

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVII - Serie IV – volume IV(2)
giugno 2022**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

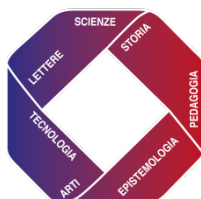
PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVII - Serie IV - Volume IV (2)
Giugno 2022



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675
Copyright © 2022 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.
Tutti i diritti riservati.
ISBN 978-88-3293-604-9
Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

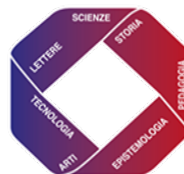
Finito di stampare nel mese di giugno 2022 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Paolo Manca	7
<i>Una elementare proprietà di rette tra loro perpendicolari e alcune conseguenze</i>	
Luigi Togliani	23
<i>Osservazioni e problemi sul concetto di probabilità</i>	
Cesare Palmisani	37
<i>Un ulteriore sguardo ad alcuni limiti notevoli</i>	
Mario Innocenzo Mandrone	55
<i>L'insegnamento della fisica nelle scuole secondarie di secondo grado: dalla tradizione all'innovazione</i>	
Giuseppe Mangione, Giuseppina Montesi	75
<i>Due giorni per la Scuola: Matematica, Filosofia, Letteratura</i>	
Ferdinando Casolaro, Serafina Ippolito	85
<i>Dante, Eduardo e la logica dell'assoluzione</i>	
Giovanna Della Vecchia	109
<i>Matematica è poesia</i>	
Diana Cipressi, Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo	129
<i>6°Convegno Nazionale su La Matematica nel Primo Ciclo</i>	
Federica Accorroni, Carlo Toffalori	137
<i>Matematica al primo ciclo</i>	
Luca Grilli, Lucia Maddalena, Carmen Talia	151
<i>Sfide matematiche</i>	
Rosa Buonanno, Daniela Buono, Umberto Salzano	157
<i>Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM</i>	
Ciro Iovino, Rosa Porciello, Francesco Quagliano	169
<i>Studenti in cattedra, docenti nei banchi</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	183



“Studenti in cattedra, docenti nei banchi”

Giochi matematici per la Scuola - Premio “Aldo Morelli” XV edizione, 27-28 maggio 2022

Nei giorni 27-28 maggio 2022, l'Accademia Piceno-Aprutina in Teramo (APAV), in collaborazione con l'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU) e con l'associazione “Mathemare” di Castellammare di Stabia, aderente alla Federazione Italiana Mathesis, organizza un incontro durante il quale verranno premiati gli studenti vincitori del concorso *“Giochi matematici per la scuola, Premio Aldo Morelli”*, di cui le prime due fasi si sono svolte in modalità remota a febbraio e marzo 2022, nelle sedi delle scuole partecipanti. L'iniziativa, che ha visto la partecipazione di scuole dell'intero territorio nazionale si propone di coinvolgere allievi e docenti di matematica, al fine di non disperdere il grande bagaglio scientifico e didattico lasciato dal Prof. Aldo Morelli. Tutte le scuole partecipanti sono invitate a intervenire con gli studenti e i docenti interessati. Oltre ai premi fissati per i vincitori si rilascerà a tutti i finalisti un attestato di partecipazione e un gadget. I lavori inizieranno alle ore 16.00 di venerdì 27 maggio e si chiuderanno alle ore 18.00 di sabato 28 maggio 2022. Durante l'incontro, dal titolo *“Studenti in cattedra docenti nei banchi”*, in parallelo all'espletamento della fase finale coordinata dal prof. Raffaele Prosperi e della gara a squadre coordinata dalla prof.ssa Ilaria Veronesi, sono previsti interventi di studenti coordinati dai propri docenti, che hanno partecipato al concorso, e di brevi relazioni di dirigenti scolastici e docenti universitari e di scuola secondaria.

Il programma del Convegno è disponibile nel sito dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU):
www.afsu.it

Una elementare proprietà di rette tra loro perpendicolari e alcune conseguenze

Paolo Manca *

*Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa,
paolo.manca.spas@alice.it



DOI: 10.53159/PdM(IV).v4n2.075

Sunto: *Non ho trovato una sola dimostrazione geometrica corretta del cosiddetto teorema di Napoleone salvo quella che discende, come caso particolare, da un teorema più generale di Bonferroni e che Bonferroni ha dimostrato sfruttando un'idea veramente geniale, ma con la necessità di considerare numerosi casi e sottocasi. La presente nota per dimostrare che entrambi i teoremi, e altri che riguardano i quadrilateri e i quadrilateri derivati, si possono dimostrare a partire da una proprietà immediata che riguarda rette tra loro perpendicolari.*

Parole Chiave: *Rette perpendicolari; quadrilateri; quadrilateri derivati; Teorema di Napoleone.*

Abstract: *I have not found a single correct geometric proof of the so-called Napoleon's theorem, except the one that derives, as a particular case, from a more general Bonferroni's theorem, which Bonferroni demonstrated using a truly brilliant idea, but with the need to consider numerous cases and sub-cases. The present note to prove that both theorems, and others concerning quadrilaterals and derived quadrilaterals, can be proved starting from an immediate property concerning lines perpendicular to each other.*

Keywords: *Perpendicular lines; quadrilaterals; derivative quadrilaterals; Napoleon's Theorem.*

1 – Un risultato banale

1.1 – Lemma 1

Siano r ed s due rette non parallele che si incontrano in O e siano α e $\pi - \alpha$ le misure degli angoli da esse individuati, sia r' perpendicolare ad r ed s' perpendicolare ad s : allora le misure degli angoli individuati da r' ed s' sono egualmente α e $\pi - \alpha$.

La dimostrazione è elementare.¹

1.2 – Teorema 1

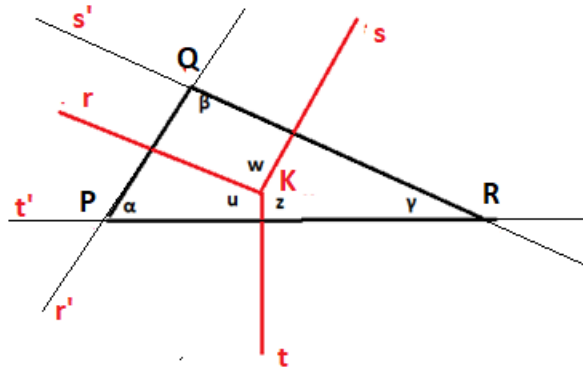
Sia K un punto del piano e siano r, s, t tre semirette uscenti da K , (che indico in senso orario), e siano u, w, z le misure degli angoli che esse formano due a due, con la condizione che risultino ognuna minore di π .

Siano r' perpendicolare ad r , s' perpendicolare ad s , t' perpendicolare ad t , sia P l'intersezione di r' e t' , sia Q l'intersezione di r' e s' , sia R l'intersezione di s' e t' : allora, escluso il caso $P = Q = R$, il triangolo PQR ha come angoli (interni) : $\alpha = \pi - u$, $\beta = \pi - w$, $\gamma = \pi - z$.

Viceversa sia PQR un triangolo di angoli (interni) α , β , γ e sia K un punto del piano.

¹ Dalla configurazione delle rette s, r si passa alla configurazione delle rette s', r' , che si incontrano in O' , con una traslazione che trasforma O in O' e una rotazione di $\pi/2$ intorno al centro O' .

Siano r, s, t tre semirette uscenti da K e ortogonali rispettivamente ai lati PQ, QR, RP di PQR : allora le misure degli angoli formati ordinatamente a due a due da tali semirette valgono $u = \pi - \alpha$, $w = \pi - \beta$, $z = \pi - \gamma$.



Dimostrazione:

Intanto: $u + w + z = 2\pi$,

dunque: $\alpha + \beta + \gamma = \pi - u + \pi - w + \pi - z = 3\pi - (u + w + z) = \pi$.

Il resto segue dal lemma.1.

N.B: nella figura la collocazione di K all'interno del triangolo PQR è influente ed è stata scelta solo per rendere più espressiva la figura stessa.

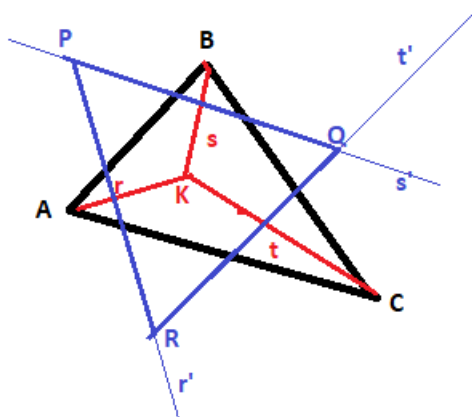
Sono diversi i corollari che discendono da questo elementare teorema: ne elenco solo alcuni tralasciando in particolare l'utilizzo nella caratterizzazione del punto di Fermat-Torricelli.

Corollario 1

Con le notazioni adottate se : $u = w = z = 2\pi/3$ allora il triangolo PQR è equilatero e viceversa.

Corollario 2

Sia ABC un triangolo, sia K un punto interno ad ABC , indichiamo in senso orario con r, s, t le semirette uscenti da K e passanti per A, B, C e che formano angoli la cui misura sia u, w, z , siano r', s', t' rette perpendicolari rispettivamente a r, s, t e siano P,Q,R le loro intersezioni due a due : allora $\alpha = \pi - u, \beta = \pi - w, \gamma = \pi - z$, sono gli angoli del triangolo PQR.



Corollario 3

Se ABC è equilatero allora le semirette perpendicolari ai lati condotte da un punto interno K qualsiasi, siano r, s, t , definiscono due a due angoli di $2\pi/3$ (120°) e dunque K vede i tre lati sotto l'angolo di $2\pi/3$.

Corollario 4

Sia ABC un triangolo , costruiamo esternamente² ai tre lati altrettanti triangoli equilateri (e-tri) e indichiamone con P, Q, R i centri³. Allora il triangolo PQR , detto anche triangolo derivato di ABC , è equilatero (Teorema cosiddetto di Napoleone, che annovera tante dimostrazioni scorrette).

Dimostrazione:

Premetto e ricordo che se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono due circonferenze di centro P e Q e che si incontrano in due punti A e K allora il segmento PQ appartiene all'asse di AK , mentre se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno in comune un solo punto A , allora A appartiene al segmento PQ e la retta tangente comune passante per A è perpendicolare a PQ .

Premetto e ricordo anche che se $\mathcal{C}$ è una circonferenza , AB una sua corda il cui angolo al centro vale : 2θ , allora AB divide $\mathcal{C}$ in due archi , i punti di $\mathcal{C}$ del primo arco vedono AB sotto l'angolo : θ , i punti del secondo arco vedono AB sotto l'angolo: $\pi-\theta$.

La dimostrazione del teorema discende dal fatto che le circonferenze $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ circoscritte agli e-tri costruiti sui lati di ABC si incontrano sempre in un punto K che : risulta interno ad ABC se gli angoli di ABC sono tutti minori di $2\pi/3$, coincide con il vertice B se tale angolo vale $2\pi/3$, risulta esterno ad ABC se esiste un angolo di misura maggiore a $2\pi/3$.

Vediamo i tre casi.

² O anche internamente.

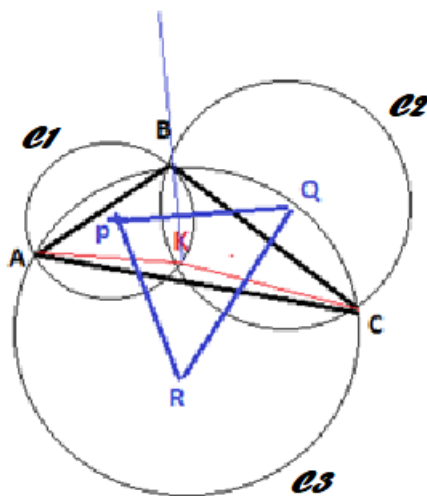
³ Come noto in un triangolo equilatero coincidono baricentro, circocentro, ortocentro.

Sia ABC un triangolo con angoli interni inferiori a $2\pi/3$.
 Su ciascuno dei lati di ABC , esternamente ad ABC ,
 costruiamo altrettanti e-tri e consideriamo le circonferenze
 rispettivamente ad essi circoscritte ***c1, c2, c3*** e indichiamone
 con P,Q, R i centri.

Le circonferenze ***c1*** e ***c2*** si incontrano oltre che in B in un
 punto K interno ad ABC. Per la proprietà di una
 circonferenza circoscritta ad un e-tri il punto K vede i tre lati
 di ABC ciascuno sotto l'angolo di $2\pi/3$ e dunque appartiene
 anche a ***c3***.

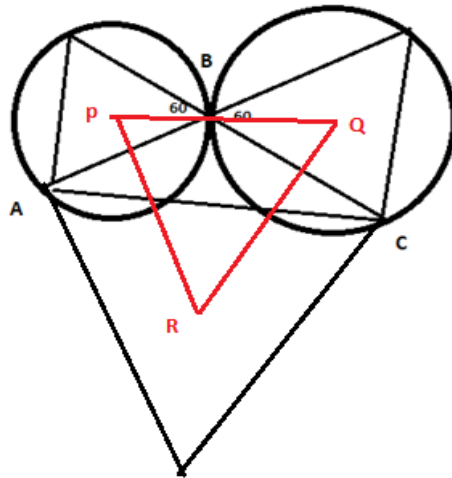
Dunque ***c1*** e ***c2*** si incontrano in B e in K , ***c1*** e ***c3*** si
 incontrano in A e in K , ***c2*** e ***c3*** si incontrano in C e in K ;
 inoltre PQ risulta perpendicolare a KB, QR risulta
 perpendicolare a KC , RP risulta perpendicolare a KA.

Ne segue , per il cor.1, che il triangolo PQR è equilatero.



Sia ABC un triangolo con angolo in B eguale a $2\pi/3$: allora **$\mathcal{C}1$ e $\mathcal{C}2$** risultano tangenti in B e la retta tangente in B risulta perpendicolare a PQ .

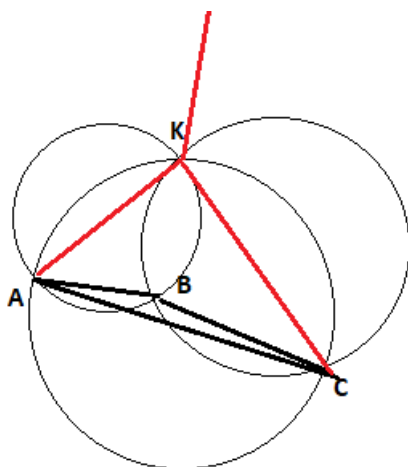
Consideriamo allora le semirette r,s,t aventi origine in B e con r passante per A , s tangente a **$\mathcal{C}1$ e $\mathcal{C}2$** in B ed esterna al triangolo ABC , t passante per C : tali tre semirette formano due a due angoli di $2\pi/3$, inoltre PR è perpendicolare ad AB e QR è perpendicolare a BC . Ne segue che PQR è equilatero.



Sia ABC un triangolo con angolo in B maggiore di $2\pi/3$:
allora **$\mathcal{C}1$, $\mathcal{C}2$** si incontrano oltre che in B anche in un secondo punto K esterno ad ABC ma sempre con BK perpendicolare a PQ . Poiché K appartiene sia a **$\mathcal{C}1$** che a **$\mathcal{C}2$** , e dunque vede AB e BC sotto $\pi/3$, necessariamente vede AC sotto $2\pi/3$ e quindi passa anche per **$\mathcal{C}3$** .

Poiché **01** e **03** si incontrano in A e K allora PR risulta perpendicolare a AK ; poiché **02** e **03** si incontrano in C e K allora QR risulta perpendicolare a CK.

Consideriamo allora le semirette r,s,t di origine K con r passante per A , s semiretta della retta passante per KB e non contenente B, t passante per C : tali tre semirette formano, due a due, angoli di $2\pi/3$. Ne segue che PQR è equilatero.



Corollario 5

Con le notazioni precedenti assegnato il triangolo ABC costruiamo esternamente ad ABC una circonferenza **01** di centro P e passante per AB e in cui l'angolo alla circonferenza di AB vale α , una circonferenza **02** di centro Q e passante per BC e in cui l'angolo alla circonferenza di BC vale β , una circonferenza **03** di centro R e passante per CA e in cui l'angolo alla circonferenza di CA vale γ , col vincolo che

risulti: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, allora gli angoli del triangolo PQR valgono α, β, γ (teorema di Bonferroni).⁴

Dimostrazione:

La dimostrazione procede analogamente a quella del precedente corollario 4.

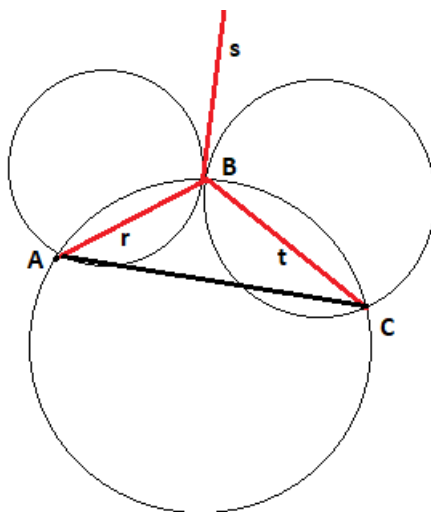
Sia ABC un triangolo con gli angoli (interni) inferiori a $2\pi/3$, allora le circonferenze **e1** e **e2**, (di cui all'enunciato), oltre che nel punto B si incontrano anche in un punto K interno ad ABC. Il punto K vede AB sotto l'angolo: $\pi - \alpha$ e BC sotto l'angolo: $\pi - \beta$ e dunque CA sotto l'angolo: $2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = \alpha + \beta = \pi - \gamma$, e dunque K appartiene anche a **e3**.

Dunque **e1** e **e3** si incontrano in K e in A, **e1** e **e2** si incontrano in K e in B, **e2** e **e3** si incontrano in K e in C, inoltre PQ risulta perpendicolare a KB, QR risulta perpendicolare a KC, RP risulta perpendicolare a KA.

Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α, β, γ .

Sia ABC un triangolo con angolo in B uguale a $2\pi/3$, allora **e1** e **e2** risultano tangenti in B e la retta tangente in B è perpendicolare ad PQ. Consideriamo allora che le semirette r, s, t di origine B e con r passante per A, s tangente in B a **e1** e **e2** ed esterna ad ABC, t passante per C: tali semirette formano due a due angoli pari a: $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$, inoltre PR è perpendicolare ad AB e QR è perpendicolare a BC. Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α, β, γ .

⁴ Carlo Bonferroni: *Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone*. «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Serie 3, Vol. 5 (1950), n.1, p. 85-89.

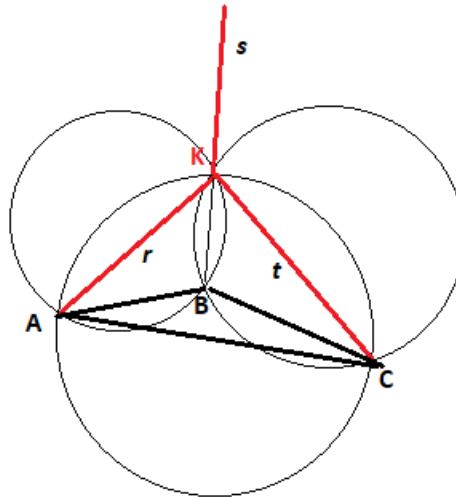


Sia ABC un triangolo con angolo in B maggiore di $2\pi/3$, allora **e1**, **e2** si incontrano oltre che in B anche in un secondo punto K , esterno ad ABC ma sempre con BK perpendicolare a PQ.

Poiché K appartiene sia a **e1** che a **e2** vede AB sotto l'angolo α , vede BC sotto l'angolo β e dunque vede AC sotto l'angolo : $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ e dunque K passa anche per **e3** .

Poiché **e1** e **e3** si incontrano in A e K allora PR è perpendicolare ad AK ; poiché **e2** e **e3** si incontrano in B e K allora QR è perpendicolare ad BK.

Consideriamo allora che le semirette r,s,t di origine K con r passante per A , s semiretta della retta passante per KB e non contenente B, t passante per C : tali tre semirette formano, due a due, angoli pari a : $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. Dunque gli angoli del triangolo PQR valgono α, β, γ .



2 - Quadrangoli derivati

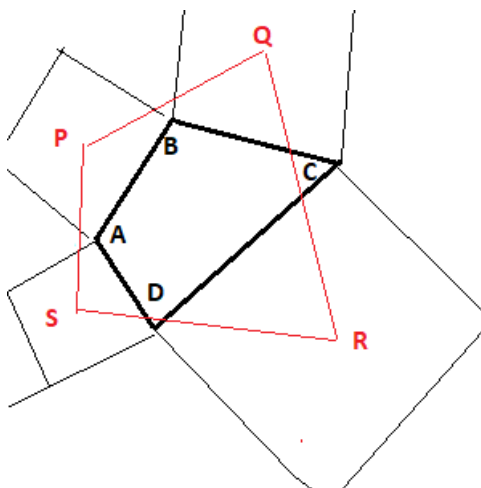
Il procedimento e le conseguenze del teorema 1 relativi a un triangolo e al suo triangolo derivato si ripropongono in particolare anche per il quadrangolo (convesso).

Mi limito a dimostrare due soli teoremi.

Indichiamo con ABCD un quadrangolo convesso di vertici A,B,C,D; costruiamo esternamente sui lati di ABCD altrettanti quadrati **P, Q, R, S** di centri P,Q,R,S.

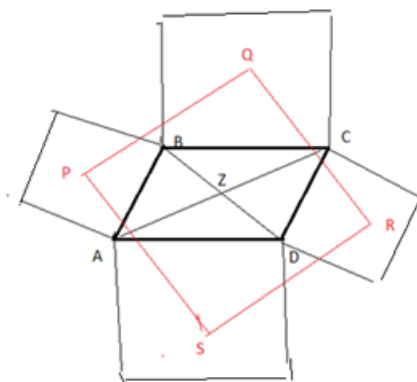
Il quadrangolo PQRS di vertici P,Q,R,S dicesi quadrilatero derivato di ABCD:

ci domandiamo quali caratteristiche abbia e in particolare se sia un quadrato.



2.1 - Teorema A1

Sia ABCD un parallelogramma allora il suo quadrilatero derivato è un quadrato.⁵



⁵ Vedi anche : Adriano Barlotti *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo*. «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Serie 3, Vol. 7 (1952), n.2, p. 182-185. Zanichelli

Dimostrazione:

Sia ABCD un parallelogramma e sia Z il punto di incontro delle diagonali; consideriamo il triangolo ABC e i due quadrati costruiti esternamente ai lati : il quadrato $\mathcal{P}$ di centro P e costruito sul lato AB, il quadrato $\mathcal{Q}$ di centro Q e costruito sul lato BC. Indichiamo con $\mathcal{C}_P, \mathcal{C}_Q$ le circonferenze circoscritte a $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$.

Per costruzione l'angolo alla circonferenza di AB rispetto a $\mathcal{C}_P$ vale $\pi/4$, l'angolo alla circonferenza di BC rispetto a $\mathcal{C}_Q$ vale $\pi/4$.

Sia $\mathcal{C}_Z$ una circonferenza di centro Z avente AC per diametro e i cui punti dunque vedono AC sotto $\pi/2$.

In virtù del cor. 5 gli angoli del tri PQZ valgono: $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ e dunque il triangolo PQZ è rettangolo ed isoscele.

Le stesse conclusioni si ottengono considerando il triangolo ABD che è congruente a ABC per cui anche gli angoli del triangolo RZS valgono $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ e dunque RZS è rettangolo ed isoscele.

Allo stesso modo si ragiona con riferimento ai triangoli ABD e BCD a loro volta tra loro congruenti.

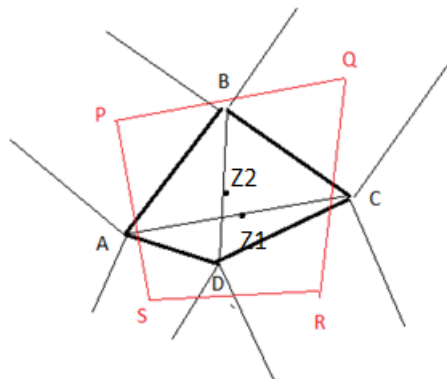
In conclusione, indicando con $\underline{AB}$ la lunghezza di un generico segmento AB, abbiamo :

$\underline{PQ} = \underline{QR} = \underline{RS} = \underline{SP}$, e ancora, indicando con W° l'angolo interno relativo al generico vertice W, abbiamo in PQRS : $P^\circ = Q^\circ = R^\circ = S^\circ = \pi/2$.

Dunque PQRS è un quadrato.

2.2 - Teorema A2.⁶

Sia $ABCD$ un quadrangolo convesso allora il suo quadrangolo derivato ha le diagonali congruenti e perpendicolari.



Dimostrazione:

Se $ABCD$ è un parallelogrammo allora il teorema vale in virtù del teorema A1.

Sia dunque $ABCD$ un quadrangolo non parallelogramma, poiché in tal caso le diagonali AC e BD non si incontrano nel punto medio, indichiamo con Z_1 il punto medio di AC e con Z_2 il punto medio di BD .

Procediamo come al teorema A1 e facciamo riferimento ad uno di due punti medi Z_1, Z_2 , ad esempio Z_1 .

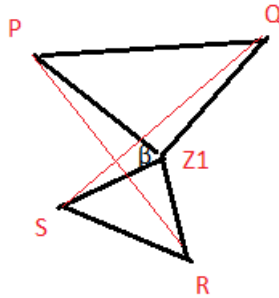
Con riferimento dunque alla diagonale AC e al triangolo ABC e ai tre quadrati costruiti esternamente ai lati AB, BC ,

⁶ Anche di questo teorema non ho trovato dimostrazioni puramente geometriche corrette

$CA : C_P, C_Q, C_{Z_1}$, possiamo concludere che i triangoli PQZ_1 e RSZ_1 sono rettangoli e isosceli.⁷

Consideriamo allora i triangoli PZ_1R e SZ_1Q : detto β l'angolo PZ_1S osserviamo che gli angoli PZ_1R e SZ_1Q valgono entrambi: $\beta + \pi/2$, dunque tali triangoli sono congruenti perché hanno due lati e l'angolo compreso congruenti. Pertanto risulta: $\underline{PR} = \underline{QS}$.

Ancora ruotando di $\pi/2$ in senso orario e intorno al vertice Z_1 il triangolo RPZ_1 questi si sovrappone al triangolo SQZ_1 e dunque PR e QS sono perpendicolari.



⁷ Con riferimento alla diagonale BD potremmo procedere egualmente considerando il triangolo ADC e concludendo che i tri SZ_2R e PZ_2S sono rettangoli e isosceli.

ARTE SCIENZA *magazine*

Alberto Macchi, Angela Ales Bello, Anna Dell'Agata, Antonio Castellani,
Arcangelo Carrera, Claudio Marrucci, Fulvio Guertieri, Geogi Gospodinov, Gianluca Mei,
Giovanni Calori, Isabella De Paz, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Pierluigi Assogna,
Stefano Tamburello, Stefano Torossi, Ugo Locatelli

LA FOTO DEL SECOLO BUCHI NERI E BUCHI BIANCHI	METAFORE DI QUESTO MONDO	FANTASME DOVE E COME INCONTRARLE	FACEPTION L'APP CHE TI LEGGE DENTRO	COS'È LA GUERRA ELETTRONICA	VISTA PROGETTO DI PUBLIC ART	8 MINUTI 1 9 SECONDI POI TUTTO FU LUNA	ANCHE DIO RIDE E SORRIDE
---	--------------------------------	--	---	-----------------------------------	------------------------------------	--	--------------------------------

Anno II - N. 3 giugno 2022 - Supplemento di *ArteScienza*
<http://www.assoculturale-arte-scienza.it>
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n. 194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2395-1961 - Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"

Or code per accedere a
"Un solo canto per tre credo"

Osservazioni e problemi sul concetto di probabilità

Luigi Togliani*

*Accademia Nazionale Virgiliana; luigi.togliani@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n2.076

Sunto: *Partendo da diverse concezioni di probabilità, vengono proposti alcuni classici problemi applicativi, con osservazioni riguardanti la prassi didattica.*

Parole Chiave: *Evento, probabilità, paradosso dei due bambini.*

Abstract: *Beginning from different concepts of probability, some classical applicative problems are proposed, with observations about teaching practice.*

Keywords: *Event, probability, two-child paradox.*

1 -Introduzione

Il concetto di probabilità è presente nella nostra realtà quotidiana: molteplici cose che accadono nella vita sono, in fondo, degli eventi casuali ai quali attribuiamo, in modo più o meno consapevole, un certo grado di certezza, una certa probabilità. Uscire incolumi dal traffico, raggiungere una località desiderata, partecipare ad una riunione, rivedere dopo un certo tempo una persona cara, superare un esame,

procurarsi il cibo necessario: sono tutti esempi di eventi aleatori, a ciascuno dei quali potremmo attribuire una certa probabilità di riuscita.

2 -La probabilità nell'insegnamento

Per questo è opportuno trattare di probabilità nella scuola, dalla primaria alla secondaria di secondo grado, come richiesto dalle stesse Indicazioni ministeriali di cui al DM 16 novembre 2012, ai sensi dell'art. 1, comma 4, del DPR 20 marzo 2009, n. 89.

In particolare, per quanto riguarda la matematica nel primo ciclo di istruzione, nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze alla fine della scuola primaria* si afferma che l'alunno «riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza». E tra gli obiettivi di apprendimento alla fine della classe quinta di scuola primaria occorre «in situazioni concrete, di una coppia di eventi, intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili».

Alla conclusione della scuola secondaria di I grado, tra i traguardi per le competenze si stabilisce che l'alunno «nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi...) si orienta con valutazioni di probabilità» e, tra gli obiettivi di apprendimento, si fissano i seguenti: «in semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti»; «riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti».

Per quanto riguarda il liceo scientifico (allegato F) si dice che l'alunno, nel primo biennio, «apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica» e, nel secondo biennio, «studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio»; infine, nel quinto anno, «apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson)». Indicazioni analoghe sono presenti per gli altri licei, gli istituti tecnici e gli istituti professionali.

Tuttavia, la probabilità (e la statistica) sono ancora poco insegnate nella scuola italiana, nonostante siano richieste in molti corsi universitari e in varie attività di lavoro e di ricerca. Ciò forse è dovuto ad un retaggio di tipo culturale (Contucci, Riga, 2015).

3-Sul concetto di probabilità

Varie sono le concezioni di probabilità di un evento casuale che si sono affermate nel tempo. La più comune è forse la *concezione classica* di probabilità, espressa come rapporto tra il numero a dei casi favorevoli alla riuscita dell'evento aleatorio o casuale E e il numero n dei casi possibili: $P(E) = a/n$.

Le critiche che si possono muovere a questa concezione non mancano. In primo luogo occorre che i casi favorevoli alla riuscita di E siano tutti ugualmente favorevoli; ma, per poterne essere certi, bisognerebbe attribuire a ciascun caso favorevole la stessa probabilità e in questo modo la

‘definizione’ sarebbe circolare: per definire la probabilità si farebbe uso della probabilità. In secondo luogo questa concezione richiede di conoscere a priori tutte le possibilità in cui l’evento può accadere, cosa che non è realizzabile nelle maggior parte degli eventi aleatori con cui abbiamo a che fare.

Per superare queste criticità possiamo adottare la *concezione frequentista* di probabilità. Chiamiamo frequenza relativa dell’evento E il rapporto tra il numero b di volte in cui E si è verificato e il numero totale m di prove effettuate. Per probabilità di E assumiamo la frequenza relativa di E se m è molto grande (si veda la legge empirica del caso). Questa concezione sembrerebbe richiamare il concetto analitico di limite, ma non è propriamente così: la differenza in modulo tra frequenza relativa e probabilità non necessariamente diminuisce all’aumentare di m . E anche questa concezione lascia spazio a perplessità: è corretto introdurre un ente matematico a posteriori dopo aver eseguito un esperimento? Ripetendo tale esperimento cambierebbe il valore numerico dell’ente stesso che si vorrebbe introdurre?

Un altro approccio è offerto dalla *concezione soggettivista*: la probabilità dell’evento E è il prezzo s che una persona ritiene equo pagare, in un gioco di sorte, rispetto alla somma v che incasserebbe in caso di vittoria, ossia: $P(E) = s/v$. Qui la perplessità nasce dal fatto che ogni individuo può essere disposto a pagare una diversa somma s e il valore di $P(E)$ non sarebbe univocamente determinato.

Infine consideriamo la *concezione assiomatica* di probabilità, adottata per superare le difficoltà insiste nelle precedenti definizioni e per la necessità di sistematizzare la teoria della probabilità in modo logico-formale. Così facendo si fissano

gli enti primitivi e gli assiomi; poi si introducono nuovi termini con opportune definizioni e si dimostrano i teoremi. Questa concezione di probabilità, proposta da A. N. Kolmogorov (1903-1987) in *Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità* del 1933, può essere così espressa. Si considera un insieme non vuoto S (spazio) e una famiglia F di suoi sottinsiemi (eventi aleatori) tale che:

$$i) S \in F$$

$$ii) A, B \in F \Rightarrow A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B} \in F$$

Sulla base di queste premesse si postula l'esistenza di una funzione $P: F \rightarrow \mathbb{R}$ detta probabilità, per la quale si ammettono i seguenti assiomi:

$$a_1) P(A) \geq 0, \forall A \in S$$

$$a_2) P(S) = 1$$

$$a_3) P(A \cup B) = P(A) + P(B), \forall A, B \in S, A \cap B = \emptyset$$

$$a_4) P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \forall A_i \in S, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

L'assioma a_4 si pone solo se S è infinito. Secondo questa impostazione gli eventi altro non sono che insiemi. La probabilità $P(A)$ di un evento viene implicitamente definita mediante i quattro precedenti assiomi. L'impostazione assiomatica è rigorosa, ma risulta poco fruibile didatticamente perché rischia di far perdere di vista il significato intrinseco di probabilità di un evento.

Di fronte a questa pluralità di concezioni si può restare sconcertati e chiedersiche cosa si intenda per probabilità.

A questo proposito scriveva Bruno de Finetti (1906-1985):

La probabilità: chi è costei? Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero

«esiste» la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste. Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole – PROBABILITY DOES NOT EXIST- nella prefazione all’inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo. Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra ‘guida nel pensare e nell’agire’, e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, ‘probabilità’, mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l’aggettivo, ‘probabile’, o, meglio ancora, soltanto l’avverbio, ‘probabilmente’. [...] Da ciò la mania (che forse per altri è invece indizio di saggezza, serietà, accuratezza) di assolutizzare, di concretizzare, di oggettivare perfino quelle che sono soltanto proprietà dei nostri atteggiamenti soggettivi. Non altrimenti si spiegherebbe lo sforzo di fare della Probabilità qualcosa di “nobler than it is” (sempre parole di Jeffreys), nascondendone la natura soggettiva e gabellandola per oggettiva. (de Finetti, 1982).

Quindi, anche se esistono differenti concezioni di probabilità – e non esenti da critiche - non di meno dobbiamo riconoscere che esse sono applicate in molteplici situazioni, come appare nei seguenti esempi, che possono essere proposti a studenti delle nostre scuole secondarie.

4 -Buste e bollette

Vi sono 1000 buste diverse che devono contenere altrettante bollette diverse del gas. Su ogni busta e su ogni bolletta è riportato il nome e l’indirizzo dell’utente cui è rivolta. Se si

infilata a caso una bolletta in ogni busta, qual è la probabilità che almeno una busta contenga la sua bolletta? (Paulos, 1990).

Si utilizza l'evento complementare. La probabilità che una busta non contenga la sua bolletta è $999/1000$; la probabilità che 2 buste non contengano entrambela propria bolletta è $(999/1000)^2$, ..., la probabilità che nessuna tra 1000 buste contenga la propria bolletta è $(999/1000)^{1000}$. Quindi la probabilità dell'evento E richiesto sarà:

$$P(E) = 1 - (999/1000)^{1000} \cong 63,23\%.$$

In generale, per n buste e n bollette: $P(E) = [1 - (n-1)/n]^n$; e al crescere di n risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (n-1)/n]^n = 1 - 1/e \cong 63,21\%.$$

La generalizzazione di questo esempio consente di utilizzare il numero e di Nepero e richiede la conoscenza del relativo limite notevole.

5 -Il problema del compleanno

Si sfida una platea di una quarantina di persone - delle quali si ignora la data di nascita -dicendo di scommettere sul fatto che almeno due di esse compiono gli anni nello stesso giorno: si tratta di una scommessa avventata? Qual è la probabilità che tra n persone ve ne siano almeno due che abbiano lo stesso compleanno? (Gardner,2001; Falletta,2002).

Il problema o paradosso del compleanno fu formulato nel 1939 da Richard von Mises (1883-1953). Per risolvere il quesito osserviamo che è utile pensare all'evento contrario. Mettiamo che vi siano solo 2 persone: la probabilità (classica) che non compiano gli anni in uno stesso giorno dell'anno di 365 giorni (non consideriamo i nati il 29 febbraio) è $364/365$. Se le persone sono 3 la probabilità che nessuna di loro compia gli anni nello stesso giorno è $364 \cdot 363/365^2$ per effetto del teorema del prodotto di due eventi. Generalizzando, la probabilità che tra n persone nessuna compia gli anni nello stesso giorno sarà:

$$q = \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{D_{365,n}}{D_{365,n}^r}$$

ove $D_{365,n}$ è il numero delle disposizioni semplici di 365 oggetti di classe n e $D_{365,n}^r$ è il numero delle disposizioni con ripetizione degli stessi oggetti. Quindi la probabilità che almeno 2 delle n persone compiano gli anni nello stesso giorno è:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Osserviamo che il valore di p va aumentando all'aumentare di n , $2 \leq n \leq 365$. Se $n > 365$ il quesito sarebbe banale per il *pigeonhole principle* (Togliani, 2004). In particolare: $p \cong 51\%$ se $n=23$, $p \cong 71\%$ se $n=30$, $p \cong 89\%$ se $n=40$, $p \cong 97\%$ se $n=50$. Quindi basta la presenza di una cinquantina di persone per avere la quasi certezza che 2 di loro festeggino il compleanno

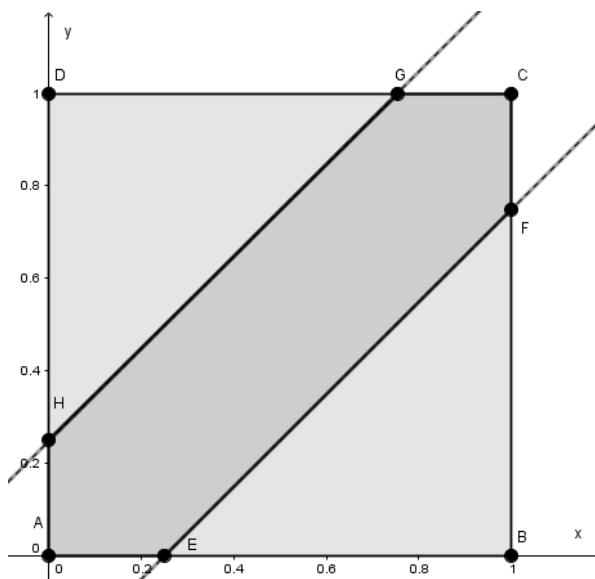
nello stesso giorno; e sono sufficienti 23 individui per superare il 50% di probabilità di riuscita dell'evento.

6 -L'appuntamento

Due amiche si danno appuntamento in centro città in un fissato giorno. Ciascuna arriva indipendentemente dall'altra in un orario compreso tra le ore 12 e le 13 e non aspetta più di 15 minuti. Qual è la probabilità che le due amiche si incontrino? (Berloquin, 1981).

Detti x e y gli istanti di arrivo, tra le 12 e le 13, delle due amiche, dovranno essere rispettate queste condizioni:

$$x < y < x + 0,25 \wedge y < x < y + 0,25.$$



Queste disequazioni possono essere rappresentate nel piano cartesiano all'interno del quadrato unitario ABCD in figura. La zona favorevole all'incontro è data dall'esagono

AEFCGH; la zona utile è quella del quadrato ABCD. Dunque la probabilità p dell'evento in questione sarà espressa da:

$$p = \frac{\text{area}(\text{AEFCGH})}{\text{area}(\text{ABCD})} = \frac{7}{16}.$$

Quindi le due amiche hanno una probabilità di incontrarsi di circa il 44%.

Si noti che in questo quesito si fa uso della cosiddetta *concezione geometrica* di probabilità, che possiamo considerare come una variante della concezione classica.

7 -Virus e aggressioni

Un test per stabilire se si è positivi ad un certo virus è efficace nel 98% dei casi. Lo 0,50% della popolazione è attualmente affettada quel virus. Qual è la probabilità che un paziente, risultato positivo al test, sia veramente affetto dal virus? (Paulos, 1990).

Per risolvere questo problema immaginiamo che la popolazione sia composta da 10'000 persone: tra loro ci sono 50 ammalati e 9'950 sani; dei 50 ammalati, 49 sono stati riconosciuti malati al test, 1 è stato ritenuto sano; dei 9'950 sani, 9'751 sono riconosciuti sani, 199 sono stati ritenuti malati. Quindi, in totale: il test riconosce 248 malati, a fronte di 49 malati effettivi. Pertanto la probabilità di essere veramente ammalati, a fronte alla positività del test, è solo $49/248 \approx 20\%$.

Un altro metodo risolutivo fa uso del teorema di Bayes. Detti M l'insieme dei positivi (o malati), S quello dei sani, E quello dei riconosciuti positivi al test, risulta: $P(M)=5/1000$,

$P(S)=995/1000$, $P(E | M)=98/100$; $P(E | S)=2/100$. Quindi la probabilità richiesta è data da:

$$P(M | E) = \frac{P(E | M) \cdot P(M)}{P(E | M) \cdot P(M) + P(E | S) \cdot P(S)} = \frac{0,98 \cdot 0,005}{0,98 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = \frac{49}{248}$$

Questo risultato è abbastanza sorprendente, tanto più se inserito nell'attuale contesto di pandemia. Osservo che i dati del problema possono essere forniti solo da uno studio di frequenza e quindi la concezione di probabilità adottata è quella frequentista.

Una variante di questo problema è la seguente.

Il 10% della popolazione di una certa città è costituito da alieni. Tizio viene aggredito di notte e dichiara alla polizia che è sicuro all'80% che il suo aggressore sia un alieno. È attendibile questa dichiarazione? (Paulos, 1990).

Usando le stesse strategie dell'esempio precedente si ottiene che la probabilità che l'aggressore di Tizio sia un alieno è: $8/26 \approx 31\%$. Quindi la dichiarazione è poco attendibile, contrariamente a quanto si poteva immaginare. In questo problema si fa uso anche della concezione soggettiva di probabilità.

8 -Mamme e figlie

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede:

qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta (quesito 7 - Esame di Stato 2010 - PNI).

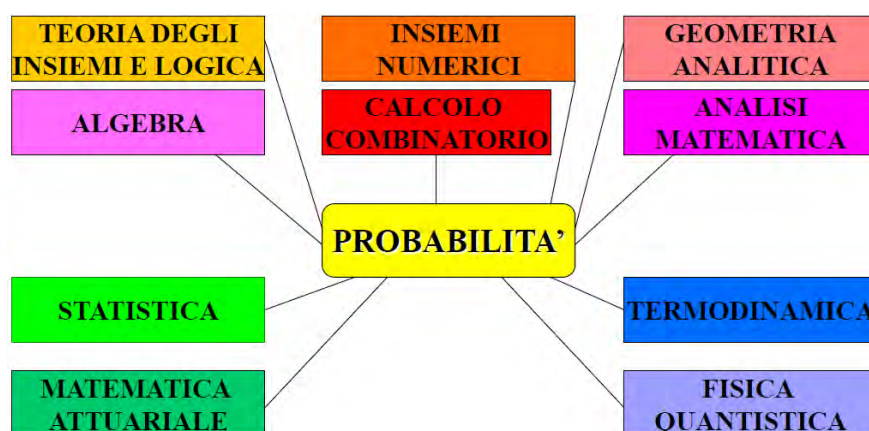
Il quesito, noto come paradosso dei due bambini (*two-child paradox*), riprende nella sostanza un problema proposto da Martin Gardner su *Scientific American* e riproposto più volte dallo stesso autore (Gardner, 2001). La prima domanda del quesito può trarre in inganno: sembra ovvio che la risposta sia $1/2$. Invece le cose non sono così semplici. Infatti, per Anna che ha due figli e che è stata invitata alla festa riservata a mamme con almeno una figlia femmina, si presentano solo tre possibilità: ha avuto un maschio e poi una femmina (*MF*), oppure una femmina e poi un maschio (*FM*) oppure due femmine (*FF*). Quindi la probabilità richiesta è $1/3$. Se, invece, nel testo del problema si dicesse che il primo figlio di Anna è una femmina, i casi possibili sarebbero solo *FM* e *FF* e la probabilità richiesta sarebbe $1/2$.

Uno studio sulla capacità di risolvere questo ed altri quesiti di probabilità è stato elaborato da Guido Cavrini nella sua tesi di laurea. La ricerca, condotta tra alunni di liceo e tra studenti del primo anno di corso di laurea in Matematica, ha dato risultati sconcertanti: solo il 7% dei liceali e il 17% degli universitari ha risposto esattamente (Cavrini, 2017).

Numerose sono le pubblicazioni sulla problematicità di questo paradosso e sulle sue applicazioni anche di carattere didattico (Linch, 2011; Taylor, Stacey, 2014).

9 -Conclusione

Le brevi osservazioni precedenti vorrebbero mettere in risalto l'importanza del concetto di probabilità in varie situazioni e quindi l'urgenza di farne oggetto della prassi didattica. Questo concetto è poi collegabile ad altre tematiche che si affrontano con le classi: la figura seguente mostra alcune di queste possibili connessioni.



Infine vorrei far presente che l'approccio alla probabilità (e alla statistica) può avvenire anche in modo sperimentale, utilizzando strumenti come monete, dadi o altri artefatti (Togliani, 2017).

Bibliografia

BERLOQUIN P. (1981). *Giocando alla matematica*, Milano: Vallardi.

CAVRINI G. (2017). L'apprendimento della probabilità: un'indagine su un gruppo di studenti. "Alma Mater Studiorum". Università di Bologna.

CONTUCCI P., RIGA C. (2015). The lack of probability culture in Italy, *Quality & Quantity*, Vol. 49 (6), pp 2325-2330.

DE FINETTIB. (1982). Probabilità. *Enciclopedia Einaudi*, p 1146.

FALLETTA N. (2002). *Il libro dei paradossi*, Milano, TEA.

GARDNER M. (2001). *Enigmi e giochi matematici*, Milano: SuperBUR.

LINCH P. (2011). The Two-Child Paradox: Dichotomy and Ambiguity, *Irish Math. Soc. Bulletin* (67), pp 67-73.

PAULOS J. A. (1990). *Gli snumerati*, Milano: Leonardo.

TAYLOR W., STACEY K. (2014). Gardner's Two Children Problems and Variations, *AMT* 70 (2), pp 13-19.

TOGLIANI L. (2004). Il principio della piccionaia, *Periodico di Matematiche*, Serie III Vol. 4, pp 53-60.

TOGLIANI L. (2017). Introduzione sperimentale al concetto di probabilità, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 40B n.3, pp 366-378.

Un ulteriore sguardo ad alcuni limiti notevoli

Cesare Palmisani*

*Matematico; docente in servizio presso Liceo Classico "Pietro Giannone" di Caserta; professore a contratto presso Dipartimento di Scienze Politiche Università "Federico II" di Napoli per l'a.a. 2021-22;
cesarepalmisani59@gmail.com; cpalmisani@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.077

Sunto: E' ben noto in letteratura (Wiener, 1985), (Courant-Robbins, 1950), (Giusti, 1983) che è possibile ricorrere ad un'unica relazione, la disuguaglianza di Bernoulli, per dimostrare la stretta crescita della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) e la convergenza delle successioni $\sqrt[n]{p}$ ($p > 0; n \in \mathbb{N}$); $\sqrt[n]{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Il presente lavoro si propone di verificare che è possibile ottenere gli stessi risultati attraverso le disuguaglianze HM-GM-AM-RMQ.

Parole Chiave: media geometrica, media aritmetica.

Abstract: To see if $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) is strictly increasing and if the sequences $\sqrt[n]{p}$ ($p > 0; n \in \mathbb{N}$); $\sqrt[n]{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) are convergent we can use only Bernoulli's inequality (Wiener, 1985), (Courant-Robbins, 1950), (Giusti, 1983). In the present paper we give the previous results with HM-GM-AM-RMQ inequalities.

Keywords: geometric mean, arithmetic mean.

1 - Introduzione

Richiamiamo alcune definizioni e proposizioni utili per conseguire i risultati che ci siamo prefissati.

Per ogni insieme A di n numeri reali positivi ($n \in \mathbb{N}$):

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

tra la media armonica (HM)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

la media geometrica (GM)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

la media aritmetica (AM)

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

e la media quadratica (RMS)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

sussistono (Mitrinovic, 1964) le seguenti disuguaglianze (HM-GM - AM - RMS):

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

Si sa altresì (Maligranda, 2012) che la disuguaglianza AM-GM

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

è equivalente alla disuguaglianza di Bernoulli (B)

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

essendo x un numero reale maggiore di -1 ed n un naturale positivo.

Ricordiamo (Giusti, 1983) che vale la seguente formula (Formula del Binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove a e b sono due numeri reali prefissati; n è un numero naturale prefissato; k un numero naturale compreso tra 0 ed n ; $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale di n su k .

Nel corso delle dimostrazioni richiameremo spesso l'enunciato del seguente teorema di confronto per le successioni numeriche (Marcellini, Sbordone, 2007):

Teorema dei (due) carabinieri

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$, allora anche la successione c_n è convergente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$.

Infine ci proponiamo di determinare attraverso le precedenti disuguaglianze i seguenti risultati:
la stretta crescita della successione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e i limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1 \quad (p > 0)$$

che nel seguito indicheremo rispettivamente con S , $L1$, $L2$.

2 – I risultati principali

Riportiamo di seguito alcune dimostrazioni già note in letteratura ed altre nuove dedotte dall'autore s.

2.1 – La successione S

Solitamente (Hardy, 1921; Courant-Robbins, 1950; Fiorenza-Greco, 1992) per dimostrare che la successione $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e che vale $\forall n \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza

$$2 < x_n < 3$$

si ricorre alla formula del Binomio di Newton. Qualche autore (Giusti, 1983), per abbreviare la dimostrazione, invece adopera sia il Teorema del Binomio di Newton che la disuguaglianza di Bernoulli (B). E' invece noto in letteratura (Wiener, 1985) che basterebbe anche limitarsi alla sola disuguaglianza B per conseguire il risultato.

Infatti, per ogni $n > 1$, dalla relazione

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) \end{aligned}$$

adoperando la disuguaglianza B per $x = -\frac{1}{n^2}$ si ha che

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) > \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = 1$$

da cui $x_n > x_{n-1}$. In modo analogo si dimostra la stretta decrescenza della successione $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Osservazione 1

Anche in (Fiorenza-Greco, 1992), che segue (Hardy, 1921), viene dimostrata la stretta decrescenza della y_n con la sola disuguaglianza di Bernoulli (che chiamano «conseguenza della formula di Tartaglia Newton»), ma gli autori non si accorgono che avrebbero potuto fare altrettanto con x_n .

Anche la limitatezza superiore di x_n si può conseguire indipendentemente dalla formula del binomio di Newton osservando che $\forall n \in N$,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

e che ($\forall n \in N$)

$$x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1$$

e che in particolare $x_n < y_1 = 4$ ($\forall n \in N$), oppure

$$x_n < y_2 = \frac{9}{4} = 2,25,$$

già migliore (e ottenuta con meno fatica) del 2,75 del (Fiorenza – Greco, 1992). La limitatezza inferiore di x_n è invece assicurata dalla relazione

$$2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

Deduciamo ora la stretta monotonia della successione x_n in modo indipendente dalla Formula del binomio di Newton e dalla Disuguaglianza di Bernoulli (B).

1° Metodo (mediante la disuguaglianza AM-GM)

Seguendo (Korovkin, 1975), nella disuguaglianza AM- GM poniamo $a_1 = a$ e $a_2 = \dots = a_n = b$ (a e b positivi e distinti), si ottiene

Lemma 1

$$\sqrt[n]{ab^{n-1}} = \sqrt[n]{a \underbrace{bb \dots b}_{n-1}} < \frac{a + \overbrace{b + b + \dots + b}^{n-1}}{n} = \frac{a + (n-1)b}{n}$$

cioè

$$\sqrt[n]{ab^{n-1}} < \frac{a + (n-1)b}{n}$$

In particolare la disuguaglianza precedente è valida per $a = 1$ e per $b = 1 + \frac{1}{n-1}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &< \frac{1 + (n-1)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}{n} \\ &= \frac{1 + n - 1 + 1}{n} = \frac{1 + n}{n} = 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

da cui, elevando ambo i membri della disuguaglianza alla n-ma potenza, si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ossia $x_{n-1} < x_n$ per ogni $n > 1$.

2° Metodo (mediante disuguaglianza GM-RMS, Palmisani)

Ponendo

$$a_1 = 1; a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n-1}$$

si ha, usando la disuguaglianza $GM \leq RSM^1$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \sqrt{\frac{1^2 + (n-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^2}{n}} = \\
& = \sqrt{\frac{1 + (n-1) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{n^2}{n-1}}{n}} = \sqrt{\frac{n^2 + n - 1}{n(n-1)}} = \\
& = \sqrt{\frac{n^2}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

da cui

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Elevando alla n-ma potenza ambo i membri della disuguaglianza si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

da cui l'asserto.

Ragionando in maniera analoga si prova che è strettamente crescente anche la successione

$$(1 + x/n)^n$$

dove x è un fissato numero reale diverso 0. Infatti, applicando la disuguaglianza GM-AM per

$$a_1 = 1; a_2 = \dots = a_n = \frac{x}{n-1}$$

si ottiene

$$\sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1}} < \frac{1 + (n-1) \cdot \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)}{n}$$

$$= \frac{1+n-1+x}{n} = \frac{n+x}{n} = 1 + \frac{x}{n}$$

cioè

$$\sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1}} < 1 + \frac{x}{n}$$

da cui, elevando ambo i membri ad n si ottiene

$$\left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Analogamente si può procedere adoperando la disuguaglianza GM-RMS

2.2 - Limite L1

Al fine di rendersi maggiormente conto dell'andamento della successione $\sqrt[n]{n}$ conviene premettere la seguente

Osservazione 2

Estendiamo a tutto $\mathbb{R}$ la successione

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln n}$$

considerando la funzione

$$y(x) = x^{1/x} = e^{(1/x) \cdot \ln x} = e^{\ln x / x}$$

definita in $]0; +\infty[$. La funzione $y(x)$ è positiva, continua e derivabile in tutto il dominio. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(1/x) \cdot \ln x} = 0^+; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(1/x) \cdot \ln x} = 1^+$$

La funzione $y(x)$ ammette quindi $y = 1$ come asintoto orizzontale. Determiniamo $y'(x)$ ($\forall x > 0$):

$$D e^{\ln x/x} = e^{\ln x/x} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - (\ln x)(1)}{x^2} \right) = e^{\ln x/x} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

Poiché

$$1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

allora

$$y'(x) < 0 \quad (\forall x > e)$$

Pertanto $y(x)$ è strettamente crescente in $]0; e[$ e strettamente decrescente in $]e; +\infty[$; $y'(x) = 0$ per $x = e$. Inoltre $y(x)$ ammette $e^{1/e} \sim 1,44$ come massimo (assoluto) assunto in $x = e$. Per il Teorema di Bolzano il suo codominio è un intervallo ed è dato da $]0; e^{1/e}]$. Se restringiamo la funzione $y(x)$ in $[e; +\infty[$ il codominio della funzione è $]1^+; e^{1/e}]$. Per dedurre la stretta decrescenza della successione $\sqrt[n]{n}$ (Hardy, 1921), osserviamo che

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} &\Leftrightarrow [(n+1)^{1/(n+1)}]^{n(n+1)} < (n^{1/n})^{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} = n^n \cdot n \end{aligned}$$

dividendo ambo i membri dell'ultima disuguaglianza per n^n si ottiene

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < n; \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$$

che è vera per ogni $n \geq 3$.

Risolviamo finalmente il limite L1.

1° Metodo (Sinnadura, 1961)

Generalizziamo il Lemma 1 nel modo seguente:

Lemma 2

Siano $k, r \in \mathbb{N}$ non nulli tali che $1 \leq r \leq k$. Poniamo nella disuguaglianza GM-AM $a_1 = \dots = a_r = a > 0$ e $a_{r+1} = \dots = a_k = b > 0$, allora

$$\sqrt[k]{a^r \cdot b^{k-r}} < \frac{ra + (k-r)b}{k}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{a^r \cdot b^{k-r}} &= \sqrt[k]{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_r \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{k-r}} < \frac{\overbrace{a + \dots + a}^r + \overbrace{b + \dots + b}^{k-r}}{k} \\ &= \frac{ra + (k-r)b}{k} \end{aligned}$$

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n^{1/2n} = (n^{n/2})^{1/n^2}$$

e che

$$n^{n/2} = (n^{1/2})^n = (\sqrt{n})^n = \underbrace{\sqrt{n} \cdot \dots \cdot \sqrt{n}}_n$$

per il Lemma 2 applicato per $k = n^2; r = n^2 - n; a = 1; b = \sqrt{n}$ si ha

$$\begin{aligned} n^{1/2n} &= (n^{n/2})^{1/n^2} = n^{\frac{1}{n^2}} \sqrt[n^2]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n^2-n} \cdot \underbrace{\sqrt{n} \cdot \dots \cdot \sqrt{n}}_n} \\ &< \frac{(n^2 - n) \cdot 1 + n\sqrt{n}}{n^2} \end{aligned}$$

Decomponendo l'espressione più a destra si ottiene:

$$= \frac{n^2 - n}{n^2} + \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

cioè

$$n^{1/2n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avendo tenuto conto che $1 - \frac{1}{n} < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) e che

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}} = \frac{n}{n - \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri della disuguaglianza prima ottenuta si ricava l'espressione

$$\sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Inoltre, essendo $n > \sqrt{n}$ ($\forall n > 1$) si deduce che $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ da cui ($\forall n > 1$)

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Infine per il Teorema dei due carabinieri enunciato per le successioni numeriche, dalla relazione

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

segue la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{n}$.

2° Metodo (Scott, 2000)

Osservato che ($\forall n > 1$) $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$, poniamo, nella espressione della GM-AM,

$$a_1 = a_2 = \sqrt{n}; a_3 = \dots = a_n = 1$$

Si ha ($\forall n > 1$):

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}_2 \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} < \frac{\overbrace{\sqrt{n} + \sqrt{n}}^2 + \overbrace{1 + \dots + 1}^{n-2}}{n} \\ &= \frac{2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1}{n} = \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (\forall n > 1) \end{aligned}$$

3° Metodo (1984, Norman Shaumberger)

Osserviamo che dalla relazione $1 < \sqrt[n]{n}$ ($\forall n > 1$) si trae che $1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}}$ ($\forall n > 1$). Applicando la GM-AM per

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = 1; a_n = \sqrt{n}$$

si ottiene che:

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}} &= \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1} \cdot \sqrt{n}} < \frac{\overbrace{1 + \dots + 1}^{n-1} + \sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{(n-1) \cdot 1 + \sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

ossia

$$1 < \sqrt[n]{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

da cui, elevando al quadrato ambo i membri, si ha

$$1 < \sqrt{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

4° Metodo (Palmisani, Mediante disuguaglianza GM-RMS Root Mean Square)

Mediante la disuguaglianza GM-RMS è possibile dimostrare che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Infatti

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}_2 \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} \\ &< \sqrt{\frac{(\sqrt{n})^2 + (\sqrt{n})^2 + 1^2 + \dots + 1^2}{n}} = \sqrt{\frac{n + n + n - 2}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{3n - 2}{n}} = \sqrt{3 - \frac{2}{n}} < \sqrt{3} = 1,7 \end{aligned}$$

cioè

$$1 < \sqrt[n]{n} < \sqrt{3} = 1,7 \dots$$

Infine, considerata anche la stretta decrescenza della successione $\sqrt[n]{n}$ ($n \geq 3$), per il Teorema dei due carabinieri si ottiene l'asserto.

2.3 - Limite L2

Nel dimostrare la convergenza della successione $z_n = \sqrt[n]{p}$ ($p > 0$) verso 1 mediante la disuguaglianza GM-AM, distingueremo due casi: 1° caso ($p \geq 2$); 2° caso ($0 < p < 1$).

1° caso ($p \geq 2$)

1° Metodo

Sia $p \geq 2$. Per il Lemma 1, ponendo $a = p$ e $b = 1$ si ha

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{n-1}} < \frac{p + (n-1) \cdot 1}{n} = \frac{p+n-1}{n}$$

Sia $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ ², dove $h_n > 0$. Allora

$$1 + h_n < \frac{p+n-1}{n}$$

da cui

$$0 < h_n < \frac{p+n-1}{n} - 1 = \frac{p-1}{n}$$

Per il Teorema dei due carabinieri per le successioni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$$

e quindi $\sqrt[n]{p} \rightarrow 1$.

2° Metodo

² La successione $\sqrt[n]{p}$, con $p > 1$, è strettamente decrescente e convergente ad 1 "dall'alto". Pertanto la posizione $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ è ben posta.

Possiamo procedere analogamente a quanto fatto per provare la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{n}$.

Applichiamo il Lemma 2 per

$$k = n^2; r = n^2 - n; a = 1; b = \sqrt{p}. \text{ Si ha:}$$

Elevando ambo i membri al quadrato si conserva il verso della disuguaglianza e si ottiene:

$$p^{1/n} < \left(1 + \frac{\sqrt{p}}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{p}}{n} + \frac{p}{n^2} < 1 + \frac{3p}{n}$$

Per conseguire l'ultima disuguaglianza abbiamo osservato che, essendo $\sqrt{p} < p$ ($\forall p > 1$), si ha:

$$\frac{\sqrt{p}}{n^2} < \frac{p}{n^2} < \frac{p}{n}; \frac{\sqrt{p}}{n} < \frac{p}{n}$$

Considerata che vale la doppia disuguaglianza

$$1 < \sqrt[n]{p} < 1 + \frac{3p}{n}$$

per il Teorema dei due carabinieri segue la convergenza ad 1 della successione $\sqrt[n]{p}$.

3° Metodo (Palmisani, mediante disuguaglianza GM-RMS)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{p} &= \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} \cdot 1 \cdots 1}_2^{n-2}} < \frac{\overbrace{\sqrt{p} + \sqrt{p}}^2 + \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n-2}}{n} \\ &= \frac{2\sqrt{p} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + \frac{2\sqrt{p}}{n} - \frac{2}{n} \\ &< 1 + \frac{2\sqrt{p}}{n} \end{aligned}$$

4° Metodo (Palmisani, Mediante disuguaglianza GM-RMS)

$$\begin{aligned}
1 \leq \sqrt[n]{p} &= \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} \cdot 1 \cdots 1}_2 \underbrace{\phantom{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} \cdot 1 \cdots 1}}_{n-2}} \\
&< \sqrt{\frac{(\sqrt{p})^2 + (\sqrt{p})^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}{n}} = \sqrt{\frac{p + p + n - 2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{2p + n - 2}{n}} = \sqrt{\frac{2p}{n} + 1 - \frac{2}{n}} < \sqrt{\frac{2p}{n} + 1}
\end{aligned}$$

da cui

$$1 \leq \sqrt[n]{p} < \sqrt{\frac{2p}{n} + 1}$$

Applicando il Teorema dei due carabinieri si consegue l'asserto.

2° Caso: $0 < p < 1$.

Trattiamo questo caso adoperando la disuguaglianza HM-GM³

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Poniamo

$$a_1 = a_2 = \sqrt{p}; a_3 = \cdots = a_n = 1$$

Si ha:

$$^3 \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\frac{n}{\frac{2}{\sqrt{p}} + n - 2} = \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1}} < \sqrt[n]{p}$$

$$= \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}}_2}$$

D'altro canto, raccogliendo n al numeratore e al denominatore dell'espressione più a sinistra si ha

$$\frac{n}{n\left(\frac{2}{n\sqrt{p}} + 1 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}} + 1 - \frac{2}{n}}$$

da cui

$$\frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}} + 1 - \frac{2}{n}} < \sqrt[n]{p}$$

Inoltre (vedi nota) sappiamo che $\sqrt[n]{p} < 1$ ($0 < p < 1$).

Pertanto, ($0 < p < 1$), vale la doppia disuguaglianza

$$\frac{1}{\frac{2}{n\sqrt{p}} + 1 - \frac{2}{n}} < \sqrt[n]{p} < 1$$

Invocando nuovamente il Teorema dei due carabinieri, si ha che $\sqrt[n]{p} \rightarrow 1$.

Nota bene

Siano $0 < p < 1$ e $y(x) = p^{1/x}$ ($x \neq 0$). Scriviamo $y(x) = e^{(1/x) \cdot \ln p}$. Osservato che

$$0 < p < 1 \rightarrow \ln p < 0$$

allora

$$y'(x) = e^{(1/x) \ln p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln p\right) > 0 \quad (\forall x \neq 0)$$

Pertanto $y(x)$ è strettamente positiva su tutto il dominio e, per il Teorema sulle funzioni monotone,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \sup y(x)$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = e^{0 \cdot \ln p} = 1$$

si ha che $\sup y(x) = 1$ e quindi $p^{1/x} \leq 1$ ($\forall x \neq 0$).

3 - Conclusioni

L'articolo si proponeva di gettare una nuova luce su alcune note successioni oggetto sia di corsi di Analisi Matematica 1 che di Matematica Generale proponendo dimostrazioni «alternative» che forse, pur non avendo il pregio di essere così semplici e immediate come quelle basate sulla Disuguaglianza di Bernoulli, danno l'impressione di essere più «costruttive» in quanto consentono allo studente di «intravedere» anche dei passaggi aritmetici e algebrici.

Bibliografia

COURANT Richard, ROBBINS Herbert (1950). *Che cos'è la matematica*, Torino: Einaudi.

FIORENZA Renato, GRECO Donato (1992). *Lezioni di Analisi Matematica*, Volume primo. Roma: Liguori.

GIUSTI Enrico (1983). *Analisi Matematica 1*, Torino: Boringhieri

HARDY G. H. (1921). *A Course of Pure Mathematics*, Third Edition, The Project Gutenberg eBook of A Course of Pure Mathematics

KOROVKIN P.P. (1975). *Inequalities*, Mir Publishers Moscow

MALIGRANDA Lech (2012). The AM-GM Inequality is Equivalent to the Bernoulli Inequality, *The Mathematical Intelligencer* 34, pp. 1-2

MARCELLINI P., Sbordon (2007). *Matematica Generale*. Roma: Liguori.

MITRINOVIC D.S. (1964). *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff LTD-Groningen

SCHAUMBERGER Norman (1984), Another Look at $x^{1/x}$, *The College Mathematics Journal*, Vol. 15, No. 3, pp. 249-250.

SCOTT J. A. (2000), A Graphical Approach to $n^{1/n}$, *The Mathematical Gazette*, Vol. 84, N. 501, pp. 513-515

SINNADURA J. St.-C.L. (1961). Applications of the Inequality of the Means, *The Mathematical Gazette*, Vol. 45, No. 354, pp. 330-331

WIENER Joseph (1985). Bernoulli's Inequality and the Number e , *The College Mathematics Journal*, Vol. 16, No. 5 (Nov. 1985), pp. 399-400

L'insegnamento della fisica nelle scuole secondarie di secondo grado: dalla tradizione all'innovazione

*Presentazione del IV volume dei Quaderni
dell'APAV*

Mario Innocenzo Mandrone *

*V. Presidente APAV- V. Presidente Mathesis -sez. Sannio-Irpinia

almavit@libero.it; mandronemarioinnocenzo@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.078

Sunto: La collana “I Quaderni dell’APAV” si arricchisce di una nuova pubblicazione: *L’insegnamento della Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado: dalla tradizione all’innovazione*. Essa raccoglie il materiale didattico e le relazioni tenute dai docenti durante il corso di formazione che si è svolto presso il Dipartimento di Architettura dell’Università di Napoli Federico II nel 2019 ed affronta il tema dell’insegnamento della Fisica ripercorrendo ed analizzando le continue innovazioni che le riforme hanno prodotto sulla metodologia e sui contenuti di questa disciplina, alla luce delle nuove conoscenze scientifiche in un quadro storico e filosofico adeguato. Ampio spazio, inoltre, è stato dedicato alla genesi dei concetti fondamentali e delle teorie, ai protagonisti del progresso scientifico e, in generale, alla storia e all’evoluzione della fisica. L’impostazione

metodologica proposta è indubbiamente coerente con i più attuali indirizzi pedagogici e didattici e mette in risalto la indubbia valenza culturale e formativa delle discipline scientifiche in generale e della fisica in particolare.

Parole Chiave: *Meccanica quantistica, Teoria della Relatività, Fisica atomica, Supersimmetria.*

Abstract: *The series "I Quaderni dell' APAV" is enriched with a new publication: The teaching of Physics in secondary schools: from tradition to innovation. It collects the teaching material and the reports held by the teachers during the training course that took place at the Department of Architecture of the University of Naples Federico II, in 2019 and proposes the teaching of Physics by retracing and analyzing the continuous innovations of the reforms on methodology and contents of this discipline from the historical and epistemological point of view. The genesis of fundamental concepts and theories, the protagonists of scientific progress and, in general, the history and evolution of physics is very well cared for.*

The methodological approach is certainly consistent with the most important pedagogical and didactic itineraries and emphasizes the cultural and educational value of physics in particular, and of scientific disciplines in general.

Keywords: *Quantum Mechanics, Theory of Relativity, Atomic Physics, Supersymmetry.*

1 - Introduzione

Il corso di formazione “L’insegnamento della Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado: dalla tradizione all’innovazione” rivolto ai docenti di matematica e fisica, si è svolto presso il Dipartimento di Architettura dell’Università di Napoli Federico II, nei giorni 1-8-15-22 Marzo; 5-12 Aprile; 3-10 Maggio 2019. La direzione del corso è stata affidata alla prof. Renata Santarossa, membro del Consiglio Direttivo dell’APAV. Il tema non è nuovo, ma è un tema che rientra in quella che è la preoccupazione principale dei sistemi scolastici

di tutto il mondo. L'interrogativo ricorrente nei progetti di ricerca e nei convegni che si celebrano a livello nazionale e internazionale, difatti, riguarda la presentazione delle tematiche affrontate dalla fisica del '900 e le sue interrelazioni con la matematica. È una questione che attiene, quindi, alla cultura e alla gestione dei saperi. Il corso realizzato dall'APAV – Accademia di Scienze, lettere, arti e tecnologie, in collaborazione con la sezione Mathesis "A. Morelli" di Napoli, ha affrontato tematiche che vanno dalla fisica classica alla fisica moderna e contemporanea. Il programma prevede relazioni di docenti, attività laboratoriali, occasioni in cui i docenti possano riflettere e confrontarsi sulla effettiva attività didattica realizzata in classe, al fine di rafforzare e migliorare insegnamento ed esiti dell'apprendimento. L'itinerario didattico proposto si sviluppa trattando il tema dell'insegnamento della fisica nelle scuole secondarie di secondo grado e percorrendo le continue innovazioni che le riforme hanno prodotto sui metodi e sui contenuti di questa disciplina. Il testo che presentiamo si pone, quindi, due obiettivi fondamentali: a) Ridare valore culturale alla fisica dedicando un'attenzione particolare alle grandi sintesi teoriche; b) stimolare la naturale curiosità degli studenti e sviluppare in loro, progressivamente, la capacità di osservare e descrivere il mondo fisico con strumenti interpretativi, anche matematici, sempre più generali e raffinati. Ciò vuol dire dedicare, nell'ultimo anno, molto spazio alla teoria della relatività, alla meccanica quantistica, allo studio dell'atomo e delle particelle elementari, all'astrofisica e alla cosmologia. Sarà, poi, compito del docente elaborare, attraverso scelte anche coraggiose, percorsi didattici innovativi ma coerenti. Il

testo contiene anche una raccolta dei temi più significativi di Fisica assegnati all'esame di Stato P.N.I (Piano Nazionale per l' Introduzione dell'Informatica) e Progetto Brocca, risolti e commentati in ogni singola parte, nonché le simulazione di Fisica e le prove multidisciplinari di Matematica e Fisica proposte dal MIUR, in accordo con quanto previsto dal Decreto MIUR del 18/01/2019 che prevede, per l'esame conclusivo del corso di studi nei Licei Scientifici, una prova mista di Matematica e Fisica. Si tratta di una verità assoluta visto che la prova in questione ha sempre proposto la sola matematica a partire dal 1923 e fino all'anno scolastico 2017/18.

Per quanto riguarda la formazione in servizio degli insegnanti di fisica (e non solo), è auspicabile una sempre più forte e aggiornata sinergia tra Scuola e Università anche in considerazione del fatto che il mondo della ricerca, della scienza, del lavoro e la stessa comunità scolastica hanno da sempre sollecitato continue revisioni dei programmi e degli ordinamenti della scuola secondaria superiore in relazione agli sviluppi culturali emergenti. Sono stati istituiti, nel tempo, nell'ambito dei piani nazionali d'aggiornamento, seminari, corsi per l'aggiornamento dei docenti di fisica con l'obiettivo di favorire l'acquisizione di conoscenze più complete relativamente ai contenuti di fisica moderna, da approfondire negli aspetti didattici, e di abilità operative riguardo all'attività nei laboratori di Fisica. L'insegnamento della fisica, cristallizzato da decenni di tradizione nella scelta dei contenuti e nei metodi, fu rivitalizzato dalla introduzione della prova scritta obbligatoria negli Istituti che sperimentavano il programma di fisica del PNI con almeno tre

ore settimanali di lezione. Nella prova scritta erano previsti non solo problemi ed esercizi, ma anche saggi brevi, test e relazioni di laboratorio e prevedevano, nel triennio, una massiccia introduzione della fisica moderna. Le Indicazioni Nazionali si sono fatte carico di tutto ciò. Esse rappresentano quei contenuti fondanti e imprescindibili intorno ai quali viene individuato un patrimonio condiviso sia a livello nazionale che europeo. Nelle Indicazioni Nazionali, alla fisica viene riconosciuto un ruolo essenziale in quanto strumento per far comprendere agli studenti le metodologie dell'indagine scientifica e le forti connessioni con il pensiero filosofico. Inoltre, non si sottovaluta il forte valore formativo della pratica sperimentale quale modalità per investigare i fenomeni naturali. È doveroso, però, a questo punto, ricordare che l'insegnamento della Fisica in Italia (e delle scienze in generale) ha avuto un incerto destino: centrale per il ruolo riconosciuto al sapere scientifico e tecnologico nelle società moderne, ma accessorio rispetto ai valori legati alla formazione culturale di cittadini consapevoli e responsabili. A tutt'oggi, nonostante le tante dichiarazioni di principio, permane la frattura, la separazione implicita tra l'istruzione scientifica e tutte quelle abilità trasversali che concorrono alla formazione dello studente. Indubbiamente una delle principali cause di tale disaffezione è da ricercarsi in alcune dinamiche in azione ancora oggi nella scuola reale compatibili, purtroppo, anche col disegno della scuola futura. Per questo motivo, a mio avviso, sebbene i contenuti siano stati periodicamente modernizzati non hanno prodotto alcun rinnovamento, nessun impatto realmente significativo. L'apprendimento scientifico, pertanto, ancora oggi non gode di

buona salute e in nessun paese al mondo è ritenuto adeguato alle esigenze della società moderna. Il problema è ovviamente complesso, molto più complesso di quanto appaia dal dibattito tra gli esperti.

2 - Le relazioni del corso di formazione

Il corso si apre con la relazione del prof. F. Casolaro dal titolo: Quale geometria per lo spazio fisico? Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il modello di Minkovski. Il lavoro propone un modello di geometria analitica che, partendo dalla teoria dei vettori nell'ambito dello studio della Fisica, possa giungere alla presentazione di equazioni lineari sulla superficie sferica analoghe a quelle che rappresentano la retta nel piano ed il piano nello spazio euclideo (muniti di riferimento cartesiano), rispettivamente, come iperpiani di S_2 e di S_3 . L'autore, dopo una breve analisi storica sul problema della curvatura dell'Universo, fa riferimento allo sviluppo della geometria ellittica (indirizzo metrico-differenziale) di Riemann (1826-1866) di cui la geometria sferica è un caso particolare. Lo stesso propone, pertanto, un percorso didattico che, attraverso le interrelazioni tra Matematica e Fisica, consenta di introdurre nella Scuola Secondaria Superiore concetti che sono oggetto di studio nei corsi universitari di Geometria.

La relazione presentata dai prof. R. Prosperi e F. Casolaro, invece, è un invito a riflettere principalmente sulla didattica della Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado, in particolare per quanto concerne il primo biennio, in cui si affrontano argomenti di fisica classica che richiedono l'utilizzo

di strumenti matematici non ancora in possesso degli alunni. Nel primo biennio si affronta, difatti, lo studio della statica (anche dei fluidi), della cinematica e della dinamica, giungendo a parlare di leggi di conservazione ed introducendo la quantità di moto, il lavoro e l'energia, lo studio dell'ottica geometrica e dei fenomeni termici. Anche a causa dell'inadeguatezza degli strumenti matematici in possesso degli studenti del biennio, lo studio della fisica va riportato entro due binari fondamentali, che sono:

1. Un percorso coerente che si snoda attraverso gli argomenti della disciplina riuscendo a mostrare l'evoluzione storica e scientifica dei suoi concetti fondanti;
2. Un livello dei contenuti che sia coerente con gli strumenti matematici già in possesso dello studente oppure con quelli che vengono gradualmente acquisiti nel corso parallelo di matematica.

Per tale motivo, secondo gli autori (e non solo) nel primo biennio occorre dare alla disciplina un taglio di tipo esperienziale e pratico, che, gradualmente, potrà convivere con un approccio più formale. Il lavoro contiene alcune proposte su come poter introdurre nei corsi di Matematica, in modo pratico e intuitivo, concetti e strumenti relativi alla Geometria Euclidea nel piano e nello spazio, propedeutici allo studio della Fisica. Tra l'altro, per quanto concerne la didattica della fisica nel primo biennio, le Indicazioni Nazionali prevedono un approccio sperimentale alla disciplina per iniziare a costruire il linguaggio della fisica classica, semplificando e modellizzando situazioni reali, risolvendo

consapevolmente problemi e rielaborando il percorso in maniera critica, proponendo relazioni di sintesi e semplici modellizzazioni. L'impianto teorico e la formalizzazione sono demandate, ovviamente, al secondo biennio.

Il prof. Andrea Lanzillo, docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico Statale "A.M. De Carlo" - Giugliano (Napoli), analizza i cambiamenti che si sono registrati nei contenuti e nella didattica della fisica attraverso la risoluzione delle simulazioni della prova di Matematica e Fisica proposte dal Miur, nonché dei quesiti di Matematica e Fisica assegnati per la prova finale dell'esame di stato nell'anno scolastico 2018-19. I temi proposti per l'esame di stato e risolti dal prof. Lanzillo bene si prestano dal punto di vista didattico a stimolare le strutture cognitive degli studenti in modo da metterli in grado di elaborare in maniera corretta e significativa le richieste dei problemi presenti nei temi scelti, fornendo anche indicazioni metodologiche risolutive e dando senso e applicazione alle interrelazioni tra tutti i contenuti studiati. I vari esercizi e problemi proposti mirano, in particolare, a verificare la comprensione e la padronanza del metodo scientifico, la capacità di argomentare correttamente, di formulare ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi, di formalizzare situazioni problematiche, interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto, rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici, descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva, comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.

Nel lavoro presentato dal prof. Mandrone si discute dell'evoluzione dell'insegnamento della fisica in Italia prendendo spunto dai temi più significativi proposti agli esami di stato di liceo scientifico sperimentale P.N.I e Progetto Brocca. I problemi presentati sono stati risolti adottando le strategie del "Problem Solving" che, in sostanza, suddividono la risoluzione di un problema in tre parti: 1. Analisi del testo; 2. Strategia risolutiva ovvero a) ricerca delle variabili da trattare analiticamente; b. ricerca del modello matematico atto alla risoluzione; 3. Analisi dei risultati. L'applicazione del secondo punto, cioè la ricerca di un modello matematico per un sistema che evolve nel tempo, richiede una certa abilità concettuale. Un modello matematico è: a) la rappresentazione di un fenomeno; b) tale rappresentazione non è descrittiva o discorsiva, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico; c) non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica. In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica. Quindi, per modello matematico deve intendersi la rappresentazione formale di idee e conoscenze relative ad un fenomeno.

Questa definizione comprende in sé sia quanto affermato dalla scuola positivista di Copenaghen (N. Bohr), sia dalla scuola realista (A. Einstein).

Durante l'attività laboratoriale sono stati proposti e risolti, a cura del prof. Mandrone, alcuni temi di Fisica, tra i più significati assegnati all'Esame di Stato nei Licei Scientifici sperimentali-Progetto Brocca, quali : 1) Esame di Stato di Liceo Scientifico Sperimentale- Anno 1983-Tema n° 3; 2) Prova scritta di Fisica-Esame di Stato-Liceo Scientifico Sperimentale- Anno 1984-Tema n°1; 3) Esame di Stato di Liceo Scientifico-

Indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca-Anno 1999 ;
4) Esame di Stato- Liceo Scientifico-Corso Sperimentale-Anno 2000-Progetto Brocca; 5) Esame di Stato di Liceo Scientifico-Tecnologico-Anno 2010- Corso Sperimentale- Progetto Brocca;
6) Esame di Stato di Liceo Scientifico-Tecnologico-Anno 2014- Corso Sperimentale- Progetto Brocca. I problemi affrontati vertono sulle tematiche di seguito specificate.

1. Esame di Stato di Liceo Scientifico Sperimentale- Anno 1983-Tema n° 3

Il problema riguarda il moto di particelle cariche in un campo magnetico uniforme e le possibili applicazioni in ambito scientifico e tecnologico. Si chiede, inoltre, di descrivere le caratteristiche fondamentali delle macchine acceleratrici di particelle. I primi acceleratori di particelle risalgono agli anni 1920/30 e furono realizzati per studiare i costituenti microscopici della materia. I metodi per accelerare particelle sono basati sull'uso congiunto di campi elettrici e magnetici. I primi forniscono energia alle particelle cariche accelerandole, mentre i secondi servono eventualmente a curvarne la traiettoria sfruttando la forza di Lorentz (ad es. negli acceleratori circolari: ciclotrone e sincrotrone) o a correggere dispersioni spaziali e di impulso dei fasci accelerati.

2. Prova scritta di Fisica-Esame di Stato-Liceo Scientifico Sperimentale- Anno 1984-Tema n°1

Il tema proposto rientra nell'ambito della analisi dei circuiti in corrente alternata. In particolare si chiede di esporre la teoria dei circuiti R-L-C, contenenti resistenza, induttanza e

capacità in serie, in corrente alternata. Le richieste del problema non presentano di per sé difficoltà, ma sono relative ad un argomento- i circuiti R-L-C con alimentazione in alternata- che raramente viene affrontato in un corso di Fisica nei Licei Scientifici. Si tratta, infatti, di un argomento alquanto specialistico.

3. Esame di Stato di Liceo Scientifico- Indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca-Anno 1999

Si chiede al candidato di determinare il rapporto e/m tra carica e massa di un elettrone in cui gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (noto anche come effetto termoionico). Successivamente si chiede di descrivere e spiegare l'effetto termoelettronico, di determinare la traiettoria di un elettrone in moto con velocità v in un campo di induzione magnetica, di ricavare e commentare la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica stessa.

4. Esame di Stato- Liceo Scientifico-Corso Sperimentale- Anno 2000- Progetto Brocca

Il tema proposto vuole che il candidato affronti la discussione sulla meccanica ondulatoria di Schrodinger, sulla dualità onda-corpuscolo, che rifletta e discuta dell'effetto fotoelettrico spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero e su alcune applicazioni per la cui soluzione si richiede la conoscenza del principio di indeterminazione di Heisenberg (1901-1976).

5. Esame di Stato di Liceo Scientifico-Tecnologico-Anno 2010- Corso Sperimentale- Progetto Brocca

Nel tema proposto si invita il candidato a “prestare particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, alle cifre significative e alle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.” Successivamente si chiede di descrivere l’interpretazione ondulatoria del comportamento dell’elettrone, secondo l’ipotesi di Louis De Broglie; di spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull’interpretazione probabilistica della funzione d’onda e sul principio di indeterminazione di Heisemberg.

6. Esame di Stato di Liceo Scientifico-Tecnologico-Anno 2014- Corso Sperimentale- Progetto Brocca

Il candidato è invitato a descrivere l’effetto Compton ed analizzare le equazioni che lo caratterizzano, ad esporre il concetto di lunghezza d’onda di Compton soffermandosi in particolare sul motivo per cui l’effetto in esame è considerato una delle più importanti prove sperimentali dell’interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche. Si chiede, infine, di esporre cosa si intende per aspetto corpuscolare delle radiazioni elettromagnetiche.

Per ogni problema risolto, nella discussione preliminare dei temi affrontati viene riportata una tabella delle leggi fondamentali afferenti allo specifico problema con l’indicazione di quelle leggi che, con maggiore probabilità, ad una analisi preventiva del testo, appaiono come quelle che permetteranno la soluzione del problema. Naturalmente l’approccio indicato per la soluzione dei temi vuole essere una

proposta di metodo, non unica ma un esempio di “come procedere”. I problemi si concludono con considerazioni di ordine generale sia relative a possibili campi di applicazione, sia relative a modi alternativi di affrontare la soluzione dello stesso problema. Infine, nella discussione teorica dei problemi proposti si è sempre focalizzata l’attenzione su alcuni obiettivi irrinunciabili a cui l’insegnamento della Fisica deve tendere, che sono:

1. riconoscere l’ambito di validità delle leggi scientifiche;
2. definire operativamente le grandezze fisiche;
3. analizzare fenomeni individuando le variabili che li caratterizzano;
4. conoscere, scegliere e gestire strumenti matematici adeguati e interpretarne il significato fisico;
5. utilizzare il linguaggio specifico della disciplina;
6. comunicare in modo chiaro e sintetico le procedure seguite nelle proprie indagini, i risultati raggiunti e il loro significato;

Per quanto riguarda gli aspetti metodologici, l’impostazione proposta, sia nei temi della versione PNI che in quelli del Progetto Brocca, è certamente condivisibile non solo perché coerente con i più attuali indirizzi pedagogici e didattici ma anche perché mette in risalto la indubbia valenza culturale e formativa delle discipline scientifiche in generale e della fisica in particolare.

Il prof. Ferdinando Di Martino del Dipartimento di Architettura dell’Università degli Studi di Napoli Federico II ha proposto riflessioni ed approfondimenti sulla storia della Meccanica Quantistica e della Teoria della Relatività. In

questo studio sono analizzate le onde gravitazionali e le recenti prove sperimentali della loro esistenza. E' inoltre compiuta una breve trattazione dei processi evolutivi stellari che danno luogo alla formazione di oggetti massicci quali stelle di neutroni e buchi neri e sono analizzati i rilevatori interferometrici di onde gravitazionali. La scoperta dei fenomeni quantistici e la loro rappresentazione nel quadro di una teoria sufficientemente completa e coerente, fa parte della visione scientifica da così lungo tempo e con così tante applicazioni pratiche da essere da tutti ammessa la necessità di una sua adeguata presentazione agli alunni della scuola secondaria di secondo grado. Il secondo intervento del prof. Di Martino è focalizzato sull'analisi delle motivazioni che hanno condotto alla nascita nel ventesimo secolo della Meccanica Quantistica con la produzione di modelli sempre più complessi dell'atomo di idrogeno, fino ai modelli di Bohr e di Bohr-Sommerfeld. Vengono, inoltre, esplorati i concetti base della moderna meccanica quantistica con cenni a scoperte e teorie recenti, quali il bosone di Higgs e la teoria delle stringhe. L'intervento del prof. Di Martino si chiude con considerazioni e riflessioni sulla relatività ristretta e cenni di relatività generale. In tale proposta vengono esplorate le principali problematiche che hanno condotto alla nascita della relatività ristretta e le conseguenze fisiche della teoria. Inoltre è descritta una introduzione alla teoria della Relatività Generale e sono analizzate le sue conseguenze sullo studio dei modelli di universo. L'obiettivo è quello di:

1. riconoscere i limiti della fisica classica nello spiegare alcuni particolari effetti (radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton);

2. riconoscere il dualismo onda-corpuscolo in alcuni specifici fenomeni (diffrazione degli elettroni e dei neutroni, esperienza di Janossy-Naray), acquisire familiarità con le proprietà ondulatorie e corpuscolari dei fotoni e capire che tutte le particelle in moto hanno proprietà ondulatorie (onde di de Broglie).
3. Desumere da alcuni esperimenti (diffrazione di un fascio di elettroni, osservazioni al microscopio) le relazioni di indeterminazione di Heisenberg;
4. Acquisire familiarità con il formalismo della meccanica quantistica, almeno riconoscendo come lo stato del sistema è descritto da funzioni d'onda e le osservabili misurabili (quantità fisiche) da operatori;
5. Saper distinguere tra la teoria classica, che è deterministica, e quella quantistica, che è probabilistica.

Il corso si chiude con l'intervento dei docenti F. Casolaro e A. Trotta che hanno presentato un interessante lavoro dal titolo *"Il modello standard ed oltre.....Il bosone di Higgs"*. In tale proposta si discute del Modello Standard che descrive con successo le interazioni tra le particelle elementari e fornisce una descrizione delle forze fondamentali agenti tra particelle, in particolare dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione debole, entrambe manifestazioni di un'unica forza che prende il nome di forza elettrodebole. Tale modello è basato sulla teoria quantistica dei campi ed è, a tutt'oggi, ritenuto coerente sia con la meccanica quantistica che con la relatività ristretta. Purtroppo il modello standard funziona molto bene in determinati range energetici, quelli al sotto dei

TeV, ma evidenzia i suoi limiti quando viene messo alla prova delle alte energie, tipiche dei nuovi acceleratori. Il lavoro presenta anche una riflessione sulla scoperta di una particella di tipo Higgs a circa 125 GeV avvenuta il 12 Luglio 2012, in seguito ai risultati degli esperimenti ATLAS e CMS a cui è stato dato il nome di bosone di Higgs, dal nome del fisico scozzese Peter Higgs che, per primo, ne teorizzò l'esistenza fin dagli anni Sessanta. Gli autori, successivamente focalizzano l'attenzione sulla Grant Unified Theory (G.U.T.), elaborata nel 1974 da Glashow e poi completata da Salam e Weinberg. (Per le ricerche teoriche sulla unificazione delle forze fondamentali S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg nel 1979 furono insigniti del premio Nobel per la fisica). Anche se, indubbiamente, la GUT rappresenta un passo avanti rispetto al modello standard, essa non è ancora in grado di coinvolgere pure l'interazione gravitazionale. In altre parole la meccanica quantistica è incompatibile con la teoria gravitazionale di Einstein formulata nella Relatività Generale. Gli autori, nella loro presentazione, evidenziano, perciò, la necessità di andare oltre la GUT. Ciò porta a postulare l'esistenza di nuove leggi di simmetria; ci si riferisce in particolare alla cosiddetta "Supersimmetria" (detta brevemente SuSy, dalle iniziali inglesi) introdotta già da alcuni anni dai fisici teorici S. Ferrara, J. Wess e B. Zumino. La ricerca è appena iniziata; il futuro, però non è dietro l'angolo.

3 – Conclusioni

I primi trent'anni del secolo scorso, i cosiddetti anni d'oro della fisica, sono stati caratterizzati da un continuo succedersi

di scoperte e di teorie fra le quali primeggiano, indubbiamente, la relatività einsteiniana e la meccanica quantistica. I fenomeni radioattivi evidenziati da Becquerel, i lavori teorici di Planck e di Einstein, gli esperimenti di Rutherford, Millikan e Bohr, le sconvolgenti idee di De Broglie e di Heisenberg sconvolsero dalle fondamenta le certezze della fisica classica. E così, verso la fine dell'800 il programma meccanicista entrò in una crisi che assunse connotati sempre più gravi e poi addirittura drammatici. Con le teorie della Relatività Speciale e Generale di A. Einstein si mise in discussione tutto l'edificio newtoniano relativo allo spazio, al tempo fisico e alla forma stessa della descrizione matematica dei fenomeni relativi alla gravitazione universale. La crisi provocata poi dalle teorie quantistiche fu ancora più grave. Con il principio di indeterminazione di Heisenberg, infatti, secondo il quale non è possibile determinare simultaneamente posizione e velocità di una particella, si colpiva al cuore la base di ogni determinismo classico mettendo in crisi la visione illuministica laplaciana e minando alle fondamenta una certezza deterministica che durava da più di tre secoli. La scoperta principale è che regole e leggi perfettamente deterministiche possono produrre un moto completamente caotico e assolutamente imprevedibile. Ci vollero, però, circa 50 anni per giungere a nuove teorie, capaci di studiare più ampiamente il sistema come quelle dei sistemi dinamici non lineari e del caos deterministico. È questa la terza grande rivoluzione scientifica del secolo scorso dopo la teoria della Relatività e la Meccanica Quantistica.

La portata culturale di queste tre grandi teorie, che seguono, comunque, un ciclo di studi durato più di 300 anni,

impone che esse siano patrimonio culturale comune anche perché le implicazioni filosofiche e le conseguenze epistemologiche da esse introdotte hanno cambiato completamente il nostro modo di concepire la realtà e, quindi, la “visione del mondo” che da esse può derivare.

Oggi siamo ancora alla ricerca di una teoria unitaria, ma il quadro delle scienze sta cambiando profondamente. Da un lato si sta perseguendo la strada dell’unificazione aperta dalla Relatività e dalla Teoria Quantistica dei campi, oggi impegnata nell’impresa non facile di quantizzare la gravitazione, dall’altro ci si è imbattuti nel problema della non linearità, ormai inevitabile anche a causa della stessa Relatività Generale che l’ha introdotta per prima con la comparsa della instabilità, del caos deterministico e della complessità e non sappiamo ancora quale sarà l’esito di tutto questo.

Bibliografia

ASHETEKAR A., 1998, «Geometric Issues in Quantum Gravity», in *The Geometric Universe. Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. by S.A. Hugget, P. Tod, L. J. Mason, Oxford, Oxford University Press, pp. 172-194.

BARONE V. (2004). *Relatività. Principi ed applicazioni*. Torino: Bollati Boringhieri

DIRAC P.A.M. (1959). *I principi della meccanica quantistica*. Torino: Bollati Boringhieri

HEISENBERG W. (2016). *I principi fisici della teoria dei Quanti*. Torino: Bollati Boringhieri

LIGO Caltech (2016). What are Gravitational Waves? Available on line at: <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>

MANDRONE M. (2014) Mathematics and Relativity: Reflections between history and epistemology. *Scienze and Philosophy* Pescara: APAV

MANDRONE M. (2015) History and epistemology of mathematical analysis: from the method of exhaustion to the defined integral. Overview on non-standard analysis. *Science and Philosophy*. Pescara: APAV

TAYLOR J. H. , Weisberg J.M. (1982). A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1513-16. *Astrophysical Journal* 253, 908-920 DOI: 10.1086/159690



“Due giorni per la Scuola: Matematica, Filosofia, Letteratura”

*Manifestazione inaugurale dell'ITI “G.
Ferraris” come sede legale dell'Associazione
Mathesis Napoli “Aldo Morelli”*

Giuseppe Mangione*, Giuseppina Monteasi**

*ITI “G. Ferraris”; pinoman2005@libero.it

**ITI “G. Ferraris”; pina.montesi@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.79

Sunto: Si dettaglia sulle tematiche presentate al Convegno “Due giorni per la Scuola: Matematica, Filosofia, Letteratura” che si è svolto in doppia modalità, presenza-remoto, nei giorni 18-19 marzo 2022.

Parole Chiave: Matematica, Filosofia, Letteratura, Interdisciplinarietà.

Abstract: Details of the topics presented at the Conference "Twodays for the School: Mathematics, Philosophy, Literature" which took place in a double modality, presence-remote, on 18-19 March 2022.

Keywords: Mathematics, Philosophy, Literature, Interdisciplinarity.

1 - Introduzione

Nelle giornate di venerdì 17 e sabato 18 marzo 2022, l'Istituto Tecnico Industriale Galileo Ferraris di Napoli ha ospitato la Manifestazione "Due giorni per la Scuola: Matematica, Filosofia, Letteratura", organizzata dall'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" in collaborazione con l'Istituto stesso e col patrocinio del Comune di Napoli e del Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio. L'evento inaugurale dell'ITI "G. Ferraris" come sede legale dell'Associazione, ha visto avvicinarsi per due intense giornate gli interventi di docenti universitari e della scuola secondaria sul tema dell'interdisciplinarietà, con alcune piacevoli "incursioni" di gruppi di studenti che si sono resi protagonisti in prima persona. Come recita l'incipit di presentazione della Manifestazione, l'obiettivo di questa "due giorni per la scuola" è stato quello di evidenziare e sviluppare alcuni possibili legami tra filosofia, letteratura e matematica, e fornire spunti ai docenti per mettere a punto lezioni e attività laboratoriali coinvolgenti e motivanti, al fine di valorizzare quanto più possibile i talenti presenti tra i loro studenti. A tal proposito, il prof. Aniello Buonocore, Presidente dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", nel commentare le motivazioni relative alla scelta del titolo "Matematica, Filosofia, Letteratura", si è così espresso:

Una domanda scontata come incipit di questa manifestazione potrebbe essere: qual è il contributo che ha dato la matematica alla filosofia? D'altra parte, però, si può anche parlare di un contributo della filosofia nella costruzione di alcune teorie matematiche, come ad esempio nella teoria degli infinitesimi di Leibnitz o nella teoria degli insiemi di Cantor.

In più, esistono evidenti legami tra teorie di carattere estremamente tecnico con posizioni di carattere filosofico: ad esempio lo sviluppo delle serie trigonometriche e poi di Fourier con lo sviluppo in forma sempre più astratta del concetto di funzione. Ma anche la letteratura si è intrecciata nel corso dei secoli scorsi con la matematica. Basti pensare alla matematica presente nella Divina Commedia (sulla quale ci si potrebbe chiedere se appartiene alla scolastica oppure a quella di Fibonacci), oppure in Borges o in Calvino o in tante altre opere (ad esempio, in Lewis Carroll si possono ritrovare molte situazioni intriganti che hanno molto a che fare con la logica). L'obiettivo di questa due giorni per la scuola è allora quello di evidenziare e sviluppare questi legami per fornire spunti ai docenti nella ideazione di lezioni e attività laboratoriali stimolanti e in grado di coinvolgere la totalità dei talenti presenti nelle loro scolaresche.

Sicuramente, con queste parole, il Presidente ha voluto stimolare i docenti e gli studenti a non lasciare in sospeso le osservazioni emerse durante i lavori della manifestazione, ma di dare continuità in futuro con analoghe iniziative.

Il Comitato scientifico-organizzatore è stato costituito dai seguenti docenti: Loredana Biacino, Rosa Buonanno, Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro, Marco D'Errico, Ferdinando Di Martino, Alessandra Fogliano, Giangiacomo Gerla, Giuseppe Mangione, Giuseppina Monteasi, Alessandra Rotunno, Renata Santarossa, Salvatore Sessa, Umberto Salzano, Maria Talamo.

I lavori sono stati introdotti dal prof. Saverio Petitti, Dirigente Scolastico ITI "Galileo Ferraris", coadiuvato dal Presidente dell'Associazione "Aldo Morelli", prof. Aniello Buonocore, che ha invitato gli ospiti, di seguito indicati, a portare il saluto della propria istituzione di appartenenza:

Maria Filippone, Vicesindaco con delega all'Istruzione del comune di Napoli, con profonde conoscenze della realtà scolastica, essendo stata prima docente e poi dirigente

scolastico del liceo “Genovesi” e del liceo “Sannazzaro” di Napoli.

Vincenza Amato, Presidente del Consiglio Comunale di Napoli, che ha espresso la totale vicinanza del Consiglio ad attività di questo tipo, alle quali non mancherà di dare il proprio contributo anche nel seguito.

Gli interventi sono stati divisi in tre sessioni, ognuna seguita da dibattito sul tema affrontato.

2 - Prima sessione. Logica e Matematica: un confronto tra i tempi di Dante e l'era moderna

La prima sessione, presieduta dalla prof.ssa Giovanna Della Vecchia sul tema “Logica e Matematica: un confronto tra i tempi di Dante e l'era moderna”, è stata aperta dalla conferenza dei proff. Serafina Ippolito e Ferdinando Casolaro, *Il Paradiso secondo Dante, secondo Eduardo*, seguita poi dal prof. Giuseppe Mangione, *La Filosofia come ponte tra le discipline: Eduardo tra Socrate e Dante*. La sessione è proseguita con l'intervento dei ragazzi della classe 5° C del “Ferraris”, presentati dalla prof.ssa Giuseppina Monteasi e coordinati dalla prof.ssa Maria Lento, che hanno illustrato la figura di Eduardo come *Socrate del teatro napoletano del Novecento*.

Casolaro e Ippolito hanno fondato il loro intervento sulle *Analogie e differenze tra la Firenze di Dante Alighieri nel Basso Medioevo e la Napoli di Eduardo De Filippo nel neorealismo della seconda metà del XX secolo*.

Dal dialogo di Dante con Cacciaguida e dall'analisi dei versi relativi alla sorte di Guido da Montefeltro nella *Divina Commedia*, relegato all'inferno per “falso pentimento”,

emergono aspetti che ritroviamo nell'opera di Eduardo De Filippo *Vincenzo De Pretore*, di cui Ippolito ha brillantemente declamato alcuni versi del dialogo a tre De Pretore-San Giuseppe-Dio, dialogo che convince Nostro Signore ad accogliere De Pretore in Paradiso, che faceva di professione il ladro ma "per necessità".

Mangione, docente del "Ferraris", ha sottolineato l'affinità tra la proposta didattica elaborata nell'intervento di Ippolito-Casolaro con determinate attività progettuali dell'Istituto, che si propongono di avvicinare gli studenti alla conoscenza di alcuni rudimenti della filosofia, utilizzando le straordinarie potenzialità che questa offre nel costruire "ponti" tra le diverse discipline. In particolare la sua relazione ha esplorato il rapporto tra logica e "valori", in Socrate e Dante, proponendo poi una rivisitazione della poetica eduardiana in chiave "socratica". Gli studenti della 5 C° della prof.ssa Lento hanno ripreso il tema proposto da Mangione, illustrando la figura di Eduardo de Filippo con una performance dove si è particolarmente distinto lo studente Domenico Napolano che, oltre al lavoro di ricerca ed assemblaggio dei testi, si è reso autore di una pregevole ed applaudita interpretazione del monologo finale di "Napoli milionaria".

I lavori della giornata si sono conclusi con uno stimolante dibattito sul tema dell'universalità dei valori etici e sulle implicazioni filosofico-matematiche della speculazione platonica, che ha visto confrontarsi i proff. Biacino, Gerla e Mangione.

3 - Seconda sessione. Interdisciplinarietà e Didattica

La seconda sessione, che ha affrontato il tema “Didattica e interdisciplinarietà”, è stata presieduta dalla prof.ssa Rosa Buonanno e si è articolata principalmente intorno alle suggestive questioni dell’infinito e del rapporto tra matematica e poesia, o meglio della “poeticità” della matematica. I lavori sono stati introdotti dalla conferenza della prof.ssa Maria Talamo, *Imbrigliare l’infinito*, a cui hanno fatto seguito quella della prof.ssa Giovanna Della Vecchia, *Matematica è Poesia*, della prof.ssa Loredana Biacino, *Successioni geometriche e dintorni* e del prof. Salvatore Rao, *Infiniti infiniti?*

Della Vecchia, facendo riferimento alla valenza pedagogica di un dialogo più fecondo tra matematica e letteratura, ha presentato una proposta didattica che mette in evidenza analogie e interrelazioni esistenti tra l’insegnamento della letteratura e della matematica a favore di una visione unitaria del sapere. Nel suo intervento individua nella matematica la chiave d’accesso privilegiata per la comprensione di ogni tipologia di testo e, in relazione soprattutto al testo poetico, fornisce numerosi esempi indicativi di quanto la matematica abbia ispirato e supportato la scelta metrica di componimenti letterari.

Biacino ha preso spunto da uno dei primi argomenti che si trattano quando si comincia il secondo ciclo, la formula che dà la somma dei primi termini di una serie geometrica, illustrandone le origini sin nell’antico Egitto e nell’antica Grecia, con riferimenti a Euclide, Archimede, al papiro di Rhind fino alla *Divina Commedia*. Il discorso si è subito

allargato alla considerazione delle serie geometriche, argomento che ha attratto anche l'interesse di un matematico della tarda Scolastica, Nicola Oresme, che propose interessanti visualizzazioni geometriche per determinare la somma di alcune serie. Infine è stato anche illustrato, in applicazione, l'insieme di Cantor, uno dei più semplici frattali, che sono divenuti oggetti di studio solo nello scorso secolo.

Rao e Talamo hanno trattato in modo esaustivo le tematiche legate al concetto di "infinito", nelle loro diverse articolazioni matematiche e fisiche, fornendo inoltre spunti di riflessione sulle conseguenti implicazioni filosofiche.

Infine sono intervenuti i ragazzi delle classi 5°M e 5°N del Ferraris, coordinati dalla prof.ssa Alessandra Fogliano, che hanno presentato un'originale ed apprezzata rivisitazione, in chiave "teatrale", del dibattito filosofico-matematico sui paradossi di Zenone.

La sessione si è conclusa con la discussione, curata dal prof. Casolaro, nella quale sono state sviluppate le suggestioni offerte dalle ricche e stimolanti conferenze degli intervenutiesi sono sottolineate le straordinarie potenzialità di una didattica aperta alla contaminazione tra discipline ed alla trattazione di tematiche specifiche da punti di vista diversi ma complementari.

4 - Terza sessione. Riflessioni filosofiche nell'evoluzione della matematica

La sessione conclusiva "Riflessioni filosofiche nella evoluzione della matematica" è stata presieduta dalla prof.ssa Alessandra Rotunno. Alla affascinante introduzione della

prof.ssa Elena de Filippis, *Matematica e filosofia: le radici del pensiero itinerante*, sono seguite le autorevoli conferenze del prof. Carlo Toffalori, *Da Platone a Peano: l'induzione matematica tra storia e didattica*, e del prof. Giangiacomo Gerla, *Il continuo in Aristotele e la "Pointless" Geometry*.

De Filippis, nel suo magistrale intervento che spazza via ogni spartizione tra le due culture, ha fatto presente come da oltre mezzo secolo si parla di "letteratura scientifica" e di "scienze umane", indicando riferimenti bibliografici quali "La rivoluzione scientifica: da Copernico a Newton" di Paolo Rossi, edito Loescher 1973, "La filosofia dell'infinito", (Georg Cantor, scritti scelti nel periodo 1884-1888), a cura di Emilio Ferrario e Patrizia Pozzi, edito Mimesis 2021, ..., ed altre interessanti disquisizioni sul tema, oggi facilmente reperibili attraverso Internet.

Toffalori ha trattato uno dei cardini dell'aritmetica, il principio di induzione. L'intuizione che i numeri naturali si susseguono a partire da 0 aggiungendo 1 è antichissima, ma solo a fine Ottocento, con Dedekind e Peano, si avverte il ruolo fondamentale che questa legge riveste nell'aritmetica. Il principio di induzione è anche strumento potente di dimostrazione: il "*ragionamento matematico per eccellenza*", lo definisce Poincaré. Tuttavia per gli studenti non sempre è facile capirlo e applicarlo consapevolmente. La storia della genesi del principio di induzione, dai tempi andati a Peano e oltre, può aiutare la sua comprensione e il suo uso didattico.

La comunicazione di Gerla parla delle nozioni astratte di punto, linea, superficie come erano considerate in Euclide ed in Aristotele. Si mostra come il punto di vista di Aristotele, totalmente diverso da quello di Euclide, sia presente in recenti

ricerche note sotto il nome di “point-free geometry”. In tali ricerche si mostra come sia possibile fondare la geometria euclidea non riferendosi alla nozione di punto ma a quella di regione dello spazio o, se si vuole, di corpo solido. In tali approcci ai punti in un certo senso viene attribuita un'esistenza potenziale coerentemente al punto di vista di Aristotele. Al loro posto si considerano “processi di astrazione” identificati come successioni decrescenti di regioni sempre più piccole.

Scopo della comunicazione è mostrare il rapporto fecondo tra filosofia e matematica. Un testo in cui si tratta tale argomento può essere scaricato dal sito Portale Italiano di Filosofia Analitica inserendo nella finestra ricerca di Google la stringa “Gerla Geometria senza punti APhex”.

Gli studenti del Liceo “Caccioppoli”, coordinati dalle proff. Gondeberga De Rubertis, Ornella Scaldferri e Veronica Triscuoglio, hanno presentato infine una magnifica illustrazione della figura del grande matematico napoletano Renato Caccioppoli, indagandone, con competenza e passione, le complesse sfaccettature, tra matematica, filosofia e politica. Al termine dell'intervento il prof. Casolaro ha opportunamente sottolineato il legame di amicizia tra Eduardo de Filippo e Renato Caccioppoli (al quale Eduardo aveva inviato la bozza dell'opera *Napoli milionaria* prima della presentazione ufficiale in teatro), stabilendo così un ideale legame tra i lavori dei ragazzi dei due istituti napoletani (“Caccioppoli” e “Ferraris”), felicemente integratisi con le autorevoli conferenze che hanno caratterizzato questa “Due giorni per la scuola”.

5 – Conclusioni

Il Convegno si è chiuso con le conclusioni del prof. Saverio Petitti, Dirigente dell'ITIS "Ferraris", e del prof. Aniello Buonocore, Presidente dell'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli".

Petitti ha sottolineato il valore di una manifestazione che ha ribadito l'importanza di una scuola aperta al confronto con il mondo della cultura nelle sue diverse articolazioni e di una didattica che si metta sempre in discussione, nello sforzo di assolvere al fondamentale compito di coinvolgere e motivare i nostri ragazzi all'apprendimento ed augurandosi che questa "Due giorni per la scuola" sia solo l'inizio di una proficua e duratura collaborazione con l'Associazione Mathesis "Aldo Morelli".

Buonocore, ha in primo luogo ringraziato il Preside Petitti e tutta la dirigenza per il notevole impegno profuso nell'organizzazione e nella realizzazione dell'iniziativa che si è avvalsa anche del prezioso apporto dello staff tecnico (professori e studenti) audio-video, coordinati da Enzo Patriciello. Poi ha rivolto un sentito ringraziamento a tutti i relatori che, a suo parere, con i loro interventi hanno affascinato la platea stimolando interesse e curiosità. Infine, ha voluto assicurare il Preside affermando che questa buona partenza è da intendere come viatico per una collaborazione che via via saprà trovare nuovi spunti e nuove direzioni nel tentativo di apportare un proprio contributo all'aggiornamento dei docenti.

Dante, Eduardo e la logica dell'assoluzione

*La Firenze di Dante Alighieri nel basso
Medio Evo, la Napoli di Eduardo De Filippo
nel Neorealismo del XX secolo*

Ferdinando Casolaro*, Serafina Ippolito**

*Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»;

ferdinando.casolaro@gmail.com

** Dirigente Scolastico; serafinaippolito@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n2.080

Sunto: Si analizza il dualismo "Paradiso-Inferno" tra la "Divina Commedia", opera di Dante Alighieri nel periodo della Rifioritura economica-culturale a Firenze nel XIII-XIV secolo e "Vincenzo De Pretore", opera di Eduardo De Filippo nella seconda metà del XX secolo, periodo del neo-realismo nella Napoli del dopoguerra. Due immagini del Paradiso attraverso un pensiero logico apparentemente diverso: la severità e razionalità nella concezione di Dante e la comprensione con la giustificazione di Eduardo ad essere costretti a peccare per la povertà.

Parole Chiave: Dante, Eduardo, Paradiso, Pentimento

Abstract: The Paradise-Hell dualism is analyzed between the "Divine Comedy" in Dante in the period of the economic-cultural revival in Florence (XIII-XIV century) and "Vincenzo De Pretore" in Eduardo De Filippo in the second half of the XX century, period of the neo-realism in post-war Naples. Two images of Paradise through an apparently different logical thought: severity and

rationality in Dante's conception and Eduardo's understanding with justification of being forced to sin for poverty.

Keywords: *Dante, Eduardo, Paradise, Repentance*

1 – Introduzione

L'evoluzione del pensiero attraverso una logica corretta in ambito scientifico, filosofico e letterario ha raggiunto i maggiori successi in un'atmosfera intellettuale libera, in cui l'interesse suggerito dall'evoluzione del mondo fisico, del mondo economico e oggi anche della comunicazione, si affianca alla volontà di riflettere e di discutere intorno alle idee suscitate dai problemi stessi. In tale atmosfera, anche la divulgazione e l'entusiasmo per qualsiasi disciplina acquistano maggiore significato. Dal IV secolo d.C. al XII secolo, millennio che ha preceduto l'era di Dante Alighieri, in Europa non vi fu alcun progresso in ambito scientifico e nulla di veramente significativo in ambito filosofico e letterario. Si hanno solo tracce di traduttori delle opere di Euclide, Aristotele e degli antichi greci. Nel frattempo (V-XI sec.), in Oriente venivano sviluppate proprietà matematiche e fisiche. In particolare, gli arabi avevano dato una struttura allo studio dell'algebra, i cui risultati si sono conosciuti in Europa dal XII secolo in poi, per merito principalmente di Leonardo Pisani (1170-1242 circa) detto Fibonacci (figlio del mercante Bonacci). Fibonacci era nato a Pisa, ma era stato educato osservando culture diverse, in quanto aveva viaggiato in Europa, in Africa e in Asia Minore per seguire il padre. Tra le opere di Fibonacci, particolare interesse merita il *Liber Abbaci* (scritto nel 1202), di cui venne in possesso Dante che era molto attento

alla cultura scientifica del suo tempo. L'interesse di Dante per la cultura scientifica è, oggi, oggetto di approfondimento da parte degli storici della matematica che ritengono, dall'analisi dei brani della *Divina Commedia*, che egli sia stato un buon cultore della matematica, come del resto si evince in un capitolo del *Convivio* dedicato all'astronomia:

*Così come il Sole illumina altri corpi celesti e di essi non
è possibile sostenere la vista, così l'Aritmetica illumina e
permea tutte le altre discipline*

In questa proposizione si dà all'aritmetica la stessa funzione che ha nell'universo la luce proveniente dai raggi del Sole. Ma i riferimenti alla scienza, in particolare agli aspetti logici che propone Dante, si evincono ancora dalle varie analisi dei versi nella *Divina Commedia*. In un altro lavoro ci siamo soffermati sul concetto di "infinito" analizzando:

- il significato che emerge dalla poetica di Leopardi come una riflessione della mente per evadere dalla realtà, attraverso l'illusione del salto di quella "siepe", per avviarsi verso una utopica felicità.¹

- la concezione puramente matematica che si intravede in Dante nei versi 55-57 del XV canto del *Paradiso*, quando Cacciaguida (Firenze 1091 - Palestina 1148) rivolgendosi al sommo poeta, dice:

*Tu credi che a me tuo pensier mei
Da quel ch'è primo, così come raia
Dall'un, se si conosce, il cinque e 'l sei*

¹ Giacomo Leopardi, *L'infinito*: «Sempre caro mi fu quest'ermo colle, e questa siepe, che da tanta parte dell'ultimo orizzonte il guardo esclude...»

(Tu hai ferma convinzione che il tuo pensiero si riveli direttamente a me da Dio, primo Ente e principio d'ogni cosa, così come dalla conoscenza dell'unità deriva quella di tutti gli altri numeri.)
(Sapegno, *Paradiso*, 1968).

L'interpretazione di tutti i commentatori è che nel «*Dall'un, se si conosce, il cinque e il sei*» (basta conoscere il primo e sapere l'esistenza del successivo di ogni altro numero) si intravede il Principio di induzione di cui Dante sarebbe stato un precursore, essendo stato utilizzato per la prima volta oltre due secoli dopo, in una dimostrazione nel 1575 da Francesco Maurolico.²

Nel prossimo paragrafo daremo seguito al dialogo tra Dante e Cacciaguida e ci soffermeremo sugli aspetti di logica che emergono dalle vicissitudini di Guido da Montefeltro, per poi individuare, nel seguito del lavoro, alcune analogie con un altro dialogo in un'opera di Eduardo De Filippo che risale al periodo del neorealismo della seconda metà del XX secolo.

2 - Dante e Cacciaguida

Nel canto XV (97-108) del *Paradiso*, Cacciaguida racconta a Dante come era la Firenze dei suoi tempi, ancora compresa nella prima cinta di mura, risalenti all'epoca di Carlo Magno (1173 seconda cinta, 1284 terza cinta):

² Francesco Maurolico (1494, 1575) è stato un matematico, astronomo e storico italiano.

*Fiorenza dentro dalla cerchia antica,
ond'ella toglie ancora e terza e nona,
Si stava in pace, sobria e pudica.*

(La piccola Firenze di quei tempi, prima
che diventasse grande per cultura, viene
descritta come una cittadina sobria e
pacifica, così diversa da quella dell'età del
Sommo Poeta) (Sapegno, 1968)

Allora, ci dice Cacciaguida:

*Non avea catenella, non corona,
Non gonne contigiate, non cintura
Che fosse a veder più che la persona*

Le donne non andavano a spasso con vestiti costosi ed ingioiellate in modo che l'apparenza prevalesse sulle qualità della persona. Dante qui sembra respingere la rivoluzione economica e sociale che era avvenuta durante il secolo XIII (Sapegno 1968, pp. 97-99).

Egli si rende conto della forza della corruzione e del rapido travolgimento dei grandi valori civili e umani che poteva avere una società fondata sul danaro. In questi versi emergono in modo chiaro alcune analogie con il periodo che va dalla seconda metà del XX secolo ai giorni nostri, con il passaggio dalla povertà del primo dopoguerra ad un ampliamento del modello capitalistico che toccava anche differenze di genere, come nell'opera di Dante si evince dai successivi versi 103-105:

*Non faceva, nascendo, ancor paura
la figlia al padre; ché il tempo e la dote
non fuggìen quinci e quindi la misura*

cioè la nascita di una figlia non era vista con paura per la futura ricca dote. E ancor di più vi è riferimento a una caduta di valori, sia relativamente all'accentuazione di interessi verso piaceri sessuali che a discriminazioni anche relativamente ad ambienti abitativi:

*Non avea case di famiglie vuote;
Non v'era giunto ancor Sardanapalo³
A mostrar ciò che 'n camera si puote.*

Sono i versi 106-108 di cui si hanno diverse interpretazioni, delle quali quella più vicina all'era di oggi è di Benvenuto da Imola (1330 - 1388), che è stato il primo autore a pubblicare un commento esclusivamente dedicato alla *Divina Commedia*.

Benvenuto riferisce i versi a «case sproporzionate al bisogno della famiglia». Ai tempi di Cacciaguida due o tre famiglie abitavano in una piccola casa; adesso, 150 anni dopo, un fiorentino con moglie e due figli occupa da solo un gran palazzo dove potrebbero stare dieci famiglie.

Alcuni commentatori, invece, intendono che le case sono vuote per gli esuli, causati dalle lotte civili tra vari casati, contrariamente ai tempi passati in cui le famiglie non correavano il pericolo dell'esilio. Altri commentatori intendono «vuote di prole a cagion di costumi corrotti». Ai tempi di Cacciaguida non erano presenti i vizi sessuali.

Significativo, nei versi 46-51 del XVI canto, il riferimento all'immigrazione che ha portato la città a quintuplicare il numero degli abitanti nell'arco di un secolo e mezzo. Questo

³ Sapegno: (667-626 a.C.) capo degli Assiri effeminato e vizioso.

dato il Sapegno lo cita come estratto da scritti di uno dei maggiori cronisti fiorentini del Trecento, Giovanni Villani (1280-1348).

*Tutti color ch'a quel tempo eran ivi
Da poter arme da Marte e 'l Battista
Eran il quinto di quei ch'or so vivi
Ma la cittadinanza, ch'or mista
di Campi, di Certaldo e di Fegghine,
pura vediesi nell'ultimo artista*

A quei tempi il Battistero e la statua di Marte sul Ponte Vecchio erano considerati i limiti rispettivamente a nord e a sud della città antica. In questi versi Cacciaguida fa notare come queste popolazioni che intasavano Firenze erano causa delle discordie attuali e della corruzione che porteranno alla rovina della città, come emerge dai versi 67-69 dello stesso canto:

*Sempre la confusion delle persone
principio fu del mal della cittade,
come del vostro il cibo che s'appone*

Nel successivo canto XVII, Cacciaguida predice a Dante gli eventi della sua vita futura: l'esilio da Firenze e la sua vita raminga e solitaria; rivela la missione di Dante una volta tornato nel mondo: Dio investe Dante nella missione di rivelare la sua volontà all'umanità per salvarla e portarla in Paradiso. Dante riceve il ruolo di poeta-profeta.

3 – Guido da Montefeltro

Secondo la dottrina e la fede cristiano-cattolica, anche all'epoca di Dante, il Paradiso è meritato dai Santi, naturalmente, da chi è stato proba e buon cristiano, ma anche da chi ha peccato e si è pentito, seppur in fin di vita, ed è stato assolto da un Ministro di Dio.

Per chi ha peccato, ma si è comunque pentito, l'Assioma alla base della "Logica dell'Assoluzione" che merita il Paradiso è quindi :

Peccato → Pentimento → Assoluzione → Paradiso

Vediamo invece quale sconvolgimento avviene per Guido da Montefeltro incontrato da Dante, non in Paradiso come egli credeva, visto che si era pentito in vita dei peccati di condottiero scaltro e astuto, ma nella VIII Bolgia infernale, quella dei consiglieri fraudolenti.

Siamo al Canto XXVII. Guido da Montefeltro si rivolge a Virgilio in quanto ha desiderio di conoscere la situazione politica della sua terra di Romagna.

Guido racconta come, già pentito e divenuto monaco francescano, sia ricaduto nel peccato e accusa il Papa Bonifacio VIII - Benedetto Gaetani, nominato Papa nel 1294 in seguito al gran rifiuto di Celestino V - di avergli causato la dannazione. Infatti, Bonifacio VIII si era rivolto a Guido per ricevere un consiglio scaltro e fraudolento su come espugnare la resistente Rocca di Palestrina e aveva vinto le sue riluttanze promettendogli l'assoluzione, in qualità di successore di Pietro.

Bonifacio VIII, considerato da Dante pessimo Papa, indisse nell'anno 1300 il primo Giubileo della storia della Chiesa, anche allo scopo di lucrare sulle indulgenze.

Nel Convivio Dante aveva espresso ammirazione e rispetto per Guido da Montefeltro, lodando il suo pentimento e la sua monacazione negli anni della vecchiaia, e quindi la sua collocazione nell'*Inferno* gli appare molto strana ed incomprensibile.

Nei versi che seguono che ci fanno vivere la drammaticità dell'evento, Guido spiega a Dante come il demone «cherubino nero» che lo stava aspettando da tempo, lo abbia strappato dalle mani di San Francesco, venuto a prendere il suo corpo evidentemente ignaro degli ultimi fatti, e lo abbia trascinato invece nei profondi inferi osservando che la logica della assoluzione era distorta ed esclamando:

Forse tu non pensavi ch'io loico fossi!
(Forse tu non pensavi che io conoscessi la logica).

Infatti, nel Canto XXVII, 112-123 dell'*Inferno* leggiamo:

*Francesco venne poi, com'io fui morto,
per me, ma un dei neri cherubini
li disse: "Non portar: non mi far torto".
Venir se ne dee giù tra i miei meschini
perché diede il consiglio fraudolente,
dal quale in qua stato li sono a' crini;
ch'assolver non si può chi non si pente,
né pentere e volere insieme puossi
per la contraddizion che non consente"
Oh me dolente! Come mi riscossi
quando mi prese dicendomi: "Forse
tu non pensavi ch'io loico fossi!"*

Alla morte di Guido, San Francesco venne a prelevare per portarlo in Paradiso ma il demone-cherubino nero glielo impedì per portarlo tra i dannati poiché aveva dato un consiglio fraudolento e da quel momento gli stava alle costole attendendone la morte. Non si può assolvere chi non si pente, né ci si può pentire e peccare contemporaneamente per la evidente contraddizione che lo vieta. Forse non si pensava che il demone fosse logico?

Infatti, Bonifacio VIII assolve Guido in anticipo e poiché non ci si può pentire e peccare contemporaneamente, viene a interrompersi il percorso logico di assoluzione che non è più consequenziale.

Logica assolutoria corretta:

- 1) Guido ha gravemente peccato
- 2) Guido si è pentito
- 3) Guido è assolto
- 4) Guido merita il Paradiso

Logica assolutoria scorretta:

- 1a) Guido ha gravemente peccato
- 2a) Guido si è pentito
- 3a) Guido è assolto (preventivamente)
- 3b) Guido pecca nuovamente (su promessa di assoluzione di Bonifacio)
- 4a) Guido (non) merita il Paradiso

Da 3a non può discendere 4a poiché si intermezza 3b:
«...*per la contraddizion che non consente*».

Il cherubino “loico” sostiene che Guido non è stato validamente assolto, per la scorretta logica assolutoria per cui

non merita il Paradiso ma deve sprofondare nell'Inferno insieme a lui.

4 – Il Paradiso secondo Eduardo de Filippo

Dalla logica di Dante per la conquista del Paradiso, nel periodo del basso Medioevo, alla concezione di Eduardo nel periodo del Neorealismo.

Nell'*Inferno* e nel *Purgatorio* di Dante continua uno stretto rapporto con quanto era terreno: l'Inferno è collocato sottoterra, il Purgatorio è una montagna comunque con la base a terra e le vicende umane sono ancora sanguigne e danno dolore nell'anima ma anche fisico. In Paradiso ci si distacca dalla terra e dalle vicende terrene: tutto è luce e aria e l'unico legame che si ha con la Terra è l'influenza che esercitano i cieli sul mondo sottostante. Tutto è etereo ed eterno. Nessuna somiglianza o contatto con il mondo terreno e le sue "umanità".

Con Eduardo, in pieno Neorealismo, tutto diviene carnale ed umano, anche il Paradiso si umanizza e scende a terra, conservando le miserie, le credenze, le superstizioni, un senso semplicistico, ma vero, della famiglia, le pressioni, le raccomandazioni-protezioni, la comprensione e quindi le assoluzioni bonarie ma definitive e giuste. «Pure 'o Signore se fa capace', si commuove, perdona e assolve!»

Tutto questo lo vediamo nell'opera di Eduardo *De Pretore Vincenzo*⁴ di cui riportiamo un estratto. Vincenzo De Pretore,

⁴ *De Pretore Vincenzo* è una poesia scritta da Eduardo de Filippo nel 1948, da cui è stata tratta l'omonima commedia rappresentata la prima volta nel 1957.

ladruncolo, viene colpito a morte, durante uno scippo e si trova al cospetto di San Pietro prima e di San Giuseppe poi, chiedendo di entrare in Paradiso.

4.1 - Dialogo tra San Giuseppe, Vincenzo De Pretore, Dio

Nelle prime ventinove quartine (116 versi), Eduardo descrive la storia di De Pretore fino al momento in cui si presenta in Paradiso e riesce a ottenere il dialogo con San Giuseppe, come si evince dalla 30-esima quartina, 117-esimo verso, che segue. San Giuseppe a De Pretore che bussò alla porta del Paradiso:

"Sicchè tu si 'nu muorto mariuolo?!"
"Gnernò, mò ca so' muorto song'onesto.
Nu mariuolo vivo, si fa chesto,
nun 'o ffà pe murì, ma pe' campà".
(De Pretore, tu sei un morto ladro?
No, ora da morto, sono onesto!
Se un ladro vivo va a rubare,
non lo fa per morire, ma per vivere.)

"E' giusto!" rispunnette S. Giuseppe
"però, ccà 'ncopp', stu ragionamento
difficilmente dint' a 'nu mumento,
cagna 'na Legge antica ca ce sta!
(È giusto! Rispose San Giuseppe.
Però in Paradiso questo ragionamento
Difficilmente, in un solo momento,
cambia una legge antica che ancora c'è.)

Chi arroba in vita, è sempre mariuolo
E doppo muorto resta segnalato...

*Si 'o mariuolo fosse perdunato
'o ffuoco eterno che ce stesse a ffâ?"*
(Chi ruba in vita, è sempre un ladro
e dopo morto resta segnalato...
se il ladro fosse perdonato
il fuoco eterno non esisterebbe.)

*De Pretore dicette: "J che ne saccio,
io nun pozzo capì tutte sti llege.
Chi tene a S. Giuseppe c' 'o prutegge,
È San Giuseppe che c'adda penzà"*
(“De Pretore disse: “Io non lo so,
non posso capire tutte queste leggi!
Ho scelto San Giuseppe protettore
ed è San Giuseppe che mi deve aiutare.)

*"Primm' 'e tutto - dicette San Giuseppe -
Sta prutezione, si me l' 'e cercata,
tu te l' 'e vista, e tu te l' 'e pigliata.
Nun capisco pecchè t'avev' a dà!"*
(Innanzitutto - disse San Giuseppe -
questa protezione, se me l'hai chiesta,
autonomamente poi te la sei presa!
Non capisco perché te l'avrei dovuta dare.)

*"Overo? E tutte chelli ffigurelle
Cu vvuje fotografato e culurato?
Io, certi vvote, me so 'ndebbitato
P'ecannèle e pe' ll'uoglio! E mò che ffa
(Davvero? E tutte quelle immaginette
con la vostra fotografia colorata?
Io certe volte, mi sono indebitato
per le candele e per l'olio! Ora che faccio?)*

*Mò me dicite "Ccà ce sta 'na Legge...
Ca 'o mariuolo è sempre segnalato..."
A me, si nun m'avessero sparato,
fosse muorto p' 'a famma, San Giusè!...
(Ora mi dite: In Paradiso c'è una legge...
Che il ladro è sempre segnalato...
Io, se non mi avessero sparato.
sarei morto per la fame, San Giuseppe!...)*

Dopo lunga discussione, De Pretore riuscì a convincere San Giuseppe a parlare col Signore (39-esima quartina, 153-esimo verso):

*San Giuseppe, nu poco penzieruso,
s'abbiaje p' 'o scalone, a malincuore,
e se truvaje 'mpresenza d' 'o Signore,
cu llucchie 'nterra pe' nun 'o guardà.
(San Giuseppe, un poco pensieroso,
si avviò per le scale, a malincuore,
e si trovò alla presenza del Signore,
con lo sguardo a terra per evitare di
guardarlo.)*

Alla presenza del Signore...

*Fore ce sta nu mariuolo muorto
Ca se chiama Vicienzo De Pretore.
Siccome me scegliette Protettore
Giustamente vulesse restà ccà"
(Fuori c'è un ladro morto
Che si chiama Vincenzo De Pretore
Siccome mi scelse come protettore,*

Giustamente, vorrebbe restare qua.)

*De Pretore arrubbava, sissignore;
 è muorto acciso pe' chesta ragione.
 S'era fissato c' 'a prutezione:
 m'appicciava 'e cannele... c'aggia fa?
 (De Pretore rubava, sissignore!
 Per questa ragione è stato ucciso.
 Si era fissato con la mia protezione.
 Accendeva candele....che devo fare?)*

Il Signore mostrò perplessità e resistenza ad accogliere un ladro in Paradiso, ma San Giuseppe imperterrito insistette (44-esima quartina, verso 173)

*Lle vaco a ddì ca nun ne saccio niente...
 Ca conta solamente 'o Pateterno,
 e ca se n'adda scènnere all'Inferno
 pecchè 'a protezione nun ce sta?...
 (Vado a dirgli che non ne so niente...
 Che conta solo il Padre Eterno,
 e che deve scendere all'inferno
 perché la protezione non esiste?)*

*Si vuje vulite fa chesta figura,
 io nun 'a voglio fa. Sa che ve dico?
 Ve rummanno devoto, frato, amico;
 ma ve saluto, e mme ne vaco a ccà"
 (Se voi volete fare questa figura,
 io non la voglio fare. Sapete che vi dico?
 Resto a voi devoto, fratello, amico,
 ma vi saluto e lascio il Paradiso.)*

*Dicette 'o Pateterno: "Chella è 'a porta.
Però piènzece bbuono nu mumento.
Pecchè, si po' te ven 'o pentimento,
'a porta è chiusa, e chiusa restarrà!"*
(Il Padre Eterno disse: Quella è la porta.
Però pensaci un momento.
Perché, se poi dovessi pentirti,
la porta è chiusa e mai più rientrerai!)

Il pentimento.... L'uomo è peccatore, in Paradiso non va
perché non ha peccato...ma perché si è pentito dei suoi
peccati...

*E c' 'a mazza fiorita, San Giuseppe,
comme si nun avesse manco 'ntiso,
lassav' 'o posto 'e copp' 'o Paraviso,
c' 'a capa sotto, e senza s'avutà.*
(Col bastone fiorito, San Giuseppe,
come se non avesse neppure sentito,
lasciava il posto in Paradiso,
con la testa in giù senza nemmeno girarsi.)

*'A Madonna, strignènnose dint'e spalle,
se susette pur'essa e s'avutaje;
facette 'a riverenza, salutaje,
dichiaranno: "Ma comme pozzo fa?..."*
(La Madonna, stringendo le spalle,
si alzò anche lei e si girò,
fece la riverenza, salutò,
dichiarando: "Ma come posso fare?")

*Giuseppe è mio marito, certamente...
E lo devo seguire ovunque vada.*

*Io, come moglie, seguo la sua strada:
na mugliera fedele chesto fa"*

(Giuseppe è mio marito, certamente...
E lo devo seguire dovunque vada.
Io, come moglie, seguo la sua strada:
una moglie fedele così si comporta!)

*Gesù Cristo dicette: "Io song' 'o figlio...
Che faccio e llasso sule? Cu' qua' core?
Specialmente mia Madre, se ne more...
Io mme ne vaco cu Papà e Mammà"*
(Gesù Cristo disse: "Io sono il figlio...
Che faccio? Li lascio soli? Con quale
coraggio? Specialmente mia madre,
ci morirà... Io vado con Papà e Mammà)

*Sant'Anna fece segno a San Gioacchino
San Giovanne, o cumpar' r'o Salvatore
L'Angelo Gabriele Annunciatore
Pur' isso s' 'a voleva spalummà.*
(Sant'Anna fece un cenno a San Gioacchino,
poi San Giovanni che aveva battezzato Gesù,
e l'Arcangelo Gabriele che aveva
annunciato a Maria la nascita di Cristo,
anche loro se ne volevano andare.)

Probabilmente è il momento più toccante dell'intera opera, in quanto sono i familiari di San Giuseppe a mettere in crisi il Signore, perché il concetto della fedeltà coniugale che impone di seguire il marito in ogni occasione e dell'unità della famiglia sono pilastri essenziali della dottrina cristiana.

*Tanto, ca 'o Pateterno se susette,
strillanno: "Fermi tutti!!...Dove andate?
Si overamente ascite e ve ne jate,
'o Paraviso nun 'o pozzo fa"*
(Tanto che il Padre Eterno si alzò,
strillando: "Fermi tutti!... Dove andate?
Se davvero ve ne andate tutti,
il Paradiso non lo posso fare".)

*Tutt' 'a Sacra Famiglia se fermaje,
aspettanno 'a Parola d' 'o Signore.
"Va bene, fate entrare a De Pretore...
Almeno, m' 'o facite interrogà!"*
(Tutta la Sacra Famiglia si fermò,
aspettando la parola del Signore,
"Va bene, fate entrare De Pretore...
almeno me lo fate interrogare!")

*De Pretore trasette "Vieni avanti
Tu ti chiami Vincenzo?" "Sissignore"
"E di cognome?" "Faccio De Pretore"
"Tuo padre?" "De Pretore fuje mammà"*
(De Pretore entrò: "Vieni avanti
Tu ti chiami Vincenzo?" "Sissignore!"
"E di cognome?" "Faccio De Pretore".
"Tuo padre?" "De Pretore fu mia madre")

*"Come sarebbe?!" "So' di padre ignoto"
"Non capisco. Ma ignoto di che cosa?"
"Che quando sulla terra non si sposa,
'e figlie nun se ponno dichiarà"*
(*"Come sarebbe?" "Sono di padre ignoto"
"Non capisco. Ma ignoto di che cosa?"*

“Che quando sulla terra non ci si sposa,
i figli non si possono dichiarare”.)

Questo passo propone il problema dei figli illegittimi, che è stato dominante nella vita e nelle opere di Eduardo che portava il cognome De Filippo della mamma e non Scarpetta del padre. Riferimento in seguito anche a Filumena Marturano: *Dummi, e figl' nuns'e pagan! E figl so tutt'eual...* (Domenico, i figli non si pagano! I figli sono tutti uguali...). E su questo tema segue un commovente dialogo tra De Pretore e il Signore che alla fine si convince ad accoglierlo in Paradiso (Quartina 59, 233-esimo verso)

*Doppo capuzziato, 'o Pateterno
Dicette: "Aggio capit 'o fattariello.
Pirciò tu addeventaste mariunciello?"
Gnorsì, ma sulamente pe' campà.
(Dopo aver riflettuto, il Padre Eterno
disse: "ho capito la questione.
Perciò tu diventasti ladro?».
Signorsì, ma solamente per vivere.)*

E dopo alcune riflessioni, il Signore accetta De Pretore in Paradiso (Quartina 68, 269-esimo verso)

*Nu minuto 'e silenzio, 'O Pateterno
cu na santa pacienza se susette,
e cu na voce ferma po' dicette:
"Chistu napulitano resta ccà".
(Un minuto di silenzio. Il Padre eterno
con santa pazienza si alzò,
e con voce ferma disse:*

“Questo napoletano resta qua”.)

*Andate tutti a letto. Domattina
vi sveglierete nelle prime ore
Per spiegare a Vincenzo De Pretore
In Paradiso come ci si sta’.*

*(Andate tutti a letto. Domattina
vi sveglierete nelle prime ore
per spiegare a De Pretore
in Paradiso come ci si sta.)*

*E Sante, cu ‘na meza resatella
e cu ‘nu miez’inchino, s’abbiajeno.
Ammagliecanno amaro se cuccàjeno
Penzanno: A’ rrobba mo’ s’adda ‘nzerrà!
(I Santi, con uno strano sorriso
e con un mezzo inchino, si avviarono.
Con una certa amarezza si coricarono
pensando: ora le nostre cose si devono
chiudere a chiave!)*

Ma il Signore li riassicura (Quartina 81, 321-esimo verso)

*Schiarato juorno, ‘o Pataterno fece l’adunata
E dicette: “capisco il malumore,
a vvuje ve fa paura De Pretore,
ch’ è mariunciello, e ca ve po’ arrubbà?
(All’alba il Padre eterno fece l’adunata
e disse: “Capisco il malumore,
avete paura di De Pretore
che è un ladro e vi può derubare?”)*

State tranquilli, ne rispondo io.

*Chisto pirciò se chiammaParaviso:
Lietto sicuro, pane ben diviso...
Neh, De Pretore c'arrubbasse a ffà?
(State tranquilli, ne rispondo io.
Questo perciò si chiama Paradiso:
Letto sicuro, pane ben diviso...
Perché ora De Pretore dovrebbe rubare?)*

E De Pretore Vincenzo entrò in Paradiso! Quale è la Logica dell'assoluzione di De Pretore Vincenzo ? Nessuna Logica. Ha vinto il Convincimento ed ...il Cuore !

5 – La cultura di oggi

Alcuni dei problemi che caratterizzano la vita sociale e la politica in Italia dal dopoguerra ad oggi, li riscontiamo anche nel periodo di Dante. In particolare, in riferimento al tempo di Cacciaguida:

- le donne non andavano a spasso con vestiti costosi e ingioiellate;
- la nascita di una figlia non era vista con paura per la futura ricca dote (ancora in atto negli anni Cinquanta/Sessanta);
- non erano presenti i vizi sessuali;
- non si era ancora vista l'immigrazione di famiglie del contado, spesso portatrici di delinquenza.

Cacciaguida dice che questa immigrazione di gente nuova, favorita dalla Chiesa, è causa delle discordie attuali, che porteranno alla rovina della città. In questo passo, il paragone è più legato ai tempi moderni - terzo millennio - dove è

evidente una analogia alle tematiche politiche attuali, con esponenti del nostro Parlamento e ...altri.... in antitesi a Papa Francesco (...il favorito dalla Chiesa), ed ai fondamentali valori umani...ecc.

6 - Questione didattica

È giusto e indispensabile, per una formazione umana completa e corretta, che la Scuola faccia studiare Dante e la Storia passata a cui si lega la Storia presente. Ma non sarebbe giusto che si proponessero di fatto agli studenti anche le tematiche sviluppatesi nell'ultimo secolo? Già in un Convegno di settembre 2021, tenutosi ad Agerola sull'insegnamento della Geometria, abbiamo lamentato il rifiuto di approfondire e presentare i risultati scientifici del XX secolo, continuando a proporre un percorso di Geometria non adeguato all'evoluzione del mondo fisico. L'insegnamento della Letteratura e della Storia ignora quasi completamente le vicissitudini della seconda metà del secolo scorso, fatti salvi alcuni docenti appassionati. Le tante conquiste politico-sociali che hanno garantito diritti, specialmente alle donne, hanno elevato il nostro livello culturale? Il "Sessantotto", gli anni di piombo,.... le conquiste sociali che oggi abbiamo e che fino agli anni Settanta non c'erano... Se ne parla nella Scuola? Quanti docenti (di Storia, Letteratura, Filosofia) propongono ai propri studenti le poetiche e le scritture di Eduardo De Filippo, Pier Paolo Pasolini, Luciano De Crescenzo, Andrea Camilleri, Norberto Bobbio, ecc.? Col nostro racconto abbiamo voluto anche manifestare l'auspicio per una Scuola più adeguata alle esigenze dei giovani, ma anche esprimere il rammarico per una Scuola che, per poter ricevere i necessari fondi, deve

necessariamente aderire a Progetti ministeriali europei, quali PON, FESR e quant'altro. Tutto questo distoglie gli studenti dal vero apprendimento, quello che si realizza attraverso un proficuo dialogo educativo nelle aule scolastiche.

7 – Conclusioni

Abbiamo parlato di Dante ed Eduardo, di Letteratura e Storia, di Logica, a volte applicata, a volte no. Guido da Montefeltro, per la logica scorretta indotta da Bonifacio VIII, si è meritato, purtroppo, l'Inferno. Ma la nostra storia, quella che ci piace, logica o no, finisce qui con un "perdono", una assoluzione ottenuta con un po' di forzatura, uno sciopero paradisiaco, una comprensione per De Pretore Vincenzo, un Povero Cristo che ha fatto il mariuolo, ma "lo ha fatto per campà". E speriamo che anche i lettori, con un po' di comprensione e benevolenza, ci perdonino se, nel raccontare questa storia, abbiamo rubato un po' del loro tempo.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano la prof.ssa Giovanna Della Vecchia per gli utili consigli forniti e la pazienza mostrata nella revisione dell'impostazione grafica.

Bibliografia

SAPEGNO Natalino (1968). *La Divina Commedia, Inferno, Purgatorio, Paradiso*. Firenze: La Nuova Italia.

CALVINO Italo (1993). *Lezioni americane*. Milano: Oscar Mondadori.

DE FILIPPO Eduardo (1948). *Vincenzo De Pretore* – <https://pulcinella291.forumfree.it/?t=43537914>.

Matematica è poesia

Un itinerario didattico interdisciplinare per la scuola secondaria di secondo grado

Giovanna Della Vecchia *

* DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.081

Sunto: Nella mia lunga esperienza di insegnante di Matematica della scuola secondaria di secondo grado ho maturato la convinzione che spesso gli errori commessi dagli alunni durante la pratica didattica e apparentemente dovuti a carenze concettuali, sono invece legati a problemi di carattere linguistico: d'altra parte, nell'organizzazione del pensiero, la coerenza argomentativa deve trovare il giusto supporto nella competenza linguistica e nel controllo delle strutture sintattiche di cui si fa uso e non sempre tale aderenza si evince dalla produzione scritta e orale degli studenti. Sono fermamente convinta della funzione pedagogica di un dialogo più fecondo tra Matematica e Letteratura individuando altresì nella Matematica la chiave d'accesso privilegiata per la comprensione di ogni tipologia di testo. La proposta didattica che segue mette in evidenza alcune analogie e interrelazioni esistenti tra Letteratura e Matematica a favore di una visione unitaria del sapere.

Parole Chiave: Matematica, letteratura, poesia, interdisciplinarietà.

Abstract: In my long experience as a secondary school mathematics teacher I developed the conviction that often mistakes made by pupils during teaching practice, apparently due to conceptual deficiencies, are instead linked to linguistic problems: on the other hand, in the organization of thought, argumentative coherence must find the right support in linguistic competence and in the control

of the syntactic structures used and this is not always evident from the written and oral production of the students. I am firmly convinced of the pedagogical function of a more fruitful dialogue between Mathematics and Literature, also identifying in Mathematics the privileged access key for the understanding of every type of text. The following didactic proposal highlights some analogies and interrelationships existing between literature and mathematics in favor of a unified vision of knowledge.

Keywords: Mathematics, literature, poetry, interdisciplinarity.

1 - Introduzione

La storia dell'umanità ci ha insegnato che lo sviluppo scientifico ha sempre condizionato lo sviluppo delle scienze umane e viceversa evidenziando le affinità e, in qualche caso, le coincidenze tra le diverse forme di pensiero a favore dell'unicità della cultura.

Come ampiamente documentato, Matematica, Letteratura, Arte, Scienza hanno sempre interagito, e le divisioni talvolta sono servite solo ad arricchire il dibattito in maniera anche un po' artificiosa. Purtroppo oggi, per un antico retaggio culturale, tale spaccatura permane ancora nell'organizzazione della scuola italiana in cui i piani di lavoro restano affidati ai dipartimenti disciplinari, riducendo a poche occasioni il confronto tra docenti di discipline diverse. Il più delle volte il dialogo si limita agli aspetti organizzativi o valutativi del processo di insegnamento.

La scuola risente ancora fortemente della contrapposizione tra formazione umanistica e scientifica come se fosse necessario creare una frantumazione dei "saperi" basata sulla supremazia di una disciplina rispetto a un'altra.

L'esistenza di una eventuale tassonomia delle culture non ha invece alcun fondamento logico e, soprattutto nella pratica didattica, può diventare profondamente dannosa e diseducativa.

Eppure Tullio De Mauro in un provocatorio e spiritoso libro scritto con Carlo Bernardini, ci ha ricordato che dal punto di vista etimologico le parole "contare" e "raccontare" hanno la stessa origine (precisamente il termine latino *computare*); gli studi sull'argomento hanno altresì dimostrato che l'intelligenza linguistica e quella numerica fanno capo a facoltà mentali e aree neurologiche molto vicine.

2 - Formazione scientifica e formazione umanistica

Certamente alla fine dell'ottocento gli scienziati italiani e soprattutto i matematici, avevano un ruolo centrale nella cultura e interagivano con altre forme di pensiero mettendone in evidenza, con i loro lavori, le affinità e, in qualche caso, le coincidenze: la formazione scientifica diventava complementare e non contrapposta alla tradizionale formazione umanistica.

La storia ci ha però insegnato che questi principi si dovevano presto scontrare con un progetto più strutturato che trovava le sue radici più profonde nella filosofia del neoidealismo di Benedetto Croce e Giovanni Gentile. Lo scontro ad un certo punto diventò politico e, quando venne il momento di disegnare la nuova scuola italiana, esplose in un vero e proprio conflitto ideologico: nel 1923 Giovanni Gentile

diede vita “alla più fascista delle riforme scolastiche”, come affermato dallo stesso Mussolini, meritocratica e classista in cui le materie letterarie erano considerate superiori, le scienze naturali e la matematica erano messe in secondo piano perché materie prive di valore universale, che avevano la loro importanza solo a livello professionale.

La scuola gentiliana si fonda sul postulato secondo cui la vera formazione passa attraverso i classici, le traduzioni dal latino e dal greco devono fornire le competenze logiche necessarie ed educare al corretto ragionamento. Le ore dedicate all’insegnamento delle discipline umanistiche sono di gran lunga superiori alle ore dedicate alle discipline scientifiche.

La riforma Gentile è rimasta pressoché invariata fino al 1962 anno in cui il parlamento italiano finalmente abolì la scuola professionale dando vita alla scuola media unificata.

3 - L’antico dialogo tra le due culture

Per tutto il ‘900 il problema di una contrapposizione netta tra cultura umanistica e cultura scientifica è stato tema di dibattito anche negli altri paesi europei.

Nel 1959 lo scienziato e romanziere inglese Charles Percy Snow (1905-1980), nel testo “Le due culture” denuncia la moderna divisione del sapere umano in due culture contrapposte, una vera e propria spaccatura, nella società occidentale, tra il mondo della ricerca scientifica e quello degli studi umanistici.

Snow sosteneva che la moderna mancanza di dialogo tra le due culture fosse una delle cause della decadenza civile del

mondo contemporaneo e del progressivo fallimento delle sue istituzioni scolastiche e denunciava provocatoriamente le scarse consuetudini letterarie di molti scienziati e una totale ignoranza scientifica da parte dei letterati.

Secondo Snow la ricomposizione di questa profonda frattura culturale doveva necessariamente passare attraverso un “ripensamento del sistema educativo”.

Dopo il profondissimo dibattito alimentato in tutto il mondo dalle tesi di Snow, la situazione è oggi del tutto diversa, il dialogo aperto tra cultura scientifica e letteraria è ormai diffuso ovunque, con qualche eccezione purtroppo proprio nel sistema scolastico in cui si fa ancora fatica a promuovere un sapere unitario: la pratica didattica procede ancora in maniera settoriale nonostante il tentativo degli ultimi anni di puntare su pratiche laboratoriali e sulla realizzazione di unità di apprendimento interdisciplinari.

4 - Il cerchio del sonetto

L'influenza della matematica sulla cultura umanistica era già presente molti secoli prima che il dibattito tra le due culture avesse inizio.

Nel corso dei secoli poeti e narratori, nelle loro opere, hanno più volte sottolineato il valore del pensiero matematico quale fonte di ispirazione e creatività e soprattutto la funzione della Matematica nell'attività linguistica e nell'elaborazione del linguaggio.

La forma poetica più famosa della tradizione letteraria italiana è il *sonetto*. Pare che sia comparso per la prima volta alla corte di Federico II di Svevia, ad opera di Jacopo da

Lentini che pare abbia attinto, nella creazione di questa particolare forma, dalle teorie geometriche del trattato *Practica geometriae* di Fibonacci.

Sembra che l'invenzione del sonetto sia avvenuta tra il 1230 e il 1240 cioè dopo che Leonardo Fibonacci aveva pubblicato nel 1220 la «*Practica geometriae*»: forse il fermento culturale esistente presso la corte federiciana aveva fatto in modo che si realizzasse la fusione tra poesia e geometria

Il sonetto è composto da 14 endecasillabi divisi in 2 quartine e 2 terzine:

“Io m’aggio posto in core a Dio servire” (Jacopo da Lentini)

*Io m’aggio posto in core a Dio servire,
com’io potesse gire in paradiso,
al santo loco ch’ag[gl]io audito dire,
u’ si manten sollazzo, gioco e riso.*

*Sanza mia donna non vi vorria gire,
quella c’ha blonda testa e claro viso,
ché sanza lei non poteria gaudere,
estando da la mia donna diviso.*

*Ma non lo dico a tale intendimento,
perch’io peccato ci volesse fare;
se non veder lo suo bel portamento*

*e lo bel viso e ’l morbido sguardare:
ché lo mi teria in gran consolamento,
veggendo la mia donna in ghiora stare.*

Wilhelm Pötters (1941), docente di filologia romanza a Würzburg nonché estroso numerologo, ha dedicato due volumi della sua produzione alla nascita del sonetto e agli

aspetti matematici del Canzoniere di Petrarca: *Nascita del sonetto. Metrica e matematica al tempo di Federico II* (Pötters, 1998) e *Chi era Laura? Strutture linguistiche e matematiche nel Canzoniere di Francesco Petrarca* (Pötters1987). In merito alla composizione del sonetto in 14 versi di 11 sillabe, egli ha osservato che il rapporto 11/14, molto vicino al numero $\pi/4$ ($\approx 0,7853\dots$), rappresenta nel trattato geometrico di Fibonacci, il rapporto tra le aree del cerchio e del quadrato ad esso circoscritto. Oggi scriviamo:

$$\frac{\pi \cdot r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Si ritiene attendibile l'ipotesi che la misurazione del cerchio nella matematica di Fibonacci sia servita da modello nell'invenzione del sonetto.

Pötters ipotizza che a monte della struttura del sonetto ci sia dunque una strategia di ordine matematico-geometrico e che il metro possa essere una trasposizione o proiezione poetica delle figure e delle misure geometriche utilizzate dai matematici medievali.

Sta di fatto che nella struttura di opere letterarie il ricorso a strutture rigorosamente matematiche è molto frequente.

5 - Laura è π ?

Molto suggestiva è l'interpretazione che lo stesso Pötters fa di alcuni aspetti del Canzoniere di Petrarca

A proposito dell'identità di Laura, se si tratta di una donna realmente esistita e amata dal poeta o di una creatura metafisica, un ideale che appare sotto le sembianze della

figura terrena, lui condivide con gli studiosi del Petrarca la tesi che Laura rappresenti contemporaneamente entrambi gli aspetti.

In merito poi alla struttura del Canzoniere egli dà una interpretazione molto suggestiva della sua organizzazione formale e della scelta privilegiata del sonetto come tipologia metrica.

Secondo Pötters l'identità di Laura e la struttura del Canzoniere non sono due questioni parallele ma strettamente connesse tra loro, anzi sono un problema unico. Ancora una volta propone una spiegazione unitaria ispirata alla geometria partendo dal presupposto che il Canzoniere ha una struttura formale programmata secondo precise regole matematiche.

Per quanto riguarda il sonetto e la scelta del verso endecasillabo quali forme di scrittura molto frequenti nel Canzoniere, Pötters fa notare ai lettori che Petrarca, nella composizione del sonetto, non dispone le due quartine e le due terzine in verticale ma le due quartine in orizzontale e, sotto, le due terzine pure affiancate, ottenendo un rettangolo formato da 7 righe e 22 sillabe:

*Erano i capei d'oro a l'aura sparsi
che 'n mille dolci nodi gli avolgea,
e 'l vago lume oltra misura ardea
di quei begli occhi, ch'or ne son sì scarsi;*

*Non era l'andar suo cosa mortale,
ma d'angelica forma; e le parole
sonavan altro, che pur voce humana*

*e 'l viso di pietosi color' farsi,
non so se vero o falso, mi pareo:
i' che l'esca amorosa al petto avea,
qual meraviglia se di subito arsi?*

*Uno spirto celeste, un vivo sole
fu quel ch'i' vidi: e se non fosse or tale,
piagha per allentar d'arco non sana.*

E dai numeri 22 (le sillabe) e 7 (le righe), trae una suggestiva interpretazione: nei trattati matematici del Duecento il rapporto tra circonferenza e diametro era indicato con la frazione $22/7$, approssimazione del numero irrazionale

che, a partire dal Settecento, viene rappresentato con il simbolo $\pi = 3,14 \dots$

È possibile adottare dunque il π quale parametro interpretativo del Canzoniere e riconoscere nella disposizione del sonetto la misura di una semicirconferenza di raggio 7.

Il sonetto risulterebbe ancora una forma d'arte nata da un'ispirazione matematica che consente di trasformare in poesia il cerchio di Archimede.

Tornando all'identità di Laura e all'ipotesi che, oltre ad essere realmente la donna amata dal poeta, essa rappresenti un ideale che si materializza sotto le sembianze di una figura terrena, Pötters afferma:

... La metamorfosi dell'amore trasformato in processo conoscitivo porta quindi alla scoperta della verità ... Questa conoscenza ... è rappresentata da Laura. La donna cantata nel Canzoniere personifica dunque la verità stessa. È la donna Veritas ... Una lettura in chiave matematica permette di riconoscere un insieme di strutture e significazioni che l'autore ha voluto occultare sotto la compagine linguistico-versificatoria del testo ... In questa dimensione ... l'idea della verità, la donna Veritas, si manifesta sotto forma di un problema matematico, la misurazione del cerchio ... La Verità appare sotto il velo della bella donna chiamata Laura e sotto l'apparenza del problema matematico indicato più tardi con la lettera π . Il paragone poetico-matematico consente di riassumere i nostri risultati in una equazione ideale: LAURA «è» π . L'equazione significa che Laura è l'allegoria di π ovvero che il π è la «figura» matematica di Laura. (Pötters,1987)

C'è un'altra curiosità: nel V sonetto il nome di Laura è pronunciato col diminutivo LAURETA, forma che può trovarsi scritta anche come LAVRETA.

Pötters gioca ancora facendo notare che LAVRETA diventa l'anagramma di LA VERTA' (forma arcaica di verità) e conclude la sua tesi affermando che "LAURA è LAURETA, è LA VER(I)TA', è π "

È un risultato sicuramente suggestivo, in ogni caso sorprendente, oppure, come affermava alcuni anni dopo Umberto Eco, è la conseguenza di uno di quegli *usi perversi* della Matematica fatti da quella *pseudoscienza* chiamata *numerologia*.

6 - La sestina lirica

Un esempio, in ambito sempre poetico, ancora più indicativo di come la matematica abbia ispirato e supportato la scelta metrica di componimenti letterari, è la sestina lirica.

La sestina, creata nel XII secolo dal trovatore provenzale Arnaut Daniel, è un componimento poetico di:

6 strofe (dette stanze), ciascuna composta da 6 versi

3 versi finali definiti "congedo"

Le parole finali dei versi della prima stanza diventano le parole finali di ciascuna delle rimanenti stanze non conservando lo stesso ordine ma secondo la permutazione indicata nel seguente schema di ordinamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

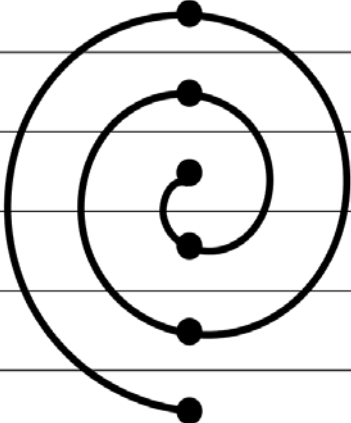
Non ci sono rime tra i versi di ciascuna stanza ma i versi di ogni sestina (dalla seconda alla sesta) terminano con le stesse parole con cui terminano i versi della sestina precedente con un ordine sempre diverso (e indicato nello schema suddetto).

Le sei parole finali di ogni stanza sono permutate secondo la regola della “retrogradatio cruciata”, o permutazione centripeta. Questo è lo schema:

ABCDEF, FAEBDC, CFDABE, ECBFAD, DEACFB, BDFECA

Permutando 6 volte le 6 parole, si ottiene nuovamente la permutazione di partenza.

Le sestine insomma, procedono secondo permutazioni regolari da una sestina all'altra e creano una sorta di “movimento segreto” paragonabile a una spirale. Il matematico e poeta Jacques Roubaud ha paragonato tale schema alla “spirale della chiocciola”.

I		II	III	IV	V	VI
1		6	3	5	4	2
2		1	6	3	5	4
3		5	4	2	1	6
4		2	1	6	3	5
5		4	2	1	6	3
6		3	5	4	2	1

Indicando con A, B, C, D, E, F le parole con cui terminano rispettivamente i sei versi della prima sestina, è possibile

sistemare tali parole in una tabella 6×6 seguendo la regola imposta: si ottiene in tal modo un quadrato latino cioè una tabella quadrata di lato 6 con un simbolo in ogni casella, disposti in modo tale che:

- *in ogni riga ogni simbolo compare esattamente una volta;*
- *in ogni colonna ogni simbolo compare esattamente una volta*

9

	Stanza 1	Stanza 2	Stanza 3	Stanza 4	Stanza 5	Stanza 6
Verso1	A	F	C	E	D	B
Verso2	B	A	F	C	E	D
Verso3	C	E	D	B	A	F
Verso4	D	B	A	F	C	E
Verso5	E	D	B	A	F	C
Verso6	F	C	E	D	B	A

Si riporta di seguito la nota sestina di Francesco Petrarca:
 “L’aere gravato, et l’importuna nebbia”.

I STANZA	<i>L'aere gravato, et l'importuna nebbia</i>	nebbia	A
	<i>Compressa intorno da rabbiosi venti,</i>	venti	B
	<i>Tosto convèn che si converta in pioggia;</i>	pioggia	C
	<i>Et già son quasi di cristallo i fiumi;</i>	fiumi	D
	<i>E 'n vece de l'erbetta, per le valli</i>	valli	E
	<i>Non si ved'altro che pruine et ghiaccio.</i>	ghiaccio	F
II STANZA	<i>Et io nel cor via più freddo che ghiaccio,</i>	ghiaccio	F
	<i>Ò di gravi pensier' tal una nebbia,</i>	nebbia	A
	<i>Qual si leva talor di queste valli</i>	valli	E
	<i>Serrate incontra agli amorosi venti</i>	venti	B
	<i>Et circundate di stagnanti fiumi,</i>	fiumi	D
	<i>Quando cade dal ciel più lenta pioggia.</i>	pioggia	C
III STANZA	<i>In picciol tempo passa ogni gran pioggia;</i>	pioggia	C
	<i>E 'l caldo fa sparir le nevi e 'l ghiaccio,</i>	ghiaccio	F
	<i>Di che vanno superbi in vista i fiumi;</i>	fiumi	D
	<i>Nè mai nascose il ciel sì folta nebbia</i>	nebbia	A
	<i>Che sopraggiunta dal furor d'i venti</i>	venti	B
	<i>Non fugisse dai poggi et da le valli.</i>	valli	E
IV STANZA	<i>Ma, lasso, a me non val fiorir de valli,</i>	valli	E
	<i>Anzi piango al sereno et a la pioggia</i>	pioggia	C
	<i>Et a' gelati et ai soavi venti:</i>	venti	B
	<i>Ch'allor fia un dì madonna senza 'l ghiaccio</i>	ghiaccio	F
	<i>Dentro, et di for senza l'usata nebbia,</i>	nebbia	A
	<i>Ch'i' vedrò secco il mare e' laghi e i fiumi.</i>	fiumi	D
V STANZA	<i>Mentre ch'al mar discenderanno i fiumi,</i>	fiumi	D
	<i>Et le fiere ameranno ombrose valli,</i>	valli	E
	<i>Fia dinanzi a' begli occhi quella nebbia,</i>	nebbia	A
	<i>Che fa nascer d'i miei continua pioggia,</i>	pioggia	C
	<i>Et nel bel petto l'indurato ghiaccio,</i>	ghiaccio	F
	<i>Che trae del mio sì dolorosi venti.</i>	venti	B

VI STANZA	<i>Ben debb'io perdonare a tutti venti</i>	venti	B
	<i>Per amor d'un che in mezzo di duo fiumi</i>	fiumi	D
	<i>Mi chiuse tra 'l bel verde e 'l dolce ghiaccio,</i>	ghiaccio	F
	<i>Tal ch'i' dipinsi poi per mille valli</i>	valli	E
	<i>L'ombra ov'io fui; ché né calor né pioggia,</i>	pioggia	C
	<i>Né suon curava di spezzata nebbia.</i>	nebbia	A
congedo	<i>Ma non fuggìo già mai nebbia per venti</i>	nebbia, venti	
	<i>Come quel dì, né mai fiumi per pioggia,</i>	fiume, pioggia	
	<i>Né ghiaccio quando 'l sole apre le valli.</i>	valli	

7 - Matematica e lingua

In uno dei suoi sempre originali e interessanti lavori pubblicati in rete, "Metodi matematici della letteratura" (Marzo 1995), Giorgio Odifreddi ci fa notare come sia possibile tradurre due delle nozioni fondamentali della Matematica in termini letterari:

identità: stesso testo (ogni testo è identico a se stesso)

isomorfismo: stessa struttura sintattica o semantica

In letteratura, a differenza che nella Matematica, l'identità non implica sempre l'isomorfismo sintattico o semantico.

Se consideriamo infatti la frase (è un verso di Aldo Vitali):

ratto trascorre e a noi rose dispensa

questa, se riferita al mese di maggio, ha la seguente struttura sintattica:

aggettivo + verbo + sostantivo + verbo

Ma se la stessa frase fa riferimento ad un topo, la sua struttura sintattica diventa:

sostantivo + verbo + verbo + sostantivo

Dunque una stessa proposizione racchiude una doppia struttura sia semantica che sintattica.

A differenza di quello che succede nel linguaggio matematico, sono tanti i testi che ammettono una pluralità di lettura (ambiguità lessicale). Odifreddi ci fornisce i seguenti spiritosi esempi:

Lo stretto della manica	Il polsino
Mezzo minuto di raccoglimento	Il cucchiaino
Classifica generale	Greca, decorazione
Per sommi capi	Corona
Grazie, non fumo	Bellezze autentiche
Lo vedi come sei?	Il 9 capovolto

Questa particolarità della lingua permette di creare giochi enigmistici di cui sono ricchi alcune riviste specializzate e che sono tra i miei passatempi preferiti. E “le regine” di tutti i giochi enigmistici sono, a mio avviso, le famose *crittografie mnemoniche*. Ne riporto di seguito alcune che considero particolarmente divertenti:

Chiave	Crittografia	Soluzione
8-3-8	<i>CIN CIN</i>	<i>Espresso per Brindisi</i>
6-6-4	<i>Breve stage per imbrogliatori</i>	<i>Rapido Foggia-Bari</i>
10	<i>Tra sette minuti</i>	<i>Biancaneve</i>
4-9	<i>Boss latitante</i>	<i>Capo ricercato</i>
9-10	<i>Beni ereditari</i>	<i>Proprietà transitiva</i>
2-5-3-10	<i>Quando si sottoscrisse</i>	<i>La volta del firmamento</i>
7-14	<i>Sassolino microscopico</i>	<i>Calcolo infinitesimale</i>
3-2-8	<i>Incontro di box</i>	<i>2 al quadrato</i>
10-2-6	<i>Devitalizzazione di</i>	<i>Estrazione di radice</i>

	<i>un dente</i>	
1-7-5-15	<i>Uomo e donna</i>	<i>I fattori della moltiplicazione</i>
12-5-8-4	<i>Allattamento artificiale</i>	<i>Integrazione della funzione seno</i>
7-3-9-5	<i>Monarchia</i>	<i>Potenza con esponente reale</i>
5-11	<i>Athlete leali</i>	<i>Rette concorrenti</i>
2-4-3-1'7	<i>Trono</i>	<i>La base per l'altezza</i>
9-2-3-7	<i>Ambasciatore</i>	<i>Esponente di una potenza</i>
2-8-5-8	<i>Corrompere</i>	<i>La funzione della tangente</i>
5-5-11	<i>Refurtiva</i>	<i>Prova della sottrazione</i>
5-1-6-2-7	<i>Astemi felici</i>	<i>Beati i poveri di spirito</i>
12-2-8	<i>Guerrafondaio</i>	<i>Alimentatore di tensione</i>
10-2-4-9	<i>Coniglio</i>	<i>Generatore di alta frequenza</i>

8 – Centomila miliardi di sonetti

Centomila miliardi di sonetti di Raymond Queneau (1961) è un “libro interattivo di poesia combinatoria” che permette a chiunque di comporre a piacimento centomila miliardi di sonetti; è una sorta di macchina per la produzione di poesie che garantisce, in teoria, una lettura lunga quasi duecento milioni di anni.

Il libro è composto da sole dieci pagine (un sonetto per ogni pagina), ciascuna divisa in quattordici bande orizzontali corrispondenti ai quattordici versi. Il lettore può, ruotando le bande orizzontali come delle pagine, scegliere una delle dieci versioni della poesia proposte da Queneau.

La tecnica è la seguente: supponiamo di disporre di 10 sonetti: ad ogni primo verso si possono far corrispondere 10

diversi secondi versi, ottenendo 100 diverse combinazioni di 2 versi; aggiungendo ad ognuna di queste 100 combinazioni 10 terzi versi si ottengono 1000 combinazioni di 3 versi, e così via ottenendo $10^{14} = 100.000.000.000.000$ di sonetti.

Se impiegassimo 45s per leggere un sonetto e 15s per girare le strisce, ipotizzando di farlo per 8 ore al giorno, 200 giorni l'anno, avremmo più di un milione di secoli di lettura da fare; considerando invece di leggere per tutto il giorno per 365 giorni l'anno arriveremmo comunque a ben 190 258 751 anni più qualche spicciolo (ignorando anni bisestili e altri dettagli).

9 – L'enigma di Torquemada

Nel libro edito da Mondadori (2022) “La mascella di Caino” che si apre con un’ arguta e brillante prefazione di Stefano Bartezzaghi (noto a tutti gli appassionati di enigmistica), viene riproposto, a distanza di decenni, un tormentone di cui si è parlato molto e che ancora oggi viene discusso anche sui social: si chiede al lettore di mettere nel giusto ordine cento pagine del racconto giallo “La mascella di Caino” numerate ma messe alla rinfusa.

In realtà “La mascella di Caino” è l’ultimo enigma incluso nel “Torquemada Puzzle Book” che è una raccolta di rompicapo ideata nel 1934 da Edward Powys Mathers, noto con lo pseudonimo di Torquemada: si tratta di giochi, scherzi verbali, trappole logiche e quant’altro possa appassionare chi abbia voglia di *torcersi le budella cognitive alla ricerca delle soluzioni*. Il racconto è un romanzo giallo ed è l’enigma letterario più difficile mai concepito, è una storia di crimini e

omicidi: il lettore, dopo avere trovato l'ordine giusto delle pagine, dovrà trovare i nomi delle vittime e dei loro assassini. Sembra che ad oggi solo in tre abbiano risolto il caso, il problema è pertanto aperto a chi abbia voglia di cimentarsi nella soluzione trovando, tra milioni di combinazioni possibili, l'unica corretta.

10 - Un insieme è infinito ... ed è subito sera

Nel libro *Matematica. Stupore e poesia* Bruno D'Amore affianca la definizione di insieme infinito, resa in versi, alla celeberrima *Ed è subito sera* di Salvatore Quasimodo

*Ognuno sta solo sul cuor della terra
trafitto da un raggio di sole:
ed è subito sera*

*Un insieme si dice infinito quando
si può mettere in corrispondenza biunivoca
con una sua parte propria*

“Per millenni gli esseri umani hanno cercato una definizione del concetto di infinito. Una intuizione di Galileo Galilei prima e una consapevolezza di George Cantor poi hanno spinto Richard Dedekind ad esprimere la precedente definizione, elegante e densissima di significato, 2500 anni di storia riassunti in poche parole; ma la loro densità semantica è per lo meno pari a quella di Quasimodo” (D'Amore, 2009).

11 - Due poesie di Trilussa

Ho scelto di concludere il presente lavoro sottoponendo all'attenzione del lettore due poesie in dialetto romanesco composte da quel singolare poeta che ha fatto dell'irriverenza e della satira politica i suoi punti di forza: Carlo Alberto Salustri, meglio conosciuto con lo pseudonimo di Trilussa.

È sorprendente constatare come, a distanza di circa settanta anni, i suoi versi risuonano drammaticamente e prepotentemente attuali.

Nummeri (la metafora del dittatore)

*"Conterò poco, è vero"
diceva l'Uno ar Zero.
"Ma tu che vali?" Gnente, propio gnente.
Sia ne l'azione come ner penziero,
rimani un coso vòto e inconcrudente.
Io, invece, si me metto a capofila
de cinque zeri tale e quale a te,
lo sai quanto divento? Centomila.
E' questione de nummeri. A un dipresso
è quello che succede ar dittatore,
che cresce de potenza e de valore,
più sò li zeri che je vanno appresso.*

Er disarmo

*- Se faranno er disarmo generale,
- barbottava la Vipera - è finita!
Er veleno che ciò va tutto a male.
Nun m'arimane che una via d'uscita
in una redazione de giornale...-
Er Porcospino disse: - Certamente*

*puro per me sarebbe un guaio grosso:
perchè, Dio guardi, je venisse in mente
de levamme le spine che ciò addosso,
nun resterei che porco solamente!*

Bibliografia

BECCASTRINI S., NANNICINI M. P. (2012). *Matematica e Letteratura – Oltre le due culture*, Trento: Erickson.

CASOLARO F., DELLA VECCHIA G. (2018). *Matematica, Arte e Letteratura, Science& Philosophy*, v.6(2), pp. 177-379.

D'AMORE B. (2009). *Matematica. Stupore e poesia*, Firenze: Giunti

TORQUEMADA (2022). *La mascella di Caino (Prefazione di Stefano Bartezzaghi)*, Milano: Mondadori

ODIFREDDI P. (1995). *Metodi matematici della letteratura*.
<http://www.piergiorgiodifreddi.it/wp-content/uploads/2010/09/metodi.pdf>

Antologia Tematica di crittografie mnemoniche, (2001).
http://www.enignet.it/uploads/documenti/Opus04_1_cg_tema.pdf

“6° Convegno Nazionale su La Matematica nel Primo Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari”

Quarto Comprensivo Chieti
Scuola sec. 1° grado G. Mezzanotte
Chieti, 12-13-14 maggio 2022

Diana Cipressi*, Luciana Delli Rocili**,
Antonio Maturo***

* Quarto comprensivo Chieti; diana.cipressi@gmail.com

** Mathesis Abruzzo; lucianadr@live.it

*** Mathesis Abruzzo; antomato75@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.082

Sunto: *Si presentano le motivazioni e i contenuti del 6° Convegno Nazionale su “La Matematica nel 1° Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari” tenuto a Chieti dal 12 al 14 maggio 2022.*

Parole Chiave: *Matematica nel primo ciclo, Aspetti sociologici, Aspetti psicologici, Interdisciplinarietà*

Abstract: *The reasons and contents of the 6th National Conference on "Mathematics in the 1st Cycle: didactic, sociological and interdisciplinary aspects" held in Chieti from 12 to 14 May 2022 are presented.*

Keywords: *Mathematics in the first cycle, Sociological aspects, Psychological aspects, Interdisciplinarity*

1 - Presentazione

La prima edizione del Convegno su “La Matematica nel 1° Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari” risale al 2013 ed è stata svolta presso il polo didattico del Dipartimento di Lettere, Arti e Scienze Sociali, dell’Università di Chieti-Pescara nei giorni 4, 5 e 6 aprile 2013, con l’ultima giornata di lavori svolta presso l’Istituto Comprensivo n. 4 S. S. I° grado “R. Ortiz” Via Teramo, 1, Chieti Scalo.

In quella occasione sono stati individuati i seguenti obiettivi e tematiche, non esaustivi, ma centrali e ancora attuali, nella quasi totalità, in questa sesta edizione del Convegno:

Nel panorama delle iniziative periodicamente dedicate alla Matematica nella Scuola ed agli aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari connessi, il Convegno intende focalizzare l’attenzione dei partecipanti su alcuni aspetti decisivi per riflettere e lavorare per il miglioramento dell’insegnamento della matematica ai ragazzi nella fascia d’età che va dai 6 ai 14 anni.

Alcune tematiche del convegno riguardano:

- una lettura, con riflessione critica, del recente dettato ministeriale (Indicazioni nazionali per il curricolo – 4 / 09 / 2012);*
- una rassegna dei risultati più significativi dell’attuale ricerca pedagogica nel campo;*
- le indagini sugli apprendimenti realizzati a livello nazionale e internazionale;*
- l’uso delle tecnologie e dei vari software dedicati all’insegnamento della disciplina;*

- la raccolta delle opinioni dei docenti che quotidianamente affrontano i problemi del *“fare matematica a scuola”*;
- la messa a fuoco di tecniche e procedure che, partendo da una teoria esplicitata e servendosi dei mezzi a disposizione, faciliti concretamente il processo di insegnamento-apprendimento della Matematica;
- la previsione dei futuri sviluppi dell'insegnamento – apprendimento alla luce del processo di globalizzazione in atto.

Sono stati individuati, in particolare, i seguenti poli di ricerca didattica:

- *analisi e lettura critica delle Indicazioni Nazionali (D.M. n. 254 - 16/11/2012) per il curricolo del primo ciclo d'istruzione;*
- *stato dell'arte della ricerca pedagogica sulla didattica della matematica di base;*
- *esperienze didattiche, sociologiche e interdisciplinari. Proposte innovative.*

La serie dei Convegni su *“La Matematica nel 1° Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari”* è proseguita, negli anni 2014 e 2015 presso l'Aula Magna del Dipartimento di Lettere, Arti e Scienze Sociali. Precisamente la seconda edizione del Convegno si è svolta dal 27 al 29 marzo 2014, preceduta da un pomeriggio di lavori del 26 marzo presso la *“Sala del Bandarese”* del Comune di Bucchianico, mentre la terza edizione si è svolta dal 16 al 18 aprile 2015.

La quarta edizione del Convegno si è tenuta presso l'Aula C di Psicologia della sede di Chieti dell'Università di Chieti-Pescara, dal 7 al 9 aprile 2016, preceduta, il 6 aprile, da una giornata di studio introduttiva al Convegno su *“Formazione, Innovazione didattica e Comunicazione Scientifica”*.

La quinta edizione del convegno si è svolta dal 25 al 27 maggio 2017 presso il *“Polo Micara”* del Dipartimento di

Architettura, a Pescara. L'organizzazione e gli obiettivi del Convegno del 2017 sono stati enunciati come segue:

Il convegno, frutto di una collaborazione quinquennale fra gli Enti di formazione APAV, MATHESIS, e l'Università G. d'Annunzio di Chieti-Pescara, si propone come corso di formazione dedicata ai docenti del primo ciclo di istruzione, per un totale di n° 20 ore di lavoro.

Esso si struttura in Conferenze, Laboratori, e Tavole rotonde, anche con la presentazione di esperienze svolte in classe dagli insegnanti delle scuole del primo ciclo.

Le Conferenze sono finalizzate ad aggiornare gli insegnanti sui più recenti sviluppi della ricerca didattica e saranno tenute da docenti universitari, dirigenti scolastici o ricercatori sulle tematiche della didattica e della pedagogia.

I Laboratori, che prevedono una interazione fra il docente coordinatore ed i frequentanti, sono finalizzati a far acquisire agli insegnanti competenze nei vari settori della Matematica e dell'Informatica. Saranno messi in evidenza gli aspetti interdisciplinari e saranno diretti da docenti con provata esperienza didattica e di ricerca.

Dal 2018 al 2021 non sono state tenute ulteriori edizioni del Convegno, per vari motivi, da un periodo di crisi dell'associazione Mathesis all'impegno degli organizzatori per Corsi Estivi e Convegni Internazionali. Negli ultimi tre anni, poi, l'attività convegnistica in presenza è stata frenata dai noti problemi sanitari.

La Mathesis Abruzzo, nata nel 2019 dalla volontà dei soci delle Mathesis di Chieti e di Pescara di fare un'Associazione Matematica di livello regionale, ha deciso di riprendere, nella presente edizione 2022 del Convegno, gli obiettivi già enunciati nelle precedenti edizioni, aggiungendo anche la tematica di "matematica e biologia", con l'idea di incoraggiare la partecipazione di sociologi, psicologi e medici, in vista di

una didattica interdisciplinare che tenga conto del ruolo fondamentale dei modelli matematici nella comprensione di fenomeni complessi come la situazione sanitaria attuale e le dinamiche dei gruppi che si formano in una classe. Il Convegno ha presentato quindi un ampio ventaglio di tematiche, fra cui: modelli matematici in sociologia e biologia, sperimentazioni di logica e probabilità, potenzialità della storia della matematica, analisi sociali, percorsi didattici inclusivi, didattiche laboratoriali, multidisciplinarietà. I relatori sono stati docenti universitari, ricercatori su tematiche di didattica e pedagogia, docenti delle Scuole del Primo e del Secondo Ciclo, sociologi, medici. L'organizzazione dei lavori è stata strutturata in tre sessioni, con l'obiettivo di affrontare nel modo più esaustivo possibile tutte le ramificazioni del tema in oggetto.

Nella prima sessione, *Logica e Probabilità nel primo Ciclo*, sono stati affrontati i temi essenziali che riguardano l'insegnamento della Matematica dell'Incerto nella Scuola Primaria e nella Scuola dell'Infanzia.

La seconda sessione è stata dedicata alle *Proposte didattiche*, con la presentazione di esperienze laboratoriali che hanno coniugato l'astratto e il concreto.

Nella terza sessione, *Multidisciplinarietà*, è stato affrontato il ruolo della Sociologia e della Psicologia nel contesto educativo. È stato inoltre messo in evidenza il ruolo della Matematica nell'interpretazione di fenomeni biologici.

2 - Prima sessione: Logica e Probabilità nel Primo Ciclo

Il convegno è stato presentato da Diana Cipressi, Luciana Delli Rocili e Antonio Maturo, che hanno illustrato le iniziative passate, presenti e future di Mathesis Abruzzo e dell'APAV. Gli interventi sui contenuti del tema in oggetto, arricchiti poi nella discussione finale dai contributi dei docenti partecipanti, hanno visto la partecipazione dei relatori Enzo Barone, Anna Cerasoli, Mauro Cerasoli, Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo. Barone ha proposto una vasta panoramica di quesiti di probabilità nella scuola media con il lavoro: *Alcuni problemi di probabilità*. Anna Cerasoli, con il lavoro: *Il Calcolo Combinatorio nel Primo Ciclo*, ha presentato alcune modalità originali per introdurre il calcolo combinatorio ai bambini della Scuola Primaria, a cui è seguito l'intervento di Mauro Cerasoli, sul tema analogo per la Scuola secondaria di primo grado, dal titolo: *Problemi combinatori semplici per la Scuola Media*, con la presentazione di alcune questioni di base della probabilità.

Di carattere sperimentale è stato l'intervento di Delli Rocili e Maturo che hanno presentato alcuni risultati su: *Sperimentazioni di Logica e Probabilità nella Scuola Primaria*.

3 - Seconda sessione: Proposte didattiche

Nella sessione dedicata alle proposte didattiche, sono intervenuti i relatori Diana Cipressi, Bruno Iannamorelli, Maria Grazia Pietrantonio, Domenico Lenzi, Fiorella Paone e Ruben Sabbadini.

L'intervento di Diana Cipressi su: *Storia e didattica della matematica: una proposta per la scuola del 1° ciclo*, ha messo in evidenza esempi illustri nell'ottica di un curricolo verticale.

Bruno Iannamorelli ha mostrato come gli antichi Incas avessero degli strumenti di calcolo sofisticati con il lavoro: *Strumenti di calcolo degli Incas ancora attuali*.

Maria Grazia Pietrantonio ha presentato uno studio dettagliato su: *Thinkering making and coding. Laboratorio del fare e del pensare nella scuola primaria* e Domenico Lenzi ha presentato lo studio: *Homo sapiens: dal concreto della prima infanzia all'astrazione*.

Relativamente alle attività future, il lavoro introduttivo di Renata Santarossa - Presidente APAV - dal titolo *La matematica nell'insegnamento STEM* è stato presentato da Luciana Delli Rocili, in sostituzione della relatrice, che per motivi personali non è potuta intervenire.

Fiorella Paone ha presentato uno studio accurato sulla didattica inclusiva della Matematica nel Primo Ciclo dal titolo: *Strategie per una situazione-problema: percorsi didattici inclusivi nella Scuola Primaria per l'insegnamento/apprendimento della Matematica*.

Si è conclusa la sessione con l'intervento in video conferenza di Ruben Sabbadini con il lavoro: *Matematica della piegatura della carta*.

4 - Terza sessione, Multidisciplinarietà

Nella terza sessione sono stati presentati i lavori di Assunta Lisa Carulli, Domenico Di Spalatro, Stella Chiavaroli, Silvana Di Filippo, Gabriele Di Francesco, Luigi Lezzerini e

Federica Melchiorre. Sono stati evidenziati alcuni aspetti sociologici e psicologici molto importanti per la Scuola del Primo Ciclo. È stato inoltre presentato uno studio sui collegamenti fra Matematica e Biologia.

La presentazione di Carulli e Di Spalatro su: *Demografia e territorio. Un caso di studio*, ha proposto una lettura di rilevazioni censuarie nella regione Abruzzo.

Stella Chiavaroli nel suo intervento ha trattato: *Aspetti etici e deontologici negli ambienti multimediali durante la pandemia con AscolTIAMOci*.

Successivamente è intervenuta Silvana Di Filippo presentando il lavoro: *Il modello dello sportello di ascolto integrato Covid 19. Aspetti multimediali e multidisciplinari*.

Un modello matematico per l'analisi sociologica dei gruppi che si formano all'interno di una classe è stato presentato da Di Francesco, con la relazione: *Analisi sociometrica di un gruppo classe. Relazioni amicali e simmetrie sociali*.

Melchiorre ha esposto un lavoro interdisciplinare fra Matematica e Psicologia dal titolo: *MateMagicaMente. Problem solving e soft skills nelle discipline STEAM. Tra Tinkering, Ludodidattica, Making e Gamification*.

Infine, alcuni collegamenti fra Matematica e Biologia, utili per una diagnosi corretta di alcune patologie e per un intervento efficace, sono stati illustrati da Luigi Lezzerini con il lavoro: *Importanza della Matematica nei fenomeni complessi della Biologia: i limiti del metodo ipotetico-deduttivo, statistico e probabilistico*.

Matematica al primo ciclo

Federica Accorroni* Carlo Toffalori**

* Università di Camerino; federica.accorroni@unicam.it

** Università di Camerino; carlo.toffalori@unicam.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.083

Sunto: Presentiamo la serie di incontri “Matematica al primo ciclo”, destinata ai docenti di matematica della scuola secondaria di primo grado e svolta a primavera 2022.

Parole Chiave: Didattica inclusiva; Gioco; Manufatti.

Abstract: We present the series of meeting “Matematica al primo ciclo” (“Mathematics in the first cycle”), intended for teachers of mathematics of the lower secondary school and held in spring 2022.

Keywords: Inclusive education; Game; Artifact.

1 - Introduzione

La didattica della matematica nella scuola secondaria di primo grado è questione delicata per svariati motivi. Nel corrispondente triennio, infatti, da un lato gli studenti iniziano

il loro processo verso la maturità, e al tempo stesso la matematica comincia a rivelare le sue caratteristiche di astrazione, pur restando congiunta in un unico insegnamento con altre scienze “meno” esatte e più direttamente legate all’osservazione del mondo e alle sperimentazioni.

Nel triennio, poi, la matematica, come del resto tutte le altre materie, si rivolge indistintamente a tutti gli studenti, e non solo, come nei successivi gradi di istruzione, a quelli che, seguendo le loro inclinazioni e optando per specifici indirizzi di studio, decidono di seguirla più intensamente.

Nella progettazione didattica, quindi, bisogna tenere in considerazione diversi approcci, che siano capaci di coinvolgere il maggior numero di alunni, da quelli più interessati alla matematica a quelli che la rifiutano per antipatia o pregiudizio. Particolare attenzione va posta nei confronti degli alunni con bisogni educativi speciali, sia per disturbi evolutivi specifici (DSA), come la discalculia, sia per disturbi legati a fattori socioeconomici, linguistici e culturali.

D'altra parte il mondo cambia, e quindi anche gli strumenti di apprendimento e insegnamento devono evolversi e adeguarsi, seguendo la realtà: tanto capita anche in matematica.

I docenti di matematica della scuola secondaria di primo grado manifestano largamente il desiderio di conoscere ed esplorare vie nuove, capaci di incuriosire, meravigliare, attrarre e coinvolgere gli studenti, così da favorire e migliorare il loro rapporto con la materia e possibilmente mostrarne il rapporto vivo, profondo e fertile con la vita di tutti i giorni e la realtà che ci circonda.

Muovendo da queste premesse, l'Associazione Amici della Matematica delle Marche, Mathesis di Camerino, si è attivata per organizzare nel 2022 insieme all'Università di Camerino una serie di incontri di aggiornamento *Matematica al primo ciclo*, dedicati appunto alla didattica nella scuola secondaria di primo grado, ma anche nella scuola primaria. Agli appuntamenti hanno partecipato anche i docenti di un corso regionale USR, proprio dedicato alla matematica nella scuola secondaria di primo grado.

2 - Un anno fa

Già nel 2021 si era tenuta un'analogha sequenza di incontri. In quell'occasione una riflessione sugli obiettivi generali dell'educazione matematica al primo ciclo era stata sviluppata da Pietro Di Martino, allora Presidente della CIIM-UMI. La difficoltà di apprendimento in matematica era stata analizzata da Anna Baccaglini-Frank; l'atteggiamento negativo verso la matematica da Rosetta Zan; l'importanza di una didattica inclusiva da Elisabetta Robotti. Erano state poi presentate varie esperienze di didattica laboratoriale in algebra, geometria e non solo, grazie ai contributi di Antonella Castellini, Francesca Tovenà, Francesca Morselli e Monica Testera, Tonia Esposito. In particolare si erano sottolineati l'uso degli artefatti e l'importanza di educare all'argomentazione. Finalmente, Saverio Tortoriello aveva descritto il progetto delle Medie Matematiche, che vuole estendere alla secondaria di primo grado quell'esperienza del Liceo Matematico, che così rapidamente si è estesa negli ultimi anni in Italia.

3 - Giochi competitivi e giochi collaborativi

L'edizione 2022 di *"Matematica al primo ciclo"* si è invece concentrata su nuove esperienze didattiche, spesso laboratoriali, aperte al gioco e all'osservazione del mondo circostante. È stato un piacere e un onore ospitare relatrici e relatori di grande autorevolezza, talora, come già nel 2021, insigniti di premi nazionali per le attività da loro sviluppate. I partecipanti hanno gradito la varietà e la vivacità degli spunti proposti, che proviamo a riassumere qui.

Un comune denominatore di molti degli interventi è stato il gioco, visto come strumento chiave di apprendimento della matematica. Un'idea non nuova – già descritta da Platone, che nel dialogo *Le Leggi* elogia espressamente in proposito gli Egiziani e il loro sistema educativo – eppure ancora attualissima.

Quando si parla di competizioni in matematica, numerosi sono gli esempi che vengono alla mente, dalle gare internazionali come le Olimpiadi ai giochi dell'Università Bocconi, dai Kangarou della matematica ai giochi del Premio Morelli. In verità le Olimpiadi si rivolgono solo ai ragazzi degli ultimi tre anni delle scuole secondarie di secondo grado, ma le altre iniziative prevedono spesso sezioni anche per la scuola del primo ciclo.

Si obietterà che i giochi competitivi sono esclusivi e non inclusivi: sembrano fatti apposta per privilegiare gli studenti più bravi e mortificare gli altri. Ma almeno la formula di una gara a squadre si muove in tutt'altra direzione: attraverso di essa, infatti, tutti i ragazzi senza esclusioni vivono l'opportunità non solo di confrontarsi con problemi inusuali, ma anche di collaborare, fornendo ciascuno il proprio

contributo. Si instaura cioè l'apprendimento tra pari, perché si favoriscono la discussione, il rispetto reciproco, il riconoscimento delle competenze altrui – tutti fattori alla base dello sviluppo delle abilità sociali. La partecipazione alla competizione è di per sé motivante, ma quello che più conta è la possibilità di lavorare insieme.

Per permettere alle scuole di organizzare loro proprie competizioni, oppure sessioni di allenamento per le gare nazionali, nel 2008 Sandro Campigotto ha creato il sito *Phi Quadro*. Ce ne ha parlato in uno degli incontri del ciclo. Il fine ultimo dell'iniziativa è quello di consentire agli studenti una preparazione adeguata a essere competitivi nelle sfide ufficiali. Tuttavia, almeno in questo caso, il mezzo è più importante dello scopo finale. Infatti impegnare gli alunni in gare fra gruppi all'interno della stessa classe, tra classi dello stesso istituto o anche tra diverse scuole (usando il software a disposizione), li conduce a dedicare del tempo a "fare matematica". Oltre a partecipare e a organizzare questi allenamenti, gli insegnanti registrati possono consultare i testi delle gare già svolte con le relative soluzioni ed utilizzare le varie domande anche come spunto per le lezioni curricolari.

Avendo come fine ultimo quello di giocare in squadra "perché insieme si fa molta più matematica che da soli", il sito *Phi Quadro* dedica una sezione pure alla scuola secondaria di primo grado, coinvolgendo gli studenti più giovani con gli stessi criteri usati per i loro colleghi più grandi.

Non c'è tuttavia per i giochi di matematica solo il modello competitivo, individuale o a squadre: a esso si affiancano i giochi dichiaratamente collaborativi, il cui unico scopo è di stimolare il rapporto di cooperazione tra gli studenti, inclusi

quelli apparentemente meno dotati, favorire la fantasia e la libertà, evitare il vecchio sistema di esercizi ripetitivi, superare quindi in ogni ragazzo un comportamento solo acquiescente e passivo e ogni paura di sbagliare.

Una proposta molto interessante al riguardo, pensata proprio per la scuola secondaria di primo grado, ci è stata illustrata da Andrea Maffia, che ha presentato i suoi *Escape books*. Al momento (2022) ne sono stati pubblicati due: *Destinazione Bellatrix* per la prima media, e *La tomba di Akhenaten* per la seconda. Il successivo volume per la terza media è ancora in preparazione. Si tratta di libri con una struttura non lineare, che muovono da una ambientazione fantastica e propongono come filo conduttore un'avventura da portare a termine. Ogni pagina è contrassegnata da un numero con tre cifre; per arrivare al traguardo bisogna risolvere degli enigmi la cui soluzione è, appunto, un altro numero di tre cifre che indica la successiva pagina da leggere.

Ognuno di questi enigmi tratta un contenuto matematico relativo al periodo scolastico di riferimento, senza seguire però nemmeno in questo caso un ordine prevedibile. I ragazzi cioè, non sanno in precedenza quale concetto matematico sarà necessario per superare la prova.

Di fronte ai vari problemi ragazze e ragazzi dovranno elaborare la giusta strategia riportando alla memoria concetti già appresi, oppure individuando percorsi alternativi che aprono la strada a nuove conoscenze. Si attiva così un apprendimento informale e libero.

In questa come nelle altre esperienze che stiamo descrivendo, il ruolo dell'insegnante resta fondamentale. Gli si affida il delicato compito di agire da mediatore, cercando di

mettere in evidenza le connessioni tra quanto emerso nel gioco e i contenuti della lezione curricolare.

Come si è già sottolineato, nella proposta di Maffia non si prevede alcuna competizione: non ci sono vincitori e non è importante finire prima degli altri. Il gioco è quindi inclusivo, e si fonda sulla convinzione che lo sviluppo del pensiero matematico richieda tempo e riflessione.

4 - Leonardo

Le stesse caratteristiche sono evidenti nella proposta di cui ci ha parlato Daniele Pasquazi, autore del gioco *I ludi geometrici di Leonardo da Vinci*. Si tratta di un'idea ispirata dagli studi di Leonardo sulle figure geometriche, in particolare sul problema della "quadratura" delle superfici curve, cioè della loro trasformazione in superfici equivalenti di cui sia più semplice determinare l'area. Queste ricerche leonardesche compaiono nel *Codice Atlantico*. Probabilmente il loro obiettivo principale era la quadratura del cerchio, cioè la costruzione di un quadrato di area esattamente uguale a quella di un cerchio di raggio assegnato. La difficoltà di raggiungere lo scopo con i mezzi geometrici classici della riga e del compasso portò Leonardo a fare miriadi di tentativi. La sua curiosità lo indusse poi a estendere il problema ad altre superfici curve.

Nel gioco in questione, oltre alla riproduzione dei disegni di Leonardo con le superfici da "quadrare" e alla spiegazione preliminare di alcune equivalenze, ragazze e ragazzi hanno a disposizione lunule, triangoli, porzioni di cerchio in plexiglass per costruire e modificare concretamente queste figure. Gli

studenti, divisi in gruppi, devono arrivare alla “quadratura” usando i suddetti materiali a loro disposizione.

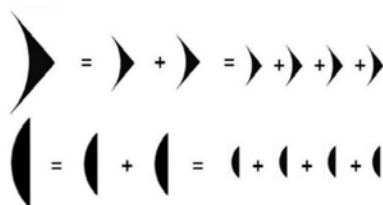
La proposta di questo gioco nasce per rispondere ad una specifica esigenza: da recenti indagini condotte su ragazze e ragazzi di età compresa tra 11 e 14 anni emerge la loro tendenza a confondere i concetti di uguaglianza, equivalenza e isoperimetria delle figure piane. Spesso, inoltre, nella risoluzione dei problemi geometrici gli alunni tendono a utilizzare, come purtroppo sappiamo, un approccio meccanico, ridotto alla mera applicazione di formule. Pare invece importante che essi sviluppino una capacità di percezione geometrica, che permette di rilevare, comprendere ed utilizzare le caratteristiche che definiscono una figura.

Spesso la contestualizzazione in ambito geometrico fornisce pure un ottimo spunto per elaborare strategie risolutive per problemi aritmetici. L’oggetto geometrico, che è possibile disegnare, aiuta a concretizzare oggetti matematici astratti. Il disegno, tuttavia, di per sé è statico: una volta tracciata, la figura può essere osservata da un unico punto di vista. A volte, invece, per comprenderne le proprietà più profonde è utile osservarla in movimento. L’uso di un materiale che possa essere manipolato consente di considerare l’oggetto da prospettive diverse, di confrontare e congetturare. La manipolazione, come insegnano gli studi montessoriani confermati dalle recenti ricerche in ambito neuroscientifico, ha una valenza formativa enorme; l’esperienza manipolativa riesce ad attivare quei processi neurologici che consentono di immaginare i movimenti eseguiti con gli strumenti didattici anche quando si hanno di fronte figure disegnate. Se, in particolare, alla manipolazione è stato associato un concetto

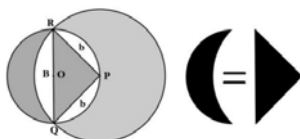
matematico, allora si può recuperare quel concetto ricordando la manipolazione con il manufatto.

Questa attività manipolativa, che stimola prevalentemente l'emisfero destro del cervello, facilita successivamente l'elaborazione del pensiero astratto, che è di pertinenza dell'emisfero sinistro. Nei ragazzi dell'età che si diceva, compresa tra gli 11 e i 14 anni, i processi di razionalizzazione non sono ancora pienamente maturi, e questo comporta una certa difficoltà a tenere sotto controllo tutti i passaggi concatenati di un ragionamento. I corretti modelli mentali che i ragazzi devono costruire a poco a poco sono allora favoriti dalla manipolazione di adeguati artefatti. La "dimostrazione figurata" attraverso il materiale che simula l'oggetto matematico conserva un certo rigore, anche se non coincide ancora con una prova formale.

I triangoli, le lunule e le porzioni di cerchio usate per "quadrare" le figure presenti nel *Codice Atlantico* di Leonardo sono quindi lo stimolo per veicolare il concetto di equivalenza tra figure piane apparentemente molto diverse. Partendo dalla duplicazione del quadrato si passa alla duplicazione del cerchio e delle figure che da esso si possono ricavare, fino ad ottenere equivalenze come la seguente:



Oppure si può arrivare alla equivalenza tra la lunula e il triangolo rettangolo isoscele



E ancora: questa esperienza, come del resto le altre che stiamo riferendo, può insinuare nei ragazzi l'idea che spesso più che la risoluzione di un problema sia importante la sua ricerca. I tentativi di risolvere un enigma apparentemente indecifrabile hanno generato nella storia, e possono continuare a generare nella didattica di oggi, una quantità enorme di stimoli.

Altro aspetto notevole di questa esperienza è quello estetico. La bellezza delle figure di Leonardo può avere una forte attrattiva nei confronti di quegli studenti che solitamente non sono interessati alla matematica. La possibilità di realizzare i disegni, magari arricchendoli da un punto di vista artistico, consente a tutti i ragazzi di partecipare e di superare quei pregiudizi che a volte impediscono di trovare lo spirito giusto per affrontare la matematica.

5 - Eliche e spirali

Un'analoga caratteristica si osserva nell'altra attività descritta da Cristina Sabena, Raffaele Casi e Chiara Pizzarelli. Stavolta non si tratta tanto di un gioco, quanto di

un'esperienza del così detto "mateturismo", di una "passeggiata matematica", in cui la visita a una città o a uno specifico monumento suggerisce spunti inattesi di matematica. Nel caso specifico, si esplora uno degli edifici storici più belli di Torino, il Palazzo Madama nella centrale Piazza Castello, sede del Museo Civico di Arte Antica ma anche di mostre ed esposizioni. Il parametro della bellezza si trasferisce dal disegno leonardesco all'architettura della costruzione. Si esaminano al suo interno scale, fregi, decori, e se ne traggono esempi di curve come eliche e spirali. In questo modo si arriva non solo a un primo approccio elementare alla teoria geometrica soggiacente, ma anche agli strumenti matematici che consentono di disegnare queste stesse curve, come l'elicografo, oppure lo spiralografo di Archimede. Anzi, proprio attraverso l'esame diretto di scale e saloni e il contatto manuale con lo spiralografo, ragazze e ragazzi sono indotti a rilevare le proprietà più intime e nascoste di una spirale, per esempio come essa sia determinata dalla composizione di un movimento rettilineo di traslazione e di un movimento circolare di rotazione. Gli studenti sono poi progressivamente indotti a porsi gli interrogativi tipici del "matematico" professionista, relativamente alle analogie e differenze tra i vari tipi di spirale, ai cambiamenti prodotti dalla variazione di alcuni parametri, alla presenza di casi limite e così via. Muovendo dalla visita al Palazzo, e poi dal contatto manuale con le macchine matematiche, sono portati a riflettere e a generalizzare, grazie anche alla discussione collettiva, nuovamente mediata dall'insegnante: un apprendimento creativo, seppure spontaneo e quindi imprevedibile.

6 - I problemi come risorsa

Imparare divertendosi: questo è l'obiettivo auspicato anche da Sofia Sabatti, autrice del recente libro *Diario di bordo* sull'insegnamento in tempi di epidemia. Il suo intervento si è incentrato sulla presentazione del sito da lei curato *Problemi per matematici in erba* <https://www.problemi.xyz>. L'assunto iniziale è che i problemi – i famigerati esercizi di tante insopportabili lezioni di matematica – sono in realtà una risorsa. Lo sono – il discorso si ripete – se sanno ispirarsi alla realtà e se sono affrontati dagli studenti assieme, senza vincoli di tempo, in atteggiamento di ascolto e cooperazione, chiedendosi sempre il perché, avvalendosi dell'osservazione visiva e delle manipolazioni per azzardare le congetture e provare poi a discuterle e, possibilmente, convalidarle col ragionamento. Allora diventano inclusivi e non selettivi, coinvolgenti e non scostanti.

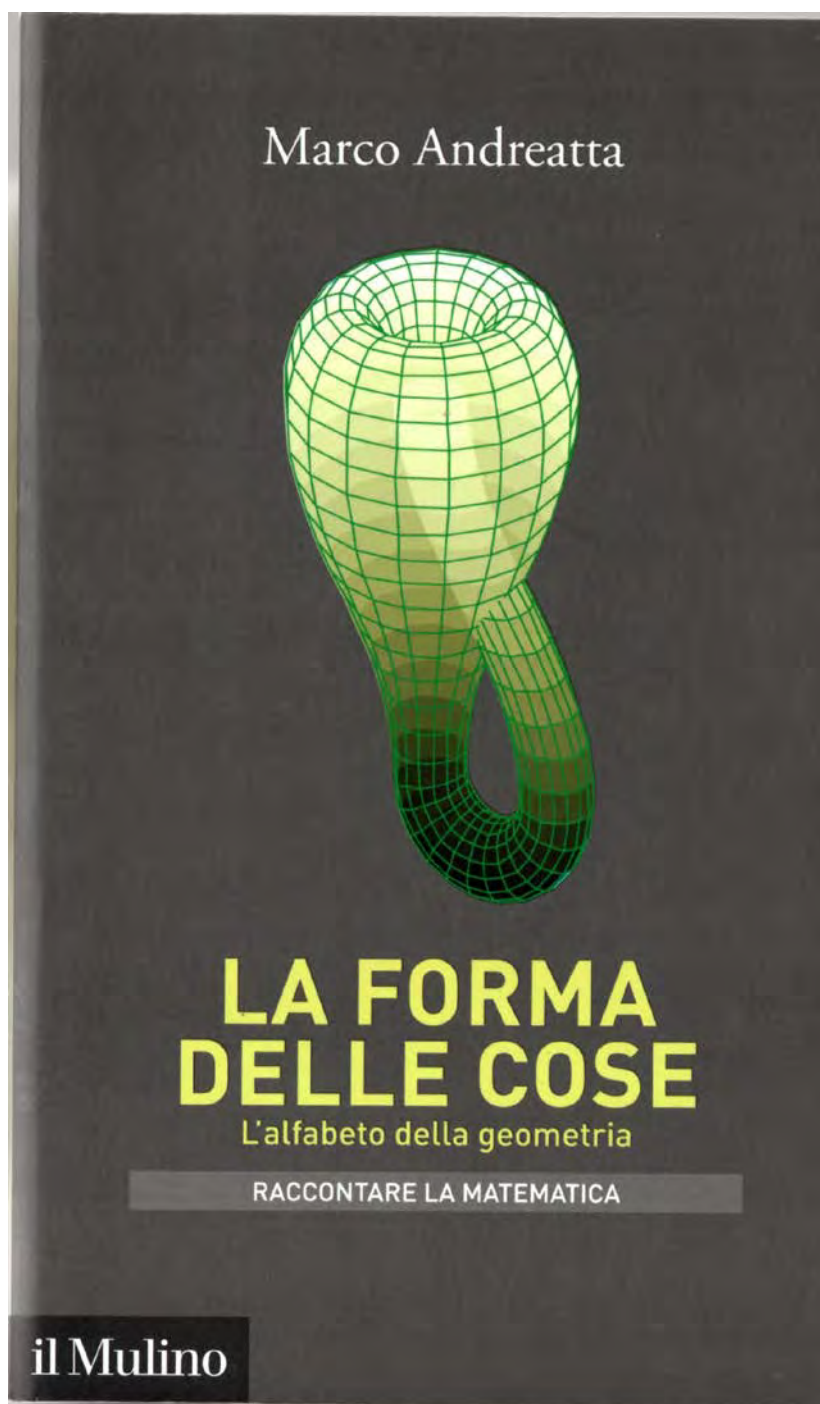
Il sito sopra indicato, accessibile liberamente, propone una varietà ricchissima di problemi, talora nuovamente collegati al gioco. Nella sua relazione Sofia Sabatti ne ha potuti proporre solo alcuni. Ma in essi si conferma come un approccio geometrico (come per esempio la questione di "affettare" un triangolo equilatero, cioè di suddividerlo in triangolini a esso simili ma più piccoli) conduce alla scoperta delle leggi dei quadrati, o dei numeri triangolari e delle loro proprietà.

Di una didattica che si affidi a occhi e mani per suscitare la riflessione ha parlato anche Antonella Castellini, stavolta a proposito specifico dell'algebra, e cioè della parte della matematica ritenuta più astratta, almeno tra quelle che si incontrano alle secondarie di primo grado. Così la reputa una grande maggioranza degli studenti: una branca nebulosa e

difficilmente accessibile, che si occupa di oggetti vaghi come numeri e lettere e cerca di metterli in contatto. Eppure l'algebra nasce storicamente come esempio di quella che oggi si chiama "modellizzazione", cioè di un impiego concreto della matematica. Astrarre significa infatti cogliere i principi essenziali, sfrondandoli di ogni dettaglio irrilevante, e arrivare al nocciolo di ogni questione.

Ma perfino quest'algebra così trascendente, se accostata nel modo che si diceva, cioè ispirata e assistita dall'osservazione geometrica e dalle manipolazioni, diventa chiara e quasi divertente, perfino quando tratta formule apparentemente oscure e noiose imposte dai programmi come i quadrati di binomi e trinomi, o le differenze di quadrati, o le proprietà distributive, e molto altro. Antonella Castellini ha presentato in merito un'amplissima serie di spunti, facili da riprodurre nella didattica quotidiana.

In conclusione: la serie di incontri di *Matematica al primo ciclo* 2022 è stata molto apprezzata dai partecipanti, proprio per la ricchezza e la freschezza delle idee proposte. Tanto era già accaduto nel 2021. Si spera che gli anni che verranno, a partire dal 2023, consentano di ripetere ancora al meglio l'esperienza.



Sfide matematiche

Studenti in gara presso il DEMeT di Foggia

Luca Grilli*, Lucia Maddalena*, Carmen Talia**

*Università di Foggia, Dipartimento di Economia, Management e Territorio

**Comitato Scientifico Maths Challenge; Corresponding Author:
prof.carmentalia@gmail.com.



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n2.084

Sunto: Si è svolta il 27 maggio 2022 presso la sede del Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT) dell'Università di Foggia la fase finale della X edizione della gara Maths Challenge. Sfida matematica organizzata in collaborazione con l'associazione Mathesis di Foggia e con il patrocinio della Fondazione dei Monti Uniti di Foggia. Hanno partecipato alla finale 129 alunni delle ultime due classi degli Istituti di Istruzione Secondaria Superiore di Foggia e provincia più altri studenti di Molfetta, San Ferdinando di Puglia, Bisceglie e Trani. La gara è strutturata con domande di logica, algebra, geometria e tutte le aree fondamentali della matematica. La vincitrice per il 2022 è Marta Caggiano del Liceo Scientifico Einstein di Cerignola che è stata premiata nel corso di una bella manifestazione il 6 giugno 2022 presso il DEMeT.

Parole Chiave: Maths Challenge, Logica, Valorizzazione delle eccellenze, Orientamento Universitario.

Abstract: The final phase of the 10th edition of the Maths Challenge took place on 27 May 2022 at the headquarters of the Department of Economics, Management and Territory of the University of Foggia. Mathematical challenge

organized in collaboration with the Mathesis association of Foggia and with the patronage of the Foundation of the United Mountains of Foggia. 129 students from the last two classes of the high schools of Foggia and province took part in final, plus other students from Molfetta, San Ferdinando di Puglia, Bisceglie e Trani. The competition is structured with questions of logic, geometry, algebra and all the fundamental areas of mathematics. The winner for 2022 is Marta Caggiano of the Einstein scientific high school in Cerignola who was awarded during a beautiful event on 6 June 2022.

Keywords: *Maths Challenge, Logic, Enhancement of excellence, University Orientation.*

La gara Maths Challenge

A partire dall'a.a. 2012-2013, il Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT) dell'Università di Foggia, con la collaborazione della Mathesis di Foggia e con il patrocinio della Fondazione dei Monti Uniti di Foggia, organizza la gara MATHS CHALLENGE quest'anno giunta alla X edizione.

La gara è gestita da un comitato scientifico attualmente composto da: Prof.ssa Lucia Maddalena (Presidente - UniFG); Prof. Luca Grilli (Coordinatore - UniFG); Prof.ssa Viviana Fanelli (componente - UniBA); Prof.ssa Carmen Talia (componente - Mathesis - Foggia).

La competizione Maths Challenge è strutturata con domande a risposta multipla con una sola risposta esatta su logica, algebra, geometria e tutte le aree fondamentali della matematica. Partecipano alla gara gli studenti del quarto e quinto anno della Scuola Secondaria Superiore, senza alcuna distinzione per tipologia di istituto, per cui

partecipano alla gara studenti provenienti indistintamente da Licei, Istituti tecnici, Istituti professionali. Questo è un elemento caratterizzante della prova e rappresenta una notevole sfida per il comitato scientifico nel momento in cui si formulano quesiti che possano essere affrontati, non banalmente, da alunni provenienti da scuole diverse e che erogano programmi fra loro molto diversi. La finalità fondamentale di queste gara è quella di stimolare i giovani e valorizzare le eccellenze, ma anche di favorire la diffusione dell'interesse per la matematica, offrendo l'opportunità di affrontare problemi diversi nella loro formulazione da quelli affrontati quotidianamente a scuola. L'atteggiamento culturale prevalente evidenzia remore e difficoltà nella diffusione dei saperi scientifici e in particolare verso la matematica, troppo spesso considerata ostica e di difficile comprensione.

È opportuno sottolineare che questa iniziativa nelle diverse edizioni, ha visto sempre la partecipazione di tanti docenti, spesso soci Mathesis, che hanno svolto la funzione di referenti di istituto con grande spirito di servizio, interessati a migliorare il livello di preparazione degli studenti in uscita.

Per il Dipartimento DEMeT, la gara Maths Challenge rappresenta anche un importante momento di interazione con il territorio e in particolare con le scuole superiori al fine di creare un ponte tra la scuola e l'università nell'ottica di selezionare e motivare i migliori studenti orientandoli verso la scelta del percorso universitario.

Il Dipartimento DEMeT offre agli studenti che hanno partecipato alla fase finale del concorso la possibilità di

immatricolarsi ad un corso di laurea di primo livello senza dover sostenere il test per la verifica delle competenze iniziali. Nel corso degli anni diversi finalisti della gara Maths Challenge hanno usufruito di questa possibilità.

La gara è strutturata in due fasi distinte: la prima prova (semifinale), ha luogo nei diversi istituti ed è volta a selezionare gli studenti che hanno accesso alla seconda fase (finale) che decreta il vincitore assoluto della competizione. Tenendo conto della grande varietà di istituti che partecipano alla gara e per valorizzare tutti gli studenti che hanno avuto accesso alla fase finale, il comitato scientifico premia anche i primi classificati nella finale per ogni singolo istituto con una medaglia e altri premi (spesso libri e gadgets del Dipartimento DEMeT).

Alla prova finale del 27 Maggio 2022, che quest'anno si è tenuta finalmente in presenza, pur nel rispetto delle normative vigenti, sono stati ammessi 192 studenti di 20 istituti secondari della provincia di Foggia e della BAT, studenti che si sono classificati nelle prime 10 posizioni della graduatoria di Istituto inclusi eventuali ex-aequo nella decima posizione, i presenti sono stati 129.

È opportuno sottolineare che l'iscrizione alla competizione Maths Challenge e la partecipazione a tutte le fasi previste è completamente gratuita e si svolge grazie al contributo generoso e gratuito di tutti i docenti interessati oltre al sostegno finanziario degli enti promotori.

Successivamente nel corso di una bella cerimonia di premiazione tenutasi il 6 giugno presso il Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT)

dell'Università di Foggia sono stati comunicati ufficialmente i nomi dei primi classificati per ogni istituto e il nome del primo classificato in assoluto nella fase finale (vincitore della gara Maths Challenge).

Tutti gli studenti primi classificati d'Istituto hanno ricevuto una medaglia, un libro di divulgazione scientifica su Albert Einstein offerto dalla Mathesis di Foggia e diversi gadget offerti dall'Università.

Ai Dirigenti scolastici delle scuole partecipanti è stata consegnata una targa offerta dalla Fondazione dei Monti Uniti di Foggia.

Ai docenti referenti per ogni singolo istituto sono stati consegnati alcuni gadgets dell'Università di Foggia e infiniti ringraziamenti per il lavoro svolto.

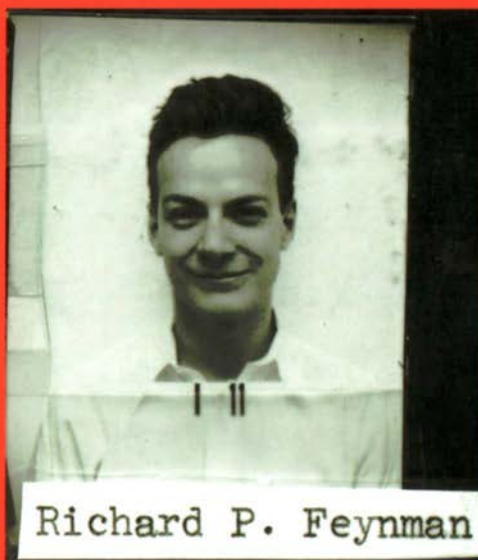
Per il 2022 la vincitrice in assoluto della gara Maths Challenge è stata Marta Caggiano del Liceo Scientifico A. Einstein di Cerignola. A lei è stata consegnata la coppa Maths Challenge, offerta dall'Università di Foggia, nel tripudio generale.

Maggiori informazioni sulla gara sono reperibili al seguente link: <https://www.demet.unifg.it> (Sezione Terza Missione).

GLI ADELPHI

Richard P. Feynman

Il piacere di scoprire



Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM

VIII Simposio "Bellezza e fascino della Matematica"

Rosa Buonanno* Daniela Buono**
Umberto Salzano***

*I.I.S. "Matilde Serao", Pomigliano d'Arco (Na) - rosa.buonanno@alice.it

**Liceo "Renato Cartesio" Villaricca (Na) - danielabuono79@gmail.com

***I.I.S. Striano Terzigno (Na) - umbertosalzano@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n2.085

Sunto: Si dettaglia sulle tematiche presentate al Corso di Formazione "Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM", espletato nell'ambito dell'VIII Simposio "Bellezza e fascino della Matematica", che si è svolto nei giorni 07-10 aprile 2022 nella città di Roccaraso (AQ).

Parole Chiave: Incerto, Dati e Previsioni, Matematica&Realtà, STEAM

Abstract: Details of the topics presented at the Training Course "Data and Forecasts in STEAM teaching" carried out in the context of the VIII Symposium "Beauty and charm of Mathematics" which took place, on 7-10 April 2022 in the city of Roccaraso .

Keywords: Uncertain, Data and Forecasts, Mathematics & Reality, STEAM

1 – Introduzione

Nei giorni 07-10 aprile 2022 si è svolto nella cittadina di Roccaraso il Corso di Formazione per docenti di Scuola secondaria di secondo grado sul tema “Dati e Previsioni nell’insegnamento STEAM”.

L’attività, espletata nell’ambito dell’VIII Simposio “Bellezza e fascino della Matematica”, è stata organizzata dall’Accademia Piceno Aprutina (APAV) in collaborazione con l’associazione Mat[^]Nat (AQ) e la Federazione Italiana Mathesis, della quale hanno contribuito all’iniziativa le associazioni ‘Mathesis “A. Morelli” di Napoli’, ‘Mathesis Abruzzo’, ‘Gli amici della matematica delle Marche-Mathesis Camerino’.

Le attività di formazione hanno seguito il particolare approccio educativo alle materie scientifiche, denominato STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics), che consiste nell’integrazione di queste cinque discipline all’interno di una nuova filosofia educativa, basata su applicazioni reali ed autentiche.

Questo nuovo approccio, finalizzato al “problem solving” e ad una “didattica laboratoriale”, differenzia lo studio STEAM da quello delle materie scientifiche intese in senso tradizionale.

I Laboratori sono finalizzati a far acquisire ai docenti competenze in alcune aree nodali dello studio della Probabilità e della Statistica, come previsto nel curriculum formativo della scuola secondaria di II grado.

Il Comitato scientifico-organizzatore è stato costituito dai seguenti docenti: Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro, Mauro Cerasoli, Cinzia D’Altorio, Franco Eugeni,

Giangiaco Gerla, Antonio Maturo, Renata Santarossa, Massimo Squillante.

2 - Descrizione degli argomenti trattati

Dopo i saluti del Dott. Francesco Di Donato, Sindaco di Roccaraso, la prof.ssa Renata Santarossa, Presidente APAV, ha introdotto i lavori, esponendo le motivazioni che hanno spinto ad organizzare un Convegno sul tema in oggetto, oggi trascurato da gran parte dei docenti nell'insegnamento della matematica. Successivamente, la prof.ssa Cinzia D'Altorio, Dirigente Scolastico del liceo di Castel di Sangro, si è soffermata sul "Quadro di riferimento delle prove di matematica nel Sistema di Valutazione". L'organizzazione dei lavori è stata strutturata in quattro sessioni, con l'obiettivo di affrontare nel modo più esaustivo possibile tutte le ramificazioni del tema in oggetto. Hanno presieduto le sessioni i proff.ri: Mauro Cerasoli, Cinzia D'Altorio, Umberto Salzano, Renata Santarossa.

La prima sessione ha tenuto conto degli aspetti didattici e contenutistici.

La seconda sessione è stata dedicata all'evoluzione storica del Calcolo della Probabilità ed alle sue interrelazioni con l'utilizzo di dati statistici.

La terza sessione ha tenuto conto de "l'insegnamento per problemi" e si è sviluppata attraverso la presentazione di giochi, paradossi ed esempi di logica.

Nella quarta sessione sono stati presentati significativi Modelli matematici, basati principalmente sugli eventi

verificatosi e osservati negli ultimi anni o addirittura negli ultimi mesi.

3 – Prima sessione: i contenuti essenziali e la ricaduta didattica

Gli interventi sui contenuti del tema in oggetto, arricchiti poi nella discussione finale dai contributi dei docenti partecipanti, hanno visto in qualità di relatori i proff.ri Mauro Cerasoli, Ferdinando Casolaro coadiuvato dal dott. Mario Cristiani, Luciano Corso, Antonio Maturo coadiuvato dall'insegnante Luciana Delli Rocili, Ruben Sabbadini, Sergio Schiavone.

Mauro Cerasoli è intervenuto in tre momenti diversi, secondo l'organizzazione modulare dei lavori. Nella prima relazione, ha illustrato i concetti base della Teoria della Probabilità come lo "spazio campione", gli "eventi", le "variabili aleatorie", portando come esempi speciali i processi stocastici finiti. Nella seconda, ha illustrato i primi elementi di Calcolo combinatorio e nella terza si è soffermato sulle dimensioni di campioni casuali per la determinazione di intervalli di confidenza, allo scopo di chiarire come la legge dei "grandi numeri" permette di utilizzare il metodo Monte Carlo.

Anche Casolaro è intervenuto in tre momenti diversi, secondo il percorso modulare. Nel primo intervento, dopo essersi soffermato sullo scarso peso che viene dato al tema "matematica dell'incerto" nella pratica dell'insegnamento, ha trattato i pre-requisiti essenziali per affrontare correttamente lo studio della Probabilità e della Statistica. In particolare, ha

sottolineato l'opportunità che il docente affronti, in modo esauriente e con esempi significativi, i concetti di media, indici di variabilità ed analisi combinatoria, prima di introdurre le definizioni di Probabilità e di Statistica. Il secondo intervento è stato dedicato allo studio della funzione di Gauss, che viene proposto come argomento finale, dopo aver introdotto alcuni grafici di carattere elementare e spiegato il significato dei parametri inseriti nell'espressione analitica della funzione.

Il terzo intervento è stato esposto dal dott. Mario Cristiani, che ha presentato un Modello di "teoria delle decisioni" attraverso una profonda analisi statistica sui risultati del campionato del mondo di calcio svoltosi nel 2014.

Corso ha illustrato due teoremi che ritiene debbano essere fondamentali per un corretto studio dell'incerto: il teorema sulla "legge dei grandi numeri" e il teorema che dimostra la "esistenza di una distribuzione di probabilità limite" verso cui convergono le distribuzioni sperimentali di dati, sotto la condizione che il campione sia molto numeroso, indipendentemente dalla distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie da cui provengono.

Maturo e Delli Rocili hanno presentato alcuni concetti di logica e probabilità, in vista di un'introduzione efficace della probabilità soggettiva nella Scuola secondaria. Significativi sono stati gli esempi illustrati, poiché dimostrano come l'impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità è, rispetto alle altre impostazioni, meno dipendente dal calcolo, evidenziando gli aspetti logici del ragionamento probabilistico.

Sabbadini si è soffermato sul teorema del "Limite centrale", evidenziando come questo teorema permetta la comprensione

di fenomeni complessi attraverso lo studio della distribuzione normale, il cui grafico è la curva di Gauss.

Sergio Schiavone ha presentato un'esperienza didattica basata su test specifici sulle medie e sulle varianze di una o due popolazioni, con l'ausilio della calcolatrice grafica. Si è soffermato su situazioni di stima puntuale, sia nel caso in cui la varianza è nota, sia quando non si conosce a priori.

4 – Seconda sessione: Cenni storici sul Calcolo della Probabilità

I proff. Franco Eugeni, Mario Mandrone, Raffaele Mascella e Nicla Palladino hanno discusso sui cenni storici del Calcolo della Probabilità. Eugeni ha presentato una generalizzazione della formula Cesaro-de Finetti e ha discusso sull'interesse mostrato dai matematici italiani, alla fine dell'Ottocento e all'inizio del Novecento, per le ricerche probabilistiche e per i problemi connessi con la casualità. Numerosi sono gli articoli pubblicati in quegli anni sul tema e sulle esplicite connessioni esistenti tra gli studi di Cesaro e di Bruno de Finetti. Segue, poi, il lavoro di Mandrone, che si articola in tre fasi: presentazione dei metodi e degli scopi della meccanica quantistica; descrizione della riduzione del comportamento dei sistemi macroscopici alle leggi del mondo atomico; trattazione delle basi concettuali della meccanica statistica classica e quantistica e dei fondamenti statistici della termodinamica classica. In particolare, Mandrone ha analizzato le statistiche di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac. Numerosi sono stati gli agganci storici, utili per inquadrare gli argomenti trattati in contesti culturali più ampi. L'intervento

di Mascella ha, invece, posto l'attenzione sulla razionalità e sulle probabilità epistemiche, ovvero sui giudizi di credenza in contesti di incertezza. La cornice di riferimento standard, assumendo la teoria soggettiva della probabilità, richiede che tali giudizi rispettino gli assiomi di Kolmogorov del calcolo della probabilità classica. Tuttavia, decenni di ricerche sperimentali hanno evidenziato che tali assiomi sono sistematicamente violati, promuovendo da un lato una spiegazione descrittiva delle violazioni in termini di euristiche e bias, all'interno del programma di ricerca della "razionalità limitata", dall'altro ispirando una rivisitazione dell'idea di razionalità in termini evoluzionistici. Un'alternativa unificante, ma non giustificata normativamente, è la teoria della probabilità quantistica, alla base del programma di ricerca della "cognizione quantistica".

Infine, Palladino ha argomentato sulle origini del Calcolo della Probabilità. L'inizio della teoria della probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avviene nel XVII secolo, come risposta a due classi di problemi legate ai giochi di azzardo e alle assicurazioni. La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità, su cui concorda la maggioranza degli storici è il 1654, anno in cui si svolge un interessante scambio epistolare tra Fermat e Pascal.

5 – Terza sessione: Modelli matematici su analisi statistiche

I contenuti del tema in oggetto, hanno visto in qualità di relatori i proff.ri Josè Carcione, Gerarda Fattorusso-Massimo Squillante, Maurizio Maravalle, Sergio Rossano, Maurizio

Vichi. Carcione si è soffermato sul tema "Simulazione deterministica (e gestione) di una pandemia basata su dati statistici". Partendo dall'analisi della diffusione in tutto il mondo di una pandemia causata da un nuovo coronavirus, con un forte tasso di contagio e mortalità, Carcione ha proposto un modello SEIR per calcolare la popolazione infetta e il numero di vittime in funzione del tempo. Il modello è calibrato con il numero delle vittime e non con i contagi che sono in gran parte incerti. Attraverso alcuni esempi ha dimostrato come si poteva evitare la morte di migliaia di persone con delle misure a tempo e una corretta campagna di vaccinazione.

Fattorusso e Squillante hanno posto l'attenzione sulla teoria delle decisioni, un tema particolarmente interessante e interdisciplinare, proponendo alcuni modelli per rappresentare adeguatamente i diversi processi decisionali.

Maravalle, attraverso il suo intervento, ha evidenziato le caratteristiche peculiari di alcuni concetti base della modellistica statistica: la correlazione come misura statistica che determina la co-relazione o l'associazione di due variabili, e il concetto di regressione che descrive come una variabile indipendente è numericamente correlata alla variabile dipendente. Ha, inoltre, rappresentato la relazione lineare tra le due, attraverso esempi di applicazioni a dati reali; ha illustrato infine, come si debbano utilizzare ed interpretare correttamente questi strumenti nella pratica quotidiana.

Sergio Rossano ha trattato il tema "Radioattività e Statistica" sottolineando come la maggior parte degli elementi presenti in natura sia stabile, ma esistono degli isotopi che hanno un surplus di energia che li rende instabili: i nuclidi con

queste caratteristiche sono chiamati “radio nuclidi” e il loro decadimento è un processo esoenergetico con emissione di particelle e radiazione elettromagnetica. Ha, inoltre, fatto osservare che in un materiale radioattivo il numero di decadimenti radioattivi al secondo è un processo statistico che segue una legge esponenziale ben precisa.

La Statistica con l'algebra delle Matrici è stato il tema trattato da Maurizio Vichi. La statistica, come ha sottolineato Vichi, rappresenta una nuova conoscenza di base nelle società moderne; si utilizza per valutare una nazione moderna; è utile nelle scienze sperimentali perché si basa sui principi galileiani di osservazione, raccolta dati e definizione di un modello, verifica del modello; si usa per monitorare il nostro habitat e per le previsioni meteo, misura i cambiamenti di clima; è essenziale nelle aziende per misurare l'andamento del business, la qualità della produzione e il marketing (valutazione di efficacia efficienza, soddisfazione). È inoltre utile nella medicina per valutare l'efficacia dei trattamenti e prevenire malattie, per lo studio del genoma.

6 – Quarta sezione: giochi, paradossi e indagini statistiche

La quarta sessione sul tema “giochi, paradossi e indagini statistiche” è stata aperta dalla conferenza di Biacino, seguita dai proff.ri Aniello Buonocore, Anna Cerasoli, Giangiacomo Gerla, Giorgio Pietrocola.

In particolare Biacino ha presentato quesiti e problemi legati alla nozione di probabilità condizionata: estrazioni da

un'urna con o senza reintroduzione, lancio iterato del dado o della moneta e il problema di Monty Hall.

Segue poi il lavoro di Buonocore che ha mostrato un approccio "per problemi" all'insegnamento dei contenuti della probabilità presenti nelle indicazioni nazionali, con particolare riferimento alla probabilità condizionata. Inoltre, ha illustrato e discusso tre problemi. Il primo fornisce un esempio di applicazione della definizione di probabilità condizionata, i cui vari risultati possono essere oggetto di discussione in quanto difficili da interpretare con una visione di tipo intuitiva. Nel secondo ha trattato, la legge delle probabilità composte; l'ultimo problema, oltre a essere un'istanza di applicazione del teorema di Bayes, mostra l'equivalenza tra due tipi di procedure, "inferenza diretta" e "inferenza iterativa", nel caso in cui l'evento che si verifica sia l'intersezione di un numero finito di altri eventi.

L'intervento di Anna Cerasoli ha presentato molti casi di vita quotidiana che hanno a che fare con il calcolo combinatorio, argomento matematico che, lavorando con i numeri naturali, è di facile approccio in qualsiasi fascia scolastica.

Successivamente, Gerla ha presentato alcuni paradossi sulla probabilità, soffermandosi sul significato letterale dei termini "paradosso" e "antinomia". Il primo conduce all'accettazione di una teoria ed il conseguente cambiamento di opinione. Il secondo comporta una crisi della teoria e, se è possibile, una modifica delle sue basi. Inoltre ha fornito esempi di paradosso (la Terra che gira intorno al Sole) e di antinomia come quella di Russel (classe degli insiemi che contengono se stessi). Ha

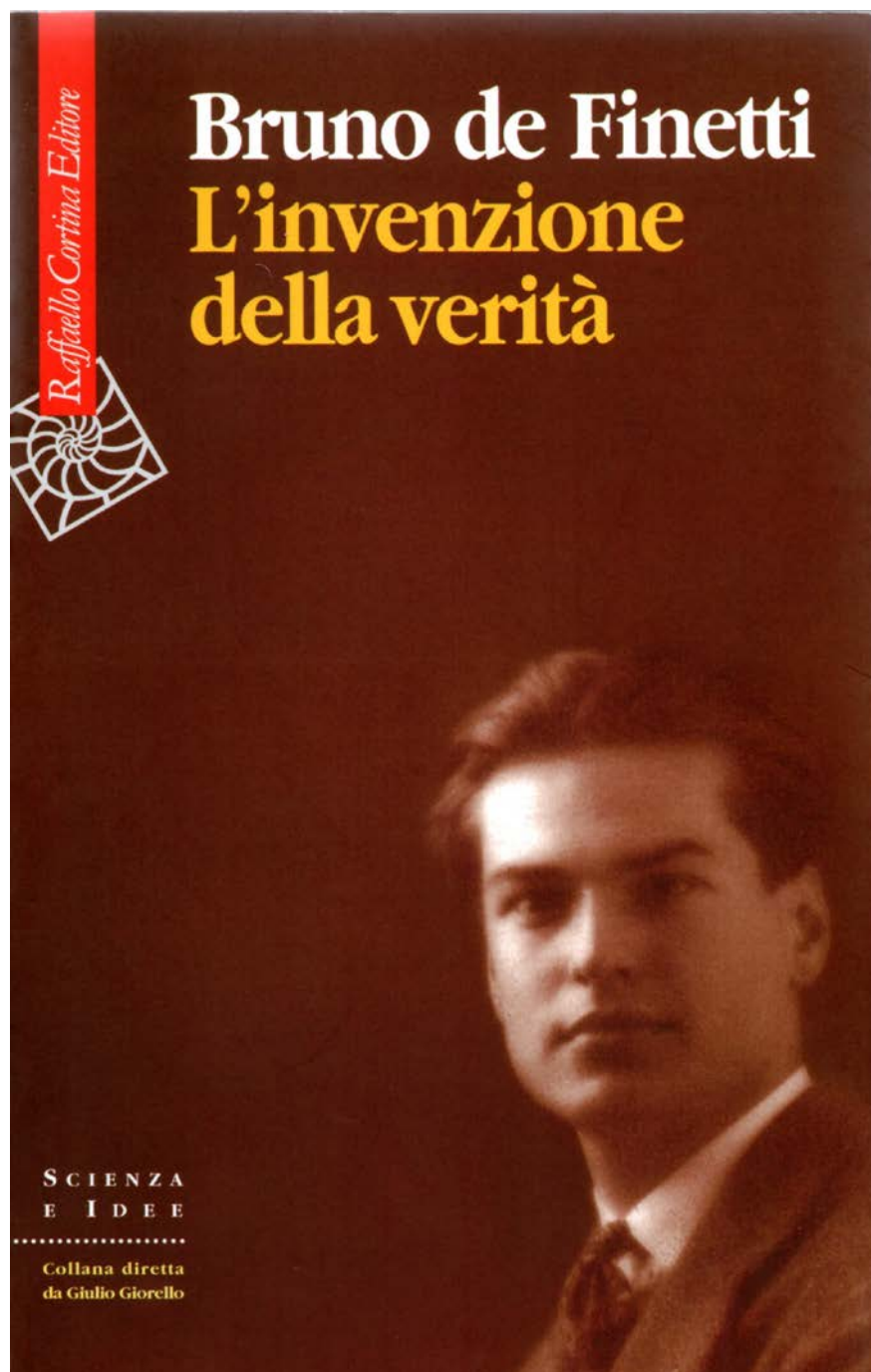
concluso l' intervento con alcuni paradossi ed alcune antinomie della teoria della probabilità.

Infine Pietrocola, con la sua relazione, ha presentato, discusso e risolto in forma didattica il problema dei tre arcieri, un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni, più o meno lecite, che ne modificano significativamente svolgimento e risultato. L'obiettivo è stato quello di rafforzare, con alcuni esempi pratici, alcuni concetti imprescindibili per lo studio della probabilità.

7 - Conclusioni

Gli interventi proposti hanno esaurientemente analizzato, sia da un punto di vista storico che didattico, i concetti base della teoria della probabilità, inserita in un approccio STEAM.

Il Convegno si è chiuso con le conclusioni della prof.ssa Renata Santorossa, che ha dato la parola al prof. Luciano Corso, Presidente della Federazione Italiana Mathesis e al prof. Aniello Buonocore, Presidente dell'Associazione Aldo Morelli, che hanno ringraziato per l'invito e si sono complimentati per la buona riuscita dell'evento.



Studenti in cattedra, docenti nei banchi

XV “Premio Aldo Morelli”

Ciro Iovino* Rosa Porciello** Francesco Quagliano***

*I.I.S. “Don Milani di Gragnano (NA) - ciro.iovino@alice.it

**Già doc. Matematica e Fisica Liceo “F. Severi di C/mare di Stabia (NA) -
rosa.porciello60@gmail.com

***Già doc. Matematica e Fisica Liceo “F. Severi di C/mare di Stabia (NA)
francesco.quagliano@gmail.com



DOI : 10.53159/PdM(IV).v4n2.086

Sunto: Riflessioni sciolte sulla XV edizione del convegno “Premio Aldo Morelli” che si è svolto in doppia modalità, presenza-remoto, nei giorni 27 e 28 maggio 2022.

Parole Chiave: Matematica, Filosofia, Musica, STAEM

Abstract: Key Takeaways from The XV edition of The Aldo Morelli Prize virtual and person conference, held in Castellammare di Stabia between 27 and 28 May, 2022.

Keywords: Math, Philosophy, Music, STAEM

1 - Introduzione

Nei giorni 27-28 maggio 2022 si è svolta nella città di Castellammare di Stabia la Premiazione dei Giochi matematici per la Scuola “Premio Aldo Morelli”, nell’ambito della XV edizione del Convegno “Studenti in cattedra, docenti nei banchi”.

L’attività è stata organizzata dall’associazione “Mathemare” di Castellammare di Stabia, in collaborazione con la Federazione Italiana Mathesis, l’Accademia Piceno Aprutina (APAV), l’Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU).

Dopo la forzata pausa di circa due anni per la faticida pandemia, finalmente agli inizi di marzo abbiamo messo in cantiere il convegno della XV edizione del “Premio Aldo Morelli”.

Nulla ci ha fermati, imperterriti abbiamo deciso di realizzare in presenza quest’iniziativa abbinata alla fase finale dei giochi matematici, nati in sordina nel lontano 2006 dalla collaborazione delle sezioni Mathesis di Castellammare di Stabia e di Napoli, in memoria del prof. Aldo Morelli e divenuta, nel corso degli anni, prestigiosa attività delle due sezioni per l’impegno caparbio ed indefesso dei proff. Ciro Iovino di Gragnano, Rosa Porciello e Francesco Quagliano di Castellammare e Ferdinando Casolaro, Salvatore Rao e Alessandra Rotunno di Napoli, sostenuti magistralmente dalla nostra presidente D.S. Elisa Savarese.

Significativo e determinante, in seguito, il contributo del prof. Raffaele Prosperi per l’aspetto informatico, della prof.ssa Ilaria Veronesi per i giochi a squadre e di tante altre personalità dei dipartimenti di matematica delle Università di Napoli, Benevento, Salerno e Chieti-Pescara, fino alla

costituzione dell'attuale Comitato Scientifico costituito dai professori: Elisa Savarese, Antonietta Esposito, Ciro Iovino, Mario Mandrone, Nicla Palladino, Rosa Porciello, Raffaele Prosperi, Francesco Quagliano, Alessandra Rotunno, Loredana Tammaro, Ilaria Veronesi, Giovanni Vincenzi.

L'idea di concludere ogni anno la fase di Premiazione all'interno di un Convegno scientifico-didattico "Studenti in cattedra, docenti nei banchi", che vede come relatori principalmente gli studenti coordinati dai propri docenti, è stata del prof. Ferdinando Casolaro che, da sempre, ha curato i rapporti tra il mondo universitario e le scuole di ogni ordine e grado. Grazie al suo vulcanico coinvolgimento possiamo vantare, anno dopo anno, il crescente numero di scuole partecipanti e l'attuale capillarità sul territorio nazionale.

In tale ottica, l'annuale convegno è stato impreziosito dalla presenza di prestigiosi esponenti del mondo accademico, provenienti dalle varie Università d'Italia che, con i propri interventi, hanno gratificato anche gli "studenti-relatori" che si sono sentiti protagonisti in prima persona.

2 - Dettagli sulla struttura organizzativa

L'attività, indicata con "Giochi matematici per la scuola, Premio Aldo Morelli", non si pone l'obiettivo di far emergere le eccellenze, che già vengono coinvolte in tante iniziative organizzate da altre associazioni, ma di permettere la partecipazione di tutti gli studenti, con particolare attenzione a coloro che sembrano meno motivati, con proposte di quesiti semplici che privilegiano l'intuizione (diciamo capacità nascoste) ma tendono a rinforzare le capacità logiche.

Non a caso, abbiamo potuto constatare che almeno due studenti disinteressati alla disciplina (per brevità non entriamo nelle citazioni dettagliate) frequentano oggi il corso di laurea in matematica dopo aver sorpreso se stessi risultando tra i vincitori delle gare “Premio Morelli”.

L’organizzazione dei Giochi prevede una prima fase alla quale i docenti fanno partecipare la totalità dei propri studenti ed una seconda fase a cui sono ammessi i primi cinque classificati di ogni scuola. La fase finale, che dichiara i vincitori, si svolge all’interno del Convegno in oggetto in contemporanea con le “gare a squadra”.

Nel corrente anno le prime due fasi si sono svolte in “modalità remoto” a febbraio e marzo 2022, nelle sedi delle scuole partecipanti.

La terza fase, si è svolta in doppia modalità “presenza-remoto”, presso il Liceo scientifico “Francesco Severi” di Castellammare di Stabia.

Gli interventi sono stati divisi in tre sezioni di lavoro, seguite da dibattito.

Ha introdotto i lavori la prof.ssa Renata Santarossa, Presidente dell’Accademia Aprutina in Teramo (APAV), ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale scolastico di ogni ordine e grado.

3 - I sessione. L’attività nel Primo Ciclo

Nella prima sessione, presieduta dalla prof.ssa Rosa Porciello, dopo i saluti della Presidente dell’associazione “Mathemare”, prof.ssa Elisa Savarese, anche in qualità di dirigente della Federazione Italiana Mathesis, sono intervenuti

il prof. Ferdinando Casolaro che ha portato il saluto del Presidente dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU), prof. Franco Eugeni, ed il prof. Giovanni Vincenzi in rappresentanza del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno.

L'organizzazione dei lavori è stata strutturata in tre sessioni.

Nella prima sessione, dedicata agli interventi degli alunni del Primo Ciclo, sono state presentate significative performance dagli alunni della Scuola Primaria dell'I.C. "Frattamaggiore 3 - Genoino", *L'armonia matematica e le sue emozioni*, coordinati dalla prof.ssa Giusy Annamaria Cappuccio e due interventi dagli alunni del Convitto nazionale di Benevento, *Matematica in Gioco*, guidati con instancabile cura dalle insegnanti Maria Morelli, Livia Principe e Loredana Russo per la Scuola Primaria e dai proff. ri Cesarino Zollo e Mirella Pallotta per la Scuola secondaria di primo grado.

La sessione si è conclusa con la Premiazione - a cura della presidente Elisa Savarese coadiuvata dal vicepresidente dell'Accademia APAV prof. Mario Mandrone - dei primi tre classificati per la Scuola Primaria e dei primi tre classificati per la secondaria di Primo Grado.

Per la Primaria è risultato vincitore l'alunno Robert Balan dell'I.A.C. "Dante Alighieri" di Bellona. Nicolò Alaimo dell'I.C. "Educandato Angeli" di Verona e Fernando De Luca del Convitto Nazionale "Giannone" di Benevento sono stati, rispettivamente, secondo e terzo classificati.

Per la Scuola secondaria di I grado è risultato vincitore l'alunno Giuseppe Diana dell'I.A.C. "Dante Alighieri" di

Bellona. Antonio Pio Puzio della S.M. "Mancini" di Ariano Irpino e Luca Vincenzo Di Rauso dell'I.A.C. "Dante Alighieri" di Bellona sono stati, rispettivamente secondo e terzo classificati.

4 – II sessione. L'attività nel Secondo Ciclo

La seconda sessione, presieduta dalla Presidente dell'Accademia APAV, prof.ssa Renata Santarossa, è stata aperta da due interventi: *Musica e Matematica* e *Successioni di Fibonacci e t-nacci* presentati dagli studenti del Liceo Scientifico ospitante coordinati dal prof. Francesco Bruno.

La prima relazione "Musica e Matematica" ha fornito originali spunti didattici per l'insegnamento della matematica nei licei musicali; la seconda "Successioni di Fibonacci e t-nacci" è stata un'apprezzabile raccolta di tentativi di generalizzazione della successione di Fibonacci nel campo complesso, a cura dell'alunno Francesco Sollazzi dell'indirizzo di scienze applicate.

A seguire sono stati illustrati con disinvoltura e padronanza i lavori interdisciplinari:

Un matematico tra letteratura, filosofia e musica: Renato Caccioppoli, racconto ricco di aneddoti particolari sulla vita del matematico, assemblati dagli studenti del liceo scientifico "Renato Caccioppoli" di Napoli coordinati dalla prof.ssa Gondeberga De Rubertis.

La logica tra filosofia e Matematica, una sequenza di sillogismi, quantificatori e paradossi su percorsi matematico-filosofici presentata dagli alunni dell'I.I.S. di Striano-Terzigno

La probabilità e i giochi matematici, raccolta di esempi con relativo svolgimento presentata dagli studenti del liceo scientifico "F. Severi" di Salerno, guidati dal prof. Bonaventura Paolillo.

5 - III sessione. Dalla matematica alla fisica e... oltre

La terza sessione, presieduta dalla prof.ssa Giovanna Della Vecchia, Segretaria dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU), oltre a vantare interventi di ottima qualità di studenti di scuole napoletane, è stata impreziosita dalla relazione *La geometria nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica e della fisica*, tenuta dal prof. Emilio Balzano, Professore di "Didattica e Storia della fisica" al dipartimento di Fisica dell'Università di Napoli "Federico II" che, con un linguaggio semplice e con l'aiuto di un mappamondo, ha fornito validi e concreti suggerimenti per la didattica delle geometrie non euclidee.

A seguire, le relazioni degli studenti, presentate con padronanza di contenuti e proprietà di linguaggio:

Il ruolo del Modello nella matematica e nella fisica, degli studenti del liceo "Labriola" di Napoli coadiuvati dai proff. ri Alessandra Rotunno e Alessandro Zappia.

I paradossi di Zenone tra matematica e filosofia, degli studenti dell'ITIS "G. Ferraris" coordinati dai proff.ri Alessandra Fogliano, Maria Lento, Giuseppina Monteasi.

Riflessioni sulla guerra, tra tecnologia, filosofia e letteratura degli studenti dell'ITIS "G. Ferraris" coordinati dal prof. Giuseppe Mangione. La sessione si è conclusa con la presentazione del

libro *Come risolvere un problema di geometria* di Alessandra De Falco, docente di matematica e fisica all'I.I.S. "Giustino Fortunato", un manuale di facile lettura che indica tutti i passaggi da seguire nella risoluzione di un problema di geometria

6 - IV sessione. Tavola rotonda. Premiazione

La quarta sessione si è aperta con la tavola rotonda *"Quale matematica nel Primo Ciclo secondo l'insegnamento STEAM?"*, a cura dei Dirigenti Scolastici: Genevieve Abbate, Vincenzo Gagliotta, Serafina Ippolito, Renata Santarossa, Elisa Savarese, Rosa Tangredi. La discussione ha catturato l'attenzione di tutti i partecipanti - alunni, docenti e genitori - con interventi sapienti e concreti che hanno aperto e animato un dibattito molto partecipato. Nelle conclusioni finali è emerso il suggerimento di privilegiare la matematica del fare, ovvero scoprire le proprietà matematiche nella realtà quotidiana, vicina all'esperienza degli alunni, favorendo naturalmente l'interdisciplinarietà, obiettivo agognato e conteso da sempre dalla didattica della scuola italiana. Gli spunti e le riflessioni sono stati molteplici ed interessanti per un insegnamento sempre più "compreso" e, seppure così astratto per certi aspetti, da scovare nella realtà e nelle esperienze quotidiane. Non solo applicazione di regole del tipo "si fa così e basta", ma formulazione di regole risolvendo questioni problematiche. Particolare attenzione è stata data ad una lettera - citata da Renata Santarossa - scritta da uno studente di un liceo di Roma, indirizzata al suo dirigente con preghiera di diffusione. Egli accusa e denuncia i rapporti difficili con i docenti, che si ergono spesso a giudici, preoccupati più dei

programmi e dei voti, piuttosto che dell'enorme patrimonio umano da coltivare. Quindi la preoccupazione dei docenti, egli osserva, è spesso quella della trasmissione nozionistica e teorica delle nozioni e l'ansia della valutazione a tutti i costi "che non assolve al suo valore educativo con lo stimolo dell'impegno per dare consapevolezza delle conoscenze". Egli lamenta ancora una infelice Alternanza Scuola Lavoro ed il relativo scollamento dal mondo del lavoro. La lettera dello studente viene commentata facendo emergere che molto è condivisibile. Tutti concordano sulla indispensabilità di una formazione mirata e che infine, conclude Santarossa, la buona scuola la fa sempre il buon docente e che la discussione non può considerarsi esaustiva, anzi è appena cominciata. A tal proposito, si individua nella "Didattica STEAM (*Scienze, Ingegneria, Matematica e, Arte Tecnologie*) il canale privilegiato per un metodo di insegnamento nuovo, in grado di affiancarsi alle classiche lezioni frontali con un approccio laboratoriale integrando sempre di più il contributo offerto dalle discipline scientifiche con quello delle altre materie. I lavori si sono conclusi con la Premiazione che, come da sempre, si è privilegiata della partecipazione della prof.ssa Serena Morelli, che ha distribuito attestati ed un gadget-ricordo a tutti gli alunni presenti al Convegno, per poi procedere alla Premiazione dei primi tre classificati per il biennio e i primi tre classificati per il triennio della Scuola secondaria di II grado e per i giochi a squadre.

Per il biennio è risultato vincitore l'alunna Lisa Nastro del liceo scientifico "F. Severi" di C/mare di Stabia. Gli studenti Bruno Cante del liceo scientifico "A. Labriola" di Napoli e Michele Guidacci del liceo scientifico "A. Volta" di Foggia

sono stati, rispettivamente, secondo e terzo classificati. Per il triennio è risultato vincitore l'alunno Marco Arena del liceo scientifico "A. Labriola" di Napoli. Le studentesse Laura Terracciano del liceo classico "G. Carducci" di Nola e Sara Maria Falduto del liceo scientifico "L.B. Alberti" di Napoli sono stati, rispettivamente, secondo e terzo classificati. La Gara a squadre è stata vinta dagli alunni del liceo scientifico "A. Volta" di Foggia. Particolare encomio ai dirigenti scolastici delle Scuole di Foggia, Benevento e Frattamaggiore che hanno permesso a docenti, studenti e genitori della propria comunità scolastica di partecipare in presenza alle attività di Castellammare, con la messa a disposizione di pullman privati che hanno condotto i numerosi partecipanti nella sede dei lavori. La vicepresidente dell'associazione Mathesis Foggia, Maria Antonietta Pici, ha manifestato la propria soddisfazione per la vittoria dei propri alunni nella gara a squadra ed ha ringraziato gli organizzatori per la brillante iniziativa. A seguire i contributi dei partecipanti.

Appendice

Il Convitto "Giannone" nella partecipazione delle Scuole del Primo Ciclo al "Premio Morelli"

A cura di Maria Morelli.¹

Il Convitto Nazionale di Benevento da diversi anni partecipa al concorso e sempre con ottimi risultati. In questa

¹Maria Morelli è insegnante di Scuola Primaria del Convitto "Giannone" di Benevento che, con l'insegnante della stessa scuola Angela Chiefari, coordina da alcuni anni le attività delle Scuole del Primo Ciclo che partecipano al Premio Morelli.

XV edizione gli alunni hanno presentato al numero pubblico presente un originale e pregevole lavoro di matematica ricreativa. Fonte di ispirazione per la formulazione e la soluzione dei quesiti sono stati alcuni testi di indubbio valore storico, culturale e formativo, quali, ad esempio, il *De Viribus Quantitatis* di Luca Pacioli, il papiro di Rhind del 1650 a.C. , il Manuale di matematica del maestro cinese SunTzuSuanChing del IV secolo d. C. e i cosiddetti “problemi di inseguimento” presenti in tutti i testi di aritmetica pratica del Medioevo e del Rinascimento. Il lavoro realizzato ha utilizzato due approcci metodologici particolarmente efficaci nell’insegnamento della matematica nella scuola primaria: il *problem-solving* e il gioco. Queste metodologie coinvolgono gli alunni, favoriscono lo sviluppo e il potenziamento di capacità logiche e critiche. Difatti, il *problem-solving* e il gioco si configurano come un potente strumento didattico capace di trasformare gli alunni da annoiati ripetitori di definizioni, teoremi e passivi esecutori di algoritmi, in menti attive capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici.

Tra i tanti enigmi e giochi matematici analizzati, alcuni sono stati tratti da testi di indubbio valore storico, culturale e formativo, tra i quali mi preme sottolineare l’utilizzo dei cosiddetti “problemi di inseguimento”. Quesiti di questo genere, con protagonisti diversi e condizioni anche più complicate, sono presenti in tutti i testi di aritmetica pratica del Medioevo e del Rinascimento. Gli esempi più antichi che attualmente conosciamo, si trovano in un testo cinese del II secolo avanti Cristo. Essi erano molto diffusi anche nei testi arabi e indiani dell’epoca di Alcuino di York (York 735- Tours

804) che scrisse un libro destinato ad “aguzzare le mente dei giovani”, nel quale proponeva molti problemi matematici sotto forma di enigmi.

Fonte di ispirazione per la formulazione e soluzione dei quesiti e problemi proposti sono stati anche il *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli e il *Papiro di Rhind* del 1650 a.C., che è il più antico documento a noi noto: un rotolo lungo quasi sei metri conservato al “British Museum” che non contiene teoremi geometrici, né tabelle utilizzabili da mercanti o architetti, bensì 84 rompicapo nati con lo scopo di sfidare le menti più brillanti dell’epoca, nonché il *Manuale di Matematica* del maestro cinese Sun Tzu Suan Ching del IV secolo d.C. Per i docenti del Convitto l’attività non si è conclusa con la chiusura dei lavori a Castellammare di Stabia. Infatti, il giorno 01 giugno 2022, nell’ambito delle manifestazioni di chiusura dell’anno scolastico, si è svolta la cerimonia di premiazione degli alunni del Convitto che sono stati ammessi alla fase finale del Premio A. Morelli. In tale occasione, la Dirigente Scolastica Marina Mupo ha voluto elogiare gli alunni per i risultati conseguiti e ringraziare le docenti per il loro impegno (notevole e straordinario) grazie al quale la Scuola è riuscita a realizzare Progetti che si sono concretizzati nel corso degli anni in una significativa attività di arricchimento dell’offerta formativa. Successivamente, sono intervenuti i docenti delle classi che hanno curato la preparazione dei partecipanti alla fase finale della gara, i quali hanno illustrato al numeroso pubblico presente le finalità e gli obiettivi dei Giochi matematici per la scuola “Premio A. Morelli”.

Su invito del Dirigente Scolastico ha poi preso la parola il prof. Mario Mandrone, per molti anni Presidente della sezione

Mathesis di Benevento e componente del Comitato Tecnico-Organizzatore del Premio Aldo Morelli, il quale, dopo aver evidenziato l'importanza che, nel corso degli anni, hanno assunto i "Giochi Matematici per la Scuola", ha ricordato la figura e l'opera del prof. Morelli, a tutti noto per la sua profonda preparazione nel campo della matematica e della didattica, per l'impegno profuso con energia e rigore per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della disciplina, per la passione e l'intelligenza lucidissima con cui si è dedicato all'educazione dei giovani.

In questo numero | MARZO 2022 |

EDITORIALE

Normalità

di Vincenzo Mule' pag. 3

LA POSTA DEI LETTORI pag. 6

VISIONI pag. 8

FOCUS IN BREVE

L'industria della salute

a cura di Luca Alberini pag. 14

ALMANACCO

La scienza in questi giorni di marzo

a cura di Jacopo De Tullio pag. 18

PENSIERI DIVERGENTI

Voci dal futuro

di Furio Honsell pag. 20

STILE LIBERO

Esame di vita

di Maria Prodi pag. 21

COMICS&SCIENCE

Archimede Infinito 2.0

di Giuseppe Polombo pag. 22

STORIA DI COPERTINA

Il senso del numero

di Silvia Benvenuti pag. 26

Quale matematica per la città

di Christian Raimo e Giacomo Sestri pag. 32

L'imprecisione fatale

di Paolo Gargemì pag. 34

Un linguaggio universale che unisce

di Anna Cerasoli pag. 36

Quanto sei bello lo dicono i numeri

di Francesca Chioldi e Giovanna Guidone pag. 39

SCENARI

Il ritorno del nucleare

di Elisa Buson pag. 42

SOCIETÀ

L'inverno demografico

che non finisce più

di Luca Politi pag. 46

COVID

Ancora non c'è ma il vaccino italiano

fa già discutere

di Simona Regina pag. 50

DISUGUAGLIANZE

Perché tra Nord e Sud ci sono

differenze nelle rilevazioni Invalsi

di Angela Martini pag. 54

LA RICERCA

La rivoluzione del web parla italiano

di Romualdo Gianoli pag. 58



GEOMETRIA

Rompere le uova nel paniere non è poi così facile
di Paolo Caressa pag. 62

STARTUP

La social-scienza: così matematica e fisica raggiungono milioni di utenti
di Martina Gaudino pag. 64

TERRITORIO

I romani e le loro campagne matematiche
di Paolo Caressa pag. 66

ARTE

A Palermo con bussola e righello
di Maria Concetta Ragusa pag. 70

MATELETTERATURA

a cura di Carlo Toffalori pag. 74
Il teatro diventa scienza
di Luca Nicotra pag. 76

Pirandello. Maestro di logica

di Bruno de Finetti pag. 78

PAROLE DI CARTA

a cura di Luca Alberini

Nel multiverso di Hervé Le Tellier

di Gian Italo Bischi pag. 80

CAUCHY CHANEL

Proporzioni e volumi

a cura di Silvia Marinelli pag. 82

TORNO SUBITO

Educazione emotiva

a cura di Francesco Paolo de Ceglia pag. 83

SPECIALE

Giochi matematici

a cura di Angelo Gueragglia pag. 85

LA CONTROCOPERTINA

di Walter Leoni pag. 98

Profili biografici degli autori

Federica Accorroni - federica.accorroni@unicam.it

È dottoranda in Computer Science and Mathematics presso l'Università di Camerino. Si interessa della didattica della matematica nella Scuola Secondaria di Primo Grado, dove ha già grande esperienza come insegnante.

Rosa Buonanno - rosa.buonanno@alice.it

Docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado. Ha conseguito il diploma di Perfezionamento in "Didattica della Matematica" presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli "Federico II" e tre Master, rispettivamente, in "Teoria generale delle Scienze Matematiche", "Dai Fondamenti di geometria alle Geometrie non Euclidee" e "Teoria e Metodologia della valutazione nella scuola". È autrice di una pubblicazione sul "Teorema di Napoleone" (Periodico di Matematiche n.1-2004) ed una pubblicazione, con altri, su "l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola secondaria", agli atti della Scuola Estiva Mathesis tenutasi a Terni nel mese di luglio 2011. È Socia da circa venti anni della sezione di Napoli dell'A.I.F. (Associazione per l'insegnamento della Fisica) e dell'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", dove dal 2020 ricopre la carica di Consigliere all'interno del Consiglio Direttivo. I suoi interessi sono rivolti principalmente alla didattica della matematica, nel cui ambito ha partecipato a numerosi convegni e seminari, anche in qualità di relatrice.

Daniela Buono - danielabuono79@gmail.com

Docente a tempo indeterminato di matematica e fisica al liceo Scientifico "Cartesio" di Giugliano in Campania (Na). Ha conseguito, presso la facoltà di Scienze dell'Università di Napoli

"Federico II", un Master in "Comunicazione e Valutazione nel processo Didattico/Educativo", un Diploma di Perfezionamento in "Didattica della matematica" e un Diploma di Perfezionamento in "Didattica della Fisica". È autrice di una pubblicazione, con altri, su "l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola secondaria", agli atti della Scuola Estiva Mathesis tenutasi a Terni nel mese di luglio 2011. È Socia, da oltre un decennio, dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" e Vice segretario della sezione AIF di Napoli. È Formatore per la preparazione al concorso STEM, in collaborazione con l'ANBIR, e Formatore per l'archiviazione dei dati digitali per dipendenti di cooperative sociali. Esperto progetti PON. Referente INVALSI. Relativamente al rapporto con lo sport, è stata per alcuni anni Ufficiale di Campo nazionale di Basket presso FIP.

Ferdinando Casolaro - ferdinando.casolaro@gmail.com

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni 'Novanta' al 2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed il Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre centoventi pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti". Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi

gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

Diana Cipressi - diana.cipressi@gmail.com

È docente di Matematica-Scienze nella scuola Sec. 1° grado "G. Mezzanotte" di Chieti; è segretario presso l'Associazione Mathesis Abruzzo e presso l'Accademia APAV. È autrice di pubblicazioni su riviste "Scuola e Didattica", "Didatticare", "Tuttoscuola", e "Mondo Matematico" e dintorni. È stata relatrice in convegni di didattica curati da vari Enti e ha ricevuto il premio Cesare Cancellieri per la Didattica della matematica. I suoi interessi sono rivolti, in particolare, all'insegnamento della Geometria nel Primo Ciclo con le tecniche informatiche, nel cui ambito ha presentato un lavoro al convegno "Quale Geometria per la Scuola di Oggi?", tenutosi ad Agerola a settembre 2021 e pubblicato sul Periodico di Matematica n.1-2022.

Giovanna Della Vecchia - giovanna.dellavecchia@unina.it

È stata docente di Matematica presso l'IIS "G. Minzoni" di Giugliano in Campania dal 1985 al 2020. Attualmente è docente a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli. Durante la sua carriera di docente della scuola secondaria di secondo grado ha sempre mostrato un particolare interesse per la ricerca didattica e ha ricoperto negli anni il ruolo di funzione strumentale sia nell'area "servizi e supporto agli studenti" che nell'area "formazione docenti". Presso l'istituto Minzoni ha svolto svariati ruoli e ha fatto parte dello staff dirigenziale impegnato nell'attività di progettazione, supporto organizzativo e didattico all'Istituzione scolastica. Ha svolto per diversi anni attività di formazione nell'ambito della didattica e della valutazione, nonché nei corsi di specializzazione per le attività di sostegno agli alunni in situazione di handicap per la provincia di Caserta (area logico - matematica). Ha preso parte a numerosi convegni/seminari in qualità di

relatoreed è autore di numerose pubblicazioni inerenti alla Matematica e ai suoi possibili ambiti di applicazione

Luciana Delli Rocili - lucianadr@live.it

È insegnante di Scuola Primaria con lunga esperienza di Formatrice su questioni di Logica e Probabilità per l'insegnamento nel Primo Ciclo. È Direttore editoriale della rivista "Mondo matematico e dintorni", nel cui ambito ha pubblicato alcuni lavori di didattica per la Scuola Primaria. È socia e componente del Consiglio direttivo dell'associazione "Mathesis Abruzzo" e dell'Accademia Piceno Aprutina in Teramo.

Luca Grilli - luca.grilli@unifg.it

È professore associato di Metodi Matematici in Economia, Scienze Attuariali e Finanza presso il Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT), Università di Foggia. I suoi principali temi di ricerca riguardano le diverse aree della matematica applicata alle scienze sociali, Relatore o relatore su invito in più di 40 conferenze internazionali. Autore di oltre 45 articoli su riviste internazionali. È referee per più di 30 riviste internazionali. Membro del comitato editoriale di 13 riviste (Topic editor in *chief* in 4 riviste internazionali). Membro del Comitato Scientifico di numerosi Convegni Internazionali.

Ciro Iovino - ciro.iovino@alice.it

È docente di Matematica e Fisica a tempo indeterminato presso l'I.I.S. "Don Milani" di Gagnano. I suoi interessi sono stati da sempre rivolti alla didattica della Matematica, nel cui ambito ha partecipato a vari convegni e seminari anche in qualità di Formatore. È stato segretario della sezione Mathesis di Castellammare di Stabia dal 1998, anno della sua fondazione, ed attualmente - dal 2019 - dell'associazione "Mathemare" aderente

alla Federazione Italiana Mathesis. Fa parte del Comitato scientifico per l'organizzazione dei Giochi matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli" in qualità di esperto nella preparazione dei quesiti d'assegnare.

Lucia Maddalena - luciamaddalena@unifg.it

È Professore Ordinario in Metodi Matematici dell'Economia e delle Scienze Attuariali e Finanziarie; è Direttore del Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT) dell'Università degli Studi di Foggia. Ha lavorato nell'Università di Bari e della Basilicata e dal 1994 è professore ordinario dell'Università di Foggia. Ha tenuto insegnamenti nell'ambito dell'Analisi Matematica e della Matematica per l'Economia e la Finanza. Per la SSIS Puglia ha insegnato Didattica della matematica e Storia e fondamenti della matematica. Attualmente insegna Sistemi Dinamici e Matematica per l'economia. La sua produzione scientifica tratta Sistemi parabolici e modelli di reazione-diffusione applicati alla Biomatematca, alla diffusione di innovazioni tecnologiche e alla sostenibilità delle risorse naturali. Ha pubblicato 49 articoli su riviste scientifiche internazionali, 5 libri e 4 curatele.

Paolo Manca - paolo.manca.spas@alice.it

Già professore ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa e direttore del Master in Mercati Finanziari dell'Università di Pisa e Fondazione Casse di Risparmio. Di recente ha scritto *Te la do io la probabilità* (Goware editore) e *Il giallo del teorema dei quattro colori* (ETS editore). Attualmente si occupa di teologia e ha pubblicato con successo *Ma Dio c'è?* (Goware editore). Nel passato ha esercitato anche la professione di maestro di sci. Come tenore e romanziere si presenta come Paolo Severino Nonchè (vedi YouTube e Amazon).

Mario Innocenzo Mandrone - almavit@libero.it

È stato docente di Matematica e Fisica negli istituti di istruzione superiore ed è attualmente docente a contratto di Fisica “corso ofa”, e di Analisi Matematica all’Università del Sannio. Ha svolto attività di docenza nei corsi Ocse-Pisa relativi ai progetti Ocse-Pisa di ricerca - azione nell’ambito della valutazione degli apprendimenti in literacy e numeracy nell’Università degli studi del Sannio. Relatore su tematiche di fisica moderna e contemporanea e di didattica e storia della matematica in diversi convegni a livello nazionale e su applicazioni della teoria delle decisioni in convegni internazionali. Docente esperto in diversi p.o.n. di matematica e di fisica per le scuole secondarie superiori e docente nei corsi di preparazione per le prove Invalsi-Ocse-Pisa. È autore di varie pubblicazioni.

Giuseppe Mangione - pinoman2005@libero.it

Laureato in Economia e Commercio presso l’Università di Napoli “Federico II” e, successivamente, in Filosofia, sempre alla “Federico II” di Napoli. È docente a tempo indeterminato presso l’I.T.I.S. Galileo Ferraris di Napoli, dove si interessa, in particolare, di didattica inclusiva e interdisciplinare e di progetti tendenti all’inserimento della filosofia negli istituti tecnici. Dal corrente anno è socio dell’Associazione Mathesis di Napoli “Aldo Morelli”.

Antonio Maturo - antomato75@gmail.com.

Già Professore Ordinario di Metodi Matematici per l’Economia, presso l’Università G. d’Annunzio di Chieti-Pescara, è stato per circa 20 anni Delegato di Facoltà e di Dipartimento per i rapporti internazionali. È stato Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali. Chief Editor delle riviste «Ratio Mathematica» fino al 2017, «Science & Philosophy», «Ratio Sociologica», «Journal of Social Housing», «Periodico di Matematica». È condirettore del Bollettino dell’AFSU

ed Associate editor di varie riviste italiane e straniere. Autore di circa 170 pubblicazioni scientifiche e vari libri. I suoi interessi di ricerca riguardano i modelli decisionali in condizioni di incertezza, la probabilità soggettiva, la logica fuzzy, la didattica della matematica, le geometrie finite e le geometrie join. Ulteriori dettagli sull'attività di ricerca sono in vari siti internet. Ad esempio, il sito Research Gate.

Giuseppina Monteasi - pina.monteasei@gmail.com

Laureata in Matematica presso l'Università di Napoli "Federico II". Docente a tempo indeterminato presso l'I.T.I. Galileo Ferraris di Napoli, dove riveste la funzione di secondo collaboratore del Dirigente Scolastico e referente dell'inclusione. Ha realizzato numerosi progetti e tenuto corsi di formazione e aggiornamento per docenti, riguardanti in particolare l'innovazione delle metodologie didattiche e l'inclusione. Da oltre un decennio, è socia dell'Associazione Mathesis di Napoli "Aldo Morelli", nel cui ambito ha introdotto e coordinato i lavori della Manifestazione Culturale "Due giorni per la Scuola: Matematica, Filosofia, Letteratura", tenutasi all'ITIS "G. Ferraris" di Napoli nei giorni 18 e 19 marzo 2022.

Cesare Palmisani - cesarepalmisani59@gmail.com

Docente a tempo indeterminato in servizio presso il Liceo Classico "Pietro Giannone" di Caserta; professore a contratto per l'a.a. 2021-22 presso il Dipartimento di Scienze Politiche Università degli Studi di Napoli "Federico II"; dottore in ricerca -XX ciclo- in "Matematica per l'Analisi Economica e la Finanza" con tesi dal titolo "Chaotic Dynamics in Solow-type Growth Models"

conseguito nel 2008 presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Rosa Porciello - rosa.porciello60@gmail.com

Già docente di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado dal 1982, è in pensione dal 1 settembre 2020. I suoi interessi sono stati da sempre rivolti alla didattica della Matematica, nel cui ambito ha partecipato a vari convegni e seminari anche in qualità di Formatrice. È stata vice-presidente storica della sezione Mathesis di Castellammare di Stabia dal 1998, anno della sua fondazione, ed attualmente - dal 2019 - dell'associazione "Mathemare" aderente alla Federazione Italiana Mathesis. Fa parte del Comitato scientifico per l'organizzazione dei Giochi matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli" in qualità di esperta nella preparazione dei quesiti d assegnare.

Francesco Quagliano - francesco.quagliano@gmail.com

Già docente di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado dal 1982, è in pensione dal 1 settembre 2020. I suoi interessi sono stati da sempre rivolti alla didattica della Matematica, nel cui ambito ha partecipato a vari convegni e seminari anche in qualità di Formatore. È stato socio della sezione Mathesis di Castellammare di Stabia dal 1998, anno della sua fondazione, ed attualmente - dal 2019 - dell'associazione "Mathemare" aderente alla Federazione Italiana Mathesis. Fa parte del Comitato scientifico per l'organizzazione dei Giochi matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli" in qualità di esperto nella preparazione dei quesiti d assegnare.

Umberto Salzano - umbertosalzano@gmail.com

Laureato in Matematica presso l'Università di Napoli "Federico II", è docente a tempo indeterminato, sulla cattedra di Matematica e

Fisica presso l'I.I.S. Striano-Terzigno. Ha conseguito l'abilitazione all'insegnamento alla SISS presso l'Università di Ferrara. È componente del Consiglio direttivo dell'Associazione Mathesis di Napoli "Aldo Morelli", di cui è socio da oltre un decennio. I suoi interessi sono rivolti principalmente alla didattica della matematica, nel cui ambito ha partecipato a numerosi convegni e seminare, anche in qualità di relatore. È autore di una pubblicazione sul Periodico di Matematica, n. 1-2022, "Le geometrie non euclidee nel mondo reale" su cui ha relazionato al Convegno AFSU-Mathesis "A. Morelli".

Carmen Talia - prof.carmentalia@gmail.com

Docente di Matematica e Fisica fino al 2015 negli Istituti Secondari Superiori. Presidente della Sezione Mathesis di Foggia dal 2006 al 2020. Docente nei corsi abilitanti per le classi di concorso di Matematica, Matematica e Fisica e Matematica Applicata. Referente regionale in numerosi seminari di studio, curatrice di mostre didattiche, componente del Comitato Scientifico presso la Facoltà di Economia prima e poi presso il DeMET di Foggia dal 2007-2008. Dal 2013 è componente del Comitato Organizzatore della sfida Matematica "Maths Challenge" destinata agli studenti degli ultimi due anni degli Istituti Secondari Superiori. Relatrice in numerosi seminari e convegni sia a livello locale che nazionale su tematiche disciplinari e interdisciplinari. Promotrice e organizzatrice di convegni e corsi di aggiornamento, ha sempre sottolineato il contributo delle Donne alla Storia della Matematica. Appassionata di Arte e Letteratura, ha approfondito le tematiche che accomunano l'Arte, le Scienze la Letteratura e la Matematica. Curatrice della mostra ArTeSciMa. Docente della SISS Puglia di Storia e fondamenti della Matematica. Ha al suo attivo numerose pubblicazioni su riviste di carattere scientifico e collaborazioni per libri di testo delle scuole secondarie superiori.

Carlo Toffalori - carlo.toffalori@unicam.it

Professore ordinario di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 fa parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. I suoi interessi di ricerca riguardano teoria dei modelli e algebra. Si occupa anche di divulgazione della matematica. Ha pubblicato vari libri, tra cui *Matematica, miracoli e paradossi* (con Stefano Leonesi, per Bruno Mondadori, 2007), *Il matematico in giallo* (Guanda, 2008), *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura* (Guanda, 2011) e più di recente *Algoritmi* (il Mulino, 2015) e *Logica a processo. Da Aristotele a Perry Mason* (Franco Angeli, 2016, ancora con Stefano Leonesi). Nel 2017 ha curato per Grandangolo *Scienza Cantor. La teoria degli insiemi*.

Luigi Togliani - luigi.togliani@gmail.com

Laureato in Matematica all'Università di Bologna, è docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Belfiore" di Mantova. Interessato alla didattica delle discipline scientifiche, è autore di una trentina di pubblicazioni su riviste nazionali, tra cui *Archimede*, *Periodico di Matematiche*, *La Fisica nella Scuola*, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, nel periodo 1978-2017. Ha tenuto più di quaranta seminari in corsi di formazione per docenti di Matematica e di Fisica, anche in preparazione a concorsi per l'insegnamento, nel periodo 1990-2018. Dal 2013 è socio corrispondente dell'Accademia Nazionale Virgiliana. Nel 2017 ha vinto il Premio Cancellieri per la sezione 'Valenza formativa dell'Informatica'. Dal 2015 è presidente della sezione di Mantova della *Mathesis*, Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche.