita personale e soddisfare l'ambizione; ma in questo tempio si trovano anche molti che vi consumano il sacrificio della loro materia cerebrale solo per fini utilitaristici. Ora, se per ipotesi venisse un angelo e scacciasse dal tempio tutti quelli che appartengono a queste due categorie, esso si svuoterebbe in maniera preoccupante ma nel tempio rimarrebbero pur sempre uomini dell'epoca presente e delle epoche passate. Uno di costoro è il nostro Planck; per questo gli vogliamo bene.

Albert Einstein, *Principi della ricerca (Prinzipien der Forschung)* discorso pronunciato da Albert Einstein nel 1918 per la celebrazione del 60° compleanno di Max Planck, alla Società di Fisica di Berlino. Pubblicato per la prima volta in «Mein Weltbild», Querido Verlag, Amsterdam 1934, riprodotto in italiano in Max Planck, *Scienza, filosofia e religione*, Milano: Fratelli Fabbri, 1973.

Geometrie Join e Misure di Incertezza¹

Antonio Maturo*

*Mathesis Abruzzo; email antomato75@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n1.065

Sunto: Un approccio geometrico recente è quello delle geometrie basate sul concetto di ipergruppo, che è una generalizzazione del concetto di gruppo, richiedendo che il risultato di un'operazione non sia necessariamente un singolo elemento, ma possa essere un insieme non vuoto di elementi. Gli ipergruppi commutativi idempotenti soddisfacenti un particolare assioma, detto "assioma di incidenza", determinano importanti strutture geometriche, dette "spazi join" e "geometrie join". Casi particolari sono la "geometria euclidea", in cui il risultato di una operazione fra due punti è il segmento che congiunge tali punti, e la "geometria proiettiva", in cui il risultato è la retta per i due punti. Rientrano nella definizione, in particolare, anche gli spazi proiettivi finiti. Se ci sono le condizioni per cui il risultato di una operazione possa essere (intuitivamente) considerato una generalizzazione del concetto di segmento, allora ci troviamo in presenza di una generalizzazione della geometria euclidea, che può essere l'ambiente in cui costruire misure di incertezza che generalizzano la probabilità soggettiva di de Finetti. Infatti, le "assegnazioni coerenti di probabilità soggettiva" sono le coordinate dei punti degli insiemi convessi generati dai costituenti. Allora in generale si può immaginare di utilizzare come misure di incertezza, "probabilità distorte", le coordinate di punti di insiemi che soddisfano una condizione generale di convessità in uno spazio join o in una geometria join.

¹ Lavoro dedicato all'amico prof. Franco Eugeni per i suoi 80 anni (e 52 anni di amicizia fraterna)

Parole Chiave: Spazi geometrici. Geometria proiettiva. Geometria euclidea. Spazi Join. Geometrie Join. Probabilità soggettiva. Misure di incertezza join.

Abstract: A recent geometric approach is based on the concept of hypergroup, which is a generalization of the concept of a group, requiring that the result of an operation is not necessarily a single element, but can be a non-empty set of elements. The idempotent commutative hypergroups satisfying a particular axiom, called the "axiom of incidence", determine an important set of geometric structures, called "join spaces" and "join geometries". Special cases are Euclidean geometry, in which the result of an operation between two points is the segment that connects these points, and projective geometry, in which the result is the line through the two points. In particular, finite projective spaces also fall within the definition. If there are the conditions for which the result of an operation can be (intuitively) considered a generalization of the concept of segment, then we find a generalization of Euclidean geometry, which can be the environment in which to construct uncertainty measures that generalize de Finetti's subjective probability. In fact, the "coherent assignments of subjective probabilities" are the coordinates of points of the convex sets generated by the constituents. Then in general we can imagine using as uncertainty measures, "biased probabilities", the coordinates of points of sets that satisfy a general condition of convexity in a join space or in a join geometry.

Keywords: Geometric spaces. Projective geometry. Euclidean geometry. Join spaces. Join geometries. Subjective probability. Join uncertainty measures.

1 - Spazi geometrici e sistemi join

1.1 - Spazi geometrici di rango 2

Definizione 1.1 (Beutelspacher, Rosenbaum, 1998) Si dice *spazio geometrico di rango 2* (o *struttura di incidenza*) una terna $G=(S, B, I)$ dove:

(G1) S è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti*;

(G2) B è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *blocchi*;

(G3) I è una relazione di S in B , detta *relazione di incidenza*; se aIK , $a \in S$, $K \in B$, diciamo che a è *incidente* a K .

Lo spazio geometrico G si dice *non degenerare* se:

(ND1) ogni blocco è incidente ad almeno tre punti;

(ND2) esistono almeno due blocchi.

Diciamo che in G vale *l'assioma delle coppie* se:

(C) Dati due punti distinti a, b , esiste un solo blocco K tale che (aIK, bIK) . Diciamo che K è il blocco *individuato* dalla coppia (non ordinata) $\{a, b\}$.

In seguito, considereremo solo spazi geometrici di rango 2 non degeneri e in cui vale l'assioma delle coppie.

Esempi immediati di tali spazi geometrici di sono:

1. Lo spazio affine delle rette. Si pone $S = R^n$; B uguale all'insieme delle rette in R^n ; I relazione di appartenenza.
2. Lo spazio proiettivo delle rette. Si pone S uguale all'unione di R^n con l'iperpiano improprio, B uguale all'insieme delle rette in S ; I relazione di appartenenza.
3. Lo spazio euclideo dei segmenti chiusi. Si pone $S = R^n$, B uguale all'insieme dei segmenti chiusi $[ab]$ con $a \neq b$; I relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K . Evidentemente, per ogni coppia $\{a, b\}$ di punti distinti di R^n , esiste un solo segmento chiuso che ha estremi a, b , e quindi vale l'assioma delle coppie.
4. Lo spazio euclideo dei segmenti aperti. Si pone $S = R^n$, B uguale all'insieme dei segmenti aperti (ab) , con $a \neq b$; I la relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K .
5. Lo spazio cartesiano degli intervalli chiusi. Si pone $S = R^n$, B uguale all'insieme degli intervalli chiusi $[ab] = a_1b_1 \times a_2b_2 \times \dots \times a_nb_n$, con $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; I relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, aIK se e solo se a è un estremo di K .

6. Lo spazio cartesiano degli intervalli aperti. Si assume la convenzione che, dato un numero reale k , l'intervallo aperto (k, k) sia uguale all'insieme $\{k\}$. Ciò è giustificato dal fatto che in questo contesto (k, k) sta per (k^-, k^+) , ovvero come intersezione degli intervalli aperti contenenti k . Si pone $S = \mathbb{R}^n$, B uguale all'insieme degli intervalli aperti $(ab) = a_1b_1 \times a_2b_2 \times \dots \times a_nb_n$, con $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; I relazione tale per ogni $a \in S$, $K \in B$, $a \in K$ se e solo se a è un estremo di K .

7. Lo spazio del triodo chiuso (Prenowicz, Jantosciak, 1979). In $\mathbb{R}^n$ si considerano un punto o e tre semirette chiuse distinte R_1, R_2, R_3 di origine o . Poniamo $S = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Se a, b sono due punti distinti del triodo, si dice *segmento del triodo chiuso* il segmento chiuso $[ab]$ se a, b appartengono ad una stessa semiretta, oppure l'unione dei segmenti chiusi $[ao]$ e $[ob]$ se a, b appartengono a diverse semirette. Si pone $S = \mathbb{R}^n$, B uguale all'insieme dei segmenti del triodo chiuso e $a \in K$, $a \in S$, $K \in B$, se e solo se esiste $b \in S$ tale che $[ab]$ è un segmento del triodo chiuso.

8. Lo spazio del triodo aperto (Prenowicz, Jantosciak, 1979). In $\mathbb{R}^n$ si considerano un punto o e tre semirette distinte R_1, R_2, R_3 di origine o . Posto $S = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, se a, b sono due punti distinti del triodo, si dice *segmento del triodo aperto* il segmento aperto (ab) se a, b appartengono ad una stessa semiretta, oppure l'unione $(ao) \cup \{o\} \cup \{ob\}$ se a, b appartengono a due semirette diverse. Lo spazio del triodo aperto è la terna (S, B, I) , dove B è l'insieme dei segmenti del triodo aperto e $a \in K$, $a \in S$, $K \in B$, se e solo se esiste $b \in S$ tale che (ab) è un segmento del triodo aperto.

Nota 1.1 Spesso, in Geometria, la relazione di incidenza I è identificata con la relazione di appartenenza $\in$. Ciò è vero nell'ambito della geometria affine o della geometria proiettiva.

Invece le due relazioni sono distinte nel caso degli spazi euclidei o cartesiani. Infatti, ad esempio, un segmento è incidente (in relazione I) solo con i suoi estremi, mentre una coppia $\{a, b\}$ di punti distinti appartiene a infiniti segmenti. Analogamente, in uno spazio cartesiano, un intervallo è incidente (in relazione I) solo con i suoi estremi, mentre una coppia $\{a, b\}$ di punti appartiene a infiniti intervalli.

Nota 1.2 Pur tenendo conto della nota 1.1, generalmente si può assumere che i blocchi siano sottoinsiemi di $P(S)$. Ciò vale negli esempi precedenti e nel seguito del discorso.

1.2 - Sistemi Join

Definizione 1.2 - Si dice *sistema join* (o *sistema di connessione*) una coppia $J = (S, \sigma)$ in cui S è un insieme non vuoto e $\sigma: S \times S \rightarrow P(S)$ è una funzione che ad ogni coppia ordinata (a, b) di elementi di S associa un sottoinsieme di S soddisfacente i seguenti assiomi, in cui si pone $a \sigma b = \sigma(a, b)$:

- (J1) (legge di esistenza) per ogni a, b in S , $a \sigma b \neq \emptyset$;
- (J2) (legge commutativa) per ogni a, b in S , $a \sigma b = b \sigma a$;
- (J3) (legge associativa) per ogni a, b, c in S , $(a \sigma b) \sigma c = a \sigma (b \sigma c)$;
- (J4) (legge di idempotenza) per ogni $a \in S$, $a \sigma a = \{a\}$.

La funzione σ è vista come una operazione a più risultati (detta *iperoperazione*) e $a \sigma b$ è detto *iperprodotto* (rispetto a σ) o semplicemente *prodotto*. Le (J1), (J2), (J3) definiscono una struttura algebrica detta *semi-ipergruppo*, che generalizza quella classica di semigrupp.

Nota 1.3 - Nelle teorie geometriche in genere si identifica il punto a con il singleton $\{a\}$. Quindi le scritture $a \in A$ e $a \subseteq A$ sono considerate equivalenti.

Nota 1.4 - Nella legge associativa $(a \sigma b) \sigma c$ è il prodotto di un insieme $a \sigma b$ con un punto c . Questo è definito come l'unione dei prodotti $x \sigma c$, con $x \in a \sigma b$. Ad esempio, se consideriamo lo spazio

euclideo dei segmenti chiusi e se a, b, c sono punti distinti e non allineati, allora $a\sigma b$ è il segmento chiuso di estremi a, b , mentre $(a\sigma b)\sigma c$ è il triangolo di estremi a, b, c .

In generale, se A e B sono due sottoinsiemi di S , allora $A\sigma B$ è l'unione dei prodotti $x\sigma y$, $x \in A, y \in B$.

Importanti proprietà dei sistemi join sono le seguenti:

Teorema 1.1 (Monotonia). Se A, B, C, D sono sottoinsiemi di S , allora:

$$A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow A\sigma B \subseteq C\sigma D. \quad (1.1)$$

Corollario 1.1 - Se c, d sono punti di $a\sigma b$ allora $c\sigma d \subseteq a\sigma b$.

Nota 1.5 - La dimostrazione del corollario 1.1 evidenzia l'importanza degli assiomi (J2), (J3), (J4). Infatti da questi assiomi e dalla (1.1) segue:

$$c, d \in a\sigma b \Rightarrow c\sigma d \subseteq (a\sigma b)\sigma(a\sigma b) = (a\sigma a)\sigma(b\sigma b) = a\sigma b.$$

1.3 - Spazi geometrici di rango 2 come sistemi join

Dato uno spazio geometrico non degenero $G = (S, B, I)$ con $B \subseteq P(S)$, soddisfacente l'assioma delle coppie, ad esso si può associare la coppia $J = (S, \sigma)$, ponendo, per ogni coppia di elementi distinti a, b , in S ,

$$(a\sigma b = K) \Leftrightarrow (aIK, bIK). \quad (1.2)$$

Assumendo, per convenzione, che $a\sigma a = \{a\}$, si vede che valgono le proprietà (J1), (J2), (J4).

Nota 1.6 - Non sempre vale la *legge associativa* (J3). Ad esempio, nello spazio affine delle rette, se a, b, c sono punti non allineati, $(a\sigma b)\sigma c$ è l'unione delle rette del piano passanti per c e diverse dalla retta per c parallela alla retta $a\sigma b$, mentre $a\sigma(b\sigma c)$ l'unione delle rette del piano passanti per a e diverse dalla retta per a parallela alla retta $b\sigma c$.

Si può dimostrare invece che soddisfano la (J3), e quindi sono sistemi join, gli *spazi proiettivi*, gli *spazi di segmenti*, gli *spazi di intervalli* e gli *spazi di triodi*.

Viceversa, dato un sistema join $J = (S, \sigma)$, ad esso si può associare uno spazio geometrico $G = (S, B, I)$ con $B \subseteq P(S)$, soddisfacente l'assioma delle coppie, ponendo B uguale all'insieme degli iperprodotti $a\sigma b$, con $a \neq b$. La relazione di incidenza I è definita ponendo, per $a \in S, K \in B$,

$$aIK \Leftrightarrow \text{esiste } b \in S \text{ tale che } a\sigma b = K. \quad (1.3)$$

2 - Insiemi convessi in sistemi join

Definizione 2.1- Sia $J = (S, \sigma)$ un sistema join. Un sottoinsieme H non vuoto di S si dice *convesso* (rispetto a σ) se vale la condizione:

$$a, b \in H \Rightarrow a\sigma b \subseteq H. \quad (2.1)$$

In particolare, S è un insieme convesso. Sia A un sottoinsieme di S . L'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti A è un insieme convesso contenente A , detto *inviluppo* (o *guscio*) *convesso* (*convex hull*) di A .

In seguito, generalizzando le notazioni degli spazi euclidei, chiamiamo

(a) σ --segmento il prodotto $a\sigma b$;

(b) Se a, b, c sono punti distinti tali che nessuno di essi appartiene al σ -segmento individuato dagli altri due, chiamiamo σ -triangolo il prodotto $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$.

Dal teorema 1.1 e dal corollario 1.1 seguono:

Teorema 2.1 - Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono punti di S allora il prodotto $a_1\sigma a_2\sigma \dots \sigma a_n$ è un insieme convesso.

Teorema 2.2 - Se A e B sono insiemi convessi allora $A\sigma B$ è un insieme convesso.

Definizione 2.2 - Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono punti di S , l'inviluppo convesso dell'insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ si indica con $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e si dice *politopo* (rispetto a σ) generato da $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.3 - (Formula del politopo) Dati i punti $a_1, a_2, \dots, a_n$ il politopo $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ da essi generato è l'unione di tutti gli iperprodotti

$$a_{j_1} \sigma a_{j_2} \sigma \dots \sigma a_{j_s}, \text{ con } s \leq n, j_1 < j_2 < \dots < j_s.$$

3 -Il politopo euclideo delle probabilità soggettive coerenti

Per ogni evento E , sia E^c il suo contrario, indichiamo con $\emptyset$ l'evento impossibile e con Ω l'evento certo.

Consideriamo il caso semplice di due eventi A e B . Essi si dicono *logicamente indipendenti* (de Finetti, 1979) se tutte le intersezioni AB, AB^c, A^cB, A^cB^c sono eventi possibili. Si dicono *logicamente dipendenti* in caso contrario. Ad esempio, si ha una dipendenza logica se $A \subseteq B$, se $A = B^c$, se A e B sono incompatibili, etc.

In ogni caso, si dicono *costituenti* di (A, B) gli eventi non impossibili appartenenti all'insieme $\{AB, AB^c, A^cB, A^cB^c\}$.

Chiamiamo *vincolo* ogni intersezione impossibile.

Dal punto di vista geometrico la coppia di eventi (A, B) si rappresenta come un piano euclideo in cui l'asse x è l'evento A , l'asse y è l'evento B e

$$AB = (1, 1), AB^c = (1, 0), A^cB = (0, 1), A^cB^c = (0, 0).$$

Se K è l'insieme dei costituenti di (A, B) , si considera il politopo $G(K)$ generato da K . Le coppie di *probabilità soggettive coerenti* $(p(A), p(B))$ sono i punti di $G(K)$.

Casi particolari:

(1) Se A e B sono indipendenti allora $G(K)$ è l'intervallo $[0,1] \times [0,1]$.

(2) Se A e B sono incompatibili ($AB = \emptyset$) e non ci sono altri vincoli, allora $G(K)$ è il triangolo di vertici $[0, 0], [0, 1], [1, 0]$.

(3) Se $A = B$ allora $G(K)$ è il segmento di estremi $[0, 0], [1, 1]$.

(4) Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ allora $G(K)$ è il triangolo di vertici $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$.

In generale, data una n -pla di eventi $(E_1, E_2, \dots, E_n)$, all'evento E_i è associato l'asse i -simo dello spazio R^n .

Si definiscono *costituenti* associati alla n -pla di eventi tutte le intersezioni $A_1 A_2 \dots A_n$, con $A_i \in \{E_i, E_i^c\}$, diverse dall'evento impossibile.

Ogni costituente $C = A_1 A_2 \dots A_n$ è rappresentato dal punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di R^n con $a_i = 1$ se $A_i = E_i$ e $a_i = 0$ se $A_i = E_i^c$.

Sia K l'insieme dei costituenti. Le assegnazioni di probabilità coerenti sono i punti del politopo $G(K)$ generato dai costituenti. Se $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ è un punto di $G(K)$ scelto soggettivamente allora p_i è la probabilità soggettiva dell'evento E_i .

4 - Misure di incertezza associate a un sistema join

Generalizzando il concetto di coerenza rispetto al politopo euclideo, sia (R^n, σ) un sistema join. Sia K l'insieme dei costituenti della n -pla di eventi $(E_1, E_2, \dots, E_n)$. Diamo la seguente:

Definizione 4.1 - Diciamo *misura di incertezza join σ -coerente* su $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ ogni punto $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ di R^n appartenente all'insieme $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n$, dove $G_\sigma(K)$ è il σ -politopo generato dai costituenti.

Se $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ è un punto di $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n$, scelto soggettivamente, allora m_i è la *misura di incertezza join σ -coerente* dell'evento E_i .

Nota 4.1 - Osserviamo che, per il teorema 2.3, $K \subseteq G_\sigma(K)$, per cui l'insieme delle misure di incertezza σ -coerenti contiene almeno l'insieme K . Inoltre, valgono le condizioni per una *misura normalizzata*:

$$0 \leq m_i \leq 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.1)$$

Ovviamente, in generale una misura join σ -coerente non gode della proprietà additiva (a meno che non sia una probabilità). Però può essere importante imporre la *condizione di monotonia*:

$$E_i \subseteq E_j \Rightarrow m_i \leq m_j \quad (4.2)$$

Se M è l'insieme dei punti di R^n soddisfacente la 4.2, allora M contiene l'insieme K dei costituenti e si ottiene una *misura di incertezza join σ -coerente monotona* su $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ per ogni punto $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ di R^n appartenente all'insieme $G_\sigma(K) \cap [0, 1]^n \cap M$.

Nota 4.2 - Le condizioni per un punto P di R^n di essere una probabilità coerente e una misura di incertezza join σ -coerente possono coesistere, sulla base di considerazioni particolari. In questo caso si ottengono probabilità soggettive contemporaneamente coerenti e σ -coerenti per ogni punto $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ appartenente a $G(K) \cap G_\sigma(K)$. Più in generale si possono avere probabilità soggettive σ -coerenti rispetto ad un insieme di sistemi join.

5 - La divisione e l'assioma di incidenza in un sistema join

Sia (S, σ) un sistema join. Il modello proiettivo e il modello euclideo soddisfano alla seguente condizione:

(D) per ogni a, b in S , esiste $x \in S$ tale che $b \in a\sigma x$.

Nel modello proiettivo, se $a \neq b$, soddisfa alla condizione (D) ogni punto della retta ab ; mentre, se $a = b$ la (D) vale per ogni punto di R^n .

Nei modelli euclidei, se $a \neq b$, soddisfa alla (D) ogni punto della semiretta di origine b e non contenente a . Ne fa parte b se si considera il modello dei segmenti chiusi, mentre b è escluso se si considera il modello dei segmenti aperti. Se $a = b$ allora soddisfano la condizione (D) tutti i punti di R^n , se consideriamo i segmenti

chiusi, mentre soddisfa la condizione (D) solo il punto a , se consideriamo i segmenti aperti.

In generale, se (S, σ) è un sistema join, si definisce σ -quoziente $(b/a)_\sigma$ l'insieme $\{x \in S: b \in a\sigma x\}$.

Introduciamo ora il seguente assioma:

(J5) (legge di esistenza del quoziente) per ogni $a, b \in S$, $(b/a)_\sigma \neq \emptyset$.

Nota 5.1 - Il fatto che valgano (J1), (J2), (J5) si esprime dicendo che (S, σ) è un *ipergruppo* (Corsini, 1993), concetto che generalizza quello classico di gruppo, considerando la possibilità di operazioni con più risultati.

Si può dimostrare che la (J5) è soddisfatta da tutti gli spazi geometrici considerati nel paragrafo 1. In particolare, se $a \neq b$:

- (a) Per gli spazi di rette, $a\sigma b = (b/a)_\sigma$;
- (b) Per lo spazio euclideo dei segmenti chiusi $(a\sigma b) \cap (b/a)_\sigma = b$;
- (c) Per lo spazio euclideo dei segmenti aperti $(a\sigma b) \cap (b/a)_\sigma = \emptyset$.

Un altro assioma importante è il seguente:

(J6) (assioma di incidenza) dati 4 punti distinti a, b, c, d in S , se $(b/a)_\sigma \cap (d/c)_\sigma \neq \emptyset \Rightarrow a\sigma d \cap b\sigma c \neq \emptyset$ (5.1)

Nel caso dello spazio proiettivo l'assioma di incidenza equivale all'assioma di Veblen-Young che caratterizza gli spazi proiettivi (Beutelspacher, Rosembaum, 1979):

“se le rette ab e cd si incontrano in un punto x , allora anche le rette ad e bc si incontrano in un punto y ”.

Nel caso dello spazio euclideo (di segmenti) l'assioma di incidenza equivale all'assioma di Pash che introduce un ordine in geometria:

“dato il triangolo xbc e un punto a sul segmento xb , allora ogni retta per a e per un punto d , sulla retta per x e c , ma esterno a xc , incontra il segmento bc ”

Definizione 5.1 - Una coppia (S, σ) che soddisfa tutti gli assiomi (J1), ..., (J6) si dice *join space* (o *spazio join*) (Corsini, 1993).

In maniera equivalente si può dire che

“uno spazio join è un ipergruppo commutativo idempotente in cui vale l’assioma di incidenza”,

oppure

“uno spazio join è un sistema join in cui valgono l’esistenza del quoziente e l’assioma di incidenza”.

6 - Rette, segmenti chiusi o segmenti aperti?

In generale, dato un join space $J = (S, \sigma)$, diamo la seguente definizione:

Definizione 6.1 - Diciamo che il join space $J = (S, \sigma)$ è:

chiuso se, per ogni a, b in S , $a\sigma b \supseteq \{a, b\}$;

aperto se, per ogni a, b in S , $a \neq b$, $a\sigma b \cap \{a, b\} = \emptyset$.

Si possono verificare i seguenti teoremi:

Teorema 6.1 - Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(a) $J = (S, \sigma)$ è chiuso;

(b) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = S$;

(c) per ogni a, b , distinti in S , $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma \supseteq b$.

Teorema 6.2 - Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(a) $J = (S, \sigma)$ è aperto;

(b) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = a$;

(c) per ogni a, b , distinti in S , $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = \emptyset$.

Le osservazioni precedenti portano ad una classificazione degli spazi join. Generalizzando le considerazioni fatte su spazi proiettivi e spazi euclidei possiamo fare la seguente classificazione degli spazi join:

(A) Se, per ogni a, b , distinti in S , $a\sigma b = (b/a)_\sigma$ si ha uno *spazio di rette*;

(B) Se, per ogni a, b , distinti in S , $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = b$ si ha uno *spazio di σ -segmenti chiusi*;

(C) Se, per ogni a, b in S , $a \neq b$, $a\sigma b \cap (b/a)_\sigma = \emptyset$ si ha uno *spazio di σ -segmenti aperti*.

Se vale la (A) siamo in presenza di un generale spazio proiettivo, essendo la definizione equivalente a quella data in (Beutelspacher, Rosembaum, 1979).

In particolare, oltre agli spazi proiettivi classici sono compresi gli spazi proiettivi finiti, di cui quello con un numero minimo di elementi è il piano di Fano.

L'idea intuitiva di convessità ottenuta da segmenti fa preferire gli spazi di segmenti, sia per una generalizzazione della geometria euclidea e sia per le misure coerenti rispetto ad un join space.

È necessario però fare una scelta: è preferibile lavorare su σ -segmenti aperti o su σ -segmenti chiusi?

Anche se a prima vista può sembrare più comodo considerare i σ -segmenti chiusi, tuttavia ci sono vari motivi che inducono a preferire i σ -segmenti aperti. Alcuni sono i seguenti:

(1) Evitare i casi banali o degeneri. Considerando i σ -segmenti chiusi la (J1) è soddisfatta anche se il σ -segmento $a\sigma b$ non contiene punti diversi dagli estremi, mentre la (J5) è soddisfatta anche se $(b/a)_\sigma$ non contiene punti diversi da b .

(2) Evitare di raddoppiare le dimostrazioni dei teoremi, dovendo considerando a parte i casi di un punto interno e di un estremo di un σ -segmento.

(3) Definire con precisione $(a/a)_\sigma$, che si riduce ad $\{a\}$ per i σ -segmenti aperti, mentre è uguale a tutto lo spazio per i σ -segmenti chiusi.

(4) Permettere una partizione finita di un σ -segmento $a\sigma b$. Non è possibile, in generale, per un σ -segmenti chiuso, mentre per un σ -segmento aperto, $a\sigma b$, con $a \neq b$, per ogni $c \in a\sigma b$, si ha che $\{a\sigma c, c\sigma a, c\}$ è una partizione in tre σ -segmenti aperti.

Inoltre, due proprietà importanti dei σ -segmenti aperti sono le seguenti:

Teorema 6.3 - Siano $J = (S, \sigma)$ un join space aperto e $a\sigma b$ un suo σ -segmento. Allora:

- (a) Per ogni $c \in a\sigma b$, $c\sigma b \subset a\sigma b$;
- (b) Per ogni $c, d \in a\sigma b$, $c\sigma d \subset a\sigma b$;
- (c) se $a \neq b$, $a\sigma b$ ha infiniti punti.

In conclusione, la condizione che $J = (S, \sigma)$ sia un join space aperto è molto restrittiva e i σ -segmenti di J sono effettivamente interpretabili, da un punto di vista intuitivo, come una generalizzazione dei segmenti di uno spazio euclideo aperto.

Per questo motivo si usa dare la seguente definizione:

Definizione 6.2 - Un join space $J = (S, \sigma)$ si dice *geometria join* se vale la seguente condizione:

(J7) (legge di idempotenza del quoziente) per ogni $a \in S$, $(a/a)_\sigma = \{a\}$.

In conclusione, per ottenere σ -segmenti che siano una generalizzazione intuitivamente soddisfacente dei segmenti della geometria euclidea, è conveniente considerare *geometrie join*, mentre, se si vuole lavorare in un ambito più generale, può essere opportuno limitarsi ad assumere i sei assiomi di uno *spazio join*.

7 - Conclusioni e prospettive di ricerca

L'aspetto straordinario delle teorie "join" è quello di racchiudere "l'essenza" del concetto di segmento e della teoria della convessità in quattro semplici assiomi, introducendo il concetto di "sistema join" e di " σ -segmento". Come conseguenza si ottengono vari teoremi fondamentali.

Il passo successivo, che nasce dall'idea di "prolungare" un " σ -segmento" e di stabilire una "sorta di ordinamento" porta all'introduzione della "legge di esistenza del quoziente" e della "proprietà di incidenza". Si ottiene quindi una struttura definita da sei assiomi, detta "spazio join", che ha vari modelli di grande interesse.

Possono accadere due eventualità:

(a) la procedura di prolungamento di un “ σ -segmento” porta a riottenere solo i punti dello stesso “ σ -segmento”. In tal caso i “ σ -segmenti” sono rette di uno spazio proiettivo (che può essere anche finito) e quindi lo “spazio join” è uno “spazio proiettivo”, così come definito in (Beutelspacher, Rosembaum, 1998).

(b) la procedura di prolungamento porta all’acquisizione di nuovi punti e quindi, intuitivamente, un “ σ -segmento” corrisponde all’idea intuitiva di “segmento” della geometria euclidea, rappresentandone una generalizzazione.

La maniera più semplice per ottenere il caso (b) è di ammettere che i “ σ -segmenti” siano aperti. Ciò si ottiene aggiungendo come settimo assioma la “legge di idempotenza del quoziente”. Le strutture geometriche che soddisfano tutti i sette assiomi sono dette “geometrie join”. In esse valgono varie proprietà dello spazio euclideo, incluso il fatto che un “ σ -segmento” ha infiniti punti.

Per quanto riguarda la generalizzazione del concetto di “probabilità soggettiva coerente”, introducendo il concetto di “misura join”, essa è possibile già semplicemente in un qualsiasi “sistema join” con sostegno R^n . Appare però più incisiva e intuitivamente efficace se si effettua in uno “spazio join” in cui vale l’alternativa (b), in particolare in una “geometria join”.

Negli ultimi decenni sono stati fatti molti studi per una generalizzazione del concetto di “probabilità”, introducendo “misure non additive” a partire dalla teoria dei “fuzzy set”.

Nel presente lavoro è stata proposta una nuova strada, a partire dal concetto di “sistema join”. L’idea è di ricercare nuovi modelli di “spazi join” in corrispondenza dei quali si ottengano “misure join” utili per particolari assegnate esigenze.

Bibliografia

Beutelspacher A., Rosembaum U. (1998). *Projective Geometry*, Cambridge University Press.

Corsini P. (1993). *Prolegomena of hypergroup theory*, Udine: Aviani Editore.

--- (1994). Join spaces, power sets, fuzzy sets, "*Proc. of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications*", Iasi, Romania.

Corsini P., Leoreanu L. (2003). *Applications of the Hyperstructure Theory*, London: Kluwer Academic Publishers.

Di Gennaro F., Maturo A. (2002). La teoria delle iperstrutture: un efficace strumento per una visione unitaria di algebra e geometria, "*Periodico di Matematiche*", Serie VIII, v. 2, n. 4, pp. 5-16.

Doria S., Maturo A. (1995). A hyperstructure of conditional events for artificial intelligence, in *Mathematical models for handling partial knowledge in artificial intelligence*, Plenum press, New York, pp. 201-208.

--- (1996). Hyperstructures and geometric spaces associated to a family of events, "*Rivista di Matematica Pura e Applicata*" n.19, pp. 125-137.

Dramalidis A., Vougiouklis T. (2012). Hv-semigroups as noise pollution models in urban areas, "*Ratio Mathematica*" n.23, pp. 39-50.

Ferri B., Maturo A. (1997). Hyperstructures as tool to compare urban projects, "*Ratio Mathematica*" n.12, pp. 79-89.

--- (1998). An application of the fuzzy set theory to evaluation of urban projects, *New trends in Fuzzy Systems*, Scientific Word, Singapore, pp. 82-91.

--- (1999). Fuzzy Classification and Hyperstructures: An Application to Evaluation of Urban Project, *Classification and Data Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 55-62.

--- (1999). On Some Applications of Fuzzy Sets and Commutative Hypergroups to Evaluation in Architecture and Town-Planning, *Ratio Mathematica*, n.13, pp. 51-60.

--- (2001). Mathematical models based on fuzzy classification and commutative hypergroups to solve present problems of evaluation in town planning, *Fuzzy Systems & A. I.*, v. VII, n.1-3, pp. 7-15.

--- (2001). Classifications and Hyperstructures in problems of Architecture and Town-Planning, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, v. 4, n.1, pp 25-34.

Hoskova-Mayerova Š., Maturo, A. (2016). An analysis of Social Relations and Social Group behaviors with fuzzy sets and hyperstructures, *Int. J. Algebraic Hyperstruct. Appl.* 2(1), pp. 91-99.

--- (2016). Fuzzy sets and algebraic hyperoperations to model interpersonal relations, in "Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models". *Studies in Systems, Decision and Control*, v. 66.

Marty F. (1934). Sur une généralization de la notion de group, IV, *Congres des Mathématiciens Scandinave*, Stockholm.

Maturo A. (2006). A Geometrical Approach to the Coherent Conditional Probability and its extensions, *Scientific Annals of the University Ion Ionescu de la Brad*, Tom XLIX, v 2, pp. 243-255.

--- (2008). Join coherent previsions, *Set-valued Mathematics and Applications*, v. 1 n.2, pp. 135-144.

--- (2009). Coherent conditional previsions and geometric hypergroupoids, *Fuzzy sets, rough sets and multivalued operations and applications*, v. 1, n.1, pp. 51-62.

Prenowitz W., Jantosciak J. (1979). *Join Geometries*, New York: Springer-Verlag UTM.

Vougiouklis T. (1994). *Hyperstructures and their representations*, U.S.A: Hadronic Press.

--- (1999). Fundamental Relations in hyperstructures, *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, v. 42, pp.113-118.

--- (2009). Hyperstructures as models in social sciences, *Ratio Sociologica*, v. 2, n.2, pp. 21-34.

Le geometrie non euclidee nel mondo reale

Su quale Geometria poggia la Fisica moderna?

Ferdinando Casolaro*- Umberto Salzano**

* Direttore di redazione Periodico di Matematica

ferdinando.casolaro@gmail.com

**I.S. Striano Terzigno umbertosalzano@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.066

Sunto: Dopo un sintetico excursus storico sull'evoluzione della Geometria dall'antichità ad oggi, attraverso l'arte e l'astronomia, si presenta un percorso didattico da proporre nella Scuola secondaria di secondo grado, per l'introduzione del Modello di geometria sullo spazio curvo utilizzato da Einstein per lo sviluppo della Teoria della Relatività.

Parole Chiave: Storia, Geometria, spazio, relatività.

Abstract: After a brief historical excursus on the evolution of geometry from antiquity to today, through art and astronomy, an educational path is presented to be proposed in the secondary school, for the introduction of the geometry model on curved space. used by Einstein for the development of the Theory of Relativity.

Keywords: History, geometry, space, relativity.

1 - Introduzione

In un precedente lavoro (Casolaro, 2020) è stata presentata una proposta didattica, con excursus storico, per l'inserimento delle nozioni fondamentali di Geometria Proiettiva nella Scuola secondaria di secondo grado, con l'obiettivo di ampliare il modello euclideo tenendo conto dei risultati degli ultimi due secoli.

In questo lavoro presenteremo un percorso analogo riferito alla geometria sullo spazio curvo secondo il modello di Riemann, indicato tra le "geometrie non euclidee" sviluppate nel XIX secolo (Casolaro, 2019).

La geometria euclidea resta ancora oggi - duemila anni dopo che Euclide ha scritto gli *Elementi* - uno degli strumenti di logica più forte a disposizione del docente di matematica ed è ritenuto, a ragione, un modello quasi perfetto.

Tale modello va però corretto secondo una revisione moderna che tiene conto dello sviluppo della fisica nell'ultimo secolo, in quanto lo studio dell'universo fa ipotizzare uno spazio che potrebbe non essere propriamente piatto.

Nella fisica classica lo spazio costituisce un sistema a cui si riferiscono tutti i fenomeni, per cui esso esiste indipendentemente dagli eventi che si verificano.

La teoria della Relatività ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

Poiché il moto di un corpo rappresenta la variazione di posizione del corpo istante per istante, cioè nel tempo, non è

possibile concepire uno spazio indipendentemente dal tempo, che rappresenta, con opportuni accorgimenti, una quarta dimensione del sistema di riferimento in cui si colloca ogni evento.

Ciò significa che l'universo fisico non incorpora come modello privilegiato la geometria euclidea, ma tiene conto di altri modelli. Infatti, secondo Einstein, l'universo piatto (modello euclideo) è un universo vuoto e privo di materia, in quanto la presenza di materia introduce una curvatura nello spazio.

In questo spazio curvo, i corpi, in assenza di forze non gravitazionali, percorrono la linea più breve (geodetica) in analogia al percorso rettilineo che è valido solo nello spazio piatto. Precisamente, secondo il concetto classico:

- la materia crea un campo gravitazionale e questo fa deviare i corpi;

invece secondo Einstein:

- il campo gravitazionale va interpretato come curvatura dello spazio e tale curvatura determina la sostituzione del concetto di retta con quello di geodetica.

Per fenomeni che avvengono all'interno del sistema solare, la Relatività Generale introduce modifiche lievi ed appena rilevabili rispetto alla teoria newtoniana. Su questa scala lo spazio è leggermente deformato, ma per distanze dell'ordine di miliardi di anni luce, la materia presente nell'Universo incide in maniera rilevante sulla natura dello spazio.

È quindi principalmente sulle grandi distanze che viene a cadere il modello euclideo (Casolaro, 2018).

Infatti, per formulare la teoria della relatività generale, Einstein ha utilizzato un modello di tipo ellittico analogo al modello di geometria non euclidea di Riemann (1826-1866).

Del resto, già mezzo secolo prima di Einstein, Riemann, nello strutturare la sua geometria su superfici, come k -varietà¹ di spazi a dimensione $n > k$, giunse alla conclusione che lo spazio fisico è una varietà tridimensionale a curvatura costante.

Tale congettura si può considerare come un'anticipazione di successivi risultati (in particolare di Levi-Civita e Ricci) che ha portato alla teoria della relatività generale di Einstein. Questo concetto sarà giustificato analiticamente nel paragrafo 5. di questo lavoro.

2 - Una breve analisi storica

I primi frammenti di geometria sferica li ritroviamo, nell'VIII-VII sec. a.C. ad opera dei Caldeo-Babilonesi, che hanno cercato di approfondire le proprietà dello spazio e il loro campo di studio era la Sfera (Kline, 1991; Casolaro, Pisano, 2011).

In seguito anche i greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica. Di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati pubblicati i due testi (Kline 1991) *Sulle sfere mobili* e *Il sorgere ed*

¹ Con il termine “Varietà” si indica una generalizzazione del concetto di spazio a più dimensioni. Pertanto, senza che se ne leda il concetto, a livello didattico si può sostituire ad esso la parola “Spazio”.

il tramontare, scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di Euclide, l'astronomo Autolico di Pitane.

I due trattati di Autolico sono i testi più antichi che sono stati trovati intatti. Nel testo *Sulle sfere mobili* Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli. È significativo, come in queste due opere le proposizioni siano disposte in ordine logico, in modo tale che ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione.

È questo lo stile usato da Euclide nella sua opera “gli Elementi” in cui riassume le principali ricerche dei matematici che lo precedettero, completandole e riordinandole dal punto di vista logico, in modo pressoché perfetto essendo ben determinata la deduzione di ogni teorema dai precedenti o dalle proposizioni primitive.

Lo stesso Euclide trattò alcune questioni di geometria sferica, come si trova nella sua opera *I fenomeni*”, di cui esiste una pubblicazione del 1916 (Kline 1991). In essa si dà una definizione dinamica della sfera come superficie di rotazione di una circonferenza intorno al suo diametro, contrariamente alla definizione statica degli *Elementi* in cui la Sfera è definita come luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro.

È in questa opera che compare per la prima volta, anche se non esplicitamente, il concetto di trasformazione geometrica, in considerazione delle varie posizioni che assume la circonferenza ruotando intorno a un proprio diametro.

È interessante osservare come l'autore dell'opera più importante della geometria piana a livello statico, abbia intuito le prime proprietà di una geometria di "movimento".

Il fatto, poi, che testi del terzo secolo a.C. siano stati tradotti nel XIX e nel XX secolo, fa ipotizzare che questi risultati potevano avere una loro importanza, seppur di carattere storico, per far comprendere come già nell'antichità si pensasse ad un Universo non euclideo.

Tale congettura è stata poi confermata nel periodo in cui (fine del XIX secolo) due matematici, Tullio Levi Civita (1873-1941) e Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) stavano sviluppando "la teoria dei tensori", utilizzata da Einstein all'inizio del secolo successivo per lo sviluppo della "Teoria della Relatività".

Altri matematici che hanno lasciato tracce sulla Sferica sono (Casolaro 2002):

- Teodosio di Bitinia (circa 20 a.C.), che raccolse i risultati allora noti di geometria sferica nella sua opera "Sphericae"; ma in quel periodo quest'opera non risultò utile ad affrontare il problema fondamentale dell'astronomia greca, che era quello di determinare l'ora di notte osservando le stelle.

- Menelao (circa 98 d. C.), che nei suoi studi di trigonometria scrisse il trattato "Sphaerica", che ci è pervenuto in una versione araba in tre libri (c'era anche un testo greco che, però, è andato smarrito), tradotta da Francesco Maurolico da Messina (1494-1575). Nel libro I, dedicato alla geometria sferica, si trova il concetto di triangolo sferico, cioè della figura formata da tre archi di cerchio massimo di una sfera, ciascuno dei quali è minore di un semicerchio. Lo scopo del libro è quello di provare, per i triangoli sferici, dei teoremi

pressoché analoghi a quelli dimostrati da Euclide per i triangoli piani.

Così, la somma di due lati di un triangolo sferico è maggiore del terzo lato, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti, lati uguali sottendono angoli uguali.

Menelao prova poi un teorema che non ha alcun analogo per i triangoli piani: *se gli angoli di un triangolo sferico sono rispettivamente uguali a quelli di un altro, allora i due triangoli sono congruenti.*

Ci sono anche altri teoremi di congruenza e dei teoremi sui triangoli isosceli. Il libro II della Sphaerica è dedicato principalmente all'Astronomia e tocca solo indirettamente la geometria sferica. Il libro III tratta la trigonometria sferica.

- Tolomeo (II sec. d. C.): affronta vari problemi di trigonometria sferica, ma nei suoi lavori non vi è una presentazione sistematica e vengono provati soltanto i teoremi che sono necessari per risolvere specifici problemi astronomici. Tolomeo lavora con triangoli sferici, ma nel calcolare le corde degli archi, egli pone le basi teoretiche della trigonometria piana (conviene notare che la trigonometria fu creata per applicarla all'Astronomia, e poiché la trigonometria sferica era la più utile per tale scopo, essa fu la prima a essere sviluppata).

In seguito hanno lasciato tracce di geometria e trigonometria sferica gli arabi Al'Battn (858-929) e Abu'l Wefa (940-998), oltre al persiano Nasir-Eddin 1201-1274); queste opere non furono note in Europa fino alla metà del XV secolo quando gli studiosi tedeschi George Peurbach (Vienna, 1423-1461) ed un suo allievo Johann Müller Königsberg, noto come Regiomontano (1436-1476) iniziarono a tradurre le opere

greche ed arabe. In particolare, Regiomontano nella sua opera *De triangulis* scritta tra il 1462 e il 1463 e pubblicata postumo nel 1533, raccolse in un sistema organico tutte le conoscenze disponibili di geometria sferica e di trigonometria sferica. Nel frattempo, però, Johann Werner (1468-1528) aveva migliorato le idee di Regiomontano nella sua opera *De triangulis Sphaericis* pubblicata nel 1514.

In queste opere la trigonometria sferica era assillata dalla necessità di utilizzare una moltitudine di formule; ciò era dovuto al fatto che il Regiomontano e il Werner (ed anche in seguito Copernico) avevano usato soltanto le funzioni seno e coseno. Fu un allievo di Nicolò Copernico (1473-1543), George Joachim Rheticus (1514-1576), che usa per la prima volta tutte e sei le funzioni trigonometriche.

La trigonometria sferica venne ulteriormente sistematizzata ed in parte ampliata da Francois Viète (1540-1603), che riesce a dare l'insieme completo delle formule necessarie per calcolare una parte di un triangolo sferico rettangolo ed una regola pratica per ricordare un insieme di formule che è oggi nota con il nome di regola di Napier (John Napier, 1550-1617). Nel XVII secolo, nozioni di geometria sferica vengono utilizzate (ed anche ampliate in alcuni scritti) dall'astronomo inglese Edmund Halley (1656-1742).

Nel XVIII secolo ha inizio, con Eulero (1707-1783), la trattazione moderna della trigonometria sferica tendente a derivare tutta la trigonometria da principi semplici; la generalizzazione delle formule della trigonometria sferica e l'interpretazione da un punto di vista superiore della geometria sferica è dovuta principalmente a Gauss (1777-1855), la cui idea di considerare *una superficie curva come spazio*

in se, ha dato inizio ad uno studio generalizzato di geometrie su superfici curve: le geometrie non euclidee.

In realtà, all'inizio del XVIII secolo, l'interesse era rivolto principalmente alla geometria proiettiva e le ricerche sulla geometria non euclidea non attirarono i matematici inglesi, francesi e tedeschi, almeno fino a quando Gauss non si espresse positivamente sulla validità logica di esse e della possibilità di individuare uno spazio fisico che risponda alle sue proprietà.

Ciò avviene intorno al 1818, anno in cui un professore di giurisprudenza Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) inviò a Gauss un promemoria del 1816 in cui distingueva due geometrie: la geometria euclidea e la geometria che egli chiamava "geometria astrale" in quanto pensava che potesse valere nello spazio stellare (Casolaro, Santarossa 1997).

La teoria geometrica di Schweikart ebbe l'approvazione di Gauss, che, già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle parallele; in una lettera al suo amico Olbers - del 1817 - egli afferma che non è possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra geometria applicabile fisicamente.

I teoremi provati da Gauss nei suoi lavori sono in gran parte simili a quelli che si incontrano nelle opere di Nikolai Lobatchevsky (1793-1856) e di Wolfgang Bolyai (1775-1856) (Casolaro, Pisano 2011), i due matematici ai quali, insieme a Georg Bernhard Riemann (1826-1866) [1], si devono i risultati più importanti sulle geometrie non euclidee.

Per la nostra trattazione, faremo riferimento allo sviluppo della geometria ellittica (indirizzo metrico-differenziale) di Riemann (1826-1866), di cui la geometria sferica è un caso particolare (Casolaro, Pisano 2012).

3 - Costruzione di uno spazio euclideo

Cerchiamo di proporre un percorso didattico che, attraverso interrelazioni tra Matematica e Fisica, ci consenta di introdurre nella Scuola Secondaria di secondo grado concetti che sono oggetto di studio nei corsi universitari di Geometria.

Il percorso ha come obiettivo la comprensione delle proprietà di uno "spazio curvo" partendo dallo studio dello "spazio euclideo" (cosiddetto "spazio piatto") al fine di analizzare i fenomeni che avvengono nell'Universo; per lo studio di tali fenomeni, le grandezze che i fisici utilizzano in modo forte sono i vettori.

La "teoria dei vettori" è alla base del primo ampliamento della geometria euclidea in quanto caratterizza la geometria affine, il cui gruppo di trasformazioni conserva il parallelismo tra rette (come il gruppo euclideo) ma non conserva l'ampiezza degli angoli (Casolaro in Cundari, 1993).

3.1 - Definizione di vettore e concetto di iperpiano

In Matematica, un vettore è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti (due segmenti del piano si dicono equipollenti se sono congruenti, paralleli ed equiversi).

L'equipollenza tra segmenti è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza $\{\vec{v}\}$ di segmenti equipollenti prende il nome di vettore.

In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:

- 1) vale la legge del parallelogramma;
- 2) è invariante rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione.

Nel modello di spazio vettoriale lineare, la costruzione di uno spazio a n dimensioni, che indicheremo con S_n , richiede la conoscenza di n vettori linearmente indipendenti (base), in quanto tutti gli altri vettori dello spazio si esprimono come combinazione lineare di essi. In tale contesto i sottospazi di S_n ad $n-1$ dimensione sono detti "iperpiani" che indichiamo con S_{n-1} e si esprimono mediante un'equazione lineare di primo grado a n incognite del tipo:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + q = 0$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n, q$ numeri reali.

Ad esempio, una retta r di un piano (iperpiano di uno spazio S_2) è rappresentata da un'equazione di primo grado a due incognite del tipo $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti a, b delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla direzione della retta r .

Analogamente, un piano dello spazio tridimensionale (iperpiano di S_3) è rappresentato da un'equazione di primo grado a tre incognite del tipo $ax + by + cz + d = 0$, dove i coefficienti a, b, c delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla giacitura del piano.

Un sottospazio di S_n ad $n-2$ dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di due equazioni di primo grado ad n incognite (intersezione di due iperpiani di S_n) del tipo:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + q_1 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + q_2 = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(A) = 2$. Ad esempio, una retta (sottospazio S_1 di S_3) è rappresentata da un sistema di due equazioni di primo grado a tre incognite (intersezione di due piani):

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + q_1 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + q_2 = 0 \end{cases}$$

In generale, un sottospazio di S_n ad $n-k$ dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di k equazioni ad n incognite del tipo:

Se $\vec{u}$ è un vettore non nullo di S_1 , ogni altro vettore $\vec{v}$ di S_1 diverso dal vettore nullo, si può esprimere come prodotto del vettore $\vec{u}$ per il numero reale $\alpha \neq 0$

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \quad (3.2.1)$$

Infatti, in uno spazio ad una dimensione, tutti i vettori hanno la stessa direzione, per cui basta operare solo sul modulo e sul verso (che è individuato dal segno più o meno che precede il modulo); dunque, in S_1 il numero reale

$$\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

si può identificare come rapporto tra i numeri reali

$|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$, rispettivamente moduli di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$.

Definizione: Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ del piano si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione.

In tal caso, sussiste tra essi la (3.2.1).

Dalla (3.2.1) si ha:

$$\alpha \vec{u} + (-1)\vec{v} = \vec{0} \quad (3.2.2)$$

cioè: "se due vettori sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo".

Allora, per ogni coppia di vettori rappresentati nel piano da segmenti orientati paralleli, posso dire che "fissato un vettore, l'altro si ottiene da esso moltiplicandolo per un numero reale". Pertanto, il sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_1 è costituito da un solo vettore $\vec{u}$ non nullo; la conoscenza di $\vec{u}$ è sufficiente per la costruzione dello spazio S_1 .

3.3 – Costruzione di S_2

Definizione: Tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dello spazio S_3 si dicono *linearmente dipendenti* se hanno la stessa giacitura, cioè se possono essere rappresentati con segmenti orientati sullo stesso piano (superficialmente diciamo: se esiste un piano che li contiene).

La giacitura individuata da due vettori rappresentati da segmenti orientati non paralleli $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ definisce, dunque, tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Infatti, se $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore $\vec{w} \equiv \vec{u}_3$, appartenente al piano individuato da $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1 \vec{u}_1$, linearmente dipendente da $\vec{u}_1$, ed $\alpha_2 \vec{u}_2$, linearmente dipendente da $\vec{u}_2$ (fig. 3.3.1):

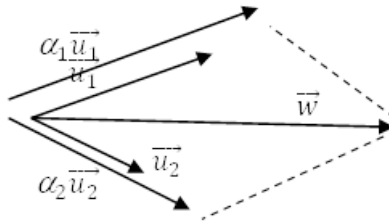


Figura 3.3.1

$$\vec{u}_3 = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \quad (3.3.2)$$

da cui:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \quad (3.3.3)$$

Le (3.2.2) e le (3.3.3), esprimono, relativamente a spazi euclidei unidimensionali e bidimensionali, la classica definizione di sistema di vettori linearmente dipendenti (dell'algebra lineare). Da essa discende immediatamente:

- due vettori di uno spazio unidimensionale S_1 (retta o fascio di rette parallele) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema di vettori linearmente indipendenti di un S_1 è costituito da un solo vettore;

- tre vettori di uno spazio bidimensionale S_2 (piano o fascio di piani paralleli) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di un S_2 è costituito da due vettori.

- In generale, n vettori di uno spazio ad $n-1$ dimensioni (spazio S_{n-1}) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_{n-1} è costituito da $n-1$ vettori (Casolaro 2019).

4 - Ampliamento della geometria euclidea alla geometria affine

Come accennato nel paragrafo 3. di questo lavoro, il primo ampliamento del Modello euclideo è la geometria nello spazio affine che si costruisce su uno spazio vettoriale (Casolaro, 1993).

Rimandando alla letteratura di tutti i testi in adozione le note proprietà dello spazio vettoriale, presentiamo un percorso che dal modello analitico di riferimento cartesiano negli spazi piatti, ci conduce ad un analogo modello sullo spazio curvo.

Teorema. *Se n vettori di uno spazio S_n sono linearmente dipendenti, la matrice delle loro componenti, in un opportuno riferimento di S_n , ha determinante uguale a zero.*

Proviamo il teorema per $n = 2$. Precisamente:

Se due vettori del piano sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante uguale a zero.

Dim. Se due vettori sono linearmente dipendenti, hanno la stessa direzione per cui, dalla rappresentazione cartesiana delle componenti (fig. 4.1) si deduce che

$$a_x : b_x :: a_y : b_y \quad \Rightarrow \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

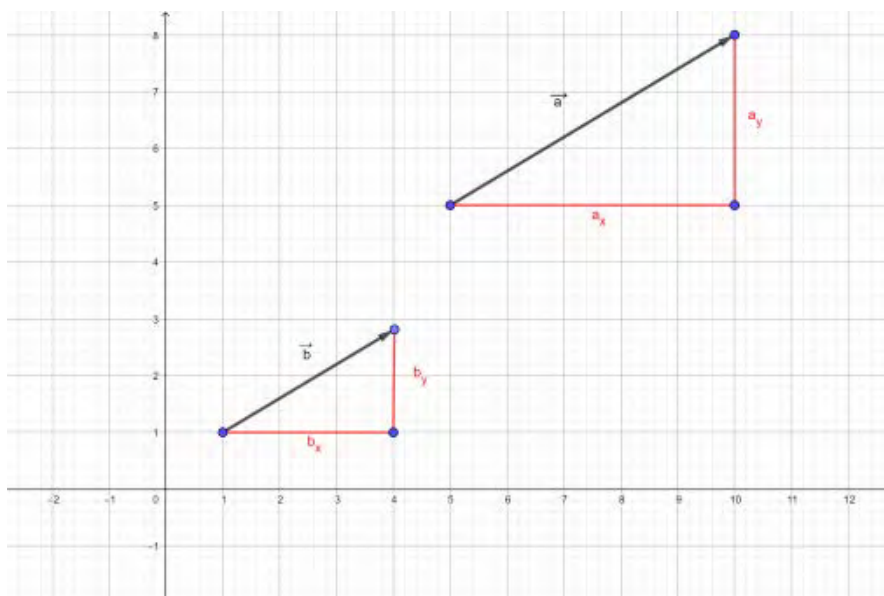


Fig 4.1

cioè

$$\det \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto, noto il teorema per $n = 2$, procedendo per induzione si dimostra la generalità. La ovvia conseguenza di tale teorema è:

n vettori di uno spazio S_n sono linearmente indipendenti, se e solo se la matrice delle loro componenti, in un opportuno riferimento dello spazio, ha determinante diverso da zero.

4.1 – Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione tra vettori il cui risultato è uno scalare (un numero reale per i nostri obiettivi).

Se $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ sono due vettori del piano, si definisce prodotto scalare il numero reale ottenuto dal prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo ϑ che essi formano:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta$$

Applicando le proprietà delle operazioni negli spazi vettoriali (associativa e distributive) risulta:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto che:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = 1 \qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = 0$$

si ha:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta = a_x b_x + a_y b_y$$

che esprime il prodotto scalare, nella rappresentazione cartesiana, come somma dei prodotti delle componenti omologhe.

4.2 – Equazione di retta e piano nello spazio affine

In un riferimento cartesiano del piano sia $P(x, y)$ un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate x e y di P .

Se $\vec{n}(a, b)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = 0, \quad \text{cioè} \quad ax + by = 0 \quad (*)$$

La (*), equazione della retta OP in S_2 , individua dunque il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a, b)$.

Se curvassi questa retta, otterrei un arco tale che il vettore perpendicolare in ogni punto alla retta tangente all'arco non avrebbe più direzione costante, quindi le componenti a e b del vettore $\vec{n}(a, b)$ risulterebbero funzioni delle coordinate del punto nel piano.

Anche per il piano in S_3 si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto $P(x, y, z)$ diverso dall'origine in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate x, y e z di P .

Se $\vec{n}(a, b, c)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = 0, \quad \text{cioè} \quad ax + by + cz = 0 \quad (**)$$

che rappresenta l'equazione del piano per l'origine e individua il luogo geometrico dei punti di S_3 tali che il

segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a, b, c)$.

Anche in questo caso concludo che *i vettori perpendicolari al piano in ogni punto, hanno la stessa direzione*. Così di seguito, operando su spazi piatti, di dimensione tre, quattro, ... ecc, i vettori perpendicolari allo spazio hanno tutti la stessa direzione.

Se, invece, consideriamo uno spazio curvo, la direzione del vettore perpendicolare allo spazio cambia in ogni punto, per cui le componenti del vettore normale allo spazio in un punto (precisamente al piano tangente la superficie in quel punto) sono funzioni delle coordinate.

5 - Modello geometrico in uno spazio a curvatura non nulla.

Considerata una superficie come spazio in sé, vediamo, innanzitutto, come si può costruire su di essa una geometria analoga a quella del piano:

- Ai concetti intuitivi di punto, piano e retta associamo rispettivamente i concetti di punto stesso, superficie e geodetica. Ovviamente l'analogo del segmento rettilineo sarà l'arco di geodetica.

- Alla relazione di uguaglianza tra figure, in geometria euclidea:

Due figure piane sono uguali, se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze rettilinee fra le coppie di punti corrispondenti, siano uguali,
corrisponde, per la geometria non euclidea:

Due figure su una superficie sono uguali se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze geodetiche fra coppie di punti corrispondenti sono uguali.

- Le proprietà fondamentali dell'uguaglianza fra archi geodetici e angoli, corrispondono ai postulati della congruenza tra segmenti ed angoli.

In un discorso di carattere didattico, la generalizzazione di queste proprietà mediante l'intuizione, la si può dare utilizzando come superficie un foglio flessibile ed inestensibile, sì che, se su di esso vi sono figure uguali, con una flessione della superficie le possiamo sovrapporre una sull'altra.

Due superfici applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria; ad esempio, su una superficie cilindrica si avrà una geometria assimilabile a quella di una superficie piana (ovviamente, bisogna definire opportunamente i concetti fondamentali).

Se abbiamo una geometria su una superficie sferica, essa sarà diversa da quella del piano, perché è impossibile rendere piana una porzione di sfera senza provocare contrazioni o dilatazioni.

Però, è facile verificare che anche sulla sfera valgono, per figure uguali, proposizioni analoghe ai postulati della congruenza nel piano, in quanto la sfera può muoversi liberamente su se stessa come il piano (non valgono le proprietà affini e le proprietà del parallelismo che si avvalgono del V postulato).

Quella superficie che si può muovere liberamente su se stessa, come accade per la superficie piana, è caratterizzata da una grandezza costante in ogni suo punto: la curvatura K .

La definizione rigorosa di curvatura richiede conoscenze che esulano da un'esposizione elementare. Però, come per i concetti di retta e di piano in geometria euclidea, riteniamo che si possa lasciare all'intuito dello studente di immaginare quelle superfici a curvatura zero (il piano), a curvatura costante (la sfera), a curvatura variabile (ellissoide, o banale esempio dell'uovo).

Rimandando alla Bibliografia (Casolaro, Santarossa, 1997) la caratterizzazione relativa alla suddivisione delle geometrie in base alla curvatura (non essenziale per il nostro scopo), ci limitiamo a far presente che ci riferiremo ad un modello di geometria di tipo ellittico, analogo a quello di Riemann, che trova applicazione nello spazio fisico.

Riemann riteneva che le proprietà che distinguono lo spazio fisico da altre varietà, possono essere ricavate solo dall'esperienza; di conseguenza, egli pensava che gli assiomi della geometria euclidea potessero essere veri solo approssimativamente per lo spazio fisico e, come Lobacewsky, riteneva che sarebbe stata l'Astronomia a stabilire la geometria che meglio si adatta allo spazio fisico.

Già nel 1854, Riemann, dedusse che lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.

In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, egli riteneva che per determinare la vera natura dello spazio fisico, si dovesse associare fra loro spazio e materia (e di conseguenza il tempo). A tale scopo, così si esprimeva:

O la realtà soggiacente lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi.

Quest'idea, che ha condotto poi alla Teoria della relatività, fu sviluppata da William Clifford (1845-1879) il quale sosteneva che:

"La variazione della curvatura dello spazio sia ciò che accade realmente in quel fenomeno che chiamiamo moto della materia, sia essa pesante o eterea".

6 - Modello di Riemann ed estensione della geometria alla Fisica.

Il modello formulato nel 1854 da Riemann (geometria ellittica), si può considerare una estensione della geometria differenziale di Gauss (Casolaro, 2002).

Riemann voleva dimostrare che gli assiomi di Euclide sono verità empiriche (e non verità evidenti) ed adottò l'approccio analitico proprio perché riteneva che nelle dimostrazioni geometriche si potesse essere indotti ad assumere come verità ciò che è soltanto una nostra percezione, in quanto conosciamo lo spazio solo localmente; da qui lo studio del comportamento locale dello spazio, cioè l'approccio metrico-differenziale.

Del resto l'ortogonalità tra vettori, per come è stata definita su un iperpiano di uno spazio piatto, non ha significato su una superficie curva; il prodotto scalare tra un vettore normale alla

superficie in un suo punto ed un vettore del piano tangente alla superficie in quel punto è un'approssimazione corretta della realtà solo se operiamo in un intorno del punto abbastanza piccolo da poter identificare l'elemento infinitesimo di superficie con una parte infinitesima di piano.

Infatti sugli elementi lineari, Riemann definisce la distanza tra due punti, le cui coordinate corrispondenti differiscono solo per degli infinitesimi. Basandosi su alcune ipotesi, egli assume per la distanza un'espressione del tipo:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j \quad (6.1)$$

in cui le g_{ij} sono funzioni delle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che $g_{ij} = g_{ji}$ e l'espressione quadratica a secondo membro è sempre positiva. Dalla (6.1), con:

$$g_{ij} = 0, \forall i \neq j; \quad g_{ji} = 1, \forall i = j,$$

si ottiene:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$$

che rappresenta la distanza nel modello euclideo.

Nella parte finale del suo lavoro, Riemann applica allo spazio ordinario questi risultati, concludendo che lo spazio fisico è una varietà a tre dimensioni a curvatura costante.

Tale conclusione sarà giustificata analiticamente dai risultati pubblicati nel 1885 da Tullio Levi-Civita e Gregorio Ricci Cubastro che hanno sviluppato il calcolo tensoriale che applicheremo, in modalità elementare, al Modello di seguito indicato.

Ad esempio, riferendoci ad una varietà tridimensionale di uno spazio a quattro dimensioni S_4 , un'equazione lineare in quattro incognite del tipo:

$$g_{11}(x, y, z, t) dx + g_{22}(x, y, z, t) dy + g_{33}(x, y, z, t) dz + g_{44}(x, y, z, t) dt = 0 \quad (6.2)$$

ottenuta dal prodotto scalare tra il vettore² $\vec{g}(g_{12}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$ (normale alla superficie S_4) ed il vettore $d\vec{s}(dx, dy, dz, dt)$ (spostamento infinitesimo su S_4), individua un iperpiano S_3 dello spazio S_4 , in cui le g_{ii} ($i = 1, \dots, 4$) sono funzioni delle coordinate (x, y, z, t) analoghe a quelle introdotte da Riemann per la sua geometria non euclidea, in cui la metrica è definita dalla (6.1).

Allo stesso modo, i sistemi:

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \\ g_{31}dx + g_{32}dy + g_{33}dz + g_{34}dt = 0 \end{cases}$$

in cui le matrici

² In realtà abbiamo chiamato “vettore” impropriamente l'espressione $\vec{g}(g_{12}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$ che, secondo la teoria di Levi-Civita/Ricci Cubastro è definita “tensore”, cioè un vettore a componenti variabili.

$$A_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix}$$

hanno rango $\rho(A_1)=2$, $\rho(A_2)=3$, rappresentano uno spazio S_2 (analogo al piano euclideo) iperpiano di S_3 , ed uno spazio S_1 (analogo alla retta euclidea) iperpiano di S_2 .

Nell'idea di Einstein, le funzioni g_{ij} incorporano gli effetti delle masse gravitazionali nello spazio. Tali effetti, provocando una curvatura in ogni punto, sono la causa del cambiamento di direzione del vettore normale alla superficie in quel punto.

Con l'introduzione della coordinata-tempo, si ha poi una più corretta analisi dell'universo, identificato col cosiddetto spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky (Casolaro, 2018), in cui l'insieme dei punti-eventi (x, y, z, t) definisce un continuo a quattro dimensioni che rappresenta uno spazio geometrico S_4 .

In tale ottica, lo spazio S_3 dei punti (x, y, z) del modello euclideo, visto come sottospazio di S_4 , può essere assimilato ad un iperpiano dello spazio-tempo di Minkovsky.

Se analizziamo la struttura dei sottospazi di S_4 , in analogia al modello analitico euclideo, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- per $dt = 0$ (ovvero $t = \text{costante}$), si ha l'iperpiano S_3 , che è lo spazio geometrico euclideo tridimensionale, in cui valgono le leggi della cinematica classica;

- se invece è costante una delle coordinate x, y, z , ($dx=dy=dz=0$) si hanno iperpiani S_3 di S_4 che caratterizzano modelli cinematici relativistici su S_2 , che è l'analogo del piano euclideo.

Ad esempio, l'insieme dei punti $P(x, y, 0, t) \equiv P(x, y, t)$ è un S_3 , le cui coordinate (x, y, t) individuano i punti-eventi del piano $S_2(x, y)$ che è prolungato alla cinematica con l'introduzione della coordinata tempo t .

In tale contesto, bisogna tener conto che la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (6.2)$$

Tale relazione si può giustificare geometricamente, aggiungendo alla terna reale (O, x, y, z) del riferimento di S_3 , un quarto asse immaginario ortogonale ad S_3 in cui la coordinata tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria i e, per uniformità dimensionale, per la velocità della luce c .

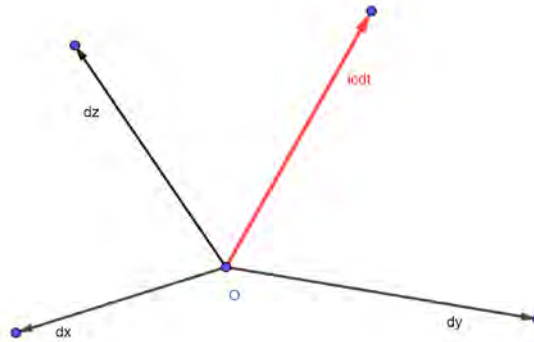


Fig. 6.1

Il vettore $d\vec{s}$ ha allora componenti (dx, dy, dz, ict) (fig. 6.1) e quindi la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2 c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 ,$$

cioè la (6.2).

Ciò porta a concludere che la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.

Infatti, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al movimento dei corpi ed alla propagazione della luce, che si ottengono facendo astrazione dal tempo e dalle forze. Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della relatività generale.

Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia legata al significato delle g_{ij} il cui uso incorporava gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio; infatti, le geodetiche del suo spazio-tempo sono precisamente le traiettorie degli oggetti che si muovono liberamente (come ad esempio la traiettoria della terra intorno al sole), analogamente alla legge newtoniana che ci fa individuare la retta come traiettoria descritta da un punto, non soggetto a forze, con velocità uniforme.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che,

secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali.

Bibliografia

Kline Morris (1991). *Storia del pensiero matematico*. Edizione Einaudi 1991.

F. Casolaro (1993), a cura di Cesare Cundari. *“Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche”*. Progetto del M.P.I. del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università “La Sapienza” di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): *“Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie”*. Pubblicazione 1993, pagine 101-103

Casolaro F., Santarossa R. (1997). Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche, *Atti del Congresso Nazionale Mathesis 1997: “Attività algoritmica e pensiero dialettico nell'insegnamento della Matematica”*. Caserta, 28-31 ottobre 1997; pagine 213-219

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo. *Atti del Congresso Nazionale Mathesis “La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo”* – 17-19 ottobre Bergamo 2002.; pag.185-198.

Casolaro F., Pisano R. (2006). Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività, *Atti del XXVI Congresso Nazionale di “Storia della Fisica e dell'Astronomia”* (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura “Valle Giulia” dell'Università di Roma “Sapienza”; pag. 221-231.

Casolaro F., Pisano R. (2011). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship

Geometry-Physics (Part One) - *History Research* - Vol. 1, Number 1, December 2011; pag. 47-60.

Casolaro F., Pisano R. (2012). An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part Two) - *History Research* - Vol. 2, Number 1, January 2012; pp. 57-65.

Casolaro F. (2018). Quale Geometria per lo spazio fisico. Quaderni dell'APAV n. 1 - 2018, pp. 57-68.

Casolaro F. (2019). Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkovschj. Corso di Formazione per l'insegnamento della Fisica nella Scuola Secondaria di secondo grado - Dipartimento di Architettura Università Federico II. *Quaderni APAV* n. 4; 2019, pp. 1-16

Casolaro F. (2020). Dalla Geometria euclidea alla Geometria proiettiva. Interrelazioni tra Matematica e Disegno. *Periodico di Matematica* n. 2, dicembre 2020; pp. 41-73.

Fisica e Geometria: un inseparabile binomio

Onofrio Casoria*

*I.T.C.S.G. Masullo – cassabato@inwind.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.067

Sunto: *Si presentano alcuni esempi di applicazione della matematica nella rappresentazione dei fenomeni fisici sperimentati nelle classi di un Istituto per geometri.*

Parole Chiave: *Equazioni, Piano cartesiano, moto di un corpo*

Abstract: *Here are some examples of the application of mathematics in the representation of physical phenomena experienced in the classes of an Institute for geometers.*

Keywords: *Equations, Cartesian plane, motion of a body*

1 - Il piano cartesiano

Negli Istituti Tecnici, ad indirizzo Biotecnologico e CAT, l'insegnamento della Fisica è previsto per il primo biennio e

prevede lo studio della Fisica Classica, la cui modellizzazione è basata sulla Geometria Euclidea.

Le difficoltà degli studenti nell'apprendimento della Fisica sono in gran parte provocate da carenze di carattere matematico, in particolare su come applicare i teoremi di Geometria euclidea e di Geometria analitica ai problemi di cinematica, dinamica, termodinamica ed elettromagnetismo.

Diversamente dai decenni scorsi, attualmente le indicazioni nazionali prevedono all'inizio del percorso didattico della fisica, per gli alunni del primo anno, la conoscenza del concetto di piano cartesiano e della risoluzione dell'equazione ad un'incognita.

Il grafico cartesiano, infatti, ci consente di fornire indicazioni qualitative e quantitative in merito allo studio di un fenomeno fisico. Pertanto è indispensabile che il docente di fisica negli Istituti Tecnici richiami il concetto di piano cartesiano e delle relative proprietà anche se sono già state trattate dal docente di matematica.

È opportuno far osservare agli studenti alcune relazioni esistenti tra:

- l'equazione di primo grado, rappresentata nel piano cartesiano dalla retta, e lo studio di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme (Fig.1);
- l'equazione di secondo grado, rappresentata dalla parabola nel piano cartesiano, e lo studio di un corpo che si muove di moto rettilineo uniformemente vario (Fig.2).

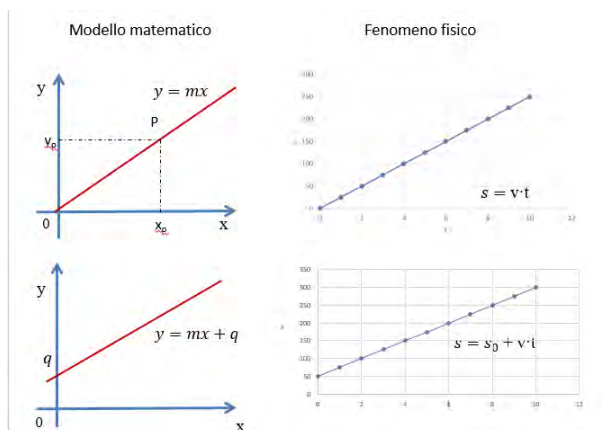


Fig. 1

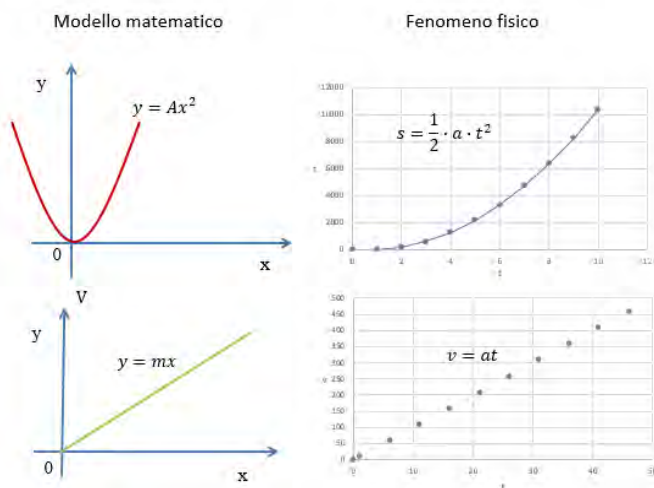


Fig. 2

Precisamente l'equazione $y = mx$ che individua la proporzionalità diretta tra le variabili x e y è rappresentata nel piano cartesiano dalla retta che passa per l'origine degli assi, mentre in fisica descrive il moto di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme con partenza nell'origine del

sistema di riferimento ($s_0 = 0$). Il secondo grafico rappresenta lo stesso moto quando si parte da un punto diverso dall'origine degli assi ($s_0 \neq 0$) (Fig.1).

Analogo è il discorso per il moto uniformemente vario la cui rappresentazione geometrica pone spunti a diversi collegamenti sia relativi a problemi algebrici che fisici. Infatti la rappresentazione della parabola permette la comprensione di elementi teorici (equazioni e disequazioni) e la risoluzione di problemi di natura fisica (il moto dei gravi, il lancio di un corpo, ecc...).

Dalla generalità dell'equazione $y = Ax^2+Bx+C$ trasformata nella legge oraria del moto:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

è opportuno soffermarsi sul significato dei coefficienti A, B, C che nel nostro caso rappresentano

$$A = \frac{1}{2}at^2$$

a = accelerazione costante

$$B = v_0t$$

v_0 = velocità iniziale

$$C = s_0$$

s_0 = posizione iniziale.

Nel caso in cui $v_0 = 0$ si ha che :

$$s = \frac{1}{2}at^2 + s_0$$

$$y = Ax^2 + C$$

In questo caso si fa osservare ai discenti che il vertice della parabola è sull'asse delle ordinate, per cui la variazione di B individua la traslazione della parabola lungo la direzione dell'asse delle x .

Se risulta $B = 0$ e $C = 0$ la parabola (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) ha vertice nell'origine degli assi e dal

punto di vista fisico l'equazione per descrivere il moto uniformemente accelerato diventa:

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

utilizzata nel caso della caduta dei gravi in cui $a = g$.

2 - Gli invarianti

Un altro argomento oggetto della presente trattazione riguarda la definizione di grandezze vettoriali. Infatti, molti fenomeni fisici sono rappresentati analiticamente con le grandezze vettoriali.

Senza entrare in merito al concetto di campo vettoriale che rientra tra i temi da proporre negli anni successivi, è opportuno presentare in modo semplice, ma senza trascurare il rigore, gli elementi essenziali che caratterizzano queste grandezze, in particolare le proprietà che si conservano durante i movimenti, cioè gli invarianti.

In matematica, un vettore è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti. In fisica, è opportuno far presente che una grandezza è rappresentabile come vettore se:

- vale la legge del parallelogramma (in tal modo si esprime la classica somma di vettori);
- è invariante rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione, mettendo in evidenza che le componenti del vettore sugli assi cartesiani del sistema Oxy sono uguali alle componenti sugli assi del sistema O'α β (Fig. 3).

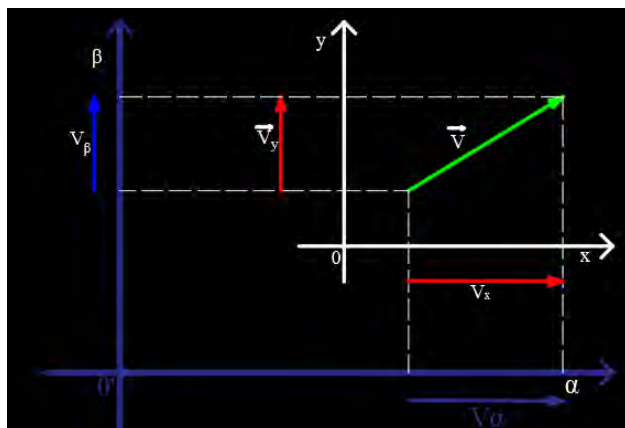


Fig. 3

Un altro problema è l'esigenza di introdurre le funzioni goniometriche per definire il prodotto scalare e il prodotto vettoriale che permettono di rappresentare due concetti fisici fondamentali: il lavoro e il momento di una forza.

Il problema sorge perché le funzioni goniometriche vengono proposte al terzo o quarto anno della Scuola di secondo grado con l'introduzione della circonferenza goniometrica.

In realtà la circonferenza goniometrica serve esclusivamente per linearizzare la variabile indipendente delle funzioni (seno, coseno, tangente...), essendo quest'ultima (variabile) rappresentata da un angolo cioè una parte di piano non rappresentabile sull'asse delle ascisse.

Del resto, la funzione seno è rappresentata sull'asse delle ascisse e la funzione coseno sull'asse delle ordinate. Ciò significa che le due funzioni sono invarianti rispetto ai sistemi di riferimento.

Pertanto, le funzioni seno e coseno possono essere introdotte direttamente sugli angoli, attraverso i criteri di similitudine dei triangoli (Fig. 4).

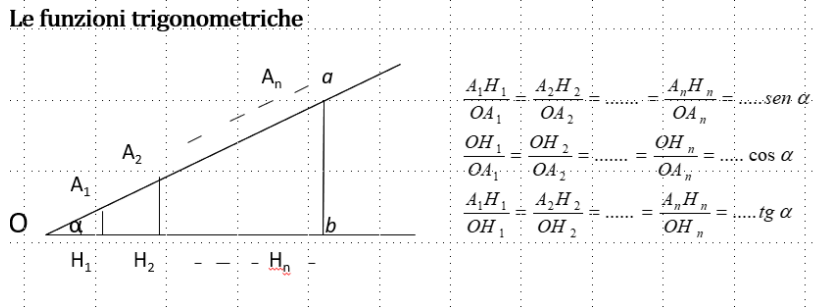


Fig. 4

Un altro esempio di invariante è la direzione del prodotto vettoriale. Infatti è quella perpendicolare al piano contenente i segmenti orientati che rappresentano i vettori che si moltiplicano.

Pertanto, l'asse di rotazione è l'unica direzione invariante rispetto al movimento (Fig. 5).

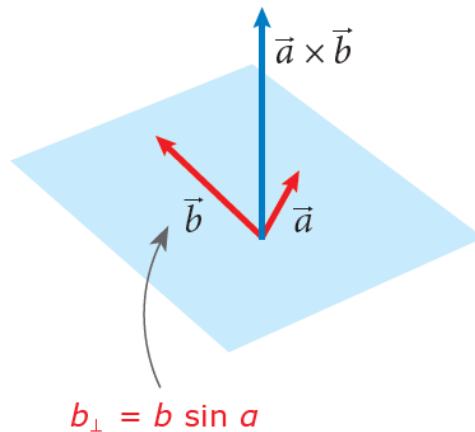
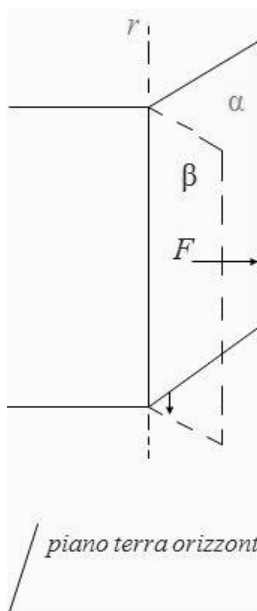


Fig. 5

Ciò lo si può far osservare considerando la rotazione di una porta intorno alla cerniera a cui è applicata (Fig. 6). Didatticamente si può proporre la questione agli studenti mediante il problema:

Si applichi una forza F , parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta r fino a sovrapporsi al piano β . Si osserva immediatamente che c'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione. Le rette parallele alla retta r restano ancora parallele ad r ?



I vettori nella rotazione

Problema

Si applichi una forza F , parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta r fino a sovrapporsi al piano β . C'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione? Le rette parallele alla retta r restano ancora parallele ad r ?

Osservazione. Una rotazione nel piano è individuata da una retta che non appartiene al piano, ma è perpendicolare ad esso.

piano terra orizzontale (pavimento)

Fig. 6

Bibliografia

Cundari C. (1991). Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie, *Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma* (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991).

Casolaro F.(1997). Modello geometrico non euclideo per lo spazio fisico, *Atti Convegno "Metodi di rappresentazione dell'incertezza nell'Architettura"*, Pescara, novembre 1997, pp.103-106.

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo, *Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo"*, Bergamo, ottobre 2002, pp.185-198.

Casolaro F., Prosperi R. (2019). Quale geometria per la fisica classica? La geometria euclidea in S_2 e in S_3 per la rappresentazione dei fenomeni fisici, *Corso di Formazione per l'insegnamento della Fisica nelle Scuole Secondarie, Quaderni APAV n. 4*, maggio 2019.

Casolaro F. (2014). L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola? *Atti del Convegno "Euclide...oltre Euclide"* (Castellammare di Stabia, 10-12 maggio 2013), "Science & Philosophy Divulgation" - DiSciPhil - Fascicolo 1(2014) - Fondazione "Panta Rei" Numero speciale di Ratio Mathematica.

Principi della ricerca

Compito supremo del fisico è pertanto di cercare quelle leggi elementari più universali dalle quali si possa ottenere mediante deduzione pura l'idea del mondo. A queste leggi elementari non conduce nessuna via logica ma solo l'intuizione basata sull'immedesimazione con l'esperienza. Data questa incertezza metodologica, si potrebbe pensare che siano possibili sistemi della fisica teorica quanti se ne voglia e tutti equivalenti; e questa opinione è certo in linea di principio giusta. Ma lo sviluppo ha mostrato che di tutte le costruzioni pensabili solo una si è mostrata di volta in volta incondizionatamente superiore a tutte le altre. Nessuno che abbia effettivamente approfondito l'oggetto in questione potrà negare che il mondo delle percezioni determina praticamente in maniera univoca il sistema teorico, sebbene nessuna via logica conduca dalle percezioni ai principi della teoria; ciò è quanto Leibniz designò così felicemente con il nome di «armonia prestabilita». I fisici rimproverano severamente a certi teorici della conoscenza di non tenere conto a sufficienza di questa circostanza. Qui mi sembra pure che si trovino le radici della polemica avutasi qualche anno fa tra Mach e Planck.

Albert Einstein, *Principi della ricerca* (Prinzipien der Forschung) discorso pronunciato da Albert Einstein nel 1918 per la celebrazione del 60° compleanno di Max Planck, alla Società di Fisica di Berlino. Pubblicato per la prima volta in «Mein Weltbild», Querido Verlag, Amsterdam 1934, riprodotto in italiano in Max Planck, *Scienza, filosofia e religione*, Milano: Fratelli Fabbri, 1973.

La divina proporzione “vera ispiratrice di bellezza”

*Una proposta didattica per la scuola
secondaria di II grado*

Giovanna Della Vecchia*

* DIARC-Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n1.068

Sunto: Il lavoro presentato illustra un percorso didattico realizzato nella scuola secondaria di secondo grado sul “numero aureo” φ , quel famoso numero irrazionale che tanta importanza ha avuto nel definire i canoni della bellezza, della grazia e dell’armonia dalla Grecia classica ai giorni nostri e che, per il suo particolare valore esoterico, affascina ancora oggi studiosi di ogni campo.

Il percorso è articolato con il forte intento di provocare, incuriosire, suscitare stupore negli studenti e coinvolgerli in situazioni ludiche in grado di risvegliare interessi e passioni spesso sopiti tra i banchi di scuola: ciò per sottolineare quanto la motivazione ad apprendere ed il coinvolgimento emotivo siano fattori essenziali, ineludibili del processo di insegnamento/apprendimento.

Parole Chiave: numero aureo, bellezza, armonia.

Abstract: The work presented illustrates a didactic path carried out in secondary school on the "golden number", that famous irrational number which had so much importance in defining the canons of beauty, of grace and harmony

from classical Greece to the present day and that, for its particular esoteric value, still fascinates scholars of every field. The course is articulated with the strong intention of provoking, intriguing, arousing amazement in the students and involving them in playful situations able to awaken interests and passions often dormant among the school desks: this emphasizes that motivation to learn and emotional involvement are essential, inescapable factors of the teaching/learning process.

Keywords: *golden number, beauty, harmony.*

1 - Premessa

Ho insegnato per circa quaranta anni in un Istituto professionale della provincia di Napoli e, nella mia lunga carriera di docente di Matematica, ho maturato la convinzione che la motivazione ad apprendere ed il coinvolgimento emotivo siano fattori essenziali, ineludibili del processo di insegnamento/apprendimento.

Lo spunto che ha dato il via all'elaborazione del presente percorso didattico è stata la lettura di un articolo intitolato "La sezione aurea e le regole del giuoco del calcio" e pubblicato sul blog "Mr Palomar – Il blog di Matematica giocosa di Paolo Alessandrini".

Il titolo dell'articolo ha fortemente catturato la mia attenzione: in che modo l'autore metteva in relazione il regolamento del gioco del calcio e la sezione aurea?

In realtà nell'articolo si parla di campi di calcio e delle loro dimensioni e si afferma spiritosamente che il miglior candidato al titolo di «stadio più aureo del mondo» sembra essere il Santiago Bernabeu di Madrid: ovviamente il titolo è riferito alle dimensioni del terreno di gioco. Vera o falsa che

sia l'affermazione, resta il fatto che il Santiago Bernabeu di Madrid è uno stadio che sta molto a cuore a noi italiani, soprattutto a quelli che, nella lontana estate del 1982, scendevano in piazza a festeggiare quella notte magica in cui la Nazionale Italiana diventava Campione del mondo.

Le riflessioni in merito alle dimensioni del campo di calcio hanno offerto quindi l'occasione per parlare di quel numero, anch'esso magico, denotato con una φ e denominato da Luca Pacioli "divina proporzione" o, molto più tardi, "sezione aurea", che è uno dei più famosi tra gli irrazionali, numero che ha affascinato nei secoli matematici e non solo e tanta importanza ha avuto nel definire i canoni della bellezza e dell'armonia.

2 - Il regolamento del giuoco del calcio

Secondo il regolamento del giuoco del calcio, il terreno di gioco deve essere rettangolare e la lunghezza delle linee laterali deve essere, in ogni caso, superiore alla lunghezza delle linee di porta.

Le dimensioni devono essere le seguenti:

lunghezza: min m. 90, max m. 120

larghezza: min m. 45, max m. 90

Nelle gare internazionali invece le dimensioni devono essere:

lunghezza: min m. 100, max m. 110

larghezza: min m. 64, max m. 75.

Nella maggior parte dei casi, i terreni di gioco tendono ad assumere proporzioni "meno quadrate", con lunghezze e

larghezze che si pongono circa a metà dei rispettivi intervalli ammessi, cioè intorno a 105 metri x 67,5 metri.

Le dimensioni che la FIFA raccomanda per i tornei internazionali, e che in Italia le Leghe di Serie A e B stabiliscono obbligatoriamente per le partite di campionato corrispondono quasi esattamente al formato "medio" 105 metri x 68 metri, tollerando al limite una dimensione minima di 65 metri per il lato corto, in caso di difficoltà tecniche dell'impianto.

Ecco un elenco dei campi di calcio con un terreno di gioco formato standard 105 x 68:

Olimpico di Roma

Olimpico di Torino

San Siro di Milano

Maradona di Napoli

Bentegodi di Verona

Campo Nou di Barcellona

Lužniki di Mosca

Stadio del Centenario di Montevideo,

Azteca di Città del Messico

Il rapporto tra i lati di un rettangolo 105 x 68 è pari ad un valore non molto vicino al rapporto aureo:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Se gli organismi del calcio avessero scelto come standard per i terreni di giuoco una lunghezza di 110 metri e una larghezza di 68 metri, dimensioni che rientrano nell'intervallo stabilito dalla Regola 1 (anche per gare internazionali), avrebbero disegnato un rettangolo quasi perfettamente aureo essendo $110:68 = 1,617...$

Il Santiago Bernabeu di Madrid è dunque legittimamente candidato a stadio più aureo del mondo essendo le dimensioni del suo campo di gioco , secondo il sito Uefa, 106 x 66.

Se è la versione corretta allora il rapporto tra le due dimensioni è: $\frac{106}{66} = 1,606$ valore molto vicino al rapporto aureo.



Fig. 1 - Il Santiago Bernabeu

3 - Il rettangolo aureo: il rettangolo "più bello"

Un rettangolo si dice aureo quando le sue dimensioni a e b soddisfano la proporzione aurea cioè la minore è medio proporzionale tra la maggiore e la differenza delle due

$$a : b = b : (a-b)$$

Le particolarità del rettangolo aureo, grazie anche all'alone di mistero che sembrava aleggiare intorno agli effetti visivi determinati da figure in cui è presente la proporzione aurea e alla sensazione di armonia che tale proporzione susciterebbe, l'hanno fatto considerare nei secoli un canone di bellezza assoluto; intorno all'800 ci sono state persino indagini psicologiche volte ad avvalorare tale tesi.

Nel 1875 lo psicologo tedesco Theodor Fechner (1801, 1887) mostrò a 347 persone una disposizione di 10 rettangoli con il rapporto tra i lati in ordine crescente (da 1:1 a 1:2,5); tra questi il rettangolo aureo occupava la settima posizione. Chiese poi quale rettangolo giudicassero più gradevole, quale destasse in loro una maggiore sensazione di armonia, di «bellezza».

Gli esiti, pubblicati nel 1879, rivelarono una preferenza del 35% per il rettangolo aureo (fig. 2). Successivamente ci furono numerose contestazioni sulla correttezza del metodo seguito e l'esperimento continuò, dopo avere apportato modifiche al metodo di indagine, dando risultati che in qualche modo portavano a conclusioni diverse, ma che, in ogni caso, aprivano la strada a nuove indagini anche di carattere psicologico.

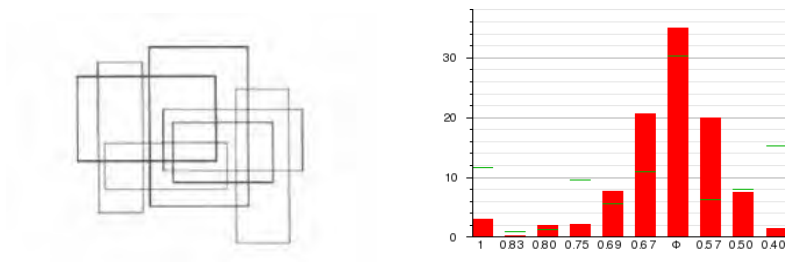


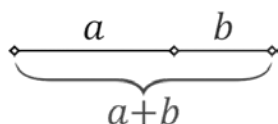
Fig.2

4 - La sezione aurea: la divina proporzione

In Matematica due quantità disuguali a e b si dicono in rapporto aureo se la maggiore è medio proporzionale tra la somma delle due e la minore.

Se $a > b$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$



$a + b$ sta ad a come a sta a b

Il rapporto tra due quantità in rapporto aureo viene detto sezione aurea e indicato con la lettera φ . Posto

$$\frac{a}{b} = \varphi$$

$$\text{da } \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \text{ si ottiene } 1 + \frac{b}{a} = \varphi \text{ cioè } 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \text{ da cui}$$

$$\varphi + 1 = \varphi^2 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

la cui soluzione positiva è

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Questo numero, noto come *numero aureo* o *rapporto aureo* o *divina proporzione*, sembra abbia rappresentato, per secoli, e rappresenta tutt'oggi lo standard di riferimento della perfezione, la grazia e l'armonia, sia in architettura, scultura e pittura, sia nella natura.

Più di tutti l'opera di Luca Pacioli "De Divina Proportione", ha contribuito a diffondere la convinzione che questa proporzione fosse considerata la chiave universale per interpretare il mistero della bellezza e anche della natura.

Secondo Luca Pacioli, tra tutte le possibili proporzioni, quella aurea sembra essere la vera ispiratrice della bellezza, quindi del creato, quindi del Suo creatore, quindi Divina (Luca Pacioli - De divina proportione 1509):

Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportion non se po mai per numero intendibile assegnare, né per quantità alcuna rationale esprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrationale.

Il simbolo che accompagnò il rapporto aureo fu per molti secoli la lettera greca τ , dal greco *tomè*, che significa taglio o sezione. La scelta della lettera ϕ è stata fatta solo nel 1900 da Mark Barr, probabilmente in onore del famoso scultore greco Fidia (490-430 a.c.) autore della statua di Zeus nel tempio di Olimpia e supervisore della costruzione del Partenone ad Atene, opere nelle quali sembra essere presente più volte il rapporto aureo.

Qualcuno spiritosamente lega la ϕ alla F di Fibonacci.



Fig. 3 - Ricostruzione statua di Zeus



Fig. 4 - Partenone

4.1 - Alcune curiosità su ϕ : magia dei numeri!

ϕ è l'unico numero irrazionale il cui inverso ha la sua stessa parte decimale.

Infatti da

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \text{ segue che } \frac{1}{\phi} = 0,6180339887 \dots$$

E' anche l'unico numero irrazionale il cui quadrato ha la sua stessa parte decimale

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \approx 2,6180339887.....$$

φ può essere altresì rappresentato come valore a cui tende una radice continua infinita o frazione continua infinita con soli 1. Consideriamo inoltre la seguente espressione, che consta di infinite radici quadrate che si succedono l'una nell'altra:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

e chiamiamo x questa espressione ($x > 0$), poniamo cioè

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

elevando al quadrato si ha:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

da cui $x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$, che è ancora l'equazione della sezione aurea, pertanto è

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887..... = \varphi$$

Quindi è:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Se invece consideriamo l'equazione

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

è possibile scrivere:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}}$$

La frazione non contiene numeri all'infuori di 1, converge perciò molto lentamente a φ ; è come se il rapporto aureo "resistesse" alla sua espressione sotto forma di frazione più di qualunque altro numero irrazionale e, per questa ragione, viene anche detto "il più irrazionale" degli irrazionali.

4.2 - Cenni storici

I pitagorici (500 a.C) si erano già imbattuti in questo rapporto che aveva seriamente messo in crisi la loro dottrina.

In Euclide (300 a.C.) si legge: «si dice che una retta è divisa in *media ed estrema ragione* quando la lunghezza totale della linea sta alla sua parte maggiore come questa sta alla minore».

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci (1175/1235), creò una successione di numeri che ha diverse analogie col numero aureo.

Luca Pacioli 1445/1517: (*De Divina Proportione*) aveva la pretesa di interpretare la geometria, la filosofia, le scienze alla luce del rapporto aureo.

Martin Ohm 1792/1872 per primo introdusse il termine "sezione aurea".

5 - I Pitagorici e il pentagramma stellato

I pitagorici erano convinti che due segmenti fossero sempre commensurabili cioè che esistesse sempre un loro sottomultiplo comune, un segmento capace di dare misure intere per entrambi i segmenti. Quando invece scoprirono che proprio nel simbolo scelto per la loro scuola, il pentagramma stellato, il rapporto tra la diagonale e il lato non poteva essere espresso come frazione di interi, ne furono letteralmente sconvolti! I triangoli ADE e BCT sono simili, pertanto risulta:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BT} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BD - A}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \quad \text{da cui} \quad \frac{d}{l} = \frac{1}{\left(\frac{d}{l} - 1\right)}$$

Posto $x = \frac{d}{l}$ si ha $x = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

da cui:

$$x = \frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$$

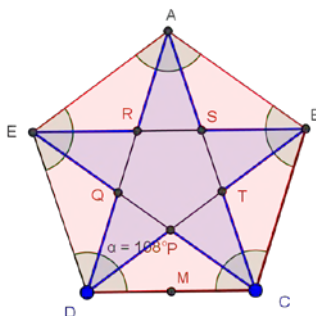
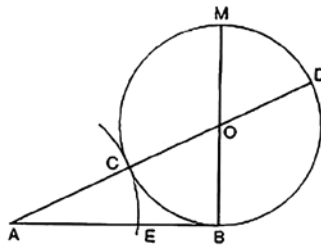


Fig. 5- Il pentagramma stellato

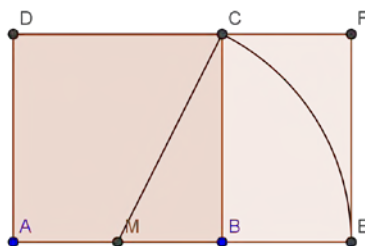
Si narra che il pitagorico Ippaso da Metaponto sia morto in mare come empio per aver provocato l'ira degli dei: aveva scoperto il valore di φ e divulgato l'esistenza delle grandezze incommensurabili e dei numeri irrazionali, scoperta da tenere il più possibile segreta in quanto avrebbe avuto effetti devastanti per la dottrina pitagorica.

6 - Costruzione della sezione aurea di un segmento



Dato il segmento AB tracciare il cerchio di diametro uguale ad AB e tangente ad esso in B. Tracciare la secante per A passante per il centro O del cerchio. La parte esterna della secante (AC) è la sezione aurea del segmento, essendo la tangente (AB) media proporzionale tra l'intera secante (AD) e la sua parte esterna (AE).

7 - Costruzione del rettangolo aureo



Dato il quadrato ABCD (che per semplicità possiamo pensare di lato 1, congiungiamo il punto medio M del lato con il vertice C e tracciamo la circonferenza di centro M e raggio MC fino ad incontrare in E il prolungamento del lato AB. Completiamo quindi la costruzione del rettangolo di base AE e altezza AD: Ebbene in questo rettangolo la base e l'altezza stanno in rapporto aureo!

Infatti da:

$$\overline{MC} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \overline{AE} = \overline{AM} + \overline{ME} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

il rapporto tra base e altezza del rettangolo risulta:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

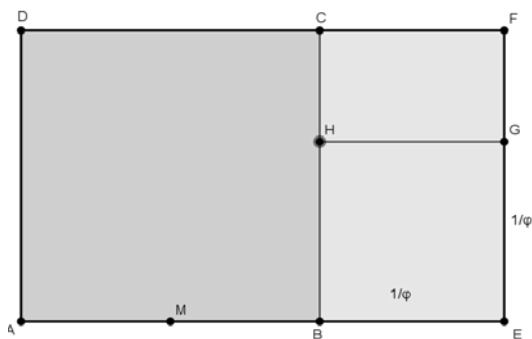
Un tale rettangolo è pertanto un rettangolo aureo, ma c'è di più: anche il rettangolo BEFC è un rettangolo aureo!

Infatti risulta:

$$\overline{BE} = \overline{AE} - \overline{AB} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \quad e \quad \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$$

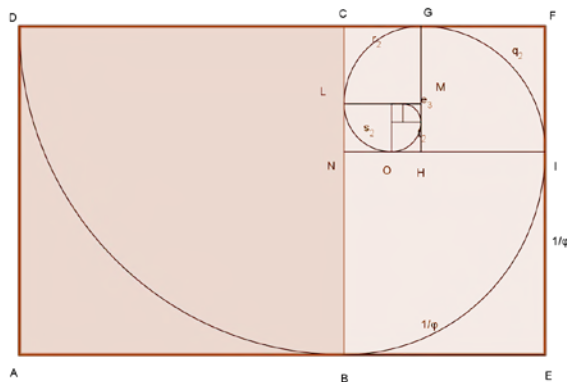
Questo procedimento può essere ripetuto indefinitamente dando origine ad una successione infinita di rettangoli aurei.

Infatti se inscriviamo nel rettangolo BEFC il quadrato di lato $BE = 1/\varphi$ si ha:



$$FG = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} \quad e \quad \frac{HF}{FG} = \frac{1}{\varphi} \cdot \varphi^2 = \varphi$$

Se si continua con tale procedimento si ottiene una successione infinita di rettangoli aurei e se si tracciano dei quarti di circonferenze inscritte nei quadrati, compare quella spirale nota come «spirale di Fibonacci» presente anche in altre figure nelle quali il rapporto aureo è molto presente.



8 - La sezione aurea canone di bellezza

Sembra che la "divina proporzione" abbia una capacità straordinaria di generare armonia tra le parti che compongono il tutto: sin dall'antichità è stata riconosciuta come lo standard per definire la bellezza, la grazia e l'armonia, per cui è diventata, nei secoli, un principio compositore di qualsiasi forma d'arte.

8.1 - La sezione aurea nell'antica Grecia

Nella Grecia Classica sembra che architetti ed artisti, nelle loro creazioni, facessero grande uso del rettangolo aureo. Molto frequentemente lo utilizzavano per disegnare la pianta del pavimento e la facciata dei templi.

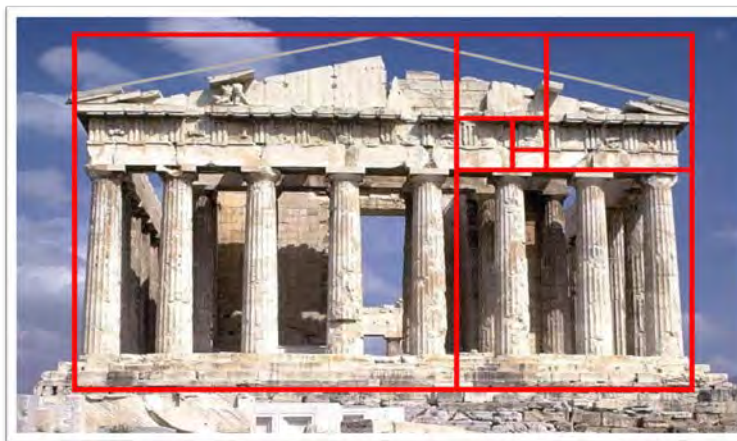


Fig. 6 - Il Partenone (metà V secolo a.C.)

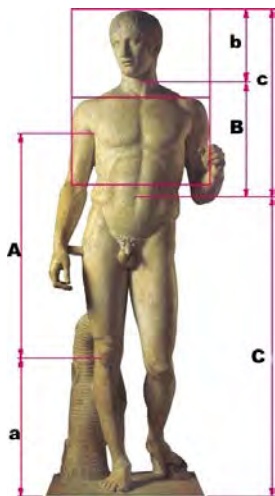


Fig. 7 - Doriforo (fine II - inizio I secolo)

8.2 – La sezione aurea nel Rinascimento

Per gli artisti del Rinascimento (Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, ...) il rapporto aureo rappresentò un canone di bellezza cui ispirarsi per ogni composizione artistica, non solo nell'architettura, ma anche nella scultura e nella pittura.

Sembra comunque che talvolta ci sia stato un abuso nell'utilizzo di tale rapporto (Nicotra, 2019, p. 169):

Non sempre la presenza della sezione aurea in opere pittoriche e architettoniche è realmente verificata.

Si assiste, a volte, a un fenomeno di "idolatria" di questo modello matematico di bellezza, con evidenti forzature.

Un esempio è fornito dall'Ultima cena di Leonardo da Vinci, nella quale si è voluto ravvisare la presenza di un rettangolo aureo che circoscriverebbe la figura del Cristo.

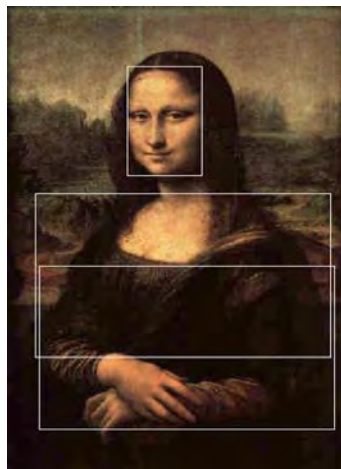


Fig. 8 - Nella Gioconda il Rapporto Aureo è stato individuato:

- nella disposizione del quadro;
- nelle dimensioni del viso;
- nell'area che va dal collo a sopra le mani;
- in quella che va dalla scollatura dell'abito fino a sotto le mani.

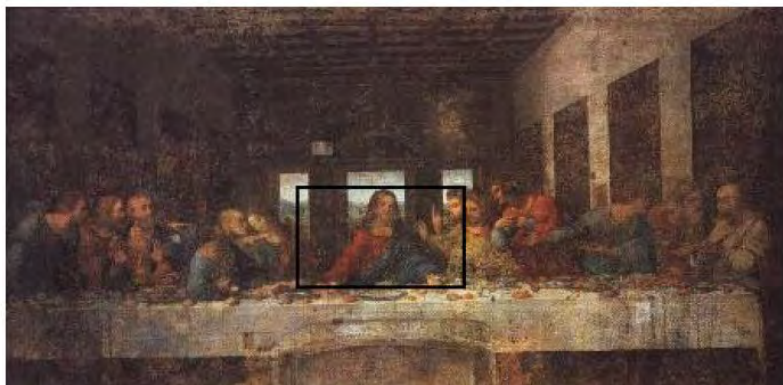


Fig. 9 - Ultima Cena – Leonardo da Vinci

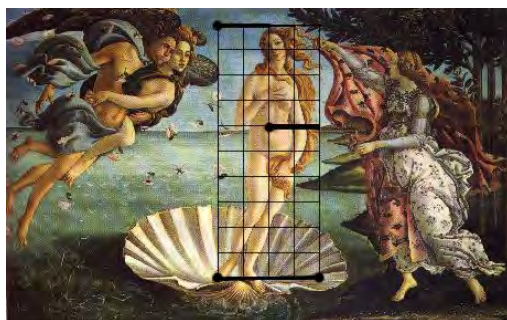


Fig. 10 -Nascita di Venere – Sandro Botticelli

8.3 – La sezione aurea in natura

La proporzione aurea è molto presente anche in natura che sembra voler conferire bellezza ed armonia al creato: il Nautilus, ad esempio, è un mollusco la cui conchiglia segue perfettamente la spirale aurea; la stessa spirale aurea si riscontra nelle corna del muflone o nella coda dell'ippocampo nonché nella disposizione dei petali di alcuni fiori.

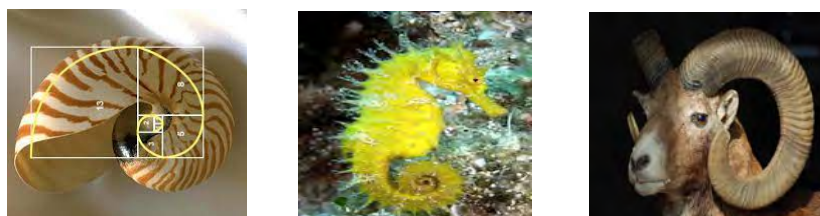


Fig. 11



Fig. 12

8.4 – La sezione aurea nell'uomo

Leonardo Da Vinci in *L'Uomo*, studia le proporzioni della sezione aurea attingendo dal *De architectura* di Vitruvio. Una persona è inscritta in un quadrato e in un cerchio. Nel quadrato, l'altezza dell'uomo è uguale alla distanza tra le estremità delle mani con le braccia distese. La retta

orizzontale passante per l'ombelico divide i lati esattamente in rapporto aureo tra loro.

L'ombelico è il centro del cerchio che inscrive la persona umana con le braccia e gambe aperte.

Se si sdraia un uomo sul dorso, mani e piedi allargati, e si punta un compasso sul suo ombelico, con una apertura uguale alla distanza tra ombelico ed estremità del dito medio di una della mani, si descriverà un cerchio, in cui risulta inscritto il corpo umano con braccia e gambe aperte.

Vitruvio, nel terzo libro del *De Architectura*, tratta separatamente le due figure antropometriche: "homo ad quadratum" e "homo ad circulum"



Fig. 13- L'uomo vitruviano di Leonardo da Vinci

Nella sintesi operata da Leonardo fra il cerchio e il quadrato il raggio del cerchio rappresenta la sezione aurea del lato del quadrato.

Nel "*L'Uomo*" sono aurei, oltre che il rapporto tra l'altezza complessiva e l'altezza da terra dell'ombelico, anche il

rapporto tra la lunghezza dell'intera gamba e la distanza dal collo del femore al ginocchio o il rapporto tra la lunghezza dell'intero braccio e la distanza tra gomito e punta del dito medio.

Lo stesso vale, se si misurano le dita della mano, anche per i rapporti tra le lunghezze delle falangi del dito medio e anulare.

L'autorevole giornale francese "Le Figaro" qualche anno fa ha proclamato Laetitia Casta "donna del millennio", rilevando, nelle sue misure, "il numero d'oro della perfezione classica" (fig.6).



Fig. 14

Bella Hadid (figura 14) è invece oggi la donna più bella del mondo secondo il chirurgo plastico di Harley Street Julian De Silva. Il suo volto è quello che risulta più vicino di tutte le altre

candidate alle proporzioni della sezione aurea: con un punteggio di 94,35%.

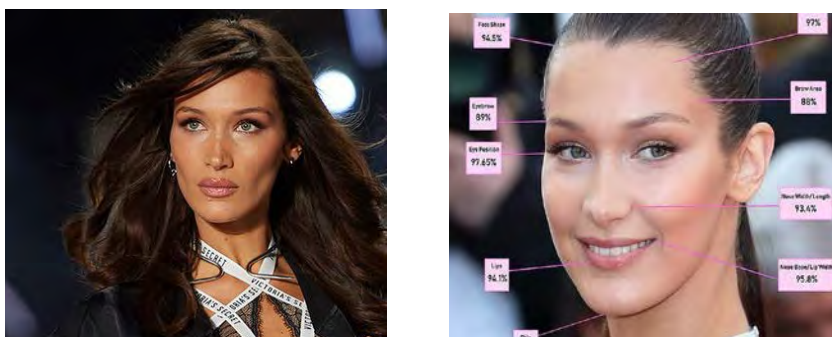


Fig.15

Secondo lo stesso chirurgo, l'attore britannico Robert Pattinson, il cui volto è quello che più si avvicina all'ideale classico della sezione aurea, è invece considerato oggi l'uomo più bello del mondo.

8.5 – Qualche curiosità

L'uccellino di Twitter è stato costruito per mezzo di circonferenze sovrapposte aventi i diametri pari a numeri della sequenza di Fibonacci (figura 16).

Una costruzione analoga è stata fatta anche nella realizzazione dei loghi Apple e MC DONALD'S (figure. 17 e 18)

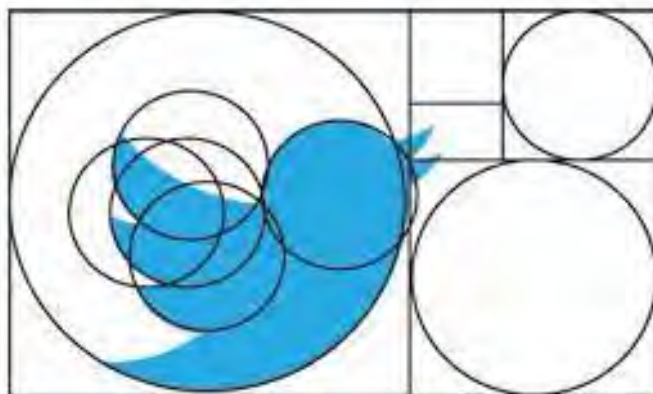


Fig. 16

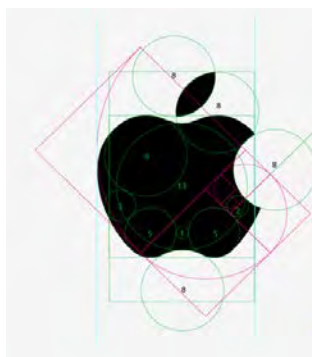


Fig. 17

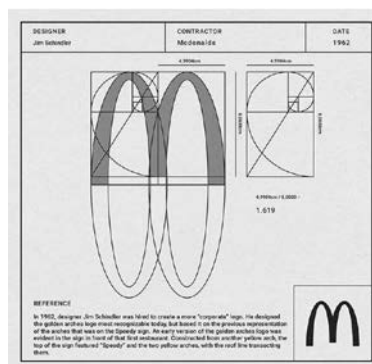


Fig. 18

9 - La successione di Fibonacci e la sezione aurea

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci, (XII-XIII secolo) è stato uno dei più grandi matematici del Medioevo (figura 19).



Fig. 19 - Leonardo Pisano

Un problema postogli dal re Federico II gli fornì l'occasione per l'introduzione della serie (di Fibonacci) che si riscontra in numerosi esempi in natura e che ha uno strettissimo legame con il Numero Aureo.

Un contadino chiuse nella sua conigliera una coppia di conigli per avviare un allevamento. La coppia prese a prolificare il secondo mese una nuova coppia di conigli. Nei mesi che seguirono la coppia capostipite continuò a generare regolarmente una coppia al mese e altrettanto fece ciascuna delle coppie generate, ciascuna però a partire dal secondo mese dopo la propria nascita.

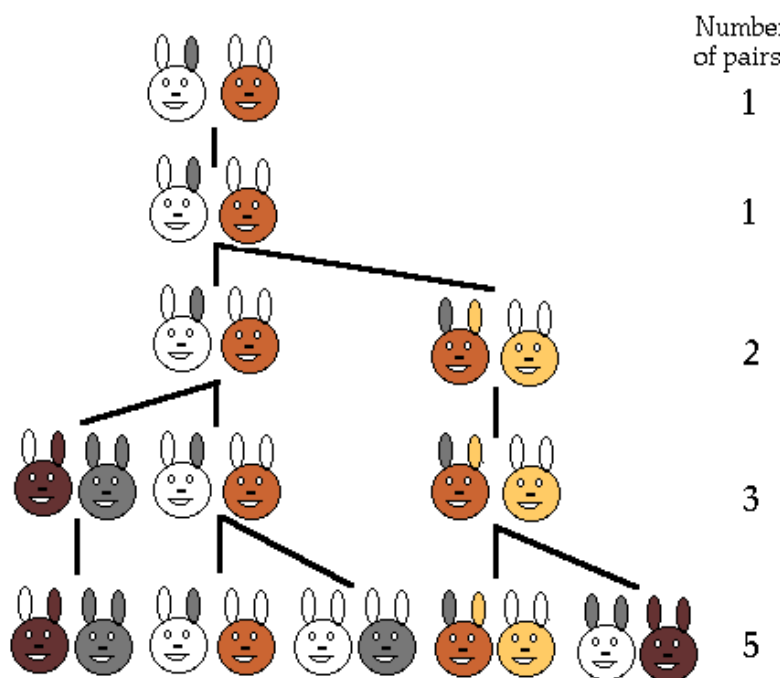
Quante coppie di conigli popolarono la conigliera dopo il decimo mese se nel frattempo non morì nessun coniglio?

La soluzione è data dalla successione di Fibonacci:

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; 233 ; 377 ;

dove risulta, per ogni n ,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$



9.1 - Alcune proprietà della successione di Fibonacci

È immediato verificare le seguenti proprietà della successione di Fibonacci:

Comunque si prendono due elementi, in posizione n -esima ed m -esima, il loro Massimo Comune Divisore è un elemento della successione di posizione p , M.C.D. tra n ed m

Il quadrato di ogni elemento differisce di uno (alternativamente in più o in meno) dal prodotto del precedente per il successivo

Sommando alternativamente tutti gli elementi della successione (uno sì ed uno no) il risultato è sempre l'elemento successivo all'ultimo sommato.

9.2 – I numeri di Fibonacci e la sezione aurea

Fu Keplero, intorno al 1600, a riconoscere per la prima volta, una stretta relazione tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea.

E' di Keplero la famosa frase:

«La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la sezione aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello».

Consideriamo questa successione di potenze di φ (v. Nicotra 2019):

$$1; \varphi; \varphi^2; \varphi^3; \varphi^4; \varphi^5; \dots$$

ricordando che $\varphi^2 = \varphi + 1$ è possibile scrivere:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi$$

$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi^2 + \varphi) = \varphi^3 + \varphi^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi^{n+2} = \varphi \cdot \varphi^{n+1} = \varphi \cdot (\varphi^n + \varphi^{n-1}) = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

Come nella successione di Fibonacci avviene che

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

anche nella successione delle potenze di φ , ciascun termine si ricava sommando i due termini che lo precedono

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

e come avviene per il rapporto

$$\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi$$

anche il rapporto tra un termine della successione di Fibonacci e il termine che lo precede si avvicina progressivamente a φ , al crescere del valore di n (come è possibile dedurre dalla seguente sequenza):

1 : 1	=	1,000000...
2 : 1	=	2,000000...
3 : 2	=	1,500000...
5 : 3	=	1,666666...
8 : 5	=	1,600000...
13 : 8	=	1,625000...
21 : 13	=	1,615384...
34 : 21	=	1,619047...
55 : 34	=	1,617647...
89 : 55	=	1,618181...
144 : 89	=	1,617987...
233 : 144	=	1,618055...
377 : 233	=	1,618025...
610 : 377	=	1,618037...
987 : 610	=	1,618032...
1597 : 987	=	1,618034...
2584 : 1597	=	1,618033...
4181 : 2584	=	1,618034...
.....	=	

Risulta dunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

9.3 – La formula di Binet

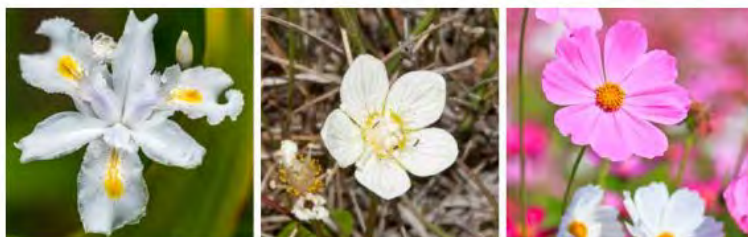
Ci permette di determinare il termine n-simo della successione di Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

È sorprendente constatare come l'applicazione di una formula costituita da elementi irrazionali possa restituire come risultato numeri interi!!

9.4 – I numeri di Fibonacci in natura

Molte piante hanno un numero di petali pari ai numeri di Fibonacci. Il lillium e l'iris ne hanno 3, la rosa selvaggia 5, il delphinium 8, la cineraria 13, la margherita 34, e si potrebbero trovare molti altri esempi (figura 20).



Iris, 3 petali; parnassia, 5 petali; cosmos, 8 petali.

Fig. 20

Gli stessi numeri si ritrovano spesso anche nella disposizione delle foglie di numerose piante (fillotassi, fig. 14).

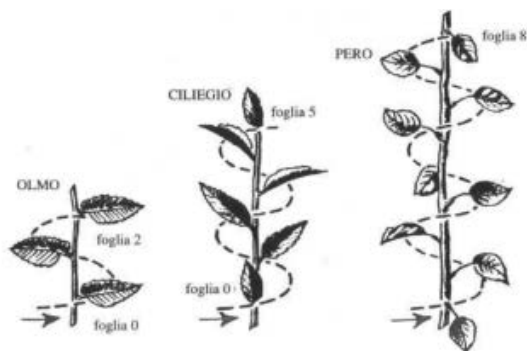


Fig. 21 - La fillotassi

Keplero (1571-1630) per primo intuì l'esistenza di una relazione tra la fillotassi e i numeri di Fibonacci, ma fu necessario aspettare il XIX secolo perché l'intuizione di Keplero venisse confermata dallo studio della botanica che definisce la regola generale in base alla quale i rapporti di fillotassi si possono esprimere come rapporti tra numeri di Fibonacci. Sembra che la fillotassi ottimizzi l'assorbimento della luce da parte della pianta, in quanto la disposizione a spirale consente alle foglie di non farsi ombra le une con le altre.

9.5 - I numeri di Fibonacci nell'arte contemporanea

Mario Merz (Milano, 1925 – Torino, 2003) artista, pittore e scultore italiano, esponente della corrente dell' arte povera, dal 1970 ha introdotto nelle sue opere la successione di

Fibonacci. Nel 2000 ha collocato i numeri della successione realizzati al neon, sulla Mole Antonelliana di Torino (i numeri in volo), e poco prima della sua morte, sul soffitto della stazione metropolitana Vanvitelli di Napoli.



Fig. 22 - La Mole Antonelliana



**Fig. 24 - Stazione metropolitana
Vanvitelli**

Bibliografia

Boyer Carl B. (1990). *Storia della matematica*, A. Mondadori.

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2018). Is the golden section a key for understanding beauty? Part I, «*Science & Philosophy*», v. 6(1), p. 93.

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2018). Is the golden section a key for understanding beauty? Part II, «*Science & Philosophy*», v. 6(2), p. 129.

Eugeni Franco, Nicotra Luca (2019). Is the golden section a key for understanding beauty? Part III, «*Science & Philosophy*», v. 7(2), p. 83.

Nicotra Luca (2019)– Osservazioni critiche sulla sezione aurea, in *Matematica, Architettura, Fisica, Natura* (a cura di Ferdinando Casolaro e Salvatore Sessa), Roma: Aracne

<http://misterpalomar.blogspot.com/2012/04/la-sezione-aurea-e-le-regole-del-giuoco.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=abagpn8ROOo>: la trama dei numeri di Fibonacci

<https://www.accademiavenezia.it/upload/docs/docenti/file/244/ordinecomplessitaepreferenzeestetiche.pdf>: ordine, complessità e preferenze estetiche:

L'Icosaedro e le Cupole Geodetiche

Giuseppe Conti * Raffaella Paoletti **
Alberto Trotta***

*Dip. Matematica Università di Firenze; giuseppe.conti@unifi.it

** Dip. Matematica Università di Firenze; raffaella.paoletti@unifi.it

***IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno; albertotrotta@virgilio.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.069

Sunto: In un precedente articolo gli autori hanno trattato la costruzione delle cupole geodetiche dal punto di vista geometrico. Con il procedimento ivi descritto si ottiene la geometria di gran parte delle cupole geodetiche presenti in architettura. Tuttavia, tale costruzione non comprende alcuni esempi importanti di cupole, come, ad esempio, quelle a forma di pentacisdodecaedro e la cupola del Parco Epcot, che si trova a Disney World, in Florida. In questa nota mostriamo un metodo di costruzione più generale, dovuto a M. Goldberg, D. Caspar e A. Klug, che comprende, come caso particolare, quello esposto nel precedente articolo. Inoltre, vengono descritti i poliedri di Goldberg, che sono i duali delle cupole geodetiche; questi poliedri hanno notevoli proprietà geometriche che sono messe a frutto nella costruzione di cupole aventi questa forma. Infine, mostriamo una formula che permette di determinare, in maniera semplice, il numero delle facce di una cupola geodetica; da questo è possibile calcolare anche il numero dei suoi spigoli, dei suoi vertici e quelli del suo poliedro duale.

Parole Chiave: Poliedro, poliedro convesso, poliedro duale, formula di Eulero per i poliedri.

Abstract: *In a previous paper, the authors dealt with the construction of geodesic domes from a geometric point of view. With the procedure described there, we obtain the geometry of most of the geodesic domes built in architecture. However, that construction don't include some notable examples of domes, such as the pentacisdodecahedron-shaped ones and the dome situated in the Epcot Park, located in Disney World, Florida. In this note we show a more general method, due to M. Goldberg, D. Caspar and A. Klug, which includes, as a particular case, the one presented in the previous paper. The Goldberg polyhedra, which are the duals of the geodesic domes, are also considered; these polyhedra have remarkable geometric properties which are put to good use in the construction of domes having this shape. Finally, we show a formula that allows us to determine, in a simple way, the number of faces of a geodesic dome; from this it's also possible to determine the number of its edges, its vertices and those of its dual polyhedron.*

Keywords: *Polyhedron, convex polyhedron, dual polyhedron, Euler's formula for polyhedra.*

1 - Generalità

In un precedente articolo (Conti, Paoletti, Trotta, 2021) gli autori hanno studiato la geometria delle cupole geodetiche; queste sono dei poliedri a facce triangolari, inscritti in una sfera, i cui spigoli giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera ed i cui vertici hanno grado¹ 5 oppure 6. Talvolta si chiama cupola geodetica anche una parte di questo poliedro, come, ad esempio, quello che corrisponde a una calotta sferica. Poiché una cupola geodetica approssima una sfera, talvolta essa viene chiamata anche sfera geodetica. In tale articolo abbiamo esposto una costruzione

¹ Si chiama grado di un vertice il numero degli spigoli che hanno quel vertice come estremo.

delle cupole geodetiche basata su particolari suddivisioni delle facce dell'icosaedro regolare; in questo articolo presentiamo costruzioni più generali, di cui quelle espone precedentemente sono casi particolari. Vedremo che in questo modo si ottengono esempi importanti di cupole geodetiche, come la cupola del Parco Epcot, che si trova a Disney World in Florida, e il pentacisdodecaedro (figura 1); questi tipi di cupole non si possono ottenere con le precedenti costruzioni.

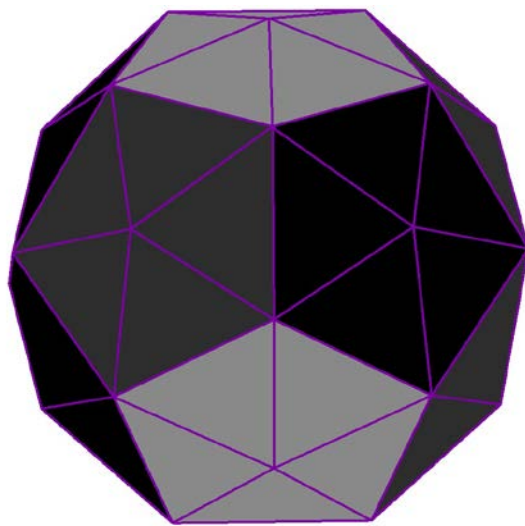


Fig. 1 - Pentacisdodecaedro

Ricordiamo che il pentacisdodecaedro si ottiene a partire dal dodecaedro regolare costruendo su ogni sua faccia una piramide retta a base pentagonale, in modo che i vertici di queste piramidi appartengano tutti alla sfera circoscritta al dodecaedro. Osserveremo in seguito che tale importante cupola geodetica si può ottenere anche a partire dall'icosaedro, tramite una particolare costruzione che rientra fra quelle che esporremo nel presente articolo.

2 - Costruzioni geometriche di sfere geodetiche

Descriviamo un metodo, introdotto nel 1962 da M. Goldberg, D. Caspar e A. Klug (Brinkmann, Goetschalckx P., Schein, 2017) per realizzare una famiglia infinita di cupole geodetiche, dotate della massima regolarità possibile in quanto possiedono le simmetrie rotazionali dell'icosaedro.²

Consideriamo una tassellazione del piano formata da triangoli equilateri di lato unitario, come in figura 2.

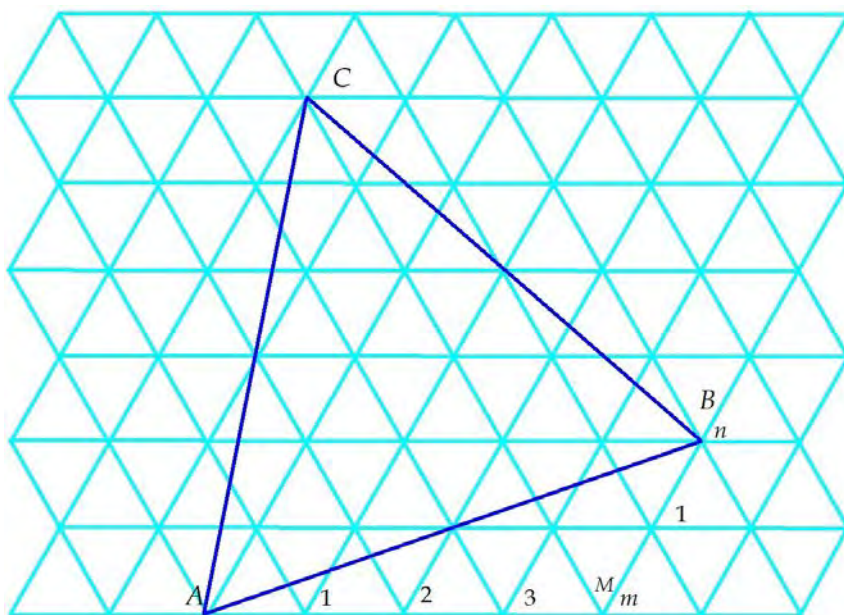
A partire da un vertice A della tassellazione, scegliamo una direzione della tassellazione e percorriamone m spigoli; poi cambiamo direzione ruotando di 60° in senso antiorario e procediamo di n spigoli fino ad arrivare al vertice B . Da qui ruotiamo di altri 60° in verso antiorario e, ripetendo il procedimento precedente, arriviamo ad un altro vertice C della tassellazione.

Se ripetiamo ancora lo stesso procedimento, ritorniamo nel punto A . Abbiamo in tal modo individuato un triangolo equilatero ABC , più grande di quelli del reticolo di partenza, eccetto il caso $m = 1$ e $n = 0$ oppure $m = 0$ e $n = 1$.

Si dice anche che abbiamo ottenuto una tassellazione del tipo (m, n) del triangolo ABC .

Sostituiamo ad ogni faccia di un icosaedro questo triangolo ABC con tutti gli elementi della tassellazione originale in esso contenuti (Battaia, 2019, p. 210).

² Esporremo in seguito l'elenco di queste simmetrie.

Fig. 2 - La suddivisione $m > 0, n > 0$

Successivamente, proiettiamo dal centro della sfera circoscritta all'icosaedro i vertici, determinati da questa tassellazione, sulla sfera stessa, tralasciando le proiezioni degli elementi che si trovano sui lati del triangolo grande ABC , eccetto i casi $m = 0$ oppure $n = 0$; otteniamo in tal modo i vertici di una sfera geodetica S a facce triangolari. Notiamo che i vertici dei triangoli piccoli possono trovarsi in parte su una faccia dell'icosaedro e in parte su una faccia contigua; tuttavia, i triangoli che si trovano in parte su una faccia e in parte su un'altra faccia contigua, si "ricompongono" nella proiezione.

I triangoli piccoli, ottenuti con questa proiezione, non sono più equilateri in quanto i loro vertici, prima della proiezione, non appartengono alla sfera circoscritta all'icosaedro, eccetto i vertici dei triangoli grandi.

Intorno ai vertici che appartengono anche all'icosaedro si dispongono cinque triangoli, mentre intorno a tutti gli altri vertici si collocano sei triangoli.

La cupola geodetica così ottenuta è detta **di tipo** (m, n) perché ottenuta con una tassellazione di tipo (m, n) delle facce dell'icosaedro.

Notiamo che le tassellazioni di tipo $(m, 0)$ sono formate da triangoli equilateri con i lati paralleli ai lati del triangolo equilatero ABC . La stessa cosa accade per le tassellazioni di tipo $(0, n)$ (Figura 3).

In questi casi le corrispondenti cupole geodetiche sono dette di Classe I. Tali cupole geodetiche sono state studiate in un precedente articolo (Conti e altri, 2021). Nella Figura 3 è riportata una tassellazione di tipo $(5, 0)$.

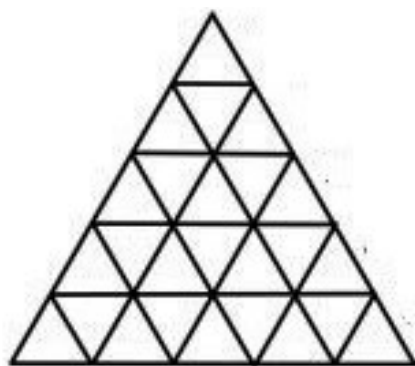


Fig. - 3. Tassellazione di tipo $(5, 0)$

La semicupola geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 4.

Nel caso di tassellazioni di tipo (n, n) , con $n \neq 0$, si dice che la cupola geodetica è di Classe II.

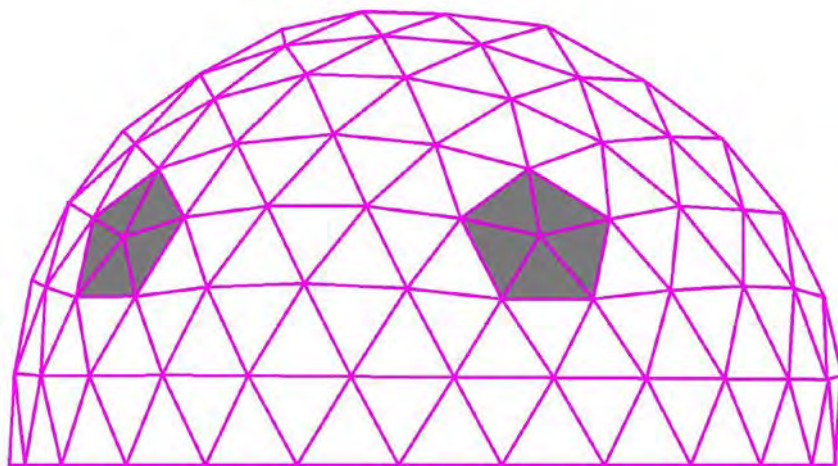


Fig. 4 - Semicupola geodetica di tipo (5, 0)

Nella Figura 5 è disegnata una tassellazione di tipo (2, 2).

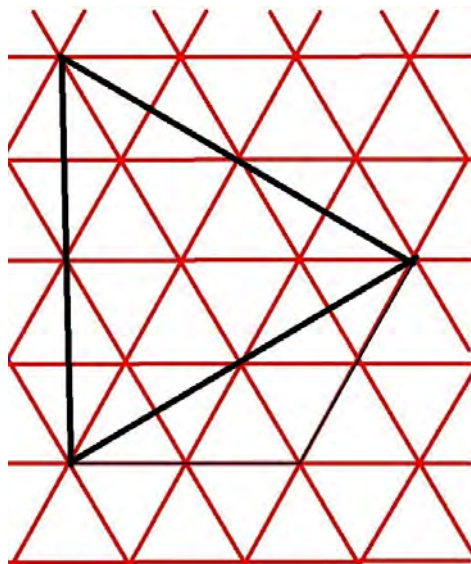


Fig. 5 - Tassellazione di tipo (2, 2)

La cupola geodetica corrispondente alla precedente tassellazione è rappresentata nella Figura 6.

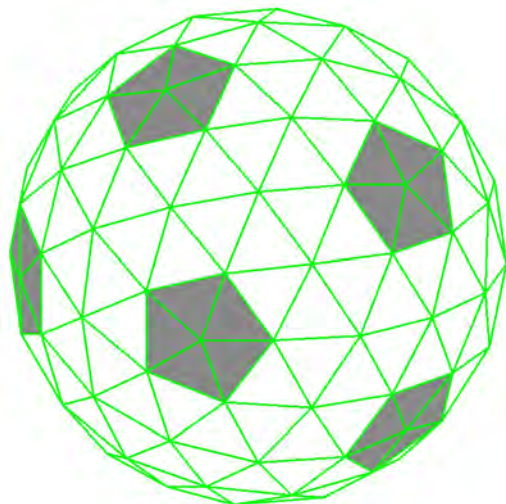


Fig. 6 - Cupola geodetica di tipo (2, 2)

Nel sito internet

<https://mathcurve.com/polyedres/geode/geode.shtml>

è riportato un esempio di cupola geodetica del tipo (2, 2), usata per telecomunicazioni, che si trova nell'Antartide.

È interessante notare che il pentacisdodecaedro (figura 1) non è altro che la cupola geodetica di tipo (1, 1).

Come si può vedere anche dalle Figure 5 e 7, le tassellazioni di tipo di tipo (n, n) sono formate da triangoli equilateri e semitriangoli equilateri con ciascun lato perpendicolare ad uno dei lati del triangolo ABC .

Nel caso di tassellazioni di tipo (n, m) , con $n \neq m$ e almeno uno dei due diverso da 0, si dice che la cupola geodetica è di Classe III.

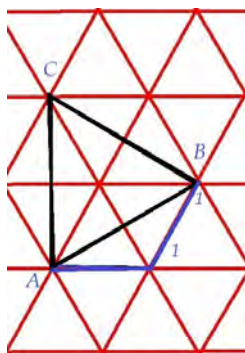


Fig. 7 - Tassellazione di tipo (1, 1)

Notiamo che i poliedri di questa classe sono chirali.³

Ogni tassellazione di questo tipo è formata da triangoli equilateri, o porzioni di triangoli equilateri, i cui lati non sono né paralleli né perpendicolari ai lati del triangolo ABC. Ad esempio, consideriamo la tassellazione di tipo (2, 1) (Figura 8).

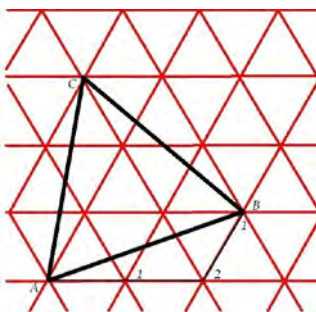


Fig. 8 - La tassellazione di tipo (2, 1)

³ Un solido si dice chirale (dalla parola greca *χείρ* che significa “mano”) se non è sovrapponibile, tramite rotazioni e traslazioni, alla sua immagine speculare. Esempi di oggetti chirali sono le nostre mani e i nostri piedi. La definizione di figura chirale può essere data anche nel piano; ad esempio, un triangolo scaleno è una figura piana chirale.

Con questa tassellazione otteniamo la cupola geodetica della figura 9.

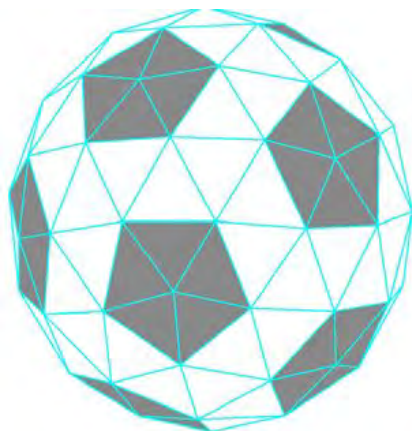


Fig. 9 - La cupola geodetica di tipo (2, 1)

La costruzione fatta nel caso $m = 0$ oppure $n = 0$ può essere eseguita anche a partire dagli altri poliedri regolari a facce triangolari, cioè il tetraedro e l'ottaedro (Battaia, 2019, pp. 221-223); tuttavia, quasi tutte le cupole geodetiche si ottengono considerando l'icosaedro come poliedro di partenza.

Ricordiamo che le facce (triangolari) della sfera geodetica ottenuta con questa costruzione sono triangoli isosceli, anche se costruiti partendo dai triangoli equilateri della tassellazione; inoltre esse non sono tutte uguali fra loro.

Oltre ai tre poliedri regolari a facce triangolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro), esistono soltanto 5 poliedri convessi le cui facce sono triangoli equilateri; tali poliedri sono chiamati deltaedri.⁴

⁴ I deltaedri furono studiati dal matematico olandese Bartel Leendert van der Waerden nel 1947; furono chiamati così da Martyn Cundy nel 1952 (vedi Cundy, 1952). Il loro nome deriva dalla lettera greca *delta*, che ha la forma di un triangolo.

Calcoliamo ora il numero di facce triangolari presenti in una cupola geodetica.

Facciamo riferimento alla figura 2 e ricordiamo che i triangoli equilateri che formano la tassellazione del piano hanno il lato unitario.

Determiniamo anzitutto il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$. Si ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. Supponiamo di riferire il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in cui il punto A è l'origine e la retta AM è l'asse delle ascisse, con il verso concorde con quello del vettore $\overrightarrow{AM}$.

Si ottiene che $\overrightarrow{AM} = (m, 0)$ e $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$.

Ne consegue che

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \left(m + \frac{1}{2}n, \frac{\sqrt{3}}{2}n\right)$$

perciò si ha che la misura del segmento AB è

$$\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Segue che l'area del triangolo equilatero ABC è

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2 + mn + n^2).$$

L'area di ogni triangolino di lato unitario della tassellazione è $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Possiamo concludere che il numero dei triangoli di lato unitario contenuti nel triangolo ABC è dato dal rapporto fra l'area del triangolo ABC e l'area del triangolo unitario; perciò è:

$$T = m^2 + mn + n^2.$$

Di conseguenza il numero delle facce triangolari che formano una cupola geodetica di tipo (m, n) è $20T$.

Il numero T è anche chiamato numero di triangolazione relativo cupola geodetica di tipo (m, n) ed è molto utilizzato in virologia. Ad esempio, il numero delle facce della cupola geodetica nella Figura 9 è 140.

Invece il numero delle facce della cupola geodetica di tipo $(1, 1)$ (il pentacisdodecaedro) è 60, essendo $T = 3$; a questo risultato si può arrivare anche tenendo conto dell'altra costruzione di questa cupola geodetica, ottenuta a partire dal dodecaedro (vedi Conti e altri, 2018).

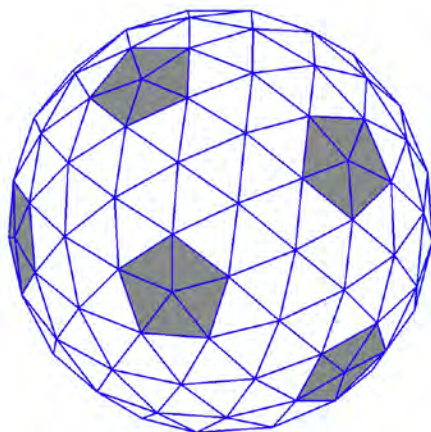


Fig. 10 - Cupola geodetica di tipo $(3, 1)$

La cupola geodetica di tipo $(3, 1)$ (figura 10) ha 260 facce.

Nel paragrafo successivo calcoleremo anche il numero degli spigoli e dei vertici delle cupole geodetiche.

3 - Poliedri duali di cupole geodetiche

I duali delle cupole geodetiche⁵ sono i cosiddetti poliedri di Goldberg. Essi sono poliedri convessi formati da esagoni e pentagoni e furono introdotti nel 1937 da Michael Goldberg (vedi Goldberg, 1937).

Tali poliedri sono definiti da tre proprietà: ogni faccia è un pentagono o un esagono; in ogni vertice si incontrano esattamente tre facce; hanno le stesse simmetrie rotazionali dell'icosaedro, che sono:

l'applicazione identica,
12 rotazioni di 72° ,
12 rotazioni di 144° ,
20 rotazioni di 120° ,
15 rotazioni di 180° .

Da queste proprietà segue che i poliedri di Goldberg hanno tutti gli spigoli uguali; le facce pentagonali sono pentagoni regolari, mentre quelle esagonali sono esagoni equilateri ma non regolari.

I poliedri di Goldberg sono chiamati anche fullereni, dal nome di Richard Buckminster Fuller (1895 - 1983), l'architetto statunitense che fu un pioniere nella costruzione delle cupole geodetiche a partire dal 1948.

Vediamo alcuni esempi⁶.

Il duale della cupola geodetica del tipo (1, 1) è l'icosaedro troncato (figura 11)⁷ (Conti G., Trotta, Conti F., 2018).

⁵ Il duale di una cupola geodetica è il poliedro che ha per vertici i centri delle facce della cupola e in cui due vertici sono adiacenti se lo sono le facce corrispondenti nella cupola.

⁶ Per una lista sufficientemente esaustiva di cupole geodetiche e dei loro poliedri duali si può fare riferimento a Wenninger, 1979.

Osserviamo che il dodecaedro regolare e l'icosaedro troncato sono gli unici poliedri di Goldberg in cui tutte le facce sono poligoni regolari.



Fig. 11 - Icosaedro troncato (pallone da calcio)

Osserviamo che taluni considerano i poliedri di Goldberg come sfere geodetiche; questo ci sembra poco corretto perché, a parte il dodecaedro regolare e l'icosaedro troncato, i poliedri di Goldberg non sono inscrittibili in una sfera; inoltre, essi non hanno le facce triangolari.

Tuttavia, esistono diverse strutture architettoniche che hanno la forma di poliedri di Goldberg. Una delle più interessanti è l'Eden Project, un complesso turistico in Cornovaglia, a circa 2 km dalla città di St Austell, ricavato nello spazio di una ex-cava (Conti G., Trotta, Conti F., 2018). In

⁷ Tale poliedro è chiamato anche *buckminsterfullerene*, oppure *backyball*. Ad essere rigorosi, l'icosaedro troncato è il duale del pentacisdodecaedro circoscritto ad una sfera, che è un particolare solido di Catalan. Invece, il pentacisdodecaedro che stiamo considerando, essendo una cupola geodetica, è inscritto in una sfera. Tuttavia la differenza fra queste due tipologie di pentacisdodecaedro è piccolissima (vedi Conti e altri, 2021).

questo complesso si trovano due grandi biosfere il cui interno ospita circa 100.000 piante provenienti da tutto il mondo.

Dalla formula di Eulero segue che tutti i poliedri di Goldberg possiedono esattamente 12 pentagoni.⁸

Per dimostrare questa proprietà, indichiamo con F_5 e F_6 il numero delle facce pentagonali ed esagonali rispettivamente. Poiché ogni spigolo è comune a due facce e ogni vertice è comune a tre facce, si ha, indicando con S e V il numero degli spigoli e dei vertici rispettivamente:

$$S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2} \text{ e } V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}$$

Sostituendo nella relazione di Eulero $F + V = S + 2$, si ottiene

$$F_5 + F_6 + \frac{5F_5 + 6F_6}{3} = \frac{5F_5 + 6F_6}{2} + 2$$

da cui, con semplici calcoli, si ricava: $F_5 = 12$.

Sostituendo $F_5 = 12$ nella relazione $V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}$ si ottiene che il numero delle facce esagonali di un poliedro di Goldberg è

$$F_6 = \frac{V}{2} - 10$$

Se il poliedro è un dodecaedro, poiché $V = 20$ si ottiene $F_6 = 0$, come deve essere.

⁸ Osserviamo che dalla Formule di Eulero segue anche che non esistono poliedri convessi le cui facce siano tutte esagonali.

Nel caso dell'icosaedro troncato si ha $V = 60$ e, di conseguenza, $F_6 = 20$. In seguito indicheremo con il simbolo $GC_{m,n}$ il poliedro di Goldberg duale della cupola geodetica del tipo (m, n) . Il poliedro duale della cupola geodetica del tipo $(2, 1)$ della figura 9 è il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ della figura 12.

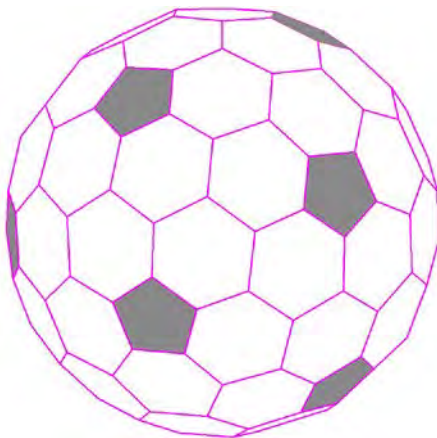


Fig. 12 - Poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$

Abbiamo visto che la cupola geodetica di tipo $(2, 1)$ ha 140 facce; di conseguenza il poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$ ha 140 vertici. Calcoliamone gli altri elementi.

Dalla formula $F_6 = V/2 - 10$, si ha che $F_6 = 60$; essendo sempre 12 il numero delle facce pentagonali, si ha che $GC_{2,1}$ ha 72 facce e quindi dalla relazione di Eulero segue che esso ha 210 spigoli. Allora la cupola geodetica di tipo $(2, 1)$, essendo il poliedro duale⁹ del poliedro di Goldberg $GC_{2,1}$, ha 210 spigoli e 72 vertici.

⁹ Ricordiamo che, se il poliedro Q è il duale del poliedro P , allora P è il duale del poliedro Q .

Generalizzando questo procedimento, si ottengono le seguenti formule per le cupole geodetiche di tipo (m, n) :

$$F = 20T \qquad S = 30T \qquad V = 10T + 2$$

dove, ricordiamo, $T = m^2 + mn + n^2$.

La prima relazione è già stata dimostrata in precedenza.

Per provare la seconda, ricordiamo che nei poliedri di Goldberg il numero degli spigoli è $S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2}$ e che tale numero è uguale al numero degli spigoli della cupola geodetica sua duale; inoltre il numero dei vertici V_G di un poliedro di Goldberg soddisfa la seguente relazione

$$F_6 = \frac{V_G}{2} - 10$$

con V_G = numero delle facce della cupola geodetica duale = $20T$. Dunque si ha dalla relazione precedente:

$$S = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot F_6}{2} = 30 + 3 \left(\frac{V_G}{2} - 10 \right) = \frac{3}{2} \cdot 20T = 30T$$

Dalla relazione di Eulero segue, infine, la terza formula:

$$V = 10T + 2.$$

Ad esempio, la cupola geodetica di tipo $(4, 1)$ (vedere la figura 13) ha $T = 21$. Di conseguenza essa ha 420 facce, 630 spigoli e 212 vertici. Segue che il corrispondente poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$ (vedere la figura 14) ha 420 vertici, 630 spigoli e 212 facce. È interessante notare il fatto che nelle cupole geodetiche e nei poliedri di Goldberg è sufficiente conoscere uno soltanto fra i numeri S , F , e V per determinare gli altri

due; invece, in un qualunque poliedro, occorre conoscerne due per determinare il terzo, usando la relazione di Eulero.

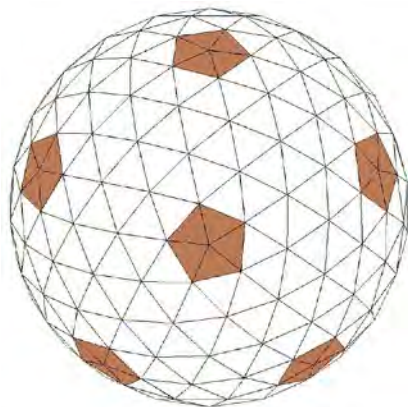


Fig. 13 - Cupola geodetica di tipo (4, 1)

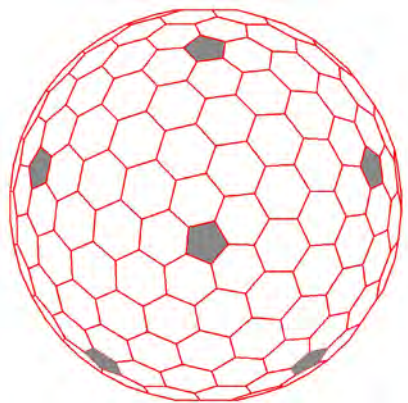


Fig. 14 - Poliedro di Goldberg $GC_{4,1}$

Epcot è uno dei quattro parchi a tema che si trovano presso il Walt Disney World Resort a Bay Lake, Florida.

Epcot rappresenta un'utopistica città del futuro. Il simbolo di questo parco è un'astronave chiamata *Spaceship Earth*; essa ha la forma di una cupola geodetica (completa) di tipo (8,8) (vedere la figura 15). Ciascuna delle due linee che sono

evidenziate in questa figura rappresenta sulla sfera geodetica la proiezione dei segmenti che, nella tassellazione del piano, formano la linea che collega due vertici adiacenti dei triangoli grandi.

Essendo di tipo (8,8), si tratta di una cupola geodetica con $T = 192$; dunque, essa è formata da $192 \cdot 20 = 3840$ triangoli isosceli. In realtà ognuno di questi triangoli è la base di una piramide a base triangolare.

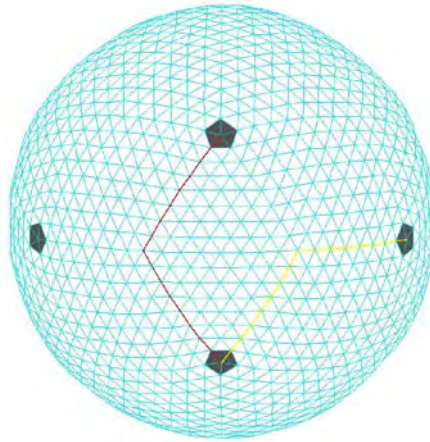


Fig. 15 - Cupola geodetica di tipo (8, 8)

Di conseguenza la cupola è composta da 3840 piramidi a base triangolare, delle quali sono visibili le tre facce laterali: perciò essa è formata da $3 \cdot 3840 = 11.520$ faccette. In realtà esse sono 11.324, poiché alcune di queste sono state eliminate per la presenza delle porte per entrare nell'interno della cupola e dei supporti che servono a sorreggere la struttura.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la Dottoressa Margherita Lori per il lavoro svolto con dedizione e competenza nella realizzazione delle immagini presenti in questo articolo.

Bibliografia

Battaia L. (2019). *Fantastici poliedri 2*. Poliedri semiregolari e loro duali,

http://www.batmath.it/corsi_uni/design_1819/SemiregolariBozza.pdf

Brinkmann G., Goetschalckx P., Schein S. (2017). Comparing the constructions of Goldberg, Fuller, Caspar, Klug and Coxeter, and a general approach to local symmetry-preserving operations, *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* v. 473, n.2206.

Conti G., Trotta A., Conti F. (2018). A Journey into the Polyhedrons World, *Science & Philosophy*, V. 6, n.1, pp. 67-92.

Conti G., Paoletti R., Trotta A. (2021). La Geometria delle Cupole Geodetiche, *Periodico di Matematica (IV)*, Vol. III (3-4) dicembre, pp. 79-98.

H. S. M. Coxeter H. S. M. (1971). *Virus macromolecules and geodesic domes*, In C. Butcher, editor, *A spectrum of mathematics*, pp. 98-107, Oxford University Press/Auckland University Press.

Cundy M. H. (1952). Deltahedra, *Math. Gaz.* 36, pp. 263-266, Dec.

Goldberg M. (1937). A class of multisymmetric polyhedral, *Tohoku Mathematical Journal*, 43, pp. 104-108.

Wenninger J. M. (1979). *Spherical models*. Cambridge University Press.

I punti isodinamici di un triangolo

Cesare Labianca*

*Docente di Matematica presso l'Istituto di Istruzione Superiore "Luigi di Savoia" di Chieti – Componente del Consiglio Direttivo dell'associazione Mathesis Abruzzo e dell'APAV;
cesarelabianca@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.070

Sunto: L'articolo presenta la proposta di un'esperienza didattica, da realizzare in una classe del biennio delle scuole superiori, su due punti notevoli relativi a un triangolo (non equilatero), chiamati punti isodinamici, e sull'analisi delle loro proprietà. In particolare, si mostrano l'algoritmo della costruzione di tali punti e le loro proprietà mediante l'uso di un software di geometria dinamica, sottolineando l'importanza di questo applicativo nella pratica didattica, per la sua capacità di coinvolgimento degli studenti, che li rende protagonisti del processo di apprendimento.

Parole Chiave: Triangolo, punti notevoli, Geogebra, Geometria

Abstract: The article presents the proposal for a teaching experience, to be carried out over either the first or second year of high school, regarding two special points of a triangle (non-equilateral), called isodynamic points, and the analysis of their properties. In particular, the aim is to study the algorithm of the construction of said points and discuss their properties through the use of a dynamic geometry software suite, emphasizing the importance of this application in teaching practice,

due to its ability to engage students and make them protagonists of the learning process.

Keywords: *Triangle, remarkable points, Geogebra, Geometry*

1 - Introduzione

L'obiettivo di questo intervento è mostrare un'esperienza didattica di Geometria, da realizzare in una classe del biennio delle scuole medie superiori, legata alla scoperta di due punti particolari, relativi a un triangolo non equilatero, detti punti isodinamici del triangolo, individuati anche grazie all'uso di un software di geometria dinamica.

La motivazione didattica è quella di ampliare le conoscenze relative allo studio dei triangoli, rispetto ai contenuti tradizionali presenti sui libri di testo del biennio, mostrando una particolare proprietà delle bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo (non equilatero).

Si illustra l'algoritmo della costruzione geometrica di tali punti, utilizzando il software di geometria dinamica Geogebra, utile per mostrare dinamicamente come, a partire da un triangolo qualsiasi (non equilatero), si determinano i relativi punti isodinamici e come, nel caso particolare di un triangolo equilatero, tali punti non esistono.

Si enunciano, infine, alcune proprietà che evidenziano diverse notevoli caratteristiche dei punti isodinamici di un triangolo (non equilatero).

2 - Definizione di punti isodinamici

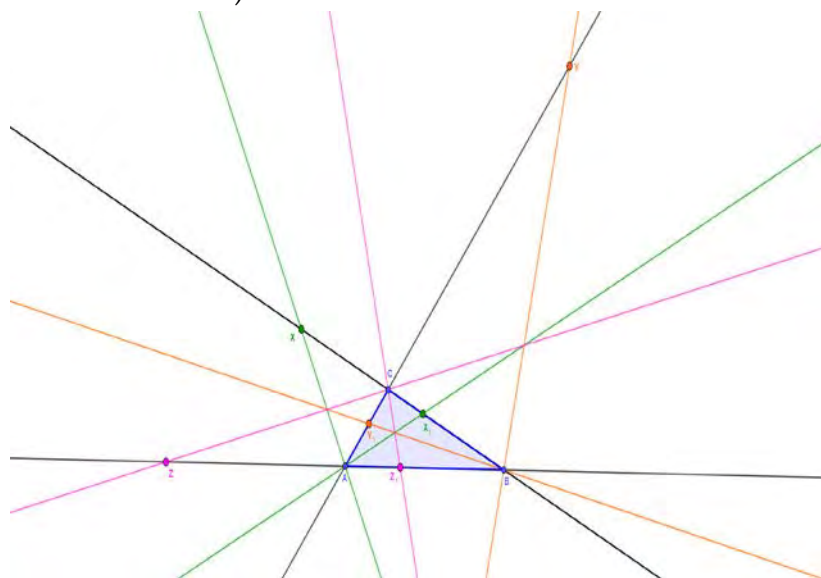
La definizione dei punti isodinamici di un triangolo è legata al seguente teorema:

Teorema Dato un triangolo non equilatero ABC , siano:

X e X_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice A con il lato BC ;

Y e Y_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice B con il lato AC ;

Z e Z_1 i punti di intersezione delle bisettrici dell'angolo (interno ed esterno) di vertice C con il lato AB .

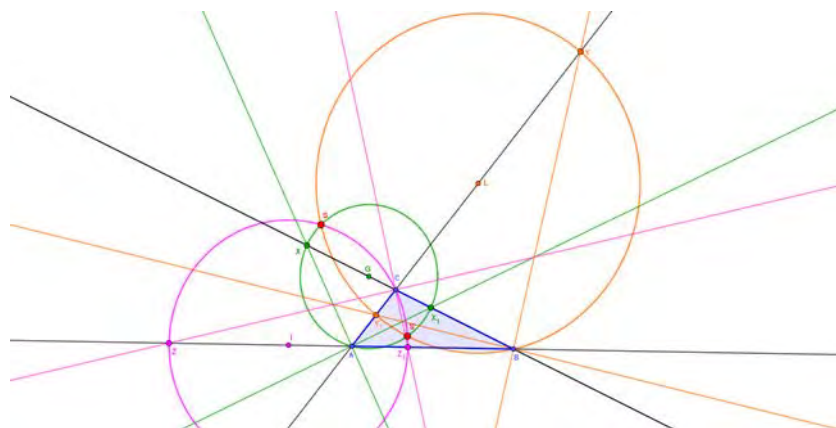


Allora le tre circonferenze di diametro rispettivamente XX_1 , YY_1 , ZZ_1 si intersecano in due punti, S e S' , detti **punti isodinamici** del triangolo ABC .

Tali circonferenze, inoltre, passano per i vertici del triangolo ABC , perché per un teorema di geometria elementare è noto che le bisettrici degli angoli interni ed

esterni di un triangolo sono perpendicolari e quindi i triangoli AXX_1 , BYY_1 , CZZ_1 sono triangoli rettangoli e pertanto le tre circonferenze passano per i vertici A, B, C degli angoli retti.

È chiaro che se il triangolo ABC è equilatero allora le bisettrici degli angoli esterni relativi a un vertice sono parallele ai lati opposti a tale vertice e, quindi in tal caso, i punti isodinamici non esistono.



3 – Proprietà dei punti isodinamici

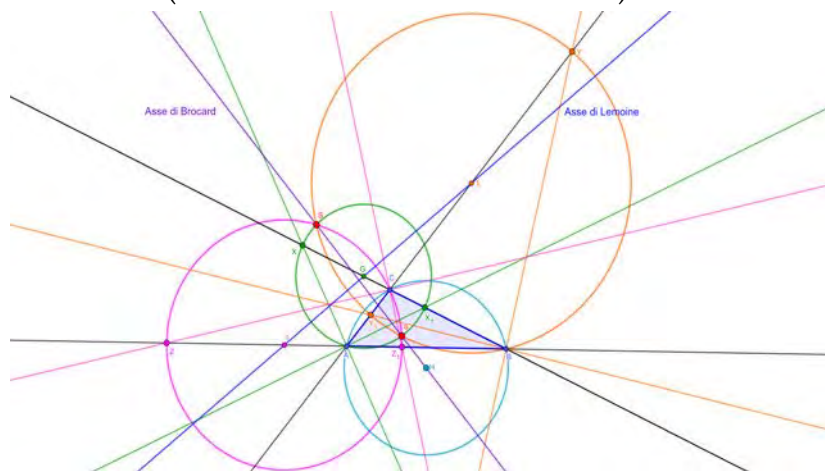
Vediamo alcune proprietà dei punti isodinamici di un triangolo.

1) Poiché le tre circonferenze appartengono al fascio di circonferenze passanti per i due punti isodinamici e poiché, come è noto, i centri delle circonferenze di tale fascio sono allineati su una retta, detta asse centrale del fascio, i loro centri (I, G, L) saranno pertanto allineati (e in questo caso la retta prende il nome di asse di Lemoine).

2) La retta passante per i due punti isodinamici, punti base del fascio di circonferenze, è l'asse radicale del fascio, che,

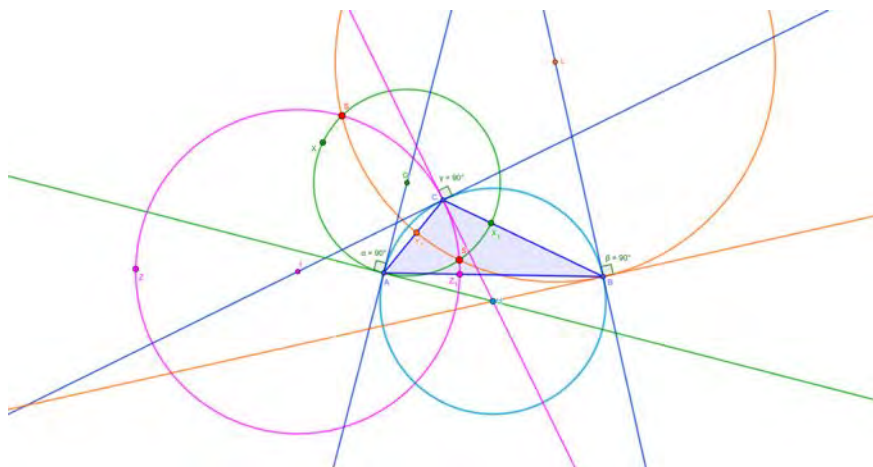
come si sa, è perpendicolare all'asse centrale (e in questo caso prende il nome di asse di Brocard).

3) I punti isodinamici e il circocentro H del triangolo ABC sono allineati (ovviamente sull'asse di Brocard).



4) Le tangenti alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC nei vertici A , B , C , passano per i centri delle tre circonferenze che determinano i due punti isodinamici del triangolo ABC .

5) Le tre circonferenze che determinano i due punti isodinamici del triangolo ABC sono ortogonali alla circonferenza circoscritta al triangolo.

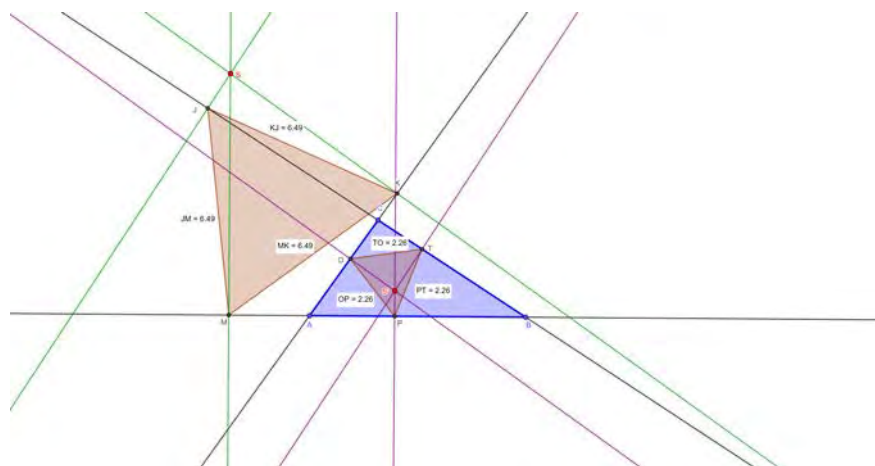


4 – Triangoli pedali dei punti isodinamici

Esiste un'interessante proprietà dei triangoli pedali dei punti isodinamici di un triangolo non equilatero. Partiamo dalla definizione di triangolo pedale di un punto rispetto a un triangolo.

Definizione Dato un triangolo t e un punto P , si chiama triangolo pedale di P rispetto al triangolo t , il triangolo avente per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati di t .

Si può dimostrare che i triangoli pedali dei punti isodinamici relativi a un triangolo qualsiasi ABC (non equilatero) sono sempre triangoli equilateri.

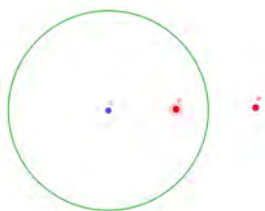


Nella figura, il triangolo pedale del punto isodinamico S relativo al triangolo ABC è JKM , mentre quello relativo al punto isodinamico S' è OPT .

5 – Inversione circolare dei punti isodinamici

Prima di enunciare la prossima proprietà, è utile ricordare la definizione di inversione circolare.

Definizione Data una circonferenza di centro O e raggio r , si chiama inversione circolare di centro C e raggio r , la trasformazione geometrica del piano che assegna ad un punto P il punto P' tale che $CP \cdot CP' = r^2$.



Ricordo che per l'inversione circolare valgono le seguenti proprietà:

- i punti interni alla circonferenza sono trasformati in punti esterni (e viceversa);

- i punti della circonferenza sono punti uniti;

- le rette non passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in circonferenze passanti per il centro dell'inversione;

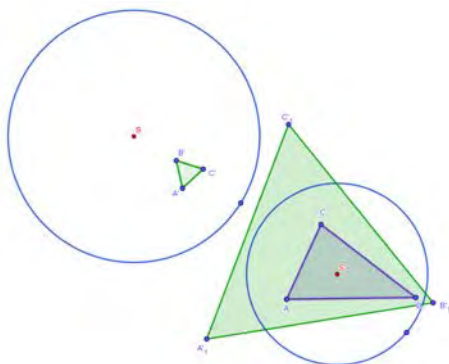
- le rette passanti per il centro dell'inversione sono unite;

- le circonferenze non passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in circonferenze non passanti per il centro dell'inversione;

- le circonferenze passanti per il centro dell'inversione sono trasformate in rette non passanti per il centro dell'inversione.

La relazione tra l'inversione circolare e i punti isodinamici è data dal seguente teorema:

Teorema L'inversione circolare di un qualunque triangolo (non equilatero), di centro un punto isodinamico del triangolo e raggio qualsiasi, è sempre un triangolo equilatero.



Nella figura, l'inversione circolare del triangolo ABC , di centro il punto isodinamico S e raggio assegnato, è il triangolo $A'B'C'$; mentre, l'inversione circolare del triangolo ABC , di centro il punto isodinamico S' e raggio assegnato, è il triangolo $A_1B_1C_1$: come si può notare tali triangoli sono equilateri.

Quest'ultima proprietà dei punti isodinamici, quella di trasformare mediante un'inversione circolare qualunque triangolo in un triangolo equilatero, è sicuramente la più interessante.

6 - Conclusioni

Credo che, come considerazione finale, si debba stimolare gli studenti all'utilizzo di un software di geometria dinamica, il cui uso non deve assolutamente sostituire le dimostrazioni dei teoremi e la risoluzione dei problemi geometrici, che costituiscono un momento fondamentale dello sviluppo del pensiero razionale di uno studente.

Ma il software può benissimo affiancarsi ad essi, perché rappresenta l'opportunità di "verificare" la validità un

teorema (o della soluzione di un problema), così come d'altra parte è fortemente raccomandato nelle Indicazioni Nazionali per i Licei, emanate qualche anno fa dal MIUR.

E in questa operazione di verifica è lo studente ad essere protagonista dell'azione didattica, perché deve essere lui a costruire le ipotesi del teorema o del problema.

Senza, però, mai stancarsi di sottolineare agli studenti che in Matematica (e in particolare in Geometria) la verifica di un teorema NON è mai una dimostrazione!

Bibliografia

D'Ignazio I., Suppa E. (2001). *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*, Interlinea editrice.

Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. (1967). *Geometry Revisited*, *New Mathematical Library*, vol. 19, The Mathematical Association of America

Campedelli L. (n.d.). I metodi sintetici per la risoluzione dei problemi di geometria piana, in *Repertorio di Matematiche*, vol. II, a cura di M. Villa

La Geometria Proiettiva si può ancora ignorare nell'insegnamento di oggi?

Le Trasformazioni omologiche

Alessandra Rotunno*

* DIARC Università "Federico II" di Napoli; alessandra.rotunno@unina.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.071

Sunto: Si propone una sintesi dei lavori prodotti negli ultimi tre decenni da un gruppo di studiosi, soci della sezione Mathesis di Napoli, sull'insegnamento della Geometria. In particolare, si espone un percorso didattico che non trascura i teoremi essenziali della Geometria di Euclide, ma inserisce i primi elementi della Geometria Proiettiva, le cui conoscenze sono indispensabili alla comprensione dello studio della Fisica moderna.

Parole Chiave: Omologia, Affinità, Similitudine, Isometria

Abstract: A summary of the works produced in the last three decades by a group of scholars, members of the Mathesis section of Naples, on the teaching of geometry is proposed. In particular, an educational path is exhibited that does not neglect the essential theorems of Euclid's geometry, but inserts the first elements of Projective Geometry, the knowledge of which is essential for understanding the study of modern Physics.

Keywords: Homology, Affinity, Similitude, Isometry

1 - Introduzione

Questo lavoro, presentato al Convegno “Quali conoscenze di geometria nella Scuola di oggi?”, rientra nella sessione di studi “La geometria ... oltre Euclide” ed è complementare agli interventi dei professori Ferdinando Casolaro (geometria sullo spazio curvo), Onofrio Casoria (fisica e geometria), Antonio Maturo (geometrie join e misure di incertezza) le cui risultanze sono pubblicate nel presente volume.

Nella sessione di lavori citata si è cercato di sintetizzare le tematiche sviluppate negli ultimi due secoli, che riteniamo essenziali da proporre per un insegnamento moderno.

Non dettaglierò i vari passaggi, per i quali si richiamano i lavori citati in bibliografia, ma ritengo opportuno fissare l'attenzione sia sull'evoluzione storica che sulle motivazioni per le quali ritengo indispensabile un approccio didattico più ampio, che nasce proprio dai concetti di punto all'infinito (Casolaro, Rotunno, 2015) e da un approccio attraverso le trasformazioni geometriche (Casolaro, 2020).

In particolare mi soffermerò su una trasformazione, l'omologia, che nei corsi di Formazione docenti, viene proposta già nel Primo Ciclo di istruzione.

Pertanto, dopo una breve introduzione storica limitatamente al periodo ellenico, mi soffermerò sulla descrizione delle trasformazioni omologiche che didatticamente si possono introdurre già nella Scuola Primaria attraverso le ombre delle finestre sul pavimento.

Non è superfluo sottolineare, come si evincerà dalla descrizione storica nel prossimo paragrafo, il contributo dell'omologia allo sviluppo dell'arte e dell'architettura, la cui

evoluzione ha tenuto conto non solo degli elementi euclidei quali le similitudine e le isometrie.

2 - Dagli artisti ai geometri: excursus storico

Le prime dimostrazioni di geometria furono stabilite nel VI secolo a.C. nella scuola di Talete, che è stato il precursore di risultati prodotti nei due secoli successivi V e IV, nelle Scuole filosofiche (Kline, 1991).

Nel III secolo a.C., Euclide raccolse tutti i risultati dei matematici che lo precedettero in un unico trattato, gli *Elementi*, che è ancora oggi il modello utilizzato dai docenti di matematica per l'insegnamento.

Va sottolineato, però, che lo stesso Euclide si rese conto che l'Universo è in movimento ed alla sua grande opera mancava qualcosa.

Infatti ha lasciato un trattato, ignorato per oltre duemila anni e tradotto nel 1916, *I Fenomeni* dove si incontra per la prima volta il concetto di "trasformazione geometrica", attraverso la definizione di superficie sferica.

Diversamente dalla classica definizione: la superficie sferica è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro (concetto statico), Euclide, ne *I Fenomeni* definisce la superficie sferica come superficie di rotazione della circonferenza attorno al suo diametro (concetto dinamico).

In quel periodo ebbe origine un gruppo di ricerca, del quale faceva parte lo stesso Euclide, i cui risultati sono indicati come "Optica degli antichi". L'obiettivo del gruppo era il

desiderio di studiare i fenomeni luminosi per distinguere la realtà (la figura reale) dall'apparenza (visione delle ombre).

A partire dalle premesse che "la luce si propaga in linea retta" si stabilirono molti teoremi (la maggior parte da parte di Euclide) che sono ancora considerati tra le fondamenta della trattazione matematica della luce.

La geometria descritta da Euclide nel suo lavoro originale, gli *Elementi* è indicata come "geometria elementare", anche se non è chiaro il limite tra il termine "geometria elementare" e qualcuna delle altre geometrie emerse negli ultimi secoli.

Infatti, è opinione di molti che la stessa geometria rappresentata sul piano cartesiano attraverso i vettori (geometria affine) sia una continuazione del modello euclideo, per cui dovrebbe rientrare nel termine "geometria elementare".

Nell'uso comune, il significato dell'espressione "geometria elementare" dipende anche dai programmi scolastici e, addirittura dalle condizioni della cultura matematica in vari luoghi. Ad esempio lo studio delle coniche, che in Italia fa parte della geometria proiettiva o considerato come argomento esclusivamente di geometria analitica, in Francia si trova in tutti i testi di geometria elementare.

Secondo un punto di vista più moderno, possiamo dire che la geometria elementare tratta quasi esclusivamente le proprietà di uguaglianza o di similitudini di figure; infatti, le proprietà che essa studia sono tali che se valgono per una figura, valgono per le figure uguali ad essa e per le figure ad essa simili.

Allo stesso modo diremo che le proprietà geometriche di una figura F che sussistono, oltre che per la figura stessa

anche per tutte le figure che si possono dedurre per proiezione e per sezione, hanno carattere proiettivo.

Lo studio delle proprietà delle figure del piano o della stella che hanno carattere proiettivo costituisce la “geometria proiettiva”.

L’analisi della geometria che ha condotto a questo punto di vista fu fatta dal matematico tedesco Felix Klein (1849, 1925) nella seconda metà del secolo scorso, dopo le dispute sulla crisi dei fondamenti e le discussioni sul postulato delle parallele.

Nel 1872, nominato professore ordinario all’Università di Erlangen, Klein pubblicò il suo “Program” (noto in letteratura come Programma di Erlangen), in cui considerava le proprietà geometriche delle figure classiche rispetto a gruppi di trasformazione. In tal modo riuscì a classificare le varie geometrie che progredirono in maniera indipendente una dall’altra (Casolaro, 2020).

In tale ottica, Klein prese atto che tra le geometrie basate su gruppi di trasformazioni lineari, la geometria proiettiva è la più ampia (Casolaro, Cundari, 1993).

3 - Proiettività tra piani. Omografie e legge di dualità

In una trattazione razionale della geometria proiettiva si assumono come enti primitivi (indicati in letteratura come “enti generatori”) il punto, la retta e il piano, con un senso più ampio rispetto a quello che essi hanno nella geometria elementare (Loria, 1921).

Infatti, dato uno spazio affine (cioè uno spazio in cui le proprietà delle figure restano invarianti rispetto al “gruppo delle affinità”), una retta r e un punto $S \notin r$, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e le rette del fascio di centro S , corrispondenza che è senza eccezione se aggiungiamo ai punti ordinari (propri) di ogni retta un punto improprio (punto all’infinito) che individua la direzione della retta. Pertanto, rette parallele si intersecano nel punto improprio (Casolaro, Rotunno, 2019).

Analogamente, partendo da un piano α e da un punto $S \notin \alpha$, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le rette della stella di centro S ed i punti del piano α ; anche in questo caso la corrispondenza è senza eccezioni se alle rette parallele al piano, facciamo corrispondere i punti impropri del piano.

Si definisce, in tal modo, la retta impropria, comune a tutti i piani paralleli ad α ed il piano improprio, insieme di tutti i punti impropri dello spazio.

Le trasformazioni che fanno parte del gruppo proiettivo sono dette “proiettività”, in quanto avvengono con le operazioni di proiezione e sezione.

Le proiettività tra piani, nello spazio tridimensionale S_3 , sono dette “omografie”.

L’insieme delle omografie forma gruppo rispetto alle operazioni di proiezione e sezione. Il percorso didattico di seguito proposto è strutturato sullo studio delle omografie.

3.1 – Forme geometriche fondamentali. Principio di dualità

L'invarianza delle proprietà geometriche per proiezione e sezione consente di classificare le figure all'interno di enti geometrici che chiameremo "forme".

Si dicono forme fondamentali di prima specie, o ad una dimensione:

1. la retta punteggiata, che è l'insieme di tutti i punti che appartengono ad una retta (sostegno della punteggiata);

2. il fascio di rette, che è l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto di questo piano (centro del fascio);

3. il fascio di piani, che è l'insieme di tutti i piani passanti per una retta, (asse del fascio);

Nelle forme fondamentali di prima specie vale la legge di dualità piana che si esprime:

a) due punti distinti individuano una sola retta a cui appartengono	a') due rette distinte individuano un solo punto a cui appartengono
---	---

b) tre punti che non appartengono ad una stessa retta, individuano un piano a cui appartengono	b') tre piani, che non appartengono ad una stessa retta individuano un punto a cui appartengono
--	---

c) un punto ed una retta che non si appartengono individuano un piano a cui appartengono	c') un piano ed una retta che non si appartengono individuano un punto a cui appartengono.
--	--

È opportuno osservare che, per enunciare tali proposizioni abbiamo usato il verbo appartenere per denominare indifferentemente le relazioni tra punti, rette e piani, usualmente espresse dalle voci verbali “contenere” ed “essere contenuto”. Scambiando le parole punto e piano, e lasciando inalterata la parola retta, otteniamo una proposizione dall'altra e viceversa.

Due proposizioni - o configurazioni geometriche - ottenute una dall'altra mediante gli scambi indicati vengono dette *duali*; ad esempio, sono duali la figura costituita da due punti e la retta loro congiungente e quella formata da due piani e la retta loro intersezione.

Si dicono forme geometriche fondamentali di seconda specie, o a due dimensioni:

1. il piano punteggiato e il piano rigato composti, rispettivamente, da tutti i punti e da tutte le rette di un piano (sostegno della forma);

2. la stella di rette e la stella di piani costituite, rispettivamente, da tutte le rette e da tutti i piani passanti per uno stesso punto, (centro della stella);

Nella dualità spaziale sono duali le operazioni di proiezione e sezione.

Si dicono forme fondamentali di terza specie, o a tre dimensioni, lo spazio di punti e lo spazio di piani, cioè l'insieme di tutti i punti e di tutti i piani dello spazio geometrico S_3

4 - L'omologia

Un'omografia prodotto di due prospettività è detta omologia. L'omologia è una trasformazione lineare del piano che ha la genesi nello spazio tridimensionale (Casolaro, Rotunno, 2019).

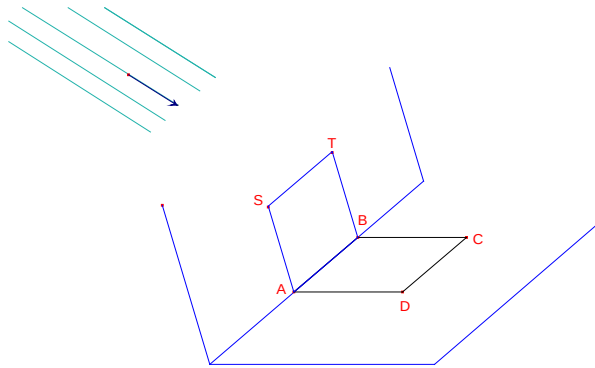


Fig. 4.1 Prospettività tra piani

La figura 4.1 schematizza la prospettiva con centro improprio (si considera il sole come punto all'infinito) tra il piano verticale che contiene la finestra (rettangolo ABST) e il piano orizzontale che contiene la proiezione ABCD (quindi `e una prospettiva tra piani).

Nella figura 4.4 si costruisce l'omologia come composizione delle due prospettività disegnate nelle figure 4.2 e 4.3.

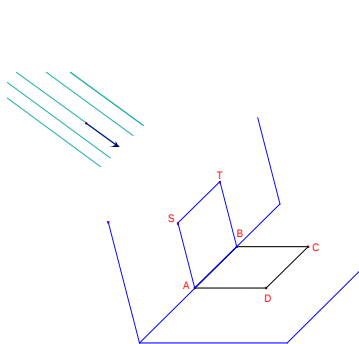


Fig. 4.2 Proiezione della finestra sul pavimento la mattina

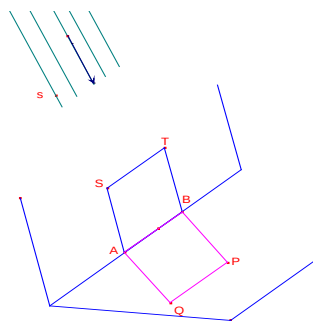


Fig. 4.3 Proiezione della finestra sul pavimento alcune ore dopo

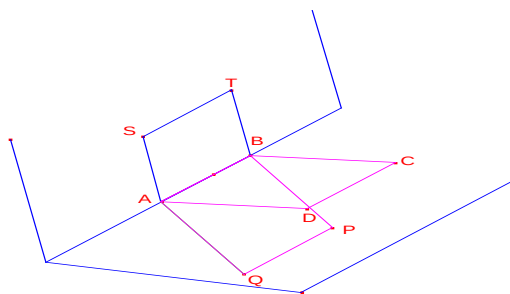


Fig. 4.4 Sovrapposizione delle proiezioni: la trasformazione sul piano del pavimento, che muta ABCD in ABP Q, è l'omologia

Le proprietà dell'omologia sono:

- 1) esiste un punto unito che può essere proprio o improprio;
- 2) esiste una retta unita che può essere propria o impropria;
- 3) punti corrispondenti sono allineati con il centro;
- 4) rette corrispondenti si incontrano sull'asse.

Nelle figure 4.5, 4.6, 4.7 sono indicate tre tipologie di omologia tra trasformazioni elementari.

1. Traslazione: Omologia con asse improprio, centro improprio (figura 4.5)

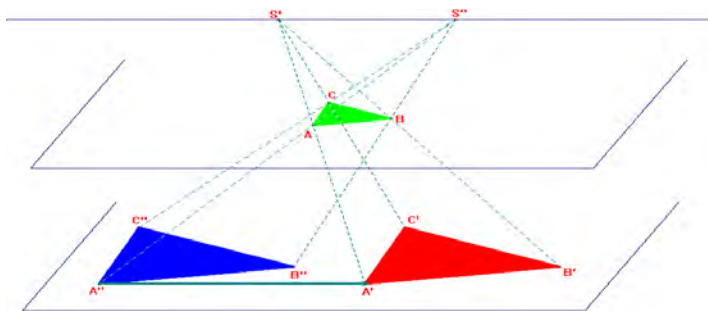


Fig. 4.5 Traslazione

2. Omotetia: Omologia con asse improprio, centro proprio (fig. 4.6)

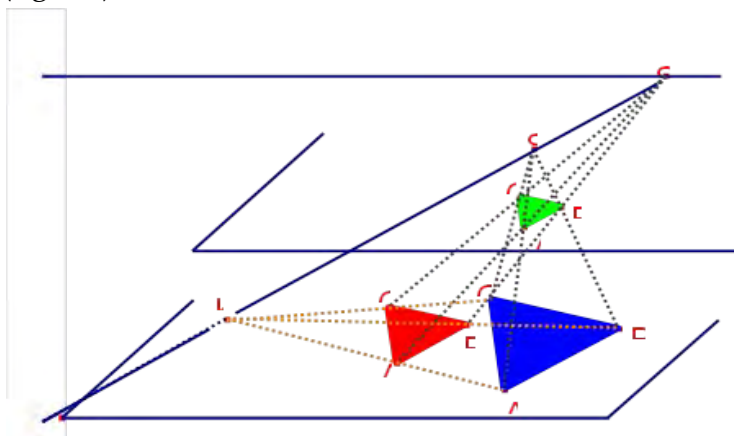


Fig. 4.6 Omotetia

3. Affinità omologica o omologia affine: Omologia con asse proprio, centro improprio (figura 4.7)

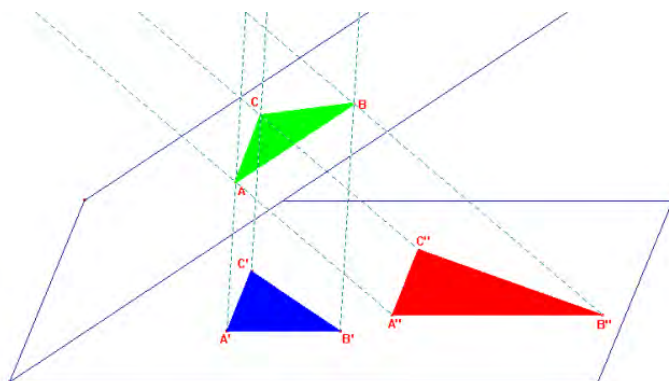


Fig. 4.7 Affinità omologica o omologia affine

Un particolare esempio di affinità omologica è la *simmetria assiale*, che presenta l'asse proprio, il centro improprio e il piano di riferimento è perpendicolare al piano della figura, che è a sua volta perpendicolare alla congiungente i centri di proiezione S_1 ed S_2 ed è equidistante da essi.

5 - Conclusioni

Ci siamo soffermati sul concetto di omologia perché rappresenta il primo approccio che un bambino, già all'età di pochi mesi, ha con la geometria: le ombre degli oggetti generate dal sole insieme alla forma delle figure reali.

Nei corsi di Formazione per Distretti scolastici organizzati dal Ministero, alcune maestre della Scuola Primaria hanno potuto sperimentare l'interesse dei ragazzi nelle quarte e nelle quinte classi, facendo disegnare la finestra e l'ombra che

produce sul pavimento in momenti diversi della giornata, come abbiamo evidenziato nelle figure (4.5), (4.6), (4.7) di questo lavoro (Casolaro, 2003).

Il significato di questi cosiddetti “disegnini” va oltre gli obiettivi della rappresentazione perché permette all’insegnante di mostrare concretamente il movimento della Terra intorno al Sole (interrelazione con le Scienze) e le modifiche delle figure attraverso la prospettiva (interrelazione con l’arte).

Bibliografia

Loria G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli.

Kline M. (1991). *Storia del pensiero matematico*. Edizioni Einaudi.

Cundari C. (1991). Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie, *Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell’Università “La Sapienza” di Roma*, 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991 pp.85-103 e pp.101-118.

Casolaro F., Eugeni F. (1996). Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie, *Atti del Convegno “Aspetti multidisciplinari in didattica della matematica”*. Teramo, 1-3 dicembre 1995. *Ratio Matematica* n. 1, 1996; pp. 23-33.

Casolaro F. (2002). Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo, *Congresso Nazionale Mathesis “La Matematica fra*

tradizione e innovazione: un confronto europeo". Bergamo, 17-19 ottobre 2002; pp.185-198.

Casolaro F. (2003). Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica, *Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio", Vasto, aprile 2003; pp.129-148.*

Casolaro F. (2014). Dalla Geometria euclidea alla Geometria Proiettiva. *Science & Philosophy Divulgation 2014-Fondazione "Panta Rei". Numero speciale di Ratio Mathematica; pp.47-53.*

Casolaro F., Rotunno A. (2015). Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations. *Brno, Czech Republic: University of Defence.*

Casolaro F., Rotunno A. (2019). L'ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo, *in Matematica, Architettura, Fisica, Natura. Edizione Aracne; pp.106-122.*

Casolaro F. (2020). Dalla geometria euclidea alla geometria proiettiva: interrelazioni tra matematica e disegno, *Periodico di Matematica n. 2, dicembre 2020, pagine 41-73.*

Percorsi didattici di geometria dello spazio

Uso di un software di geometria dinamica 3D nella Scuola secondaria di II grado

Luigi Tomasi *

* Università di Ferrara; luigi.tomasi@unife.it



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.072

Sunto: *L'articolo riassume quanto è stato presentato in una relazione al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?", Agerola (Napoli) 8-10 settembre 2021, dedicata ad alcuni percorsi di geometria dello spazio per la Scuola secondaria di II grado con l'uso di un software di geometria dinamica 3D. Dopo alcune considerazioni sull'importanza della geometria dello spazio nella formazione matematica degli studenti della scuola secondaria, nel seguito sono stati richiamati i curricula di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l'uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi di percorsi didattici di geometria dello spazio.*

Parole Chiave: *geometria dello spazio, software di geometria dinamica 3D; visualizzazione, scuola secondaria di II grado.*

Abstract: *The article summarizes what was presented in a report at the Conference "What knowledge of Geometry in today's school?", Agerola (Naples) 8-10 September 2021, dedicated to some paths of geometry of space for secondary school with the use of 3D dynamic geometry software. After some considerations*

on the importance of the geometry of space in the mathematical training of secondary school students, the curricula for the secondary school of II degree have been recalled below with regard to the geometry and the use of technologies, for finally conclude with the presentation of some examples of didactic paths of 3D geometry.

Keywords: *space geometry, 3D dynamic geometry software; visualization, secondary school of II degree.*

1 - Introduzione

In questo articolo si riassume quanto è stato presentato nella relazione - tenuta al Convegno “Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?”, organizzato dall’Associazione Mathesis “Aldo Morelli” di Napoli, 8-10 settembre 2021, ad Agerola (Na) - dedicata alla proposta di alcuni percorsi didattici di geometria dello spazio nella scuola secondaria di II grado, con l’uso di un software di geometria dinamica 3D (per esempio, GeoGebra). Inizialmente sono state proposte alcune considerazioni sull’importanza della geometria dello spazio nella formazione matematica degli studenti della scuola secondaria.

Nel seguito sono stati richiamati gli attuali curricoli di matematica per la Scuola secondaria di II grado per quanto riguarda la geometria e l’uso delle tecnologie, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi di percorsi di geometria dello spazio.

2 - L'insegnamento della Geometria dello spazio e i software 3D

I software di geometria dinamica consentono di vedere dinamicamente le figure e riportano in primo piano i metodi sintetici nello studio della geometria e nella risoluzione dei problemi. Fin dal loro apparire questi software hanno suscitato interesse tra gli insegnanti di matematica, per le loro caratteristiche di dinamicità e come validi strumenti a supporto dell'insegnamento e apprendimento della matematica.

Cosa cambia con i software di geometria (di matematica)? Per la geometria, la prima cosa che cambia è il concetto di figura, che da statica diventa dinamica, che si può manipolare, trasformare, trascinare... e questo per lo spazio è ancora più importante rispetto alla geometria del piano.

L'utilizzo del software di geometria e della deformazione «continua» della figura, tramite il trascinamento, facilitano l'analisi e la discussione sulle proprietà osservate di una figura, suggerendo congetture, da sottoporre poi a validazione mediante opportune argomentazioni e dimostrazioni.

La geometria dello spazio è piuttosto trascurata nella scuola secondaria di II grado, per diverse «ragioni»: tempo, difficoltà dell'argomento, È ritenuta, a torto, poco integrata con altri temi del curriculum di matematica e delle altre discipline di studio (Fisica, Disegno e Storia dell'Arte,...). Quando viene svolta, di solito viene proposta in una forma fin da subito troppo astratta, lontana dal mondo reale. Eppure viviamo nello spazio tridimensionale...

Esiste inoltre una tradizionale separazione, nell'insegnamento, tra la geometria piana e geometria dello spazio. I problemi

sono presentati di solito in forma “chiusa”, in cui si sa già dove si vuole arrivare. Non viene dato il giusto ruolo alla visualizzazione, tramite modelli fisici e il riferimento al mondo reale, e non c’è un adeguato utilizzo dei software per la geometria dello spazio.

L’insegnamento della geometria dello spazio, oltre a quella del piano, dovrebbe avere, almeno inizialmente, uno stretto legame con la visualizzazione e fare ricorso al mondo reale e ai modelli fisici. Il software, in questo intento, può aiutare a intuire e a “vedere” certe proprietà e permettere anche di presentare i contenuti in modo più interattivo, motivando maggiormente gli allievi. Per quanto possibile sarebbe da evitare di proporre dei percorsi separati tra la geometria del piano e quella dello spazio. È quindi utile fare ricorso al software di geometria e alla visualizzazione per attività di congettura e di scoperta di fatti e proprietà geometriche anche per lo spazio.

Nonostante quel che prevedono le *Indicazioni nazionali/Linee guida* (2010, 2012) per la matematica di tutti gli ordini scolastici, la geometria che di fatto si insegna –nel caso sia svolta - è quasi unicamente quella piana. Non c’è quindi da meravigliarsi se i problemi di geometria, riferiti allo spazio che ci circonda, danno luogo a difficoltà negli studenti. Ecco un esempio di domanda che può essere “imbarazzante” per i nostri allievi: come individuare la posizione apparente del sole in cielo, in un dato momento della giornata? Va da sé che le coordinate adatte allo scopo sono quelle sferiche, con origine nel punto di osservazione e piano di riferimento identificato con il piano orizzontale sul quale si trova l’osservatore. Questa domanda può essere collegata

all'aneddoto in cui si racconta come Talete sia riuscito a determinare l'altezza della piramide di Cheope.

Nella scuola secondaria di II grado la geometria sintetica del piano e – nei casi in cui se ne parla – dello spazio, è trattata da un punto di vista astratto e ipotetico-deduttivo fin dagli inizi della scuola secondaria di II grado. In tale ottica, il ruolo della percezione visiva e della visualizzazione viene considerato marginale o addirittura potenzialmente fuorviante. Invece, la fase di esplorazione e scoperta di una proprietà su una figura o su un modello, dovrebbe precedere la fase di “dimostrazione” della medesima proprietà nell'ambito di una sistemazione teorica.

Occorre quindi sviluppare l'intuizione e la visualizzazione spaziale. L'intuizione spaziale va specificamente curata nella fascia d'età compresa tra circa i dodici e sedici anni. In particolare vanno analizzate con cura le relazioni che intercorrono tra le figure tridimensionali e loro rappresentazioni bidimensionali. Detto in altri termini: occorre analizzare in classe gli oggetti “come sono” (sono tridimensionali!) e “come si vedono” (come li vedono i nostri occhi: visualizzazione nello spazio).

Anche per la geometria dello spazio, come per quella del piano, congetturare viene prima di dimostrare. Sia nel caso della geometria del piano che in quella dello spazio, gli studenti andrebbero stimolati ad esplorare situazioni non completamente formalizzate e a formulare congetture prima di passare alla fase della dimostrazione. Per queste attività esplorative, l'uso di un opportuno software (2D e 3D) è estremamente utile, in quanto consente di scoprire proprietà invarianti in ampie classi di figure, senza fare la fatica di

eseguire manualmente un gran numero di disegni, considerato anche che quelli di geometria dello spazio sono difficili da eseguire correttamente “a mano”.

3 - Percorsi di geometria dello spazio: alcuni esempi proposti con il software 3D

Nel seguito si proporranno alcuni temi di geometria dello spazio con accenni all'uso del software di geometria dinamica:

- rette e piani nello spazio; posizioni reciproche; perpendicolarità e parallelismo;
- poliedri (prismi, piramidi, poliedri regolari); sviluppi piani di solidi;
- sezioni di un cubo; sezioni piane di un solido;
- poliedri regolari e loro simmetrie;
- volumi; equiestensione tra i solidi;
- isometrie e similitudini dello spazio;
- le coniche come sezioni (nello spazio);
- introduzione alla geometria sulla sfera
- geometria analitica dello spazio.

La vista Grafici 3D di *GeoGebra* fornisce un supporto notevole all'intuizione e alla visualizzazione di proprietà geometriche dello spazio e sfrutta le più recenti caratteristiche grafiche dei computer, per “fare geometria”. Come impostazione iniziale per rappresentare le figure dello spazio usa la prospettiva, che corrisponde alla visione naturale.

Il software 3D permette di costruire facilmente figure nello spazio, in cui è possibile spostare il punto di vista dal quale osservarle e modificarle, interagendo in modo dinamico con la figura. Lo studente, con l'uso di questi software, può quindi

concentrare la sua attenzione sull'esplorazione dinamica delle proprietà geometriche della figura, senza dover affrontare il problema della rappresentazione degli oggetti.

3.1 – La vista Grafici 3D di GeoGebra

Il software GeoGebra presenta diverse viste. Per la geometria dello spazio occorre aprire la vista Grafici 3D ed inizialmente nascondere gli assi cartesiani (figura 1). A volte conviene visualizzare, accanto alla vista 3D, anche la vista Grafici (in 2D) che rappresenta il piano Oxy della vista in tre dimensioni. Nel software le figure sono rappresentate in prospettiva. Il software ha un menu dedicato alla geometria 3D e permette di costruire punti, rette, piani e di eseguire le costruzioni fondamentali dello spazio, per esempio retta per un punto parallela a una retta data; retta perpendicolare a un piano passante per un punto dato, ecc.

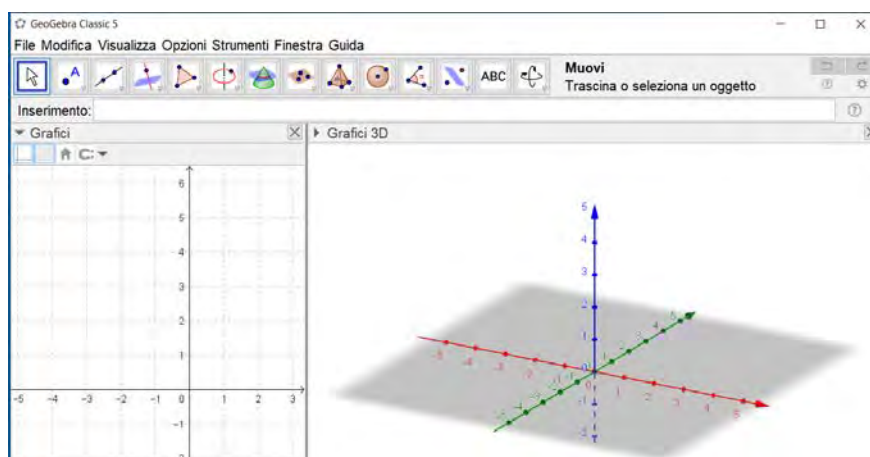


Fig. 1

3.2 – La rappresentazione di una circonferenza in 3D

Disegniamo una circonferenza (figura 2) nella vista grafici 3D. Che cosa si vede? Quasi tutti gli studenti rispondono che si tratta di una circonferenza; altri possono rispondere che si tratta di un'ellisse. Chi ha ragione? Si propone una discussione in classe sulla rappresentazione in prospettiva e sulla visualizzazione.

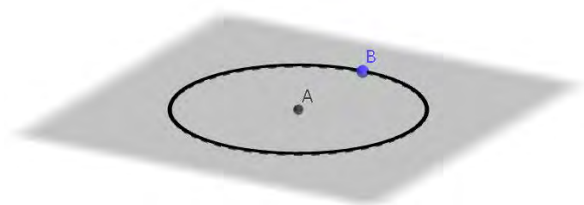


Fig. 2

3.3 – Parallelismo e perpendicolarità nello spazio

Inizialmente si analizzano le posizioni reciproche, nello spazio, di due rette, di due piani e di una retta e un piano. In particolare si studiano le relazioni di parallelismo e di ortogonalità.

3.4 – Angolo tra una retta e un piano

Si disegna una retta incidente a un piano e si definisce l'angolo tra la retta e il piano. Si definisce successivamente la perpendicolarità tra una retta e un piano.

3.5 – Rette sghembe: qual è la loro distanza?

Nello spazio due rette non complanari si dicono sghembe. Disegnare due rette sghembe (figura 3). Qual è la distanza (minima) tra due rette? Eventualmente si può proporre la costruzione per determinare la distanza tra due rette sghembe.

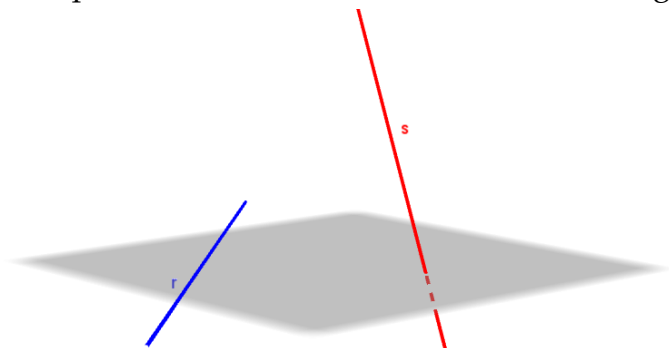


Fig. 3

3.6 – Teorema «delle tre perpendicolari»

Se una retta r è perpendicolare ad un piano α e se dal piede della perpendicolare A consideriamo, sul piano α , una retta s che sia perpendicolare ad un'altra retta t del piano, allora quest'ultima retta (t) è perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette (r ed s).

Questo teorema è fondamentale e di solito occorre presentare la dimostrazione nella scuola secondaria di II grado.

3.7 – Poliedri e sviluppo (dallo spazio al piano e viceversa)

Nella vista Grafici 3D è facile costruire dei poliedri: prismi, piramidi e poliedri regolari. La casella di strumenti «Solidi» del software permette di costruire questi solidi usando vari metodi di costruzione, in particolare quello, molto comodo,

«per estrusione». Costruire un poligono di base, un prisma, un cubo e (un) loro sviluppo piano.

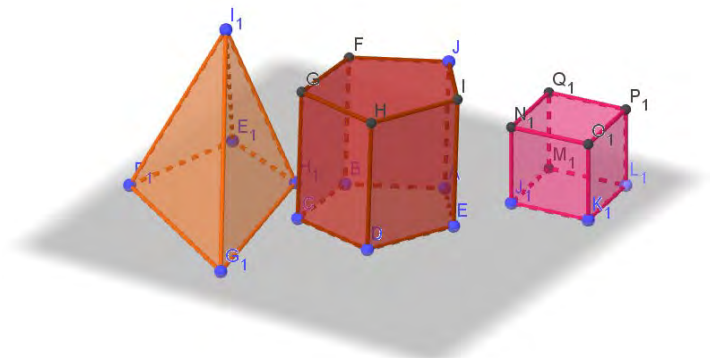


Fig. 4

3.8 – Le mediane di un tetraedro (esplorazione di proprietà)

Nello spazio il tetraedro è una figura fondamentale perché svolge lo stesso ruolo che ha il triangolo nella geometria del piano. Le mediane di un tetraedro; come si definiscono? Si incontrano in un unico punto? Costruire la figura 5 riportata qui sotto. Il punto E è il baricentro della faccia ABC ed F è il baricentro di ABD . Il punto G , intersezione tra DE e CF , è il baricentro del tetraedro. Esaminare le proprietà del baricentro.

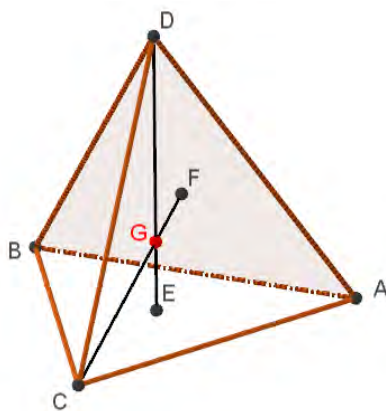


Fig. 5

3.9 – Le altezze di un tetraedro

Costruire due altezze di un tetraedro. Ad esempio DH è l'altezza del tetraedro relativa alla base ABC e AK è l'altezza relativa alla faccia BCD .

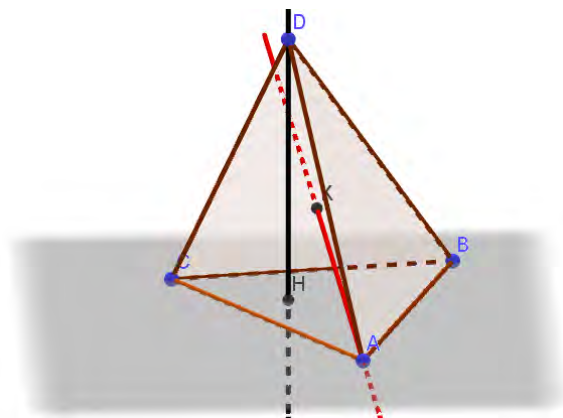


Fig. 6

Le altezze si incontrano in unico punto? Costruire la figura 6. Modificare il tetraedro trascinando uno dei suoi vertici e osservare se le altezze di un tetraedro si incontrano in un unico punto. Si scopre che, in generale, le altezze di un tetraedro non si intersecano.

3.10 – Sviluppo di un poliedro e costruzione di un modello (dallo spazio al piano)

Disegnare un cubo e costruire lo sviluppo piano del cubo (usare lo strumento «Sviluppo piano» del software). Nella vista Grafici (in 2D) viene creato lo sviluppo del cubo a forma di «croce latina» e uno slider: trascinandolo è possibile osservare dinamicamente lo sviluppo del cubo ottenuto (figura 7).

Problema: questo è l'unico sviluppo possibile del cubo?
Quanti sono i possibili sviluppi di un cubo?

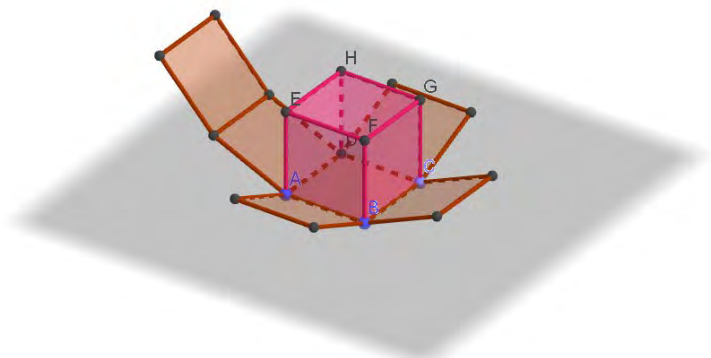


Fig. 7

3.11 - Dallo sviluppo al solido (dal piano allo spazio)

Disegnare la figura 8 con *GeoGebra* nella vista Grafici (2D).

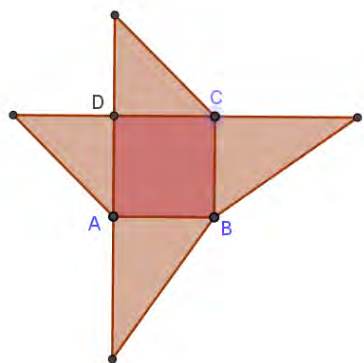


Fig. 8

Questo è lo sviluppo di un poliedro? Che tipo di poliedro?
Descrivere questo solido. Come è possibile stabilire se questa
figura è lo sviluppo di un solido? Può essere utile costruire
questo solido, con il cartoncino oltre che con *GeoGebra*.

3.12 – Dal solido a un suo sviluppo piano

Costruire la fig. 9 con *GeoGebra* a partire da un cubo, un suo vertice e dai punti medi di suoi opportuni spigoli. Si forma una piramide che ha per base un esagono regolare. Esplorare la figura con il software e costruire uno sviluppo piano di questo poliedro.

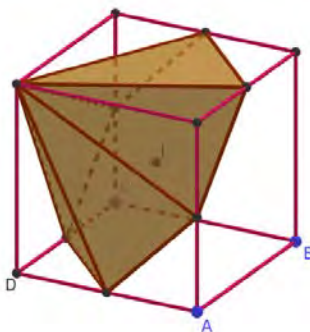


Fig. 9

3.13 – Con la piegatura della carta e con il software

Osservare la figura 10: questa figura rappresenta lo sviluppo piano di un cubo? Se sì, perché?

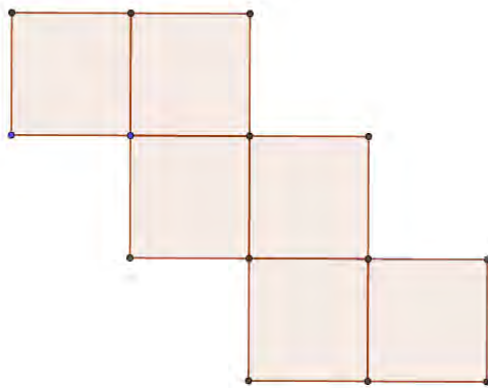


Fig. 10

Disegnare questa figura con *GeoGebra* nella vista Grafici (2D). Come si fa a stabilire se questa figura è lo sviluppo di un cubo? Costruirlo in cartoncino e poi con il software nella vista Grafici 3D.

3.14 – Dal piano allo spazio, con il software 3D

Disegnare questa figura nella vista Grafici (2D). Questo è lo sviluppo di un poliedro? Quale? Descriverlo. Come si fa a stabilire se questa figura rappresenta lo sviluppo di un poliedro? Costruiscilo in cartoncino. E poi con il software.

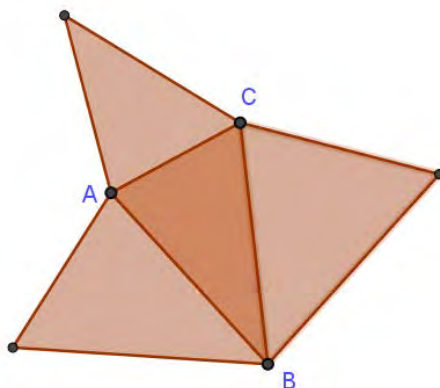


Fig. 11

3.15 – Un problema di *Flatlandia* (aprile 2020), rubrica di problemi di geometria

Problema. Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura 12). Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{XYZ}$.

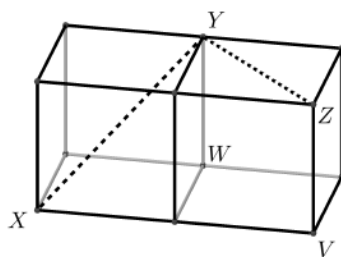


Fig. 12

Il software permette facilmente di scoprire che l'angolo $\widehat{XYZ}$ è retto. Dopo aver esplorato la figura con il software, si chiede di dimostrare quel che si è osservato.

3.16 - I poliedri regolari (solidi platonici)

GeoGebra ha una casella «Solidi» in cui è presente il cubo e il tetraedro regolare. Gli altri tre solidi platonici si possono ottenere dalla riga di inserimento, tramite per esempio l'istruzione: Ottaedro(<Punto>, <Punto>), oppure creando dei nuovi strumenti. Il tema dei poliedri regolari (figura 13) è particolarmente affascinante; in particolare si può esaminare la formula di Eulero che dà una relazione tra il numero dei vertici V , il numero delle facce F e il numero degli spigoli S :

$$V + F - S = 2.$$

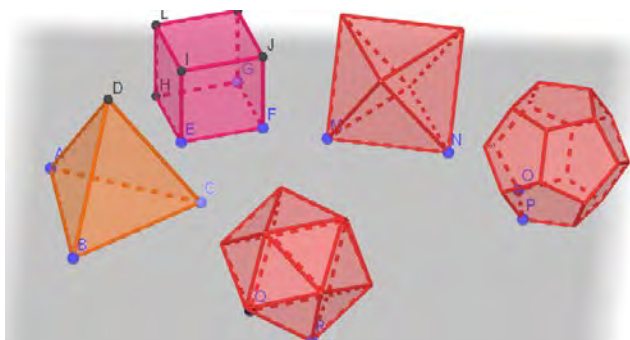


Fig. 13

3.17 - Dualità tra i poliedri regolari

Con il software 3D è facile scoprire la dualità tra i poliedri regolari; per esempio il numero di facce del cubo è uguale al numero dei vertici dell'ottaedro regolare, e viceversa, e analogamente per il dodecaedro e l'icosaedro regolari.

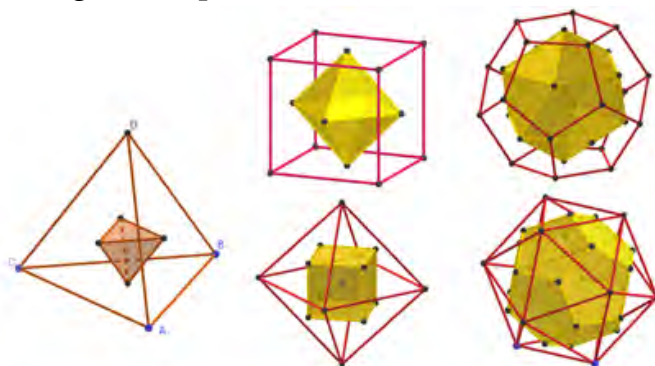


Figura 14

3.18 - Solidi di rotazione elementari: cilindro, cono e sfera

Nella vista Grafici 3D del software è facile costruire i solidi di rotazione elementari (cilindro, cono, sfera). Nella casella di

strumenti «Solidi» si possono usare i vari metodi di costruzione, in particolare quello, molto comodo, «per estrusione». Costruire un cerchio di base, un cilindro, un cono, una sfera con i vari metodi.

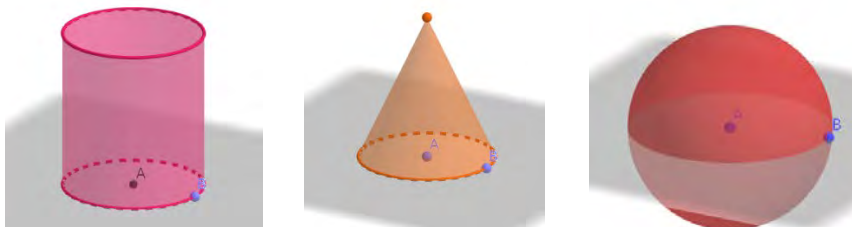


Figura 15

3.19 – Le coniche nello spazio (come sezioni di un cono)

Nella vista Grafici 3D è possibile costruire le coniche (ellisse, parabola, iperbole) come sezioni piane di un cono oppure di una “clessidra”, formata da due coni “opposti al vertice”.

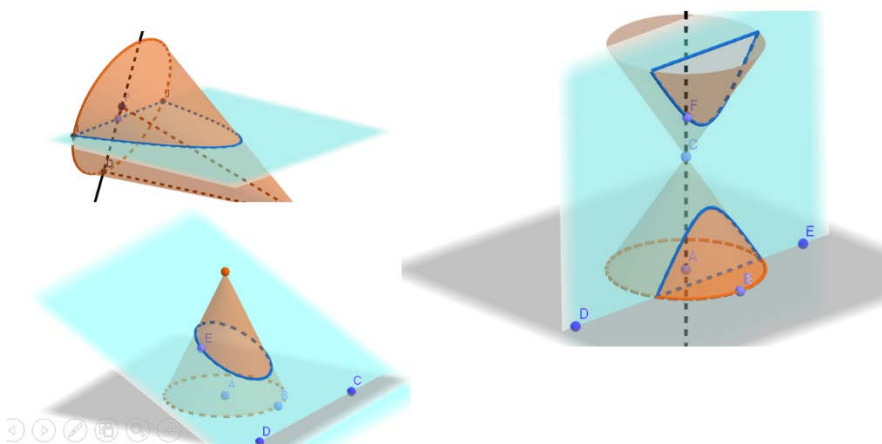


Figura 16

3.20 – Geometria sulla sfera: un problema interessante

Roma e New York sono quasi sullo stesso parallelo. Un aereo che parte da Roma per New York quale percorso segue? Descrive un arco di parallelo? Qual è la via più breve per andare da Roma a New York?

È un problema che si può presentare negli ultimi anni di scuola secondaria di II grado. Richiede di studiare un po' di geometria della sfera. *GeoGebra* permette di proporre un'ottima visualizzazione dinamica del problema e di risolverlo.

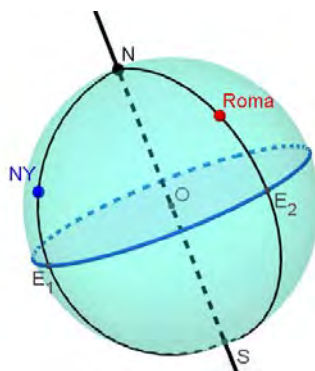


Figura 17

3.21 – Come funziona il GPS (la geolocalizzazione)?

Problema: perché occorrono tre satelliti per individuare la posizione di un punto sulla superficie terrestre (tramite il GPS)? Il problema può essere visualizzato e risolto con il software; il punto P si ottiene come intersezione di tre sfere, di centri rispettivi i tre satelliti S_1, S_2, S_3 , con la superficie terrestre.

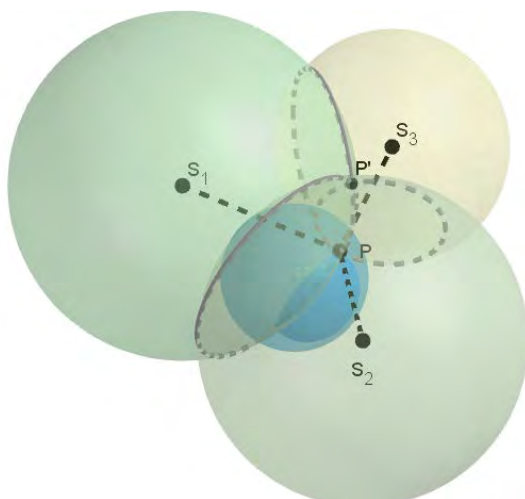


Fig. 18

3.22 – Simmetrie del cubo: assi di rotazione e piani di simmetria

Problema: determinare gli assi di simmetria (di rotazione) e i piani di simmetria di un cubo.

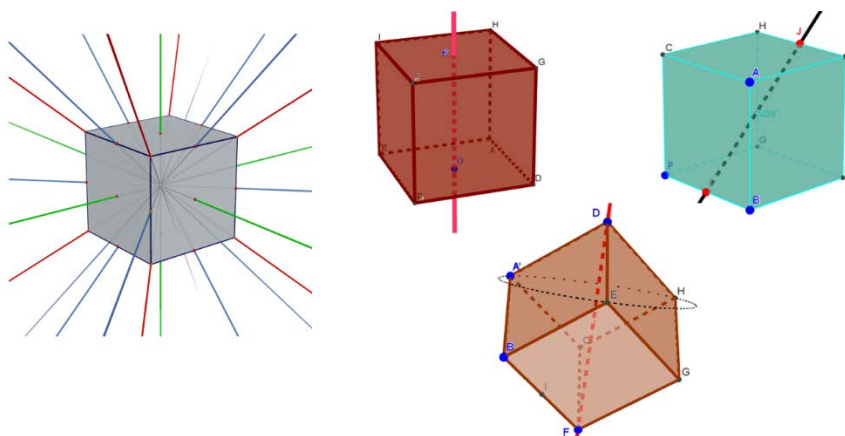


Figura 19

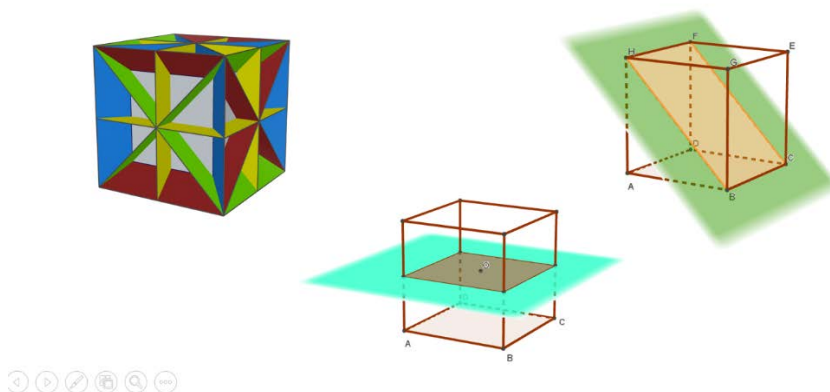


Fig. 20

3.23 – Principio di Cavalieri (visualizzazione dinamica)

Il principio di Cavalieri è fondamentale per affrontare lo studio dei volumi dei solidi. Sappiamo che si tratta di un assioma. La figura qui di seguito permette di visualizzare in modo dinamico l'equivalenza tra due prismi riconducendola alla equivalenza tra poligoni nel piano.

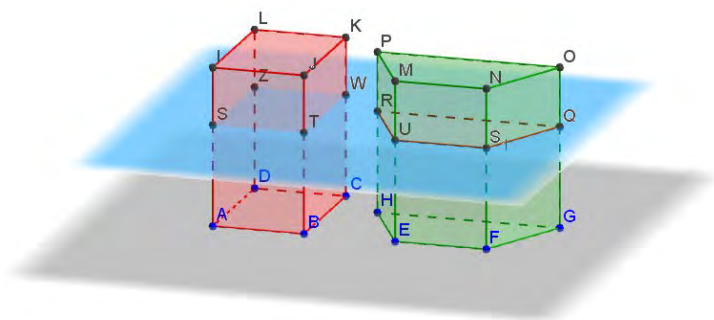


Fig. 21

3.24 – Cubo e scomposizione in tre piramidi equivalenti

Scomposizione di un cubo in tre piramidi equivalenti (anzi, addirittura congruenti). Costruire in cartoncino le tre piramidi (oblique) di base una faccia del cubo e altezza lo spigolo del cubo. Qual è lo sviluppo piano di una di queste piramidi? Costruire le piramidi con il software e con il cartoncino.

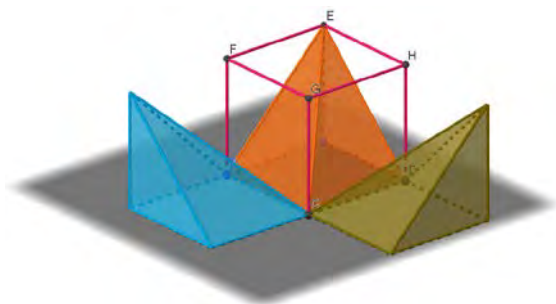


Fig. 22

3.25 – Prisma a base triangolare e la sua scomposizione in tre piramidi equivalenti

La scomposizione di un prisma triangolare in tre piramidi (tetraedri) equivalenti costituisce un teorema fondamentale quando si studia l'equivalenza di solidi. Si può fare la costruzione delle tre piramidi con il software e poi costruirle in cartoncino. Si ricava che il volume di una di queste piramidi è un terzo del volume del prisma.

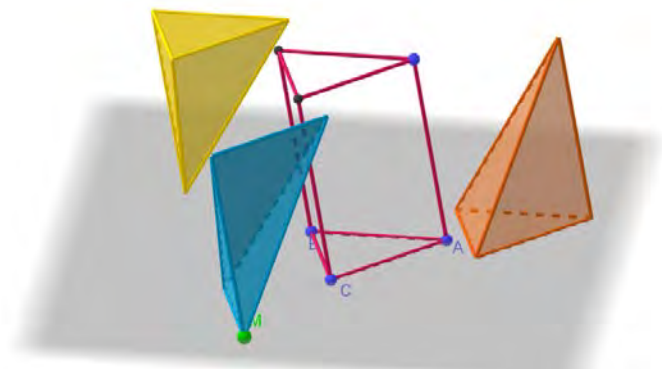


Fig. 23

3.26 – Superfici e volumi

La vista Grafici 3D offre anche degli strumenti per determinare la superficie e il volume dei solidi più importanti. Per esempio, si può verificare con il software il *grande teorema* di Archimede per la sfera e il cilindro equilatero circoscritto (figura 24):

$$\frac{S_{sfera}}{S_{cil}} = \frac{V_{sfera}}{V_{cil}} = \frac{2}{3}.$$

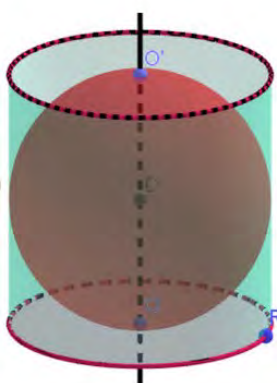


Fig. 24

3.27 – Geometria analitica nello spazio

La vista Grafici 3D permette agevolmente di affrontare lo studio della geometria analitica dello spazio, con la rappresentazione di punti, vettori, piani, rette, sfere, quadriche e in generale di altre superfici che sono grafici di funzioni in due variabili.

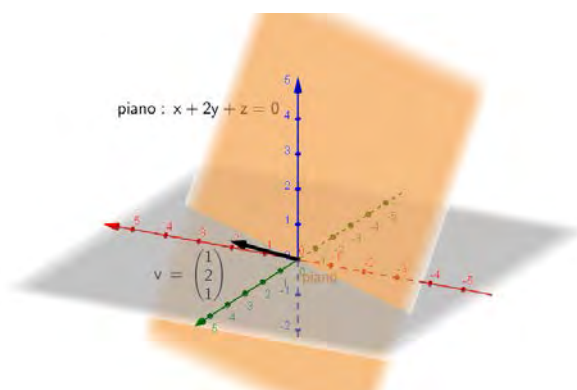


Fig. 25

3.28 – Superfici di rotazione

La vista Grafici 3D permette anche di rappresentare superfici di rotazione, generate da curve che ruotano attorno a un asse dato. Nella figura 26 si vede una superficie toroidale generata dalla rotazione, di tre quarti di giro attorno all'asse z , di una circonferenza.

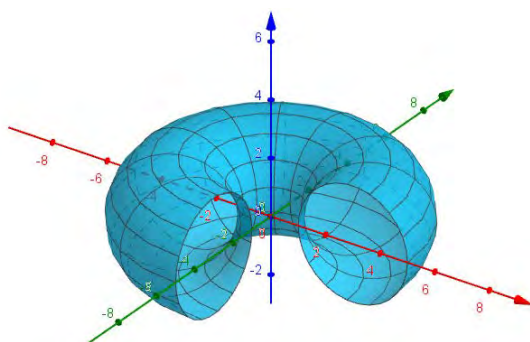


Fig. 26

4 - Conclusioni (da sperimentare in classe)

Un software come *GeoGebra* (3D) permette di unificare maggiormente la geometria dello spazio con la geometria piana. Si può effettivamente insegnare a “vedere nello spazio”. Un software 3D permette di visualizzare facilmente fatti geometrici nello spazio e permette di progettare delle attività didattiche che portino a formulare congetture anche in situazioni geometriche, come avvio alla dimostrazione. E, infine, con un software di geometria dinamica 3D si può rendere più attivo l’insegnamento e l’apprendimento della geometria dello spazio e affrontare l’argomento in modo più motivante per gli allievi.

Bibliografia e sitografia

AA.VV. (2004). Matematica 2003 (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario). Lucca: Liceo Scientifico Vallisneri.

Tomasi L. (2018). Percorsi di geometria per la Scuola secondaria di II grado (con l'uso del software), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 41AB, N.5, pp. 669-680.

Villani V. (2004). Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria), Bologna: Pitagora Editrice.

I “problemi di Flatlandia” (rubrica mensile di problemi di geometria sintetica in rete, per studenti della scuola secondaria):

<http://dm.unife.it/fardicono/flatlandia/>

Esperienza e ragione in Leonardo da Vinci

Ma prima farò alcuna esperienza avanti ch'io più oltre proceda, perché mia intenzione è allegare prima l'esperienza e poi colla ragione dimostrare perché tale esperienza è costretta in tal modo ad operare. E questa è la vera regola come li speculatori delli effetti naturali hanno a procedere, e ancora che la natura cominci dalla ragione e termini nella esperienza, a noi bisogna seguitare in contrario, cioè cominciando, come di sopra dissi, dalla esperienza, e con quella investigare la ragione.

Nessun effetto è in natura senza ragione; intendi la ragione e non ti bisogna esperienza. La natura è piena d'infinite ragioni, che non furon mai in esperienza.

Leonardo da Vinci (Aforismi)

Dal Metodo di Esaustione alla Teoria degli indivisibili e i principi di Cavalieri e Torricelli

Franco Eugeni*

* Già professore di Filosofia della Scienza e Presidente AFSU
eugenif3@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.073

Sunto: *Questa breve nota è una lezione da me tenuta molti anni fa, in un Insegnamento di Matematiche Complementari.*

Parole Chiave: *Metodo di Esaustione, Teoria degli indivisibili, Principi di Cavalieri, Integrali connessi.*

Abstract: *This short note is a lecture I gave many years ago, in Didactis of the Mathematics.*

Keywords: *Method of exhaustion, Theory of indivisibles, Principles of Cavalieri, Connected integral calculus.*

1 – La lezione sul Principio di Cavalieri

Un esame del mondo greco c'induce a ritenere che in un periodo non ben definito i matematici greci si avvalsero di metodi non rigorosi specie per risolvere questioni non solubili in termini finiti. Da Eudosso di Cnido (408-355 a.C.), a Democrito di Abdera (460-370 a.C.) e Ippocrate di Chio (460-377 a.C.), passando da Euclide, le cui date di nascita e morte sono incerte ma operante nel 300 a.C., si arriva ad Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), per la ricerca empirica e non rigorosa dell'area del cerchio e dei volumi della piramide, del cono, della sfera e dell'area della superficie sferica, infine del volume di un segmento di paraboloide rotondo.

Successivamente, venne a maturarsi un maggior spirito critico, anche in seguito alla comprensione di paradossi nati per un troppo disinvolto uso dell'infinito, e si giunse a una buona sistemazione di un metodo per trattare l'infinitesimale di allora, metodo conosciuto come "metodo di esaustione".¹

Esso fu introdotto, o forse solo valorizzato, da Eudosso di Cnido, come testimonia Archimede. Il metodo di esaustione, anche riletto con le attuali conoscenze, è perfettamente rigoroso ed era usato a posteriori per la giustificazione di risultati acquisiti per altra via, anche non rigorosa. Secondo altri il metodo di esaustione sarebbe da far risalire al più giovane Ippocrate di Chio, in quanto tale matematico utilizza la proporzionalità tra le aree di due cerchi e i quadrati dei rispettivi diametri.

¹ Il nome venne dato al metodo nel 1647 dal gesuita, matematico Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) di origine fiamminga, noto soprattutto per i suoi studi sulla quadratura del cerchio.

Interessante il fatto che tale proporzionalità, scoperta per via non rigorosa, è dimostrata nel XII libro degli *Elementi* di Euclide, in modo rigoroso appunto con il metodo di esaustione.

Il metodo di esaustione diede molti risultati, ma poiché faceva uso di un ragionamento del tipo delle classi contigue di figure geometriche, mal si prestava ai fini euristici poiché, in realtà, andava ad operare con risultati già noti, sia pure per vie non rigorose. Pertanto i matematici dei successivi secoli XVI e XVII cercarono altre vie, anche riscoprendo tecniche già presenti nell'opera *Metodo* di Archimede. Questi stabiliva in alcuni casi l'equivalenza di figure piane o anche solide confrontando i loro "elementi infinitesimi" in alcune condizioni che, se anche erano particolari, si adattavano a molti casi.

È interessante l'apporto di Luca Valerio e di Galileo Galilei, specie per la determinazione del volume della sfera come appare in Nicotra (2022).

Per tornare alla *Teoria degli indivisibili* della quale Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ebbero ad intuire la grande potenzialità, a suo tempo sembra che tale teoria fosse utilizzata anche dagli antichi ma come un grande segreto. Tale aspetto emerge chiaramente in un passo del Torricelli, tradotto dal latino, così come citato dal Carruccio (1958, p. 175):

Veramente non oserei affermare che questa geometria degli indivisibili sia proprio una nuova scoperta. Crederei piuttosto che gli antichi geometri si siano valse di questo metodo nella scoperta dei teoremi più difficili, quantunque nelle dimostrazioni si siano serviti di altra via, forse sia per

occultare il segreto della loro arte, sia per non offrire il fianco ai detrattori. Comunque sia, è certo che questa geometria costituisce un notevole risparmio di lavoro sulle dimostrazioni, ciò che non può farsi seguendo la dottrina degli antichi. Questa geometria degli indivisibili, infatti tra i matematici attuali appare veramente come la Via Regia, che primo tra tutti apersè e spianò per tutti, Cavalieri, supremo artefice di mirabili invenzioni.

La teoria degli indivisibili dello stesso Cavalieri, che cita Keplero tra i precursori, muove dalla considerazione che ogni superficie piana si può pensare sezionata da infinite corde intercettate da un sistema di rette parallele, ciascuna corda pensata come un rettangolo infinitesimo.

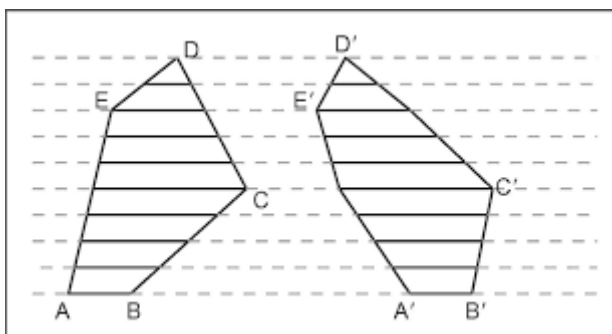


Fig. 1

Analogamente ogni solido si può pensare sezionato da infinite superficie intercettate da un sistema di piani paralleli, ciascuna superficie-sezione pensata come un cilindretto di altezza infinitesima.

La teoria, che in ogni caso prelude a sviluppi dell'Analisi Infinitesimale nelle costruzioni iniziali, molto deve allo stesso Cavalieri e al Torricelli.

Il Principio I di Cavalieri, ovvero la versione piana del principio, asserisce che :

Se ogni retta di un fascio di rette parallele interseca due figure piane in due sezioni (corde) della stessa lunghezza, esse sono equiestese, hanno cioè la stessa area. Inoltre se le due corde tagliate dalle rette parallele stanno sempre in un dato rapporto, anche le aeree di dette figure piane staranno nel medesimo rapporto.

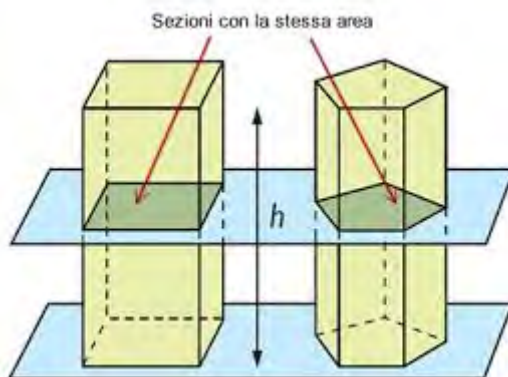


Fig. 2

Il Principio II di Cavalieri è usualmente presentato come un assioma della geometria euclidea nella versione spaziale, asserente che:

Se ogni piano di un fascio di piani paralleli interseca due figure solide in due sezioni equiestese, allora i due solidi hanno lo stesso volume. Inoltre se le due figure tagliate dai piani paralleli stanno

sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei detti solidi staranno nel medesimo rapporto.

Raramente a un assioma si riserva la dicitura “Principio”, più usata in fisica in differenti contesti. Nel nostro caso il termine “Principio” indica che tale assioma è sovrabbondante in quanto esso può essere banalmente dimostrato ricorrendo al concetto di integrale. L’“assioma” o “principio” è molto interessante, specie dal punto di vista didattico, in quanto può essere giustificato da spiegazioni intuitive (Fadini, 1977, pp. 192-199) che sembrano idealmente anticipare il calcolo integrale e di fatto molto vicine alla *Teoria degli indivisibili* dello stesso Cavalieri, che nelle costruzioni iniziali molto deve allo stesso Evangelista Torricelli (1608-1647).

Si noti anche, che tale principio, esprime un criterio sufficiente ma non necessario per l’equiestensione, dato che esistono figure solide equiestese, ma non verificanti le ipotesi del Principio.

Esaminiamo ora i due principi alla luce del calcolo integrale.

Il caso delle figure piane.

Data una funzione $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, che sia continua, allora, come è ben noto esiste l’integrale secondo Mengoli-Cauchy, che esprime il valore del trapezoide di base variabile $[a,b]$ ed altezza variabile secondo la corda $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Essendo F la funzione primitiva della f , continua in $[a,b]$, segue che F è derivabile in $[a,b]$ e risulta $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

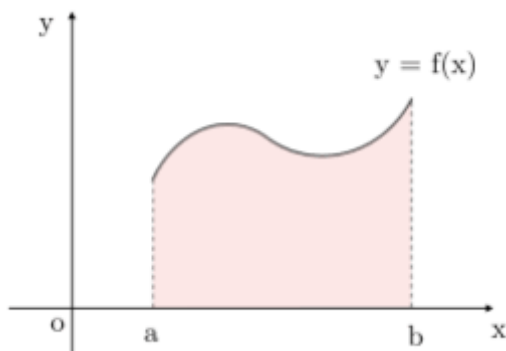


Fig. 3

Si ha inoltre che il valore dell'area A è dato dall'integrale seguente:

$$(1) \quad A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La (1) è una formula denominata formula fondamentale del Calcolo Integrale.

Siano ora date quattro funzioni continue sull'intervallo chiuso $[a, b]$ e siano:

$$f_1, f_2, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora l'area A definita dalle rette $x=a$, $x=b$ e dalle immagini $f_1(x)$, $f_2(x)$, delle due curve. Sia B l'area dell'analogia figura ottenuta dalle funzioni g_1 , g_2 . La prova del I Principio di Cavalieri risiede nell'osservare che per la (1), integrando:

$$f_2(x) - f_1(x) = g_2(x) - g_1(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow A = B.$$

Consideriamo un solido S riferito ad un sistema di coordinate cartesiane monometriche dello spazio O, x, y, z . Supponiamo ora che un fascio di piani del tipo $z = k$, intersechi il solido S in una figura la cui area sia espressa mediante una funzione continua $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di immagine $A(z)$. Supponiamo inoltre che il solido S sia compreso tra i due piani $z=a, z=b$.

È ben noto allora che il volume $V(S)$ è dato da (de Finetti (1957, pp.578-579; Bononcini, 1965, p. 592):

$$(1) \quad V(S) = \int_a^b A(z) dz.$$

È noto dal tempo del Cavalieri che se $A(z)$ è della forma $a+bz+cz^2+dz^3$ allora vale la formula di Cavalieri -Torricelli²

$$V(S) = \frac{h}{6} \left[A(a) + 4A\left(\frac{a+b}{2}\right) + A(b) \right]$$

dove l'altezza del solido S è pari a $h = (b-a) \cos \theta$, formula che si adatta ad una miriade di casi particolari.

Supponiamo ora che il medesimo fascio di piani di equazione $z = k$, intersechi un secondo solido S' , in una figura la cui area, in modo del tutto analogo a quanto visto sopra mediante una funzione continua $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di immagine $B(z)$. Supponiamo inoltre che anche il solido S' sia compreso

² Se l'asse z è inclinato di un arco θ , l'integrale va moltiplicato per $\cos \theta$, cfr. Leonardi R. (1952) voce "Volume".

tra i due piani $z=a$, $z=b$. Sussiste allora, per la (2), l'implicazione:

$$A(z) = B(z) , \forall z \in [a,b] \Rightarrow V(S) = V(S')$$

che prova il II Principio di Cavalieri.

Per concludere dobbiamo a Torricelli un'estensione della Teoria del Cavalieri mediante l'uso di indivisibili curvi, che potrebbe essere detto III Principio di Cavalieri o Principio di Torricelli.

Alla base vi è il ragionamento seguente. Supponiamo di voler confrontare due figure piane segnando la prima con un sistema di curve, la seconda con un sistema di rette parallele, se ogni indivisibile curvo della prima è pari al corrispondente indivisibile rettilineo, allora le due figure hanno la stessa area. Per lo spazio vale un ragionamento analogo. Esempi e applicazioni di tale III principio sono interessanti e riportate in Carruccio.³ Profili e immagini dei matematici citati sono reperibili nel nostro sito.⁴

³ Esempi e applicazioni sono reperibili in (Carruccio, 1958, pp.186-190).

⁴ <https://www.afsu.it/lista-dei-periodi/>

Bibliografia

Bononcini V. (1965). *Istituzioni di Matematiche*. Bologna: Patron.

Carruccio E. (1958). *Matematica e Logica*. Torino: Gheroni.

de Finetti Bruno (1957). *Matematica logico intuitiva*. Roma: Ed.Cremonese.

Enriques Federigo, Amaldi Ugo (1945). *Elementi di Geometria*. Bologna: Zanichelli.

Fadini A. (1977). *Geometria razionale, vol. II*, Milano: Ed. Mursia.

Leonardi R. (1952). *Dizionario illustrato delle Scienze pure ed applicate*. Vol I-II. Milano: Hoepli

Nicotra Luca (2022). Leggendo Galileo: dalla scodella di Luca Valerio agli indivisibili di Bonaventura Cavalieri e all'Additive Manufacturing, *Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (1) marzo 2022*, pp. 7-38.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) entrò nel 1613 nell'ordine dei Gesuati (da non confondersi con quello dei Gesuiti, che annoverò altri grandi matematici del 500-600). Studiò matematica a Pisa sotto Benedetto Castelli (1578-1643). Galileo Galilei ne appoggiò la carriera stimandolo uno dei maggiori matematici del suo tempo. Fu l'inventore dell'[assonometria cavaliera](#) e dell'omonimo [principio](#) e principalmente del [metodo degli indivisibili](#). La sua prima opera fu *Lo specchio ustorio*, ovvero, *Trattato delle settoni coniche*, con varie applicazioni all'acustica, alla costruzione degli specchi ustori e al moto dei gravi ove riporta la scoperta della forma parabolica della traiettoria di un grave, appresa da Galileo Galilei, senza però citare il Maestro, che pertanto ne fu molto irritato.

“Come si fa il problema di geometria” di Alessandra De Falco

Recensione

Luca Paladino*

*ITIS Galileo Ferraris Napoli

luca.paladino@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n1.074



Quando mi è capitato per le mani questo libro, ho pensato che fosse un interessante manuale per studenti volenterosi e per docenti che volessero mettersi in gioco. Dopo un'attenta lettura, mi sono reso conto che fra queste pagine c'è una densità di contenuto molto più alta rispetto a quanto appaia dal numero di pagine. L'ho letto prima con la curiosità del docente e poi con l'attenzione di un padre alla continua ricerca di metodi per migliorare la propria relazione genitoriale. Alla fine, le due cose si sono fuse insieme.

Il punto cardine su cui si impernia tutto il metodo così brillantemente esposto dall'autrice è la comprensione del testo. Si parte dal prendere coscienza che tutte le informazioni richieste dalla soluzione del problema sono codificate linguisticamente e che non c'è altro modo, per accedere a essa, che rivelare il contenuto semantico del testo. Allora lo studente deve fare ricorso alla sua cassetta degli attrezzi personale, ricorrendo all'uso dell'analisi logica come grimaldello per scardinare la cassaforte che racchiude il senso nascosto e accedere finalmente alla comprensione.

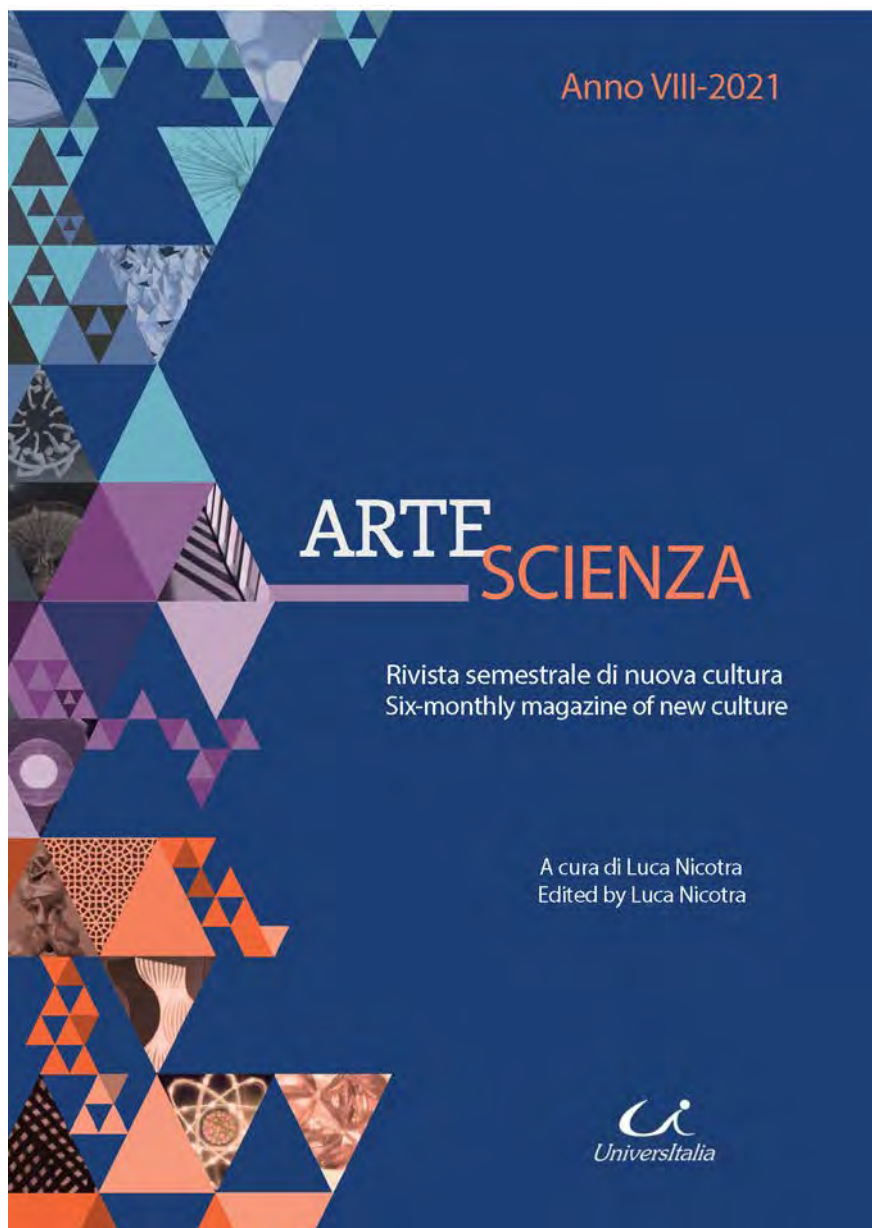
In questo lavoro si mescolano efficacemente concetti di geometria e di lingua italiana, dando vita a un metodo brillantemente interdisciplinare che ha il non comune pregio di rivelarsi utile anche nella più generale quotidianità.

Ma non è un testo di geometria, o di matematica, è un testo per capire e risolvere i problemi e può essere utilizzato in qualsiasi altra contesto dove ci siano – appunto – dei problemi da risolvere, dalla Fisica all'Informatica, o all'Elettronica, dalla Matematica alla Logica, dalla scuola all'università e infine alla vita di tutti i giorni.

L'autrice crea una mappa metodologica del problem solving, seguendo una traiettoria deduttiva che prende avvio dall'argomento generico esposto fino a smontare il testo ed estrarne i mattoncini di cui esso è composto. Il lettore è guidato passo dopo passo, attraverso l'analisi (prima) e la sintesi (poi), fino ad acquisire non la soluzione cercata ma la padronanza del metodo, che viene formalizzato in modo chiaro attraverso una schematizzazione efficace, corredata da numerosi esempi suddivisi per classi successive.

Sebbene scritto con linguaggio fresco e giovanile, si tratta di un libro che non può essere letto frettolosamente, poiché richiede attenzione e riflessione, e il rischio di un approccio sbagliato è quello di rimanere confusi.

La qualità del pensiero passa dall'arricchimento del lessico e delle costruzioni logiche e spetta a noi, docenti (e genitori), far dischiudere e infine proteggere la ricchezza mentale delle nuove generazioni con i giusti metodi di apprendimento e questo libro si colloca proprio in questa direzione vincente.



Profili biografici degli autori

Veronica Bitonti - veronica.bitonti03@gmail.com

studia Matematica presso l'Università di Cambridge. Negli anni del liceo ha seguito vari corsi di Matematica presso prestigiose università italiane e straniere.

Onofrio Casoria - cassabato@inwind.it

Laureato in Ingegneria Civile presso l'Università di Napoli "Federico II", è docente a t. i. sulla cattedra di Fisica presso l'I.T.C.G. "Masullo Theti" di Nola (Na). Presso l'Università "Federico II" ha conseguito il Master di II livello in Ingegneria Sanitaria Ambientale e l'Abilitazione alla professione di Ingegnere. È stato Componente della Commissione Giudicatrice del concorso straordinario per il personale docente nella scuola secondaria di I e II grado - Classe di Concorso A020 Fisica - nel 2020 e Componente della Commissione Giudicatrice del concorso ordinario STEM per il personale nella scuola secondaria I e II grado - Classe di Concorso A020 Fisica - nel 2021. È stato Docente esperto, di Office e Autocad, nei corsi della terza area presso l'Istituto Luigi De Medici di Ottaviano (NA). Nel 2012 è stato Membro della Commissione Edilizia del Comune di Lauro (AV) e dal 2019 ad oggi è Docente a tempo indeterminato CTU presso il Tribunale di Nola. È Socio dell'Associazione Mathesis di Napoli "Aldo Morelli", nel cui ambito è stato Relatore al Convegno "Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?", tenutosi ad Agerola nel settembre 2021, lavoro pubblicato nel n. 3-4 del 2021 del «Periodico di Matematica».

Ferdinando Casolaro - ferdinando.casolaro@gmail.com

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni Novanta al 2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed al Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli. Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti". Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

Giuseppe Conti - giuseppe.conti@unifi.it

È Professore di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Architettura e di Matematica per il Design del Corso di Laurea in Disegno industriale dell'Università di Firenze. E' autore di numerose pubblicazioni scientifiche di Analisi Funzionale su riviste internazionali e di libri di testo per l'università e di testi di matematica per la scuola superiore e per l'università. Da tempo si interessa di applicazioni della matematica all'arte, alla musica, alla natura ed all'architettura. Su questi argomenti ha scritto diversi libri ed articoli su riviste specializzate; inoltre ha tenuto numerose conferenze presso università italiane e straniere ed associazioni

culturali. Nel 2002 ha vinto il premio internazionale Pirelliaward (Premio Pirelli) per la divulgazione scientifica tramite internet.

Giovanna Della Vecchia - giovanna.dellavecchia@unina.it

È stata docente di Matematica presso l'IIS "G. Minzoni" di Giugliano in Campania dal 1985 al 2020. Attualmente è docente a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli. Durante la sua carriera di docente della scuola secondaria di secondo grado ha sempre mostrato un particolare interesse per la ricerca didattica e ha ricoperto negli anni il ruolo di funzione strumentale sia nell'area "servizi e supporto agli studenti" che nell'area "formazione docenti". Presso l'istituto Minzoni ha svolto svariati ruoli e ha fatto parte dello staff dirigenziale impegnato nell'attività di progettazione, supporto organizzativo e didattico all'Istituzione scolastica. Ha svolto per diversi anni attività di formazione nell'ambito della didattica e della valutazione, nonché nei corsi di specializzazione per le attività di sostegno agli alunni in situazione di handicap per la provincia di Caserta (area logico - matematica). Ha preso parte a numerosi convegni/seminari in qualità di relatore ed è autore di numerose pubblicazioni inerenti alla Matematica e ai suoi possibili ambiti di applicazione.

Cesare Labianca - cesarelabianca@gmail.com

Laureato in Matematica presso l'Università degli Studi di Perugia, ha lavorato per due anni a Roma presso la SOGEI (Società di Information Technology, controllata dal Ministero dell'Economia e delle Finanze), per l'elaborazione dei dati dell'Anagrafe tributaria. Vincitore di concorso a cattedra in Matematica, è docente a tempo indeterminato dall'anno scolastico 1992-1993, nelle scuole secondarie di secondo grado. Dal 2000 insegna Matematica presso l'Istituto di Istruzione Superiore "Luigi di Savoia" di Chieti, nella sezione del Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate. Nel 2003 è

stato tutor nel Piano Nazionale di Formazione degli Insegnanti sulle Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione organizzato dal MIUR. Nel 2009 è stato tutor nel Progetto "M@t.abel: Apprendimenti di base con e-learning per la Matematica", organizzato dal MIUR e dall'USR dell'Abruzzo. È stato docente formatore in vari corsi di alfabetizzazione informatica per insegnanti e docente in corsi per la preparazione al concorso a cattedra in Matematica nella scuola media inferiore. Nell'anno accademico 2006-2007 è stato docente a contratto di Informatica Grafica nel Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura presso l'Università degli Studi di L'Aquila. Da tre anni è docente a contratto presso i corsi di laurea della Scuola delle Scienze Economiche Aziendali Giuridiche e Sociologiche (SEAGS) dell'Università degli Studi "G. d'Annunzio" di Chieti - Pescara.

Antonio Maturo (Pescara) – antomato75@gmail.com

Già Professore Ordinario di Metodi Matematici per l'Economia, presso l'Università G. d'Annunzio di Chieti-Pescara, è stato per circa 20 anni Delegato di Facoltà e di Dipartimento per i rapporti internazionali. È stato Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali. Chief Editor delle riviste «Ratio Mathematica» fino al 2017, «Science & Philosophy», «Ratio Sociologica», «Journal of Social Housing», «Periodico di Matematica». È condirettore del Bollettino dell'AFSU e del . Associate editor di varie riviste italiane e straniere. Autore di circa 170 pubblicazioni scientifiche e vari libri. I suoi interessi di ricerca riguardano i modelli decisionali in condizioni di incertezza, la probabilità soggettiva, la logica fuzzy, la didattica della matematica, le geometrie finite e le geometrie join. Ulteriori dettagli sull'attività di ricerca sono in vari siti internet. Ad esempio, il sito Research Gate.

Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di oltre 400 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.* (coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Luca Paladino - luca.paladino@gmail.com

Ingegnere Elettronico, laureato presso la facoltà di Ingegneria della Università degli Studi di Napoli "Federico II". Docente di ruolo nella scuola secondaria di secondo grado, titolare della cattedra nella classe di concorso A40, "Scienze e Tecnologie Elettriche ed Elettroniche". Già sviluppatore di software e database, ed esperto di tecnologie informatiche applicate alla didattica. Ha collaborato con l'Università di Teramo in qualità di tutor di piattaforma per il master "Comunicazione e Divulgazione Scientifica" finalizzato alla didattica presso la Facoltà di Scienze della Comunicazione dell'Università di Teramo, nonché membro effettivo della Commissione di esami per il polo in Campania. È autore di diverse pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali. È membro della *Associazione Mathesis Napoli Aldo Morelli*.

Raffaella Paoletti - raffaella.paoletti@unifi.it

Si è laureata in Matematica con votazione 110/110 e lode presso l'Università di Firenze discutendo una tesi di geometria algebrica. Successivamente ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica discutendo una tesi di geometria algebrica. Attualmente è Ricercatrice confermata presso l'Università di Firenze, dove è docente di Matematica per il Design del Corso di Laurea in Disegno Industriale. Inoltre è docente di Geometria per Ingegneria Meccanica/Gestionale dell'Università di Firenze.

Alessandra Rotunno - alessandra.rotunno@unina.it

Laureata in Matematica, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica presso il Liceo scientifico "Labriola" di Napoli e professore a contratto sul Corso di Geometria al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Al Dipartimento di matematica dello stesso ateneo, è stata docente alla SSIS del Corso di Storia della Matematica nell'anno accademico 2007-2008 e dal 1994 al 2005 ha fatto parte del Nucleo di Ricerca

Didattica presieduto dal Prof Aldo Morelli. Dall'anno 2003-2004 al 2018-2019 è stato cultore e commissario d'esame sui corsi di Metodi Matematici per Economia e Finanza al Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio tenuto dal prof. Ferdinando Casolaro. Relatrice a vari convegni in didattica della matematica, è autrice di dodici pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali principalmente inerenti al settore Geometria ed ai suoi possibili ambiti di applicazione.

Umberto Salzano - umbertosalzano@gmail.com

Laureato in Matematica presso l'Università di Napoli "Federico II" è docente a tempo indeterminato, sulla cattedra di Matematica e Fisica presso l'I.I.S. Striano-Terzigno. Ha conseguito l'abilitazione all'insegnamento alla SISS presso l'Università di Ferrara. È componente del Consiglio direttivo dell'Associazione Mathesis di Napoli "Aldo Morelli", di cui è socio da oltre un decennio. I suoi interessi sono rivolti principalmente alla didattica della matematica.

Luigi Tomasi - luigi.tomasi@unife.it

Laureato in Matematica. Ha superato i concorsi ordinari a cattedre ed è abilitato per l'insegnamento (nella scuola secondaria di I e II grado) di Matematica e Fisica, Matematica, Scienze matematiche applicate e Matematica e Scienze. Ha insegnato Matematica e Fisica nei Licei scientifici di Adria e di Rovigo, nei quali ha anche svolto svariati incarichi di supporto all'organizzazione scolastica. Dall'anno accademico 2000/2001 al 2008/2009: è stato supervisore di tirocinio nella S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università di Ferrara. Attualmente è professore a contratto presso l'Università di Ferrara e presso l'Università di Padova nel corso di laurea in matematica. Si è sempre interessato ai problemi della scuola, della

didattica della matematica e all'uso delle tecnologie nel suo insegnamento. Su questi temi ha scritto diversi articoli, contributi a libri e tenuto molti corsi di formazione e aggiornamento per docenti oltre che comunicazioni/relazioni a convegni, seminari e congressi. Ha fatto parte della Commissione nominata dall'UMI che ha elaborato la proposta di curriculum contenuta in Matematica 2003 e Matematica 2004, "La matematica per il cittadino". Fa parte del Consiglio di Presidenza del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" e della Redazione di "Progetto Alice, rivista di matematica e didattica". Collabora con l'INVALSI, come esperto per le prove di Matematica per la Scuola secondaria di II grado.

Alberto Trotta - albertotrotta@virgilio.it

È docente di ruolo nella Scuola Secondaria di secondo grado in provincia di Salerno. Ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica, presieduto dal prof. Stefano Marchiafava, al Dipartimento di Matematica dell'Università <Sapienza> di Roma. E' stato il fondatore e Presidente storico della sezione Mathesis di Anzio-Nettuno nel periodo 2002-2014 ed è attualmente socio della sezione Mathesis di Napoli. È autore di 20 pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali con particolare riferimento alle questioni di Fisica moderna.