Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (2) giugno 2022, pp. 7-22

MATEMATICA

Una elementare proprietà di rette tra loro perpendicolari e alcune conseguenze

Paolo Manca *

*Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa,
paolo.manca.spas@alice.it

DOI: 10.53159/PdM(IV).v4n2.075

Sunto*:* *Non ho trovato una sola dimostrazione geometrica corretta del cosiddetto teorema di Napoleone salvo quella che discende, come caso particolare, da un teorema più generale di Bonferroni e che Bonferroni ha dimostrato sfruttando un'idea veramente geniale, ma con la necessità di considerare numerosi casi e sottocasi. La presente nota per dimostrare che entrambi i teoremi, e altri che riguardano i quadrilateri e i quadrilateri derivati, si possono dimostrare a partire da una proprietà immediata che riguarda rette tra loro perpendicolari.*

Parole Chiave: *Rette perpendicolari; quadrilateri; quadrilateri derivati; Teorema di Napoleone.*

Abstract: *I have not found a single correct geometric proof of the so-called Napoleon's theorem, except the one that derives, as a particular case, from a more general Bonferroni's theorem, which Bonferroni demonstrated using a truly brilliant idea, but with the need to consider numerous cases and sub-cases. The present note to prove that both theorems, and others concerning quadrilaterals and derived quadrilaterals, can be proved starting from an immediate property concerning lines perpendicular to each other.*

Keywords: *Perpendicular lines; quadrilaterals; derivative quadrilaterals; Napoleon's Theorem.*

1 – Un risultato banale

1.1 – Lemma 1

Siano r ed s due rette non parallele che si incontrano in O e siano α e $\pi - \alpha$ le misure degli angoli da esse individuati, sia r' perpendicolare ad r ed s' perpendicolare ad s : allora le misure degli angoli individuati da r' ed s' sono egualmente α e $\pi - \alpha$.

La dimostrazione è elementare.[1]

1.2 – Teorema 1

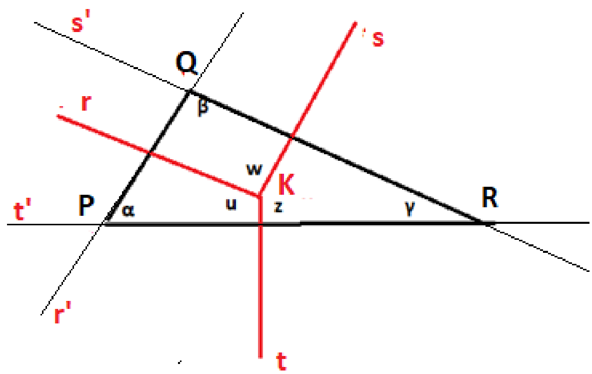
Sia K un punto del piano e siano r,s,t tre semirette uscenti da K , (che indico in senso orario) , e siano u,w,z le misure degli angoli che esse formano due a due, con la condizione che risultino ognuna minore di π.

Siano r' perpendicolare ad r , s' perpendicolare ad s , t' perpendicolare ad t , sia P l'intersezione di r' e t', sia Q l'intersezione di r' e s', sia R l'intersezione di s' e t' : allora, escluso il caso P = Q = R, il triangolo PQR ha come angoli (interni) : $\alpha = \pi - u$, $\beta = \pi - w$, $\gamma = \pi - z$.

Viceversa sia PQR un triangolo di angoli (interni) α , β ,γ e sia K un punto del piano.

1 Dalla configurazione delle rette s, r si passa alla configurazione delle rette s', r', che si incontrano in O′, con una traslazione che trasforma O in O′ e una rotazione di $\pi/2$ intorno al centro O′.

Siano *r,s,t* tre semirette uscenti da K e ortogonali rispettivamente ai lati PQ, QR ,RP di PQR : allora le misure degli angoli formati ordinatamente a due a due da tali semirette valgono $u = \pi - \alpha$, $w = \pi - \beta$, $z = \pi - \gamma$.



<u>Dimostrazione</u>:
Intanto: $u + w + z = 2\pi$,
dunque : $\alpha + \beta + \gamma = \pi - u + \pi - w + \pi - z = 3\pi - (u + w + z) = \pi$.

Il resto segue dal lemma.1.

N.B: nella figura la collocazione di K all'interno del triangolo PQR è ininfluente ed è stata scelta solo per rendere più espressiva la figura stessa.

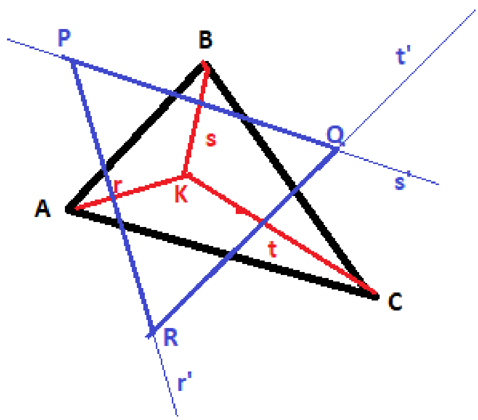
Sono diversi i corollari che discendono da questo elementare teorema: ne elenco solo alcuni tralasciando in particolare l'utilizzo nella caratterizzazione del punto di Fermat-Torricelli.

<u>Corollario 1</u>

Con le notazioni adottate se : u = w = z = 2π/3 allora il triangolo PQR è equilatero e viceversa.

<u>Corollario 2</u>

Sia ABC un triangolo, sia K un punto interno ad ABC , indichiamo in senso orario con *r, s, t* le semirette uscenti da K e passanti per A, B, C e che formano angoli la cui misura sia u, w, z , siano *r′, s′, t′* rette perpendicolari rispettivamente a *r,s,t* e siano P,Q,R le loro intersezioni due a due : allora α = π – u , β = π – w , γ = π – z , sono gli angoli del triangolo PQR.



<u>Corollario 3</u>

Se ABC è equilatero allora le semirette perpendicolari ai lati condotte da un punto interno K qualsiasi, siano *r,s,t* , definiscono due a due angoli di 2π/3 (120°) e dunque K vede i tre lati sotto l’angolo di 2π/3.

Corollario 4

Sia ABC un triangolo , costruiamo esternamente[2] ai tre lati altrettanti triangoli equilateri (e-tri) e indichiamone con P,Q,R i centri[3]. Allora il triangolo PQR, detto anche triangolo derivato di ABC, è equilatero (Teorema cosiddetto di Napoleone, che annovera tante dimostrazioni scorrette).

Dimostrazione:

Premetto e ricordo che se ***C1*** e ***C2*** sono due circonferenze di centro P e Q e che si incontrano in due punti A e K allora il segmento PQ appartiene all'asse di AK, mentre se ***C1*** e ***C2*** hanno in comune un solo punto A, allora A appartiene al segmento PQ e la retta tangente comune passante per A è perpendicolare a PQ.

Premetto e ricordo anche che se ***C*** è una circonferenza , AB una sua corda il cui angolo al centro vale : 2θ , allora AB divide ***C*** in due archi , i punti di ***C*** del primo arco vedono AB sotto l'angolo : θ , i punti del secondo arco vedono AB sotto l'angolo: $\pi-\theta$.

La dimostrazione del teorema discende dal fatto che le circonferenze ***C1, C2, C3*** circoscritte agli e-tri costruiti sui lati di ABC si incontrano sempre in un punto K che : risulta interno ad ABC se gli angoli di ABC sono tutti minori di $2\pi/3$, coincide con il vertice B se tale angolo vale $2\pi/3$, risulta esterno ad ABC se esiste un angolo di misura maggiore a $2\pi/3$.

Vediamo i tre casi.

---

2 O anche internamente.

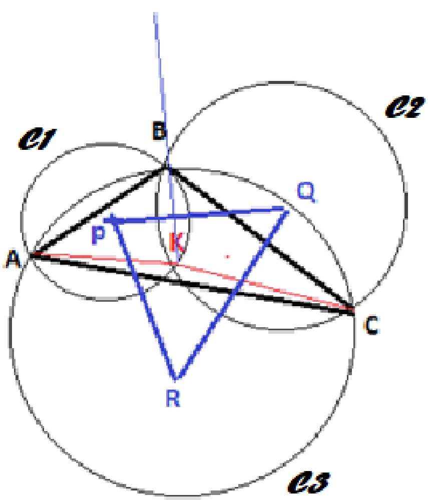
3 Come noto in un triangolo equilatero coincidono baricentro, circocentro, ortocentro.

Sia ABC un triangolo con angoli interni inferiori a $2\pi/3$. Su ciascuno dei lati di ABC , esternamente ad ABC , costruiamo altrettanti e-tri e consideriamo le circonferenze rispettivamente ad essi circoscritte ***C1, C2, C3*** e indichiamone con P,Q, R i centri.

Le circonferenze ***C1*** e ***C2*** si incontrano oltre che in B in un punto K interno ad ABC. Per la proprietà di una circonferenza circoscritta ad un e-tri il punto K vede i tre lati di ABC ciascuno sotto l'angolo di $2\pi/3$ e dunque appartiene anche a ***C3.***

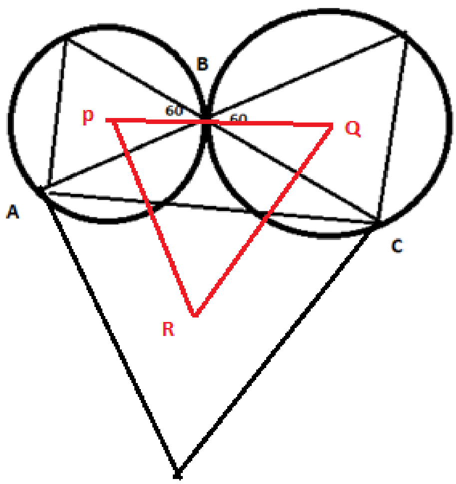
Dunque ***C1*** e ***C2*** si incontrano in B e in K , ***C1*** e ***C3*** si incontrano in A e in K , ***C2*** e ***C3*** si incontrano in C e in K ; inoltre PQ risulta perpendicolare a KB, QR risulta perpendicolare a KC , RP risulta perpendicolare a KA.

Ne segue , per il cor.1, che il triangolo PQR è equilatero.



<u>Sia ABC un triangolo con angolo in B eguale a 2π/3</u> : allora ***C1* e *C2*** risultano tangenti in B e la retta tangente in B risulta perpendicolare a PQ.

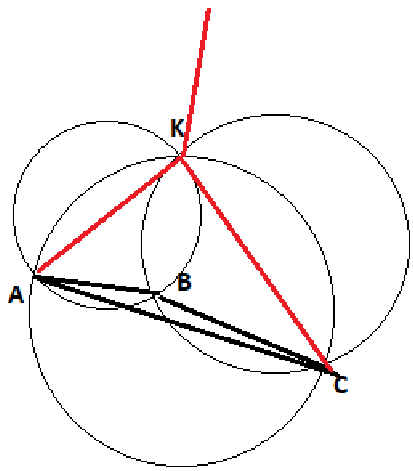
Consideriamo allora le semirette *r*,*s*,*t* aventi origine in B e con *r* passante per A , *s* tangente a ***C1* e *C2*** in B ed esterna al triangolo ABC, *t* passante per C : tali tre semirette formano due a due angoli di 2π/3 , inoltre PR è perpendicolare ad AB e QR è perpendicolare a BC. Ne segue che PQR è equilatero.



<u>Sia ABC un triangolo con angolo in B maggiore di 2π/3</u> : allora ***C1*, *C2*** si incontrano oltre che in B anche in un secondo punto K esterno ad ABC ma sempre con BK perpendicolare a PQ. Poiché K appartiene sia a ***C1*** che a ***C2*** , e dunque vede AB e BC sotto π/3, necessariamente vede AC sotto 2π/3 e quindi passa anche per ***C3*** .

Poiché ***C1*** e ***C3*** si incontrano in A e K allora PR risulta perpendicolare a AK ; poiché ***C2*** e ***C3*** si incontrano in C e K allora QR risulta perpendicolare a CK.

Consideriamo allora le semirette *r,s,t* di origine K con *r* passante per A , *s* semiretta della retta passante per KB e non contenente B, *t* passante per C : tali tre semirette formano, due a due, angoli di 2π/3. Ne segue che PQR è equilatero.



Corollario 5

Con le notazioni precedenti assegnato il triangolo ABC costruiamo esternamente ad ABC una circonferenza ***C1*** di centro P e passante per AB e in cui l'angolo alla circonferenza di AB vale α , una circonferenza ***C2*** di centro Q e passante per BC e in cui l'angolo alla circonferenza di BC vale β , una circonferenza ***C3*** di centro R e passante per CA e in cui l'angolo alla circonferenza di CA vale γ, col vincolo che risulti: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, allora gli angoli del triangolo PQR valgono α,β,γ (teorema di Bonferroni).[4]

Dimostrazione:

La dimostrazione procede analogamente a quella del precedente corollario 4.

Sia ABC un triangolo con gli angoli (interni) inferiori a $2\pi/3$, allora le circonferenze ***C1*** e ***C2*** **,** (di cui all'enunciato), oltre che nel punto B si incontrano anche in un punto K interno ad ABC . Il punto K vede AB sotto l'angolo: $\pi-\alpha$ e BC sotto l'angolo: $\pi-\beta$ e dunque CA sotto l'angolo: $2\pi - (\pi-\alpha) - (\pi - \beta) = \alpha+\beta = \pi-\gamma$, e dunque K appartiene anche a ***C3***.

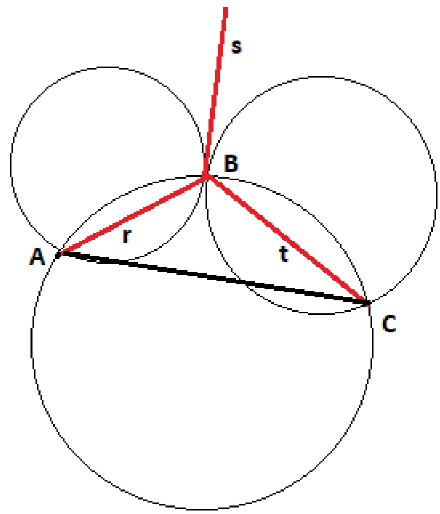
Dunque ***C1*** e ***C3*** si incontrano in K e in A, ***C1*** e ***C2*** si incontrano in K e in B , ***C2*** e ***C3*** si incontrano in K e in C , inoltre PQ risulta perpendicolare a KB, QR risulta perpendicolare a KC , RP risulta perpendicolare a KA.

Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α,β,γ.

Sia ABC un triangolo con angolo in B uguale a $2\pi/3$, allora ***C1 e C2*** risultano tangenti in B e la retta tangente in B è perpendicolare ad PQ. Consideriamo allora che le semirette *r,s,t* di origine B e con *r* passante per A , *s* tangente in B a ***C1 e C2*** ed esterna ad ABC , *t* passante per C : tali semirette formano due a due angoli pari a : $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$, inoltre PR è perpendicolare ad AB e QR è perpendicolare a BC. Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α,β,γ.

---

[4] Carlo Bonferroni: *Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone.* «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Serie 3, Vol. 5 (1950), n.1, p. 85–89.

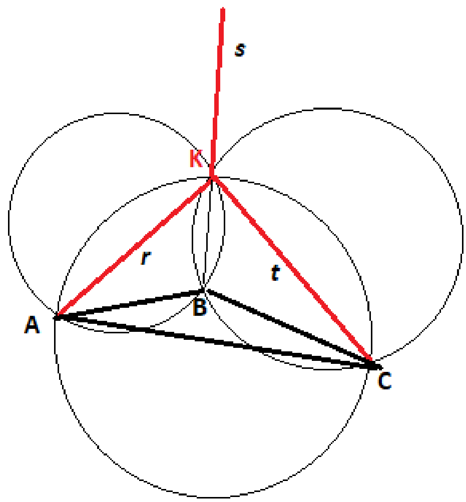


Sia ABC un triangolo con angolo in B maggiore di $2\pi/3$, allora ***C1*, *C2*** si incontrano oltre che in B anche in un secondo punto K , esterno ad ABC ma sempre con BK perpendicolare a PQ.

Poiché K appartiene sia a ***C1*** che a ***C2*** vede AB sotto l'angolo α , vede BC sotto l'angolo β e dunque vede AC sotto l'angolo : $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ e dunque K passa anche per ***C3*** .

Poiché ***C1*** e ***C3*** si incontrano in A e K allora PR è perpendicolare ad AK ; poiché ***C2*** e ***C3*** si incontrano in B e K allora QR è perpendicolare ad BK.

Consideriamo allora che le semirette *r,s,t* di origine K con *r* passante per A , *s* semiretta della retta passante per KB e non contenente B, *t* passante per C : tali tre semirette formano, due a due, angoli pari a : $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$. Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α,β,γ.



2 – Quadrangoli derivati

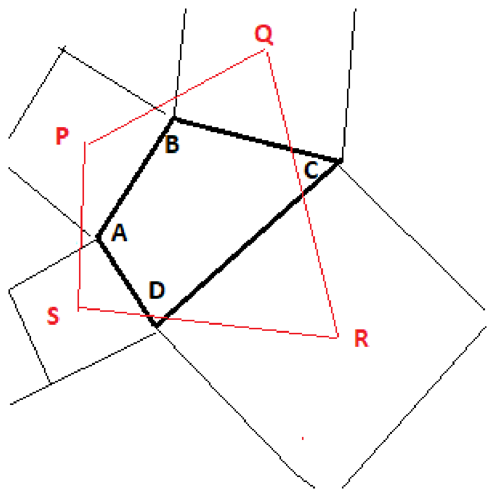
Il procedimento e le conseguenze del teorema 1 relativi a un triangolo e al suo triangolo derivato si ripropongono in particolare anche per il quadrangolo (convesso).

Mi limito a dimostrare due soli teoremi.

Indichiamo con ABCD un quadrangolo convesso di vertici A,B,C,D; costruiamo esternamente sui lati di ABCD altrettanti quadrati ***P***, ***Q*** , ***R*** , ***S*** di centri P,Q,R,S .

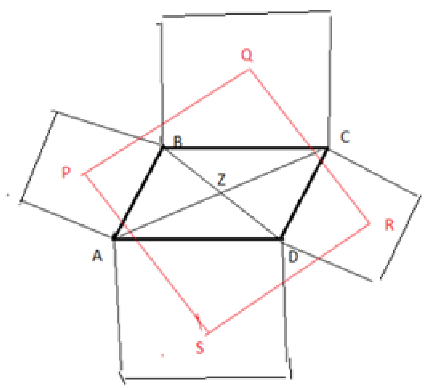
Il quadrangolo PQRS di vertici P,Q,R, S dicesi quadrilatero derivato di ABCD:

ci domandiamo quali caratteristiche abbia e in particolare se sia un quadrato.



2.1 – Teorema A1

Sia ABCD un parallelogramma allora il suo quadrilatero derivato è un quadrato.[5]



[5] Vedi anche : Adriano Barlotti *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo*. «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Serie 3, Vol. 7 (1952), n.2, p. 182–185. Zanichelli

Dimostrazione:

Sia ABCD un parallelogramma e sia Z il punto di incontro delle diagonali; consideriamo il triangolo ABC e i due quadrati costruiti esternamente ai lati : il quadrato $\mathcal{P}$ di centro P e costruito sul lato AB**,** il quadrato $\mathcal{Q}$ di centro Q e costruito sul lato BC. Indichiamo con $\mathcal{C}_P$**,** $\mathcal{C}_Q$ le circonferenze circoscritte a $\mathcal{P}$ **,** $\mathcal{Q}$.

Per costruzione l'angolo alla circonferenza di AB rispetto a $\mathcal{C}_P$ vale π/4, l'angolo alla circonferenza di BC rispetto a $\mathcal{C}_Q$ vale π/4.

Sia $\mathcal{C}_Z$ una circonferenza di centro Z avente AC per diametro e i cui punti dunque vedono AC sotto π/2 .

In virtù del cor. 5 gli angoli del tri PQZ valgono: π/4 , π/4 , π/2 e dunque il triangolo PQZ è rettangolo ed isoscele.

Le stesse conclusioni si ottengono considerando il triangolo ABD che è congruente a ABC per cui anche gli angoli del triangolo RZS valgono π/4 , π/4 , π/2 e dunque RZS è rettangolo ed isoscele .

Allo stesso modo si ragiona con riferimento ai triangoli ABD e BCD a loro volta tra loro congruenti.

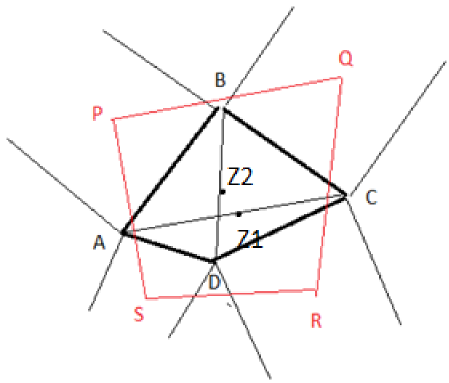
In conclusione, indicando con $\underline{AB}$ la lunghezza di un generico segmento AB, abbiamo :

$\underline{PQ} = \underline{QR} = \underline{RS} = \underline{SP}$, e ancora, indicando con W^o l'angolo interno relativo al generico vertice W, abbiamo in PQRS : $P^\circ = Q^\circ = R^\circ = S^\circ = \pi/2$.

Dunque PQRS è un quadrato.

2.2 – Teorema A2.[6]

Sia ABCD un quadrangolo convesso allora il suo quadrangolo derivato ha le diagonali congruenti e perpendicolari.



Dimostrazione:

Se ABCD è un parallelogrammo allora il teorema vale in virtù del teorema A1.

Sia dunque ABCD un quadrangolo non parallelogramma, poiché in tal caso le diagonali AC e BD non si incontrano nel punto medio, indichiamo con Z_1 il punto medio di AC e con Z_2 il punto medio di BD.

Procediamo come al teorema A1 e facciamo riferimento ad uno di due punti medi Z_1, Z_2, ad esempio Z_1.

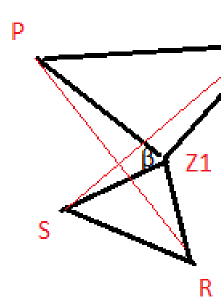
Con riferimento dunque alla diagonale AC e al triangolo ABC e ai tre quadrati costruiti esternamente ai lati AB, BC,

[6] Anche di questo teorema non ho trovato dimostrazioni puramente geometriche corrette

CA : C_P , C_Q , C_{Z1} , possiamo concludere che i triangoli PQZ_1 e RSZ_1 sono rettangoli e isosceli. [7]

Consideriamo allora i triangoli PZ_1R e SZ_1Q : detto β l'angolo $PZ_1°S$ osserviamo che gli angoli $PZ_1°R$ e $SZ_1°Q$ valgono entrambi : $\beta + \pi/2$, dunque tali triangoli sono congruenti perche hanno due lati e l'angolo compreso congruenti. Pertanto risulta : $\underline{PR} = \underline{QS}$.

Ancora ruotando di π/2 in senso orario e intorno al vertice Z_1 il triangolo RPZ_1 questi si sovrappone al triangolo SQZ_1 e dunque PR e QS sono perpendicolari .



[7] Con riferimento alla diagonale BD potremmo procedere egualmente considerando il triangolo ADC e concludendo che i tri SZ_2R e PZ_2S sono rettangoli e isosceli.


ARTE SCIENZA
magazine
Alberto Macchi, Angela Ales Bello, Anna Dell'Agata, Antonio Castellani, Arcangelo Carrera, Claudio Marrucci, Fulvio Guertieri, Geogi Gospodinov, Gianluca Mei, Giovanni Calori, Isabella de Paz, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Pierluigi Assogna, Stefano Tamburello, Stefano Torossi, Ugo Locatelli
LA FOTO DEL SECOLO BUCHI NERI E BUCHI BIANCHI
METAFORE DI QUESTO MONDO
FANTASME DOVE E COME INCONTRARLE
FACEPTION L'APP CHE TI LEGGE DENTRO
COS'È LA GUERRA ELETTRONICA
VISTA PROGETTO DI PUBLIC ART
8 MINUTI 1 9 SECONDI POI TUTTO FU LUNA
ANCHE DIO RIDE E SORRIDE
Anno II - N. 3 giugno 2022 - Supplemento di ArteScienza
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"
Qr code per accedere a "Un solo canto per tre credo"