Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (2) giugno 2022, pp. 37-54

MATEMATICA

Un ulteriore sguardo ad alcuni limiti notevoli

Cesare Palmisani*

*Matematico; docente in servizio presso Liceo Classico "Pietro Giannone" di Caserta; professore a contratto presso Dipartimento di Scienze Politiche Università "Federico II" di Napoli per l'a.a. 2021-22;
cesarepalmisani59@gmail.com; cpalmisani@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.077

Sunto: *E' ben noto in letteratura (Wiener, 1985), (Courant-Robbins, 1950), (Giusti, 1983) che è possibile ricorrere ad un'unica relazione, la disuguaglianza di Bernoulli, per dimostrare la stretta crescenza della successione* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in N)$ *e la convergenza delle successioni* $\sqrt[n]{p}$ $(p > 0; n \in N)$; $\sqrt[n]{n}$ $(n \in N)$. *Il presente lavoro si propone di verificare che è possibile ottenere gli stessi risultati attraverso le disuguaglianze HM-GM-AM-RMQ.*

Parole Chiave*: media geometrica, media aritmetica.*

Abstract: *To see* ***if*** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in N)$ ***is*** *strictly increasing and if the sequences* $\sqrt[n]{p}$ $(p > 0; n \in N)$; $\sqrt[n]{n}$ $(n \in N)$ *are convergent we can use only Bernoulli's inequality (Wiener, 1985), (Courant-Robbins, 1950), (Giusti, 1983). In the present paper we give the previuous results with HM-GM-AM-RMQ inequalities.*

Keywords: *geometric mean, arithmetic mean.*

1 - Introduzione

Richiamiamo alcune definizioni e proposizioni utili per conseguire i risultati che ci siamo prefissati.

Per ogni insieme A di n numeri reali positivi $(n \in N)$:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

tra la media armonica (HM)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

la media geometrica (GM)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

la media aritmetica (AM)

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

e la media quadratica (RMS)

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

sussistono (Mitrinovic, 1964) le seguenti disuguaglianze (HM-GM - AM - RMS):

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
$$\leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

Si sa altresì (Maligranda, 2012) che la disuguaglianza AM-GM

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

è equivalente alla disuguaglianza di Bernoulli (B)

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

essendo x un numero reale maggiore di – 1 ed n un naturale positivo.

Ricordiamo (Giusti, 1983) che vale la seguente formula (Formula del Binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove a e b sono due numeri reali prefissati; n è un numero naturale prefissato; k un numero naturale compreso tra 0 ed n; $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale di n su k.

Nel corso delle dimostrazioni richiameremo spesso l'enunciato del seguente teorema di confronto per le successioni numeriche (Marcellini, Sbordone, 2007):

Teorema dei (due) carabinieri

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che $\forall n \in N$

$$a_n \le b_n \le c_n.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, allora anche la successione c_n è convergente e $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$.

Infine ci proponiamo di determinare attraverso le precedenti disuguaglianze i seguenti risultati:

la stretta crescenza della successione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e i limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \ (p > 0)$$

che nel seguito indicheremo rispettivamente con S, L1, L2.

2 – I risultati principali

Riportiamo di seguito alcune dimostrazioni già note in letteratura ed altre nuove dedotte dall'autore s.

2.1 – La successione S

Solitamente (Hardy, 1921; Courant-Robbins, 1950; Fiorenza-Greco, 1992) per dimostrare che la successione $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e che vale $\forall n \in N$ la disuguaglianza

$$2 < x_n < 3$$

si ricorre alla formula del Binomio di Newton. Qualche autore (Giusti, 1983), per abbreviare la dimostrazione, invece adopera sia il Teorema del Binomio di Newton che la disuguaglianza di Bernoulli (B). E' invece noto in letteratura (Wiener, 1985) che basterebbe anche limitarsi alla sola disuguaglianza B per conseguire il risultato.

Infatti, per ogni n > 1, dalla relazione

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$$

adoperando la disuguaglianza B per $x = -\frac{1}{n^2}$ si ha che

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) > \left(1-\frac{n}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = 1$$

da cui $x_n > x_{n-1}$. In modo analogo si dimostra la stretta decrescenza della successione $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

<u>Osservazione 1</u>

Anche in (Fiorenza-Greco, 1992), che segue (Hardy, 1921), viene dimostrata la stretta decrescenza della y_n con la sola disuguaglianza di Bernoulli (che chiamano «conseguenza della formula di Tartaglia Newton»), ma gli autori non si accorgono che avrebbero potuto fare altrettanto con x_n.

Anche la limitatezza superiore di x_n si può conseguire indipendentemente dalla formula del binomio di Newton osservando che $\forall n \in N$,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e che $(\forall n \in N)$

$$x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1$$

e che in particolare $x_n < y_1 = 4\ (\forall n \in N)$, oppure

$$x_n < y_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$$

già migliore (e ottenuta con meno fatica) del 2,75 del (Fiorenza – Greco, 1992). La limitatezza inferiore di x_n è invece assicurata dalla relazione

$$2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

Deduciamo ora la stretta monotonia della successione x_n in modo indipendente dalla Formula del binomio di Newton e dalla Disuguaglianza di Bernoulli (B).

<u>1° Metodo</u> (mediante la disuguaglianza AM-GM)

Seguendo (Korovkin, 1975), nella disuguaglianza AM- GM poniamo $a_1 = a$ e $a_2 = \cdots = a_n = b$ (a e b positivi e distinti), si ottiene

Lemma 1

$$\sqrt[n]{ab^{n-1}} = \sqrt[n]{a\underbrace{bb\cdots b}_{n-1}} < \frac{a + \overbrace{b + b + \cdots + b}^{n-1}}{n} = \frac{a + (n-1)b}{n}$$

cioè

$$\sqrt[n]{ab^{n-1}} < \frac{a + (n-1)b}{n}$$

In particolare la disuguaglianza precedente è valida per a = 1 e per $b = 1 + \frac{1}{n-1}$. Pertanto

$$\sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \frac{1 + (n-1)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}{n}$$
$$= \frac{1 + n - 1 + 1}{n} = \frac{1+n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

da cui, elevando ambo i membri della disuguaglianza alla n-ma potenza, si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

ossia $x_{n-1} < x_n$ per ogni n > 1.

2° Metodo (mediante disuguaglianza GM-RMS, Palmisani)

Ponendo

$$a_1 = 1;\ a_2 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n-1}$$

si ha, usando la disuguaglianza GM ≤ RSM[1],

[1] $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$

$$\sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \sqrt{\frac{1^2+(n-1)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+(n-1)\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1+\frac{n^2}{n-1}}{n}} = \sqrt{\frac{n^2+n-1}{n(n-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{n(n-1)}+\frac{n-1}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}+\frac{1}{n}} < \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

Elevando alla n-ma potenza ambo i membri della disuguaglianza si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

da cui l'asserto.

Ragionando in maniera analoga si prova che è strettamente crescente anche la successione

$$(1+x/n)^n$$

dove x è un fissato numero reale diverso 0. Infatti, applicando la diseguaglianza GM-AM per

$$a_1 = 1;\ a_2 = \cdots = a_n = \frac{x}{n-1}$$

si ottiene

$$\sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}} < \frac{1+(n-1)\cdot\left(1+\frac{x}{n-1}\right)}{n}$$

$$= \frac{1 + n - 1 + x}{n} = \frac{n + x}{n} = 1 + \frac{x}{n}$$

cioè

$$\sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n - 1}\right)^{n-1}} < 1 + \frac{x}{n}$$

da cui, elevando ambo i membri ad n si ottiene

$$\left(1 + \frac{x}{n - 1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}$$

Analogamente si può procedere adoperando la disuguaglianza GM-RMS

2.2 – Limite L1

Al fine di rendersi maggiormente conto dell'andamento della successione $\sqrt[n]{n}$ conviene premettere la seguente

Osservazione 2

Estendiamo a tutto R la successione

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

considerando la funzione

$$y(x) = x^{1/x} = e^{(1/x)\cdot \ln x} = e^{\ln x/x}$$

definita in $]0; +\infty[$. La funzione $y(x)$ è positiva, continua e derivabile in tutto il dominio. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} e^{(1/x)\cdot \ln x} = 0^+; \ \lim_{x \to +\infty} e^{(1/x)\cdot \ln x} = 1^+$$

La funzione $y(x)$ ammette quindi y = 1 come asintoto orizzontale. Determiniamo $y'(x)$ $(\forall x > 0)$:

$$De^{\ln x/x} = e^{\ln x/x} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (\ln x)(1)}{x^2} \right) = e^{\ln x/x} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

Poiché

$$1 - \ln x < 0 \;\leftrightarrow \ln x > 1 \leftrightarrow x > e$$

allora

$$y'(x) < 0 \;(\forall x > e)$$

Pertanto $y(x)$ è strettamente crescente in $]0;e[$ e strettamente decrescente in $]e;+\infty[$; $y'(x) = 0$ per x = e. Inoltre $y(x)$ ammette $e^{1/e} \sim 1{,}44$ come massimo (assoluto) assunto in x = e. Per il Teorema di Bolzano il suo codominio è un intervallo ed è dato da $]0;e^{1/e}]$. Se restringiamo la funzione $y(x)$ in $[e;+\infty[$ il codominio della funzione è $]1^+;e^{1/e}]$. Per dedurre la stretta decrescenza della successione $\sqrt[n]{n}$ (Hardy, 1921), osserviamo che

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \;\leftrightarrow \left[(n+1)^{1/(n+1)}\right]^{n(n+1)} < \left(n^{1/n}\right)^{n(n+1)}$$
$$\leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} = n^n \cdot n$$

dividendo ambo i membri dell'ultima disuguaglianza per n^n si ottiene

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < n; \;\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n; \;\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$$

che è vera per ogni $n \geq 3$.

Risolviamo finalmente il limite L1.

<u>1° Metodo</u> (Sinnadura, 1961)

Generalizziamo il Lemma 1 nel modo seguente:

Lemma 2

Siano $k, r \in N$ non nulli tali che $1 \leq r \leq k$. Poniamo nella disuguaglianza GM-AM $a_1 = \cdots = a_r = a > 0$ e $a_{r+1} = \cdots = a_k = b > 0$, allora

$$\sqrt[k]{a^r \cdot b^{k-r}} < \frac{ra + (k-r)b}{k}$$

Dimostrazione

$$\sqrt[k]{a^r \cdot b^{k-r}} = \sqrt[k]{\underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{r} \cdot \underbrace{b \cdot \cdots \cdot b}_{k-r}} < \frac{\overbrace{a + \cdots + a}^{r} + \overbrace{b + \cdots + b}^{k-r}}{k}$$
$$= \frac{ra + (k-r)b}{k}$$

Osserviamo che $\forall n \in N$

$$n^{1/2n} = \left(n^{n/2}\right)^{1/n^2}$$

e che

$$n^{n/2} = \left(n^{1/2}\right)^n = \left(\sqrt{n}\right)^n = \underbrace{\sqrt{n} \cdot \cdots \cdot \sqrt{n}}_{n}$$

per il Lemma 2 applicato per $k = n^2; r = n^2 - n; a = 1; b = \sqrt{n}$ si ha

$$n^{1/2n} = \left(n^{n/2}\right)^{1/n^2} = \sqrt[n^2]{\underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n^2 - n} \cdot \underbrace{\sqrt{n} \cdot \cdots \cdot \sqrt{n}}_{n}}$$
$$< \frac{(n^2 - n) \cdot 1 + n\sqrt{n}}{n^2}$$

Decomponendo l'espressione più a destra si ottiene:

$$= \frac{n^2 - n}{n^2} + \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

cioè

$$n^{1/2n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avendo tenuto conto che $1-\frac{1}{n}<1\ (\forall n \in N)$ e che

$$\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}=\frac{n}{n\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri della disuguaglianza prima ottenuta si ricava l'espressione

$$\sqrt[n]{n}<\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=1+2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

Inoltre, essendo $n>\sqrt{n}\ (\forall n>1)$ si deduce che $\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ da cui $(\forall n>1)$

$$\sqrt[n]{n}<1+\frac{3}{\sqrt{n}}$$

Infine per il Teorema dei due carabinieri enunciato per le successioni numeriche, dalla relazione

$$1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{3}{\sqrt{n}}$$

segue la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{n}$.

<u>2° Metodo</u> (Scott, 2000)

Osservato che $(\forall n>1)\ \ n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$, poniamo, nella espressione della GM-AM,

$$a_1=a_2=\sqrt{n};\ a_3=\cdots=a_n=1$$

Si ha $(\forall n>1)$:

$$1<\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}_{2}\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot1}_{n-2}}<\frac{\overbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n}}^{2}+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2}}{n}$$

$$=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)\cdot1}{n}=$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}\ \ (\forall n>1)$$

3° Metodo (1984, Norman Shaumberger)

Osserviamo che dalla relazione $1 < \sqrt[n]{n}\ (\forall n > 1)$ si trae che $1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}}\ (\forall n > 1)$. Applicando la GM-AM per

$$a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1;\, a_n = \sqrt{n}$$

si ottiene che:

$$1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-1} \cdot \sqrt{n}} < \frac{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{n-1} + \sqrt{n}}{n}$$

$$= \frac{(n-1)\cdot 1 + \sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ossia

$$1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

da cui, elevando al quadrato ambo i membri, si ha

$$1 < \sqrt{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

4° Metodo (Palmisani, Mediante disuguaglianza GM-RMS *Root Mean Square*)

Mediante la disuguaglianza GM-RMS è possibile dimostrare che $\sqrt[n]{n} \to 1$. Infatti

$$1 < \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}_{2} \cdot \underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-2}}$$

$$< \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}{n}} = \sqrt{\frac{n + n + n - 2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{3n-2}{n}} = \sqrt{3 - \frac{2}{n}} < \sqrt{3} = 1{,}7$$

cioè

$$1 < \sqrt[n]{n} < \sqrt{3} = 1{,}7\ldots$$

Infine, considerata anche la stretta decrescenza della successione $\sqrt[n]{n}$ (n ≥ 3), per il Teorema dei due carabinieri si ottiene l'asserto.

2.3 – Limite L2

Nel dimostrare la convergenza della successione $z_n = \sqrt[n]{p}$ (p > 0) verso 1 mediante la disuguaglianza GM-AM, distingueremo due casi: 1° caso (p ≥ 2); 2° caso (0 < p < 1).
1° caso (p ≥ 2)

<u>1° Metodo</u>

Sia p ≥ 2. Per il Lemma 1, ponendo a = p e b = 1 si ha

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p \cdot \underbrace{1 \ldots \cdot 1}_{n-1}} < \frac{p + (n-1) \cdot 1}{n} = \frac{p + n - 1}{n}$$

Sia $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n{}^2$, dove $h_n > 0$. Allora

$$1 + h_n < \frac{p + n - 1}{n}$$

da cui

$$0 < h_n < \frac{p + n - 1}{n} - 1 = \frac{p - 1}{n}$$

Per il Teorema dei due carabinieri per le successioni,

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0$$

e quindi $\sqrt[n]{p} \to 1$.

<u>2° Metodo</u>

---

[2] La successione $\sqrt[n]{p}$, con p > 1, è strettamente decrescente e convergente ad 1 "dall'alto". Pertanto la posizione $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ è ben posta.

Possiamo procedere analogamente a quanto fatto per provare la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{n}$.

Applichiamo il Lemma 2 per

$k = n^2; r = n^2 - n; a = 1; b = \sqrt{p}$. Si ha:

Elevando ambo i membri al quadrato si conserva il verso della disuguaglianza e si ottiene:

$$p^{1/n} < \left(1 + \frac{\sqrt{p}}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{p}}{n} + \frac{p}{n^2} < 1 + \frac{3p}{n}$$

Per conseguire l'ultima disuguaglianza abbiamo osservato che, essendo $\sqrt{p} < p \ (\forall p > 1)$, si ha:

$$\frac{\sqrt{p}}{n^2} < \frac{p}{n^2} < \frac{p}{n}; \frac{\sqrt{p}}{n} < \frac{p}{n}$$

Considerata che vale la doppia disuguaglianza

$$1 < \sqrt[n]{p} < 1 + \frac{3p}{n}$$

per il Teorema dei due carabinieri segue la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{p}$.

<u>3° Metodo </u>(Palmisani, mediante disuguaglianza GM-RMS)

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}}_{2} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} < \frac{\overbrace{\sqrt{p} + \sqrt{p}}^{2} + \overbrace{1 + \dots + 1}^{n-2}}{n}$$

$$= \frac{2\sqrt{p} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + \frac{2\sqrt{p}}{n} - \frac{2}{n}$$

$$< 1 + \frac{2\sqrt{p}}{n}$$

<u>4° Metodo</u> (Palmisani, Mediante disuguaglianza GM-RMS)

$$1 \leq \sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}}_{2}\cdot\underbrace{1\cdot\dots\cdot 1}_{n-2}}$$

$$< \sqrt{\frac{\left(\sqrt{p}\right)^2 + \left(\sqrt{p}\right)^2 + 1^2 + \dots + 1^2}{n}} = \sqrt{\frac{p + p + n - 2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2p + n - 2}{n}} = \sqrt{\frac{2p}{n} + 1 - \frac{2}{n}} < \sqrt{\frac{2p}{n} + 1}$$

da cui

$$1 \leq \sqrt[n]{p} < \sqrt{\frac{2p}{n} + 1}$$

Applicando il Teorema dei due carabinieri si consegue l'asserto.

<u>2° Caso</u>: $0 < p < 1$.

Trattiamo questo caso adoperando la disuguaglianza HM-GM[3]

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Poniamo

$$a_1 = a_2 = \sqrt{p};\ a_3 = \dots = \dots = a_n = 1$$

Si ha:

[3] $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

$$\frac{n}{\frac{2}{\sqrt{p}}+n-2}=\frac{n}{\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}<\sqrt[n]{p}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}}_{2}\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-2}}$$

D'altro canto, raccogliendo n al numeratore e al denominatore dell'espressione più a sinistra si ha

$$\frac{n}{n\left(\frac{2}{n\sqrt{p}}+1-\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}}+1-\frac{2}{n}}$$

da cui

$$\frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}}+1-\frac{2}{n}}<\sqrt[n]{p}$$

Inoltre (vedi nota) sappiamo che $\sqrt[n]{p}<1$ ($0<p<1$).

Pertanto, ($0<p<1$) , vale la doppia disuguaglianza

$$\frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}}+1-\frac{2}{n}}<\sqrt[n]{p}<1$$

Invocando nuovamente il Teorema dei due carabinieri, si ha che $\sqrt[n]{p}\ \to 1$.

Nota bene

Siano $0<p<1$ e $y(x)=p^{1/x}$ $(x\neq 0)$. Scriviamo $y(x)=e^{(1/x)\cdot\ln p}$. Osservato che

$$0<p<1\ \rightarrow \ln p<0$$

allora

$$y'(x)=e^{(1/x)\ln p}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln p\right)>0\ (\forall x\neq 0)$$

Pertanto $y(x)$ è strettamente positiva su tutto il dominio e, per il Teorema sulle funzioni monotone,

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\sup y(x)$$

Essendo

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = e^{0 \cdot \ln p} = 1$$

si ha che $\sup y(x) = 1$ e quindi $p^{1/x} \leq 1 \ (\forall x \neq 0)$.

3 - Conclusioni

L'articolo si proponeva di gettare una nuova luce su alcune note successioni oggetto sia di corsi di Analisi Matematica 1 che di Matematica Generale proponendo dimostrazioni «alternative» che forse, pur non avendo il pregio di essere così semplici e immediate come quelle basate sulla Disuguaglianza di Bernoulli, danno l'impressione di essere più «costruttive» in quanto consentono allo studente di «intravedere» anche dei passaggi aritmetici e algebrici.

Bibliografia

COURANT Richard, ROBBINS Herbert (1950). *Che cos'è la matematica*, Torino: Einaudi.

FIORENZA Renato, GRECO Donato (1992). *Lezioni di Analisi Matematica*, Volume primo. Roma: Liguori.

GIUSTI Enrico (1983). *Analisi Matematica 1*, Torino: Boringhieri

HARDY G. H. (1921). *A Course of Pure Mathematics*, Third Edition, The Project Gutenberg eBook of A Course of Pure Mathematics

KOROVKIN P.P. (1975). *Inequalities,* Mir Publishers Moscow

MALIGRANDA Lech (2012). The AM-GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality, *The Mathematical Intelligencer 34*, pp. 1-2

MARCELLINI P., Sbordone (2007). *Matematica Generale*. Roma: Liguori.

MITRINOVIC D.S. (1964). *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff LTD-Groningen

SCHAUMBERGER Norman (1984), Another Look at $x^{1/x}$, *The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 3*, pp. 249-250.

SCOTT J. A. (2000), A Graphical Approach to $n^{1/n}$, *The Mathematical Gazette, Vol. 84, N. 501*, pp. 513-515

SINNADURA J. St.-C.L. (1961). Applications of the Inequality of the Means, *The Mathematical Gazette, Vol. 45, No. 354*, pp. 330-331

WIENER Joseph (1985). Bernoulli's Inequality and the Number e, *The College Mathematics Journal, Vol. 16, No. 5 (Nov. 1985),* pp. 399-400