

Vox clamans in deserto

Il multiconcreto e la probabilità soggettiva di Bruno de Finetti

Luca Nicotra*

** Ingegnere. Presidente dell'A. P. S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di: «Periodico di Matematica», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «ArteScienza», «ArteScienza_magazine»;
luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n2.087

Sunto: *Quanto degli insegnamenti dei grandi ingegni realmente lascia un segno duraturo nei «crani limitati dei portatori d'acqua e degli operatori culturali», per dirla con Piergiorgio Odifreddi? E quanto invece, purtroppo, rimane di fatto ignorato o, peggio ancora, stravolto, rischiando di farne delle "vox clamans in deserto"? Due casi eccellenti: l'astratto ridotto al "multiconcreto", affermazione felicissima dell'origine empirica del processo mentale dell'astrazione, e la teoria della probabilità soggettiva. Due fondamentali conquiste del pensiero filosofico-scientifico di un genio italiano: Bruno de Finetti.*

Parole Chiave: *Concreto, astratto, probabilità, Bruno de Finetti.*

Abstract: *How much of the teachings of the great geniuses really leaves a lasting mark on the "limited skulls of water carriers and cultural operators", in the words of Piergiorgio Odifreddi? And how much instead, unfortunately, remains in fact ignored or, worse still, distorted, risking to turn them into "vox clamans in the desert"? Two excellent cases: the abstract reduced to "multiconcrete", a very happy affirmation of the empirical origin of the mental process of abstraction, and the*

theory of subjective probability. Two fundamental achievements of the philosophical-scientific thought of an Italian genius: Bruno de Finetti.

Keywords: *Concreto, astratto, probabilità, Bruno de Finetti.*

1 - “Vox clamans in deserto”

Un fenomeno purtroppo molto più diffuso di quanto si pensi è l’oblio della lezione dei grandi ingegni, che rischia seriamente di fare di ciascuno di loro una vuota «vox clamans in deserto». Nei loro confronti i «crani limitati dei portatori d’acqua e degli operatori culturali» (per usare una felice espressione di Piergiorgio Odifreddi) si adagiano su un comportamento alquanto ipocrita: innalzano loro monumenti e si “esibiscono” in altisonanti celebrazioni (spesso per trarne lustro personale ...) ma in realtà, nei fatti, ne ignorano l’insegnamento o, ancor peggio, si comportano all’opposto.

Allora il tributo più onesto e sincero alla loro opera non è quello di innalzare retorici monumenti, ma è il riproporne sempre l’insegnamento, che è il loro vero grande monumento, e possibilmente con le stesse loro parole, perché nel “tramandare” si annida spesso il “tradire”: le due parole hanno la stessa radice, come sanno bene i filologi. Ben diceva Federigo Enriques (1938, p. 153):

Pei valori dello spirito, come per quelli materiali dell’economia, sussiste una “legge di degradazione” : non si può godere pacificamente il possesso ereditario, se non si rinnovano ricreandoli nel proprio sforzo d’intenderli e di superarli.

Di Bruno de Finetti abbiamo il «possesso ereditario» di una immensa sua opera e se crediamo in essa e non vogliamo che essa stessa si “degradi”, dobbiamo “rinnovarla” continuamente nello sforzo onesto di intenderla e (forse) superarla, perché il vero Maestro sa bene che la via da lui aperta non è mai un vicolo chiuso ma una strada di cui non è dato conoscere la fine. Dei tanti «valori» della sua opera, vorrei qui ricordarne in particolare due, forse quelli a lui più cari: la sua critica all’uso “selvaggio” dell’assiomatismo e la sua rifondazione in chiave soggettivista (l’unica ragionevolmente sensata) della probabilità.

2 - Dal concreto all’astratto

Francesco Bacone (1561-1626), Galileo Galilei (1564-1642) e René Descartes (1596-1650) operarono una grande rivoluzione nel campo del pensiero filosofico, con la separazione del campo scientifico da quello teologico e metafisico e la ricerca di un metodo proprio della scienza e della filosofia, dando luogo al passaggio dal pensiero filosofico-scientifico medioevale a quello dell’età moderna.

I primi due si opposero al puro metodo deduttivo di Aristotele avulso dall’esperienza, ma in modi diversi.

Bacone nel *Novum organum scientiarum* inseguiva il sogno di una “vera scienza” basata unicamente sull’uso della “vera induzione”, riponendo quindi nella sola esperienza la fonte per ricavare le leggi della natura e della mente.¹

¹ Francesco Bacone si inserisce quindi nel solco della cosiddetta “scuola empiristica”, basata sull’empirismo “bruto”, che fa affidamento unicamente

Galileo pose le basi del moderno metodo sperimentale fisico-matematico, con la verifica sperimentale delle ipotesi sui fenomeni naturali e l'uso della matematica come linguaggio formale nella codifica delle leggi naturali.² Tuttavia, per Galileo, mentre la conoscenza del mondo fisico poteva e doveva essere verificata unicamente dalle conferme dell'esperienza, la sua struttura razionale matematica si sottraeva a tale verifica, avendo un valore assoluto di verità, paragonabile a quella divina: «...quanto alla verità di che ci danno cognizione le dimo-

sull'esperienza passivamente e acriticamente accettata, senza alcun intervento della mente.

² In realtà, già i chimici-alchimisti musulmani ottennero scoperte importantissime utilizzando molto tempo prima proprio l'esperienza intesa come condizione necessaria ma non sufficiente, per ogni interpretazione della natura, in linea quindi con la visione positiva della scienza tipica della "scuola empirica", differente dalla "scuola empiristica". L'averroismo e la scuola di Chartres, fiorita nei secoli XI e XII sotto l'influenza araba, professavano i principi della scuola empirica, subordinando la conoscenza del mondo ai dati sperimentali però ordinati e interpretati dalla mente. Tuttavia, ancora non si può parlare di un vero e proprio metodo sperimentale, in quanto l'approccio sperimentale della maggior parte degli scienziati islamici alla conoscenza aveva più preoccupazioni utilitaristiche di dominio sulla natura che finalità puramente scientifiche e non aveva quella dichiarata impostazione fisico-matematica che sarà stigmatizzata da Galileo Galilei nel XVII secolo e vigorosamente affermata nel secolo successivo da Isaac Newton. Alhazen (965-1040) (in arabo Hasan Ibn al-Haitham), Abū al-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Biruni (973-1048) e Avicenna (980-1037) (in arabo Abū Alī al-Husayn ibn 'Abd Allāh ibn Sinā) sono i più grandi scienziati islamici, tutti dell'XI secolo, che fecero sistematico uso, nelle loro ricerche, di questa prima forma del metodo sperimentale (Nicotra, 2015.) Anche Dante Alighieri riconosceva l'importanza del metodo sperimentale: *Da questa istanza può deliberarti/Esperienza, se giammai la provi,/Ch'esser suol fonte ai rivi di vostr'arti.* (*Divina Commedia. Paradiso* canto II, 94-105).

strazioni matematiche, ella è l'istessa che conosce la sapienza divina» (Galilei, 1632, Salviati, Prima Giornata).

Prima ancora di Bacone e Galilei bisognerebbe, però, ricordare Leonardo da Vinci come assertore del metodo induttivo-deduttivo e della necessità di accostare all'esperienza la matematica, divenendo così il più chiaro precursore del metodo scientifico moderno, fondato sulla fusione fra esperimento e matematica (Nicotra, 2015). I richiami all'uso dell'esperienza e della matematica sono numerosi negli sparsi frammenti degli scritti leonardeschi e costituiscono una inequivocabile anticipazione del metodo fisico-matematico che contraddistinguerà la scienza moderna da Galilei in poi. Per Leonardo la Natura è razionale e l'esperienza deriva tutta dalla ragione (ovvero dalle sue leggi), ma per comprendere questa occorre procedere all'inverso, cominciando a investigare l'esperienza per risalire alla ragione (Baldini, 1993, p. 6):

Ma prima farò alcuna esperienza avanti ch'io più oltre proceda, perché mia intenzione è allegare prima l'esperienza e poi colla ragione dimostrare perché tale esperienza è costretta in tal modo ad operare. E questa è la vera regola come li speculatori delli effetti naturali hanno a procedere, e ancora che la natura cominci dalla ragione e termini nella esperienza, a noi bisogna seguire in contrario, cioè cominciando, come di sopra dissi, dalla esperienza, e con quella investigare la ragione.

Proprio per la razionalità della Natura, non può esistere alcuna esperienza che non sia figlia della ragione ma possono esserci esperienze ancora non manifestate che, dovendo anch'esse derivare dalla ragione, corrispondono a "ragioni" ancora ignote (Leonardo da Vinci, 2004, pp. 22, 32):

Nessun effetto è in natura senza ragione; intendi la ragione e non ti bisogna esperienza. La natura è piena d'infinite ragioni, che non furon mai in esperienza.

Questo pensiero colloca Leonardo addirittura come un precursore della fisica teorica («intendi la ragione e non ti bisogna esperienza»), nella quale è caratteristica la possibilità di “scoprire” leggi naturali in base a considerazioni matematiche (quindi razionali) molto prima della loro conferma sperimentale.³

Leonardo manifesta più volte la sua avversione per il vuoto parlar filosofico e per le disquisizioni metafisiche, ribadendo la necessità di attenersi all'esperienza e applicare ad essa i metodi matematici (*Codice Atlantico* a 119 v):

Io credo che invece che definire che cosa sia l'anima, che è una cosa che non si può vedere, molto meglio è studiare quelle cose che si possono conoscere con l'esperienza, poiché solo l'esperienza non falla. E laddove non si può applicare una delle scienze matematiche, non si può avere la certezza.

In Leonardo, Bacone e Galileo, sia pure con le dovute differenze, è quindi ben manifesta l'idea della copresenza dell'esperienza e della ragione, o, detta in altri termini, dell'induzione e della deduzione, dell'osservazione-sperimentazione e del ragionamento, idea accettata ormai “ufficialmente” come caratterizzante la scienza moderna, ma sprezzatamente ignorata dai cosiddetti “matematici puri”, che

³ Un esempio classico è la scoperta dell'antimateria (positrone) fatta nel 1928 da Paul Adrien Maurice Dirac in base a una sua famosa equazione, confermata sperimentalmente successivamente nel 1932 da Carl David Anderson.

pretendono di erigere a un inesistente stato di purezza l'assiomatismo quando, anziché presentarlo come utile punto di arrivo "razionale" di un processo cognitivo che parte dall'esperienza (sulla scia del pensiero leonardesco), lo utilizzano come punto di partenza «senza riferimento a casi ed esigenze che giustifichino praticamente la creazione di certi schemi mentali», il che «può piacere per vanto di purezza o dispiacere per il senso d'inutilità, gratuità, vacuità, di ciò che è mero "jeu d'esprit"», come afferma Bruno de Finetti (1966, p. 10361).

3 - La "matematica" di base "assiomatica" : il bagno catartico dell'astrazione

Nasce così la «"matematica" di base "assiomatica"», facendo della matematica una «roba da matti» grazie a un cattivo uso dell'assiomatica (de Finetti B., 1978, p.13).

Ma oltre che una «roba da matti», si tratta in realtà di un "tumore" maligno in seno alla scienza, perché caratterizzato da una degenerazione delle sue cellule "sane", che si dovrebbero alimentare sempre di esperienza e ragione, venendo meno uno dei due alimenti fondamentali: l'esperienza. Un organismo, dunque, la «"matematica" di base "assiomatica"», che oltre ad essere «roba da matti» è estraneo (come le cellule tumorali in un corpo sano) all'idea di scienza moderna, regredendosi a una moderna forma di aristotelismo che si alimenta unicamente di vuote deduzioni tratte da premesse arbitrarie, se pur coerenti. Albert Einstein diceva della logica: «Il pensiero logico, da solo, non ci può fornire conoscenze sul mondo dell'esperienza e termina in essa. Le proposizioni puramente

logiche sono vuote davanti la realtà» (Einstein, 1952, p.67). E Bruno de Finetti: «Ciò che è logico è esatto. Ma non ci dice nulla. Nessuna pretesa sarebbe altrettanto illogica che quella di ricavare qualcosa dalla logica» (de Finetti B., 1937).⁴

Leonardo, Bacone, Galilei, de Finetti, tutte *vox clamans in deserto!*⁵

A questa mania di credere nella “purificazione” del concreto nel bagno catartico dell’astratto fa riscontro l’idea di Bruno de Finetti della riduzione dell’astratto al multiconcreto (de Finetti B., 1974b). L’astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere aristocraticamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente lega-

⁴ Per brevità evito molte altre illustri citazioni simili, sull’affermazione della negazione di nuova conoscenza a partire della logica, che si possono trovare nella mia relazione, “L’immaginazione creatrice nell’arte e nella scienza”, in *Atti della conferenza “Caos e immaginazione nell’arte e nella scienza”*, 10 maggio 2008, Monte Compatri: edizioni Controluce.

⁵ Ma su molte altre questioni (oltre quella appena accennata dei rapporti fra ragione ed esperienza) sembra dovere purtroppo riconoscere l’esistenza di un’ampia schiera di illustri *vox clamans in deserto!* Bruno de Finetti criticava senza mezzi termini la validità di molti testi scolastici a proposito dei quali «pur rifuggendo da giudizi precisi», riteneva tuttavia di «dover convenire, che nella prassi scolastica, le tendenze al peggio sembrano destinate sistematicamente ad aver presa con maggior forza». Ma si affrettava a riconoscere l’esistenza, invece, di libri di testo lodevoli (ricordando quelli di Michele Cipolla, Federico Enriques, Ugo Amaldi, Francesco Severi, Emma Castelnuovo) ma tristemente rilevava che «non sembra purtroppo, né come diffusione né come impostazione, che abbiano esercitato una grande influenza sulla mentalità scolastica». Riguardo alla diffusione dei testi di Enriques-Amaldi certamente non è vera l’affermazione di de Finetti, ma forse rimane vera quella riguardo alla loro influenza sulla mentalità scolastica.

to pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multiconcreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato, come magistralmente de Finetti stesso fa notare (de Finetti B., 1966, p. 10361):

È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo assumono usandole per formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa).

Certamente non tutti i matematici ignorano questo "naturale" e imprescindibile legame ombelicale della "pura astrazione" con "l'impura esperienza del concreto". A tal proposito è bene ricordare ciò che, da par suo, Lucio Lombardo Radice (che certamente non era un matematico applicato) sentiva il bisogno di precisare a proposito dell'assiomatismo, riconducendolo nei giusti binari dell'astrazione giustificata da una comprensione razionale del multiconcreto (Lombardo Radice, 1974, pp. 8, 9):

... la matematica non si occupa di sistemi formali qualunque (arbitrari) pur che coerenti [ma] si occupa di quei sistemi formali che traducono, in termini di pura struttura,

parecchi sistemi concreti (concreti rispetto alla nuova formalizzazione).

In verità l'assiomatismo ha origini veramente "nobili", essendo nato (come molte altre grandi idee della scienza) da un coraggioso atto di ribellione all'*Ipse dixit*: la negazione delle verità assolute necessarie dei famigerati giudizi sintetici a priori di Kant, che ha permesso la nascita delle geometrie non-euclidee. Ma è stato frainteso e ha contratto il germe di un male, vestendo un abito di purezza che in realtà non esiste, per il semplice motivo che la purezza è soltanto una invenzione dell'uomo, nata dalla sua vanagloriosa aspirazione a salire su uno sgabello onorifico (per usare una felice espressione di de Finetti), per «quel pervertito senso dei valori che è la nemesis dell'esser possessori di schiavi», come argutamente osservava Alfred Whithead: non esiste in Natura. Nessuna cosa è "pura" in Natura e nemmeno gli sforzi dell'uomo riescono a ottenerla. Con i migliori procedimenti metallurgici, per esempio, non si riesce, generalmente, a ottenere metalli con purezza superiore al 99% (per il rame e il ferro si può arrivare al 99,95%). Il termine "puro" nasconde l'aspirazione a stabilire scale di valori proprie dei «possessori di schiavi», che non hanno nessuna giustificazione né teorica né pratica. Esistono soltanto punti di vista diversi "egualmente validi". Termini come "ricerca pura", "fisica pura", "matematica pura", ecc. dovrebbero essere banditi e sostituiti con altri più appropriati quali "ricerca di base" (già peraltro usato, ma non sempre come si dovrebbe) "fisica di base", "matematica di base", ecc.

4 – La probabilità: dal misterioso regno di una Natura semideterministica all'impuro regno delle scommesse e dell'uomo della strada

Bertrand Russell, con la sua ben nota ironia, affermava che «il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato». In realtà la sua ironia coglieva in pieno il bersaglio, ma ignorava evidentemente l'opera di Bruno de Finetti, che invece finalmente ha pienamente gettato luce sul suo significato dando la prima “vera” definizione accettabile della probabilità, proprio “sporcando” la sua mente di matematico⁶ con il cercarne il significato nell'ambiente più impuro che possa esistere: quello delle scommesse e del senso comune dell'uomo della strada.

Occorre aggiungere che il rifiuto dello “sgabello onorifico” della purezza non è stato l'unico motore della sua ricerca: ad esso si è accompagnato come un eccellente “booster”, per usare un efficace termine meccanico, il dubbio su tutto ciò che prima era stato disquisito sulla probabilità. Il dubbio che già in Leonardo, Bacone, Galilei e Cartesio ha costituito il principio del “nuovo metodo”, il dubbio della verità di tutto ciò che prima è stato detto o pensato, maturato opponendosi all'autorità indiscussa dell'*Ipse dixit*.⁷ Il dubbio, il bruniano

⁶ Matematico e basta, senza dire né puro né applicato, aggettivi che de Finetti non amava.

⁷ Però già Ruggero Bacone (1214 circa-1292), filosofo, scienziato, teologo e alchimista inglese, detto *Doctor mirabilis* per la sua vasta cultura, si opponeva all'abitudine di seguire ciecamente le autorità precostituite, sia sul piano teologico che su quello scientifico, procurandosi parecchi nemici. Fu un assertore convinto dell'importanza dell'esperienza

«dubio de riveder il sole» (Bruno, 1585, Dialogo Quinto) che, assieme al metodo induttivo-deduttivo sostenuto dalla matematica, è l'altro elemento fondante della scienza moderna. E al dubbio è collegato il concetto di incertezza, che ormai domina tutta la scienza contemporanea, ovvero la logica continua dell'incerto che si esprime attraverso gli infiniti valori della probabilità, in contrapposizione alla logica discreta binaria del vero o falso. La scienza, nel suo significato più autentico, è ricerca di ciò che ancora non ci è noto e come tale il suo cammino ha come inseparabili compagni il dubbio e il caso.⁸

Cartesio nel Collège Royal dei Gesuiti di La Flèche, («L'une des plus célèbres écoles d'Europe», com'egli stesso ebbe a definirlo) seguì approfonditi studi umanistici, scientifici, filosofici e religiosi. Ma la sua mente vivacissima e critica pose il dubbio al disopra delle tante "verità" che i suoi Maestri di La Flèche gli avevano inculcate come indiscutibili, liberandosi di tutto ciò che la sua educazione scolastica gli aveva forzatamente fatto accettare (Descartes, 1938, pp. 29-30):

Ma non appena ebbi compiuto questo corso di studii, a capo del quale costuma d'esser ammessi nel numero dei dottori. Mutai affatto d'opinione; poiché mi trovai involuppato in tanti dubbii ed errori, che mi sembrava, cercando d'istruirmi, di non aver fatto altro profitto che d'aver scoperto sempre più la mia ignoranza. E nondimeno ero in una delle più celebri scuole d'Europa.

nella formazione della conoscenza e per tale motivo è considerato uno dei padri del metodo induttivo. Le sue affermazioni al riguardo restano troppo generiche e vaghe per poterlo considerare un vero precursore del metodo sperimentale.

⁸ Aggiungerei l'aggettivo serendipico.

Per progredire nella conoscenza “vera”, Cartesio comprese che doveva fare *tabula rasa* di tutto ciò che gli era stato insegnato (Descartes, 1961, p. 16):

Non da oggi soltanto mi sono accorto che fin dai miei primi anni ho ricevuto come vere molte opinioni false; e quel che ho poi fondato sopra principi così malsicuri non può essere che dubbio ed incerto: ed ho deciso, allora, di dovere incominciare sul serio, una volta per sempre, a disfarmi di tutte le opinioni che avevo ricevuto per l'innanzi nella mia credenza, e cominciare tutto di nuovo, fin dalle fondamenta, se volevo stabilire qualche cosa di certo e di costante nelle scienze.

Tre secoli dopo Bruno de Finetti (1906-1985) ripeteva press'a poco gli stessi concetti. In particolare era ricorrente, nelle sue lezioni, l'allusione all'intelligenza dei bambini che poi, crescendo, diventano «ottusi pappagalli» per colpa della scuola (de Finetti B., 1974a):

Occorrerebbe cercare di far sempre assimilare tutte le cose nuove allo stesso modo in cui, nell'età da 0 a 5 anni, prima che la scuola intervenga e spesso distrugga tutto questo bell'avvio, si assimilano tutte le nozioni che si assimilano, tutta la base di tutto quello che verrà dopo. Cercare di far ricuperare la freschezza mentale dei bambini, la capacità di autoeducarsi e autoistruirsi con l'osservazione e la riflessione diretta, sarebbe il più grande successo e il più grande dono che una scuola ben concepita possa offrire a un essere umano.

E anche lui, come Cartesio, faceva *tabula rasa* di tutto quanto era stato affermato da grandi matematici con la sua rifondazione in chiave soggettivista (l'unica ragionevolmente sen-

sata) della probabilità.⁹ E qui è bene subito sgombrare il campo da possibili errori grossolani: rifondazione e non introduzione di una nuova definizione di probabilità, una possibile alternativa da affiancare alle altre già esistenti, come purtroppo spesso si legge in molta letteratura matematica, specialmente scolastica. Sarebbe auspicabile, specialmente a livello didattico, di abbandonare la superata concezione oggettivistica della probabilità, insegnando fin dall'inizio il suo significato soggettivo che, come vedremo, non disconosce le vecchie cosiddette¹⁰ definizioni di probabilità, utilizzabili come possibili metodi per assegnare il valore della probabilità in base a scelte "soggettive".

Una semplice frase, emblematica, sintetizza la sua grandiosa opera di rifondazione della probabilità, ed è stata riportata nella lapide apposta nel luglio 2011 accanto al portone di ingresso della sua casa natale ad Innsbruck, a cura dell'Università di quella città austriaca che gli dette i natali il 13 giugno 1906:

LA PROBABILITA' NON ESISTE

Chi ha conosciuto Bruno de Finetti sa bene che amava usare espressioni molto forti e provocatorie, i suoi famosi pungenti "neologismi", con il solo intento di perseguire una

⁹ Anche il logico inglese Frank Ramsey (*The foundations of mathematics and other logical essays*, 1931) giunse, indipendentemente da Bruno de Finetti, a una concezione soggettivista della probabilità.

¹⁰ Vedansi più avanti le critiche definettiane ad esse, alla luce delle quali esse non sono vere definizioni ma tutt'al più metodi per assegnare il valore della probabilità.

maggiore efficacia e questa affermazione sulla probabilità risulta certamente il massimo della provocazione da parte di un «mago della probabilità», quale era considerato de Finetti anche a livello del grosso pubblico. Il significato della frase è molto “semplice e inatteso”, come lo erano le sue soluzioni ai problemi che poneva al Club Matematico dell’Università “La Sapienza” di Roma negli anni Sessanta-Settanta del secolo passato: la probabilità non esiste come proprietà oggettiva, «come una misteriosa e inafferrabile entità metafisica, esistente in astratto, e dalla quale dovrebbe dipendere, chissà in quale modo, l’avverarsi di un evento» (de Finetti B., 1931, p.13).



È ben noto che le opere di de Finetti sulla probabilità sono numerose,¹¹ ma quelle che rimangono fondamentali, per comprendere le sue innovative idee sulla probabilità, sono

¹¹ Un elenco completo di tutte le sue opere, ordinato secondo i dettami di de Finetti stesso, si trova alla fine della sua prima biografia completa da me scritta assieme alla figlia Fulvia (de Finetti F., Nicotra, 2008).

quelle giovanili del 1931: 12 *Probabilismo*, saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza, e *Sul significato soggettivo della probabilità*. La prima (de Finetti B., 1931a) contiene l'esposizione critica dei concetti che riguardano la probabilità fino ad allora intesa, ovvero in chiave oggettiva, e l'esposizione a livello filosofico della sua nuova concezione della probabilità in chiave soggettiva, nonché della conseguente concezione della scienza alla luce della logica dell'incerto in sostituzione della rigida logica classica binaria del vero o falso. La seconda, invece, contiene la trattazione matematica dei principi della probabilità soggettiva (de Finetti B., 1931b),¹³ dimostrando come si possa costruire con tutto rigore l'intera teoria delle probabilità sulla definizione soggettiva di probabilità da lui data.

Nell'ultima sua lezione universitaria (de Finetti B., 1989, capitolo "La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni", p. 149), de Finetti stesso ammise che sostanzialmente non ebbe mai nulla da modificare o da aggiungere, «pur estendendola e approfondendola», alla concezione della probabilità, con annessa modalità di assegnarle un valore numerico, una misu-

¹² In realtà nella nota 2 di p.5 di *Probabilismo* troviamo però scritto: «Fin dall'aprile 1928 avevo pronta un'esposizione completa dei fondamenti della teoria delle probabilità secondo il mio punto di vista ...», che dimostra che de Finetti non ancora ventiduenne arrivò a maturare una prima formulazione sistematica delle sue concezioni soggettiviste sulla probabilità.

¹³ B. de Finetti, *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico*. In: "Atti della XIX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze" (Bolzano- Trento 1930), SIPS, Roma, 1931, p.44.

ra,¹⁴ contenuta in queste due opere, che aveva maturato tra il 1926 e il 1928, cioè a cavallo della laurea!.

Le argomentazioni filosofico-logiche che dimostrano l'assurdità di considerare la probabilità una proprietà oggettiva, assieme alle critiche alle tre possibili definizioni di probabilità "oggettiva" (classica o per partizione, frequentistica e assiomatica) sono tutte contenute in *Probabilismo* (de Finetti B., 1931a),¹⁵ in una forma concettuale comprensibile anche da un "non matematico", come è giusto che sia, poiché la probabilità è un concetto che riguarda tutti e non soltanto i matematici o gli scienziati. Già tali osservazioni sono sufficienti per far abbracciare completamente l'idea del carattere soggettivo della probabilità, anche se non lo sono ancora per dimostrare la possibilità di erigere su di essa in maniera rigorosa l'intero Calcolo delle probabilità, obbiettivo raggiunto invece nell'opera più specialistica *Sul significato soggettivo della probabilità* (de Finetti B., 1931b). Infatti, come H. E. Kyburg e H. E.

¹⁴ La parola "misura" potrebbe sembrare poco corretta (ma ne fa uso de Finetti stesso), in quanto potrebbe sembrare più appropriata per le grandezze che hanno un valore oggettivo e non per la probabilità che ha un valore soltanto soggettivo. Invece è oltremodo adatta per la probabilità, in quanto ne evidenzia il carattere soggettivo. La misura di una grandezza infatti, essendo un numero puro risultante dal rapporto fra due grandezze omogenee, ha un valore relativo, variando a seconda dell'unità di misura scelta. Nel caso della probabilità soggettiva è soltanto una misura, un numero puro e non una grandezza oggettiva avente una sua esistenza indipendente e come tale è variabile a seconda del soggetto che valuta la possibilità di avverarsi dell'evento e delle informazioni in suo possesso nell'istante di tempo in cui viene fatta tale valutazione.

¹⁵ Per conoscere i retroscena della sua tormentata pubblicazione rimando a (Nicotra, 2007)

Smokler dicono della ‘scambiabilità’ nella prefazione alla raccolta *Studies in Subjective Probability*,¹⁶ fin quando de Finetti non introdusse nel 1931 il concetto di scambiabilità degli eventi rispetto alle permutazioni (teorema di rappresentazione di de Finetti), «la teoria soggettivistica delle probabilità era rimasta poco più che una curiosità filosofica. Nessuno di coloro per i quali la teoria delle probabilità era oggetto di conoscenza o di applicazione vi prestava gran che di attenzione. Ma, coll’introduzione del concetto di ‘equivalenza’ o ‘simmetria’ o ‘scambiabilità’, quale ora è conosciuto, è stata scoperta una via per connettere la nozione di probabilità soggettiva con i classici problemi dell’inferenza statistica».

5 - Le diverse probabilità “oggettive”

Nell’ambito della cosiddetta probabilità oggettiva sono tre le possibili definizioni. Già questa “trinità” dovrebbe risultare alquanto sospetta per una proprietà ritenuta “oggettiva”: una “realtà oggettiva” che tuttavia si manifesta in tre modi molto diversi! Una realtà quasi in odore di misticismo: una e trina allo stesso tempo! Un mistero della fede ma non più religiosa bensì scientifica! Ricordiamone brevemente le “definizioni”.

5.1 - La probabilità classica o per partizione

La prima definizione matematica di probabilità, detta perciò “classica”, si trova esplicitamente indicata nel Libro II del

¹⁶ Wiley New York 1964, pp. 13-14.

trattato *Théorie analytique des probabilités*¹⁷ pubblicato nel 1812 dal matematico francese Pierre Simon de Laplace¹⁸ (de Laplace, 1820, p. 181):

On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles. (Come abbiamo visto nell'Introduzione la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ad esso e il numero di tutti i casi possibili, quando non c'è nulla che ci faccia credere che un caso dovrebbe verificarsi piuttosto che qualsiasi altro, in modo che questi casi siano, per noi, ugualmente possibili).

Ovviamente l'aggettivo “favorevole” non è riferito al contenuto dell'evento, bensì alla nostra attesa che esso si realizzi: favorevole è semplicemente l'evento su cui fissiamo l'attenzione, che ci attendiamo che si realizzi o che sia vero, di cui vogliamo valutare numericamente (con la probabilità) la possibilità di accadere o di essere vero, indipendentemente dal fatto che sia o no un evento piacevole o vantaggioso. Essa, a volte, è detta anche “definizione per partizione”, poiché implica una partizione dell'insieme di tutti gli eventi possibili nei due sottoinsiemi degli eventi favorevoli e degli eventi non-

¹⁷ Il trattato era diviso in due libri: *Calcul des Fonctions génératrices* e *Théorie générale des probabilités*. Raccoglieva articoli scritti da Laplace fin dal 1774.

¹⁸ La definizione data da Laplace in realtà non era nuova perché era stata già utilizzata da Cardano (*Liber de ludo aleae*) e Galilei (*Sopra le scoperte dei dadi*) anche se non espressa in maniera esplicita.

favorevoli. Questa definizione ha un dominio di applicazione limitato da due condizioni:

1. è applicabile soltanto in tutti i casi in cui è possibile conoscere quali e quanti sono gli eventi che si possono realizzare e quali e quanti sono quelli favorevoli;
2. gli eventi possibili devono avere tutti la stessa probabilità, vale a dire non ci deve essere nessun motivo che favorisca la realizzazione dell'uno piuttosto che dell'altro.

Il classico esempio di applicazione di questa definizione è il lancio di una moneta, perfettamente "equilibrata" o "simmetrica", nel senso che non ci sia maggior concentrazione di massa su una faccia piuttosto che sull'altra, che favorirebbe la caduta della moneta su una delle due facce. Gli eventi possibili sono due (testa, croce), mutuamente escludentisi, mentre l'evento favorevole è uno dei due (o testa o croce). Si esclude il caso, che in realtà potrebbe verificarsi, che la moneta cada di taglio, senza presentare quindi nè testa nè croce. In questa scelta si utilizza già, in maniera "sottaciuta", una valutazione di probabilità molto piccola che la moneta cada di taglio, tale da giustificare l'esclusione a priori che l'evento accada, concludendo che la probabilità che in un lancio la moneta cada presentando croce o testa ("o" esclusivo) sia dunque $1/2$.

La presenza dell'aggettivo "equiprobabile" rende difettosa questa definizione dal punto di vista logico, chiudendola in un circolo vizioso, poiché essa fa uso dello stesso concetto di probabilità che "pretende" di definire: «Eccoci dunque costret-

ti a definire il probabile col probabile. Come sapremo che due casi possibili sono ugualmente probabili? Sarà per una convenzione?» (Poincaré, 1950, p. 176). Usualmente, tale anomalia è superata ricorrendo al Principio della Ration Non Sufficiente o Principio d'Indifferenza,¹⁹ introdotto da Pierre Simon de Laplace, per il quale gli eventi vanno intesi come equiprobabili se non si può formulare nessuna ragione per credere il contrario, in quanto si presume che vi sia simmetria perfetta rispetto ai casi possibili. Ma è chiaro che anche una siffatta giustificazione non è del tutto soddisfacente e attira facilmente critiche ben fondate: il non essere in grado di formulare ragioni in contrario non esclude che in realtà ve ne possano essere.

5.2 - La probabilità frequentista

La definizione classica di probabilità presuppone la possibilità di eseguire “virtualmente”, e non materialmente, l'esperimento o prova che può dar luogo all'evento atteso, individuando tutti i possibili esiti, e fra questi quelli in cui si presenta l'evento in considerazione, dal semplice esame dell'oggetto protagonista dell'evento: il lancio di un dado può essere facilmente immaginato e con esso i suoi possibili risultati, eventi croce o testa, anche senza materialmente effettuare l'esperimento, perché l'esame dell'oggetto “dado” ci consente di sapere quali essi sono.²⁰ Ma tale possibilità riguarda soltanto un limitato sottoinsieme dell'universo di tutti i casi reali,

¹⁹ Da non confondersi con il Principio di Ration Sufficiente di Leibniz, secondo il quale “nulla accade senza che vi sia ragione perché accada proprio così invece che altrimenti”.

²⁰ Si consideri, però, l'osservazione precedente relativa alla possibilità della caduta del dado di taglio.

nella maggior parte dei quali, invece, non è applicabile la definizione classica di probabilità.

In molte situazioni reali, infatti, l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità non può essere generato da un esperimento virtuale, ma, al contrario, può manifestarsi soltanto "a posteriori", con l'esperienza effettiva. Occorre, dunque, compiere materialmente gli esperimenti che generano l'evento. Utilizzando i risultati ottenuti, viene spontaneo calcolare il rapporto fra il numero di esiti positivi dell'esperimento (quelli in cui si presenta l'evento atteso) e il numero totale delle prove, cioè la frequenza relativa dell'evento, rapporto che caratterizza bene la "presenza" di questo nella totalità degli esperimenti compiuti. In situazioni di questo tipo si è tentati di riproporre l'applicazione della definizione classica identificare i casi favorevoli con gli esiti positivi delle prove e i casi possibili con le prove effettuate. In questi casi, però, c'è una sostanziale differenza rispetto alle situazioni in cui è applicabile la definizione classica: ora infatti i casi possibili sarebbero "soltanto" le prove finora effettuate, che non esauriscono tutte quelle effettuabili, che sono infinite, e analogamente i casi favorevoli sarebbero "soltanto" gli esperimenti finora effettuati che hanno generato l'evento atteso. In altre parole, nella definizione classica di probabilità gli eventi favorevoli e possibili sono "tutti" quelli che effettivamente sono favorevoli e possibili; nelle nuove situazioni investigate, invece, essi sono quelli "finora esperiti" e quindi risultano variabili secondo il numero di prove effettuate, che è necessariamente una scelta dello sperimentatore. Qualunque sia il numero di esperimenti da questi deciso, le prove non ancora fatte, ma fattibili, costituiscono altrettanti casi possibili, fra i quali potranno esserci altri casi fa-

vorevoli. Pertanto, se assumessimo tout court come probabilità la frequenza relativa dell'evento, avremmo una probabilità variabile perché dipendente dal numero di esperimenti effettuati, che è variabile, contrariamente all'unicità del valore calcolato con la definizione classica. Ciò che possiamo investigare è, invece, se esistono condizioni che autorizzano tale assunzione entro un grado di approssimazione accettabile, consapevoli quindi che dovremmo accontentarci di un valore "approssimativo" di probabilità, che non può essere rigorosamente unico come nella definizione classica.

A tale scopo, occorre prendere in considerazione i casi in cui è calcolabile la probabilità per partizione, effettuando "realmente" un certo numero di prove. Consideriamo il solito lancio di una moneta. Ebbene, effettuando più lanci della moneta, "cercando" di mantenere inalterate le condizioni sotto cui essi avvengono, si può osservare che all'aumentare del loro numero, la frequenza relativa dell'evento "croce" (e lo stesso vale per l'evento complementare "testa") tende a stabilizzarsi attorno a un valore molto prossimo alla probabilità (0,5 o 50%) calcolata con la definizione classica. Tale tipo di esperimento si può ripetere in tutti i casi ai quali è applicabile quest'ultima. Eseguendo successive serie di esperimenti, in ciascuna delle quali si aumenta progressivamente il numero di esperimenti, si osserva che all'aumentare del numero di questi, il valore della frequenza relativa dell'evento considerato tende a stabilizzarsi attorno a uno stesso valore: è la cosiddetta "legge empirica del caso" o "legge empirica dei grandi numeri". Tale legge, spesso, erroneamente è confusa con il teorema di Bernoulli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \binom{n}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

che asserisce semplicemente che aumentando indefinitamente il numero N di prove, tende alla certezza ($P = 1$) che la probabilità della frequenza relativa dell'evento scarti dalla probabilità classica p per meno di un numero positivo ε comunque piccolo. Questo teorema, qualche volta, viene erroneamente utilizzato come anello di congiunzione fra le definizioni classica e frequentista di probabilità, come è stato acutamente criticato da Bruno de Finetti:

... non si sfugge al dilemma che la stessa cosa non si può assumere prima per definizione e poi dimostrare come teorema, né alla contraddizione di una definizione che assumerebbe una cosa certa mentre il teorema afferma che è soltanto molto probabile.

L'unico anello di congiunzione plausibile fra probabilità per partizione e frequenza relativa è invece la semplice e più onesta legge empirica del caso, in virtù della quale risulta "plausibile" ribaltare i termini dell'osservazione sperimentale, e "assumere" come probabilità la frequenza relativa dell'evento determinata per un numero "abbastanza grande" di esperimenti, in tutti quei casi in cui è possibile "ripetere a pari condizioni" l'esperimento. Questo valore limite, nel senso non matematico ma sperimentale, viene assunto come valore della probabilità nella definizione frequentista. Esso, non essendo un "limite" in senso matematico, non è determinabile tramite operazioni matematiche, bensì tramite un numero teoricamente infinito di esperimenti, in aperto contrasto con il modo operativo sperimentale che conosce soltanto il "finito",

per cui in pratica è determinabile con un “opportuno” numero finito di esperimenti.

Secondo la definizione frequentista dunque,²¹ “ la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si è verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande”. Quale debba essere in pratica tale numero non è determinabile a priori, ma è solo lo sperimentatore che può definirlo, in base alla legge empirica dei grandi numeri, che lo autorizza a porre fine all’esecuzione degli esperimenti quando rileva che la frequenza relativa dell’evento presenta oscillazioni sempre più piccole: il valore medio di queste è assunto come valore della probabilità (figura 3). E tale decisione non può che essere soggettiva, approssimativa e variabile da sperimentatore a sperimentatore e, anche per uno stesso sperimentatore, ancora variabile da una serie di esperimenti all’altra (perché, per esempio, non è mai possibile mantenere perfettamente identiche le condizioni sotto cui avviene la prova, per cui il numero di esperimenti oltre il quale le oscillazioni della frequenza relativa diventano “sempre più piccole” cambierà per lo stesso sperimentatore da una serie di esperimenti all’altra). La probabilità, in tale definizione, dipende dunque non soltanto dal numero di esperimenti fatti ma anche dalla valutazione di identità delle condizioni operative, per cui non è univocamente determinabile ed è affetta da errore sperimentale, come la misura di una qualunque altra grandezza fisica.

²¹ Proposta da Richard von Mises, Hans Reichenbach e Guido Castelnuovo agli inizi del secolo XX.

La definizione frequentista, essendo fondata su un'operatività sperimentale, non richiede che gli esiti dell'esperimento siano equiprobabili e quindi ha il pregio di superare il limite fondamentale di quella classica, per la quale invece tale requisito è indispensabile. È opportuno, però, rile-

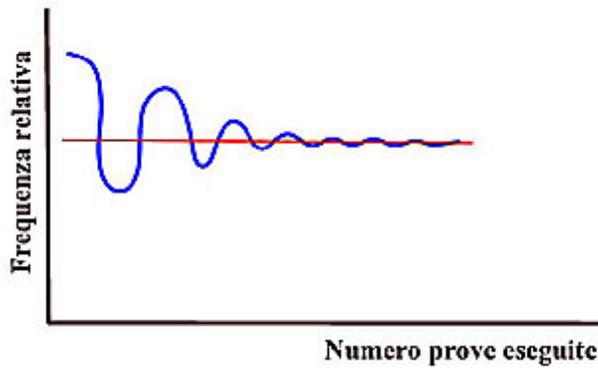


Figura 1 - Frequenza relativa di un evento versus numero di prove eseguite.

vare che la legge dei grandi numeri giustifica, sperimentalmente, di assumere la frequenza relativa come probabilità nei casi per i quali la simmetria (vale a dire l'equiprobabilità) degli esiti possibili renderebbe applicabile la definizione classica. Pertanto, l'estensione della definizione frequentista ai casi in cui quella di Laplace non è applicabile è un'estrapolazione che ha una certa arbitrarietà. Inoltre, stando sempre alle sue giustificazioni "sperimentali", la definizione frequentista dovrebbe essere applicata soltanto ad eventi ripetibili, ovvero generati da esperimenti ripetuti esattamente nelle stesse condizioni quante volte si voglia. Tuttavia, in pratica, specialmente in sta-

tistica, la frequenza relativa è assunta come probabilità di eventi che non hanno tali caratteristiche, bensì hanno la connotazione di “accadimenti” avvenuti nel passato e non riproducibili quante volte si voglia “in laboratorio”, nel presente o nel futuro. Un esempio servirà a chiarire quanto detto. Volendo dare oggi una stima della probabilità alla mortalità scolastica nel primo biennio della facoltà d’ingegneria, lo statistico otterrà tale valore come frequenza relativa dell’evento “abbandono degli studi da parte di studenti d’ingegneria entro il secondo anno”, riferendosi ad un determinato periodo del passato, per esempio dal 1990 al 2018. A tale scopo, prenderà in considerazione il numero di iscritti a ingegneria in quel periodo e dividerà per esso il numero di studenti che nello stesso periodo hanno abbandonato gli studi entro il secondo anno. È vero che potrebbe prendere in considerazione altri periodi di tempo, il che equivarrebbe a scegliere in qualche modo il numero di “esperimenti” (che in realtà sono invece accadimenti), ma la sua è sempre una scelta condizionata, poiché non può scegliere a piacere il numero di anni cui riferire la sua indagine, anzi può capitargli di avere a disposizione un solo campione di dati numericamente non rappresentativo. In tutte queste situazioni, si fa una forzatura, utilizzando come probabilità la frequenza relativa di eventi per loro natura legati esclusivamente al passato e quindi non ripetibili.

5.3 - La probabilità assiomatica

Alcuni matematici, sotto la spinta dell’assiomatismo, hanno proposto una definizione assiomatica della probabilità fondata su tre definizioni e tre assiomi. Le definizioni sono:

1. una prova è l'esecuzione di un esperimento "ripetibile", nel senso che deve essere possibile ripeterlo nelle stesse condizioni, e con esito "aleatorio", vale a dire non prevedibile con certezza, qualunque possono essere i nostri sforzi d'indagine;
2. l'insieme dei possibili esiti di una prova si dice universo o spazio campione U ;
3. un evento E è un qualsiasi sottoinsieme dell'universo U . Lo spazio degli eventi S è l'insieme degli eventi d'interesse, e quindi, in generale, è un insieme di insiemi. Per esempio, con riferimento al lancio dei dadi, i cui esiti possibili sono testa (T) e croce (C), e quindi è $U = \{T, C\}$, si può assumere come spazio degli eventi S l'insieme delle parti $\{T\}$, $\{C\}$, $\{\emptyset\}$, $\{T, C\}$ dell'universo U che comprende anche l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$ e U stesso.²²

In particolare se E è costituito da un solo esito si dice evento elementare, mentre se è costituito da più esiti, si dice evento composto. L'universo U è anche l'evento certo, poiché è costituito da tutti gli esiti possibili. Ad ogni esito si può associare un punto di uno spazio euclideo a n dimensioni; U è pertanto lo spazio i cui punti rappresentano tutti e soli gli esiti possibili

²² Il primo a esporre una teoria assiomatica coerente e sistematica della probabilità è stato il matematico russo Andrei Nicolaievic Kolmogorov nel 1933, con la sua monografia *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung (Fondamenti del calcolo delle probabilità)*, soddisfacendo in parte le richieste di David Hilbert di dare una fondazione assiomatica alla teoria della probabilità.

di una prova, mentre un evento E è un sottoinsieme di tale spazio, cioè è costituito da una parte dei punti di U , potendo ridursi a un solo punto nel caso di evento elementare.

Per fissare le idee, si pensi al lancio di un dado, di due dadi, di tre dadi, ...di n dadi: l'esito della prova è rispettivamente il numero, la coppia di numeri, la terna di numeri ...l'ennupla di numeri delle facce dei dadi rivolte verso l'alto. Dunque, ad ogni esito si può associare un numero, una coppia di numeri, una terna di numeri, una ennupla di numeri, che possono essere intesi come coordinate di uno spazio euclideo a 1, 2, 3, ... n dimensioni. Se, per esempio, nel lancio di un dado l'evento è l'uscita del numero 2, si ha l'evento elementare $E = \{2\}$, mentre se l'evento considerato è l'uscita di un numero pari si ha l'evento composto $E = \{2, 4, 6\}$, vale a dire l'evento occorre se l'esito del lancio del dado è uno dei numeri 2, 4, 6. Nel caso di eventi composti, due eventi si dicono compatibili quando la loro intersezione è un insieme non vuoto: $E1 \cap E2 \neq \emptyset$ (quindi hanno almeno un evento semplice in comune), incompatibili quando invece la loro intersezione è un insieme vuoto: $E1 \cap E2 = \emptyset$ (quindi non hanno alcun evento semplice in comune).

Due eventi incompatibili sono, per esempio, gli eventi testa e croce nel lancio di un dado, l'uno escludendo l'altro; due eventi compatibili, invece, sono l'uscita di una figura e di una carta di cuori nell'estrazione di una carta da un mazzo, potendo una carta di cuori essere anche una figura.

La probabilità assiomatica è una funzione d'insieme P definita sullo spazio degli eventi S , ovvero è una legge in grado di assegnare ad ogni evento E appartenente ad S un numero che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov:

1. la probabilità di un evento E è un numero reale non negativo: $0 \leq P(E) \in \mathbb{R} \leq 1$;
2. la probabilità di un evento certo è 1: $P(U) = 1$ (U è per definizione l'evento certo);
3. la probabilità di un evento composto dagli eventi semplici E_1 e E_2 incompatibili ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) è la somma delle probabilità di E_1 e di E_2 : $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Così introdotta, la probabilità è formalmente definita come misura di un insieme, e rientra pertanto come caso particolare nella più generale Teoria della misura, potendo essere interpretata come misura normalizzata $P(E)$ dell'insieme-evento E (il suo valore è un numero compreso tra 0 ed 1, estremi inclusi).

L'impostazione assiomatica della probabilità è accattivante per il suo rigore formale, con cui è possibile dedurre tutta la teoria della probabilità dalle premesse (definizioni, assiomi), soddisfacendo pienamente lo spirito deduttivo del matematico, ma ha un grosso difetto: non definisce cos'è in realtà la probabilità. Infatti, come in qualunque teoria assiomatica, la probabilità non è definita nella sua natura, ma è definita soltanto implicitamente come "un" (e non "quel") numero reale non negativo che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov. Tale numero dipende dalla funzione d'insieme scelta, in altri termini il valore della probabilità assiomatica dipende dal criterio scelto per la misura dell'insieme-evento. Insomma, si ha una situazione analoga alla geometria euclidea, in cui il punto, la retta e il piano non sono definiti esplicitamente, ma implici-

tamente attraverso le loro mutue relazioni (assiomi), per cui, come paradossalmente diceva David Hilbert, i punti, le rette e i piani potrebbero in realtà essere anche bicchieri, posate o quant'altro, purché soddisfacenti gli assiomi euclidei.

La teoria assiomatica della probabilità, oltre il rigore logico, ha un altro pregio. Riportando le considerazioni sugli eventi a calcoli sugli insiemi corrispondenti, attraverso il concetto di probabilità come misura normalizzata dell'insieme-evento, consente la determinazione della probabilità in casi in cui non è possibile applicare la definizione classica, come per esempio quando è infinito non numerabile sia il numero degli esiti possibili sia il numero di quelli favorevoli. In altre parole, la probabilità assiomatica può fornire una risposta a quesiti del tipo: quale è la probabilità che un ago, imperniato ad una sua estremità nel centro di un cerchio, cada entro un determinato settore di questo, per esempio di 30° ? È chiaro, infatti, che assumendo come eventi elementari le posizioni assunte dall'ago quando si ferma, sia quelle entro l'intero cerchio (eventi possibili) sia quelle entro il settore considerato di 30° (eventi favorevoli) sono infinite non numerabili, perché costituiscono un *infinitum continuum*: la probabilità classica sarebbe data quindi dal rapporto ∞ / ∞ che è una forma indeterminata. Invece, con la teoria assiomatica, la probabilità può essere assunta come la misura normalizzata dell'insieme degli esiti favorevoli, vale a dire il rapporto fra la misura del settore entro cui ci si aspetta che l'ago cada (30°) e la misura dell'angolo giro corrispondente all'intero cerchio (360°), che costituisce l'universo U, e quindi $P = 30^\circ / 360^\circ = 8,3\%$

6 - Le critiche della scuola soggettivista alla probabilità oggettiva

Le definizioni di probabilità fin qui date, pur risultando proficue in numerosi casi, offrono il fianco a varie critiche:

1. sono ottenute sulla base unicamente di eventi già accaduti o ripetibili e quindi non sono applicabili a quella stragrande maggioranza di casi in cui gli eventi di cui vogliamo stimare la probabilità non sono mai accaduti oppure sono per loro stessa natura irripetibili. Per esempio, è palese a tutti che con nessuna delle definizioni finora date (classica, frequentista, assiomatica) è possibile stabilire la probabilità di eventi del tipo: domani ploverà, il prossimo presidente della repubblica italiana sarà una donna, nel 2020 nasceranno gli Stati Uniti d'Europa, il prossimo papa sarà africano. Di fatto, è relativamente a casi di questo tipo che nella vita di tutti i giorni siamo maggiormente stimolati a esprimere una nostra "ragionevole" previsione e quindi a stabilirne la probabilità;
2. la ripetibilità degli esperimenti è un'utopia, perché in realtà nessun esperimento è perfettamente ripetibile in quanto non è possibile mantenere rigorosamente identiche le condizioni sotto cui è ripetuto;
3. le definizioni per partizione (classica) e in base alla frequenza relativa non sono vere definizioni, ma metodi per ottenere il valore della probabilità,

sono quindi tutt'al più definizioni operative e non dicono nulla sulla vera natura della probabilità; la definizione assiomatica, infine, non è operativa ed è una definizione implicita per assiomi, che nulla quindi può dire su "cosa è" la probabilità;

4. ad onta della loro pretesa oggettività, sono in esse presenti elementi soggettivi che dipendono dal soggetto che valuta la probabilità: la valutazione della equiprobabilità degli eventi possibili nella definizione classica, la scelta del numero di esperimenti da effettuare e la valutazione della identità delle condizioni sperimentali in quella frequentista, la scelta della funzione d'insieme che fornisce la misura dell'insieme-evento nella definizione assiomatica;
5. si allontanano dal senso comune originario di probabilità, che è ben evidenziato invece nelle definizioni "non matematiche" del vocabolario Zingarelli, che sottintendono un punto di vista squisitamente soggettivo che senz'altro riscuote il consenso dell'uomo comune.

Bruno de Finetti critica il "presunto" rigorismo e oggettivismo delle vecchie definizioni di probabilità (de Finetti B., 1974b):

Esse non definiscono nulla; peggio ancora nascondono, con sproloqui e arcane definizioni, colme di fumo e di vuoto, il vero senso in cui il termine è usato dall'ultimo uomo della strada... La cosiddetta definizione basata su partizioni in casi

ugualmente probabili richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di uguale probabilità. E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.

E per lui il concetto di probabilità non può avere un valore oggettivo (de Finetti B., 1931, pp. 93-94):

D'ora in avanti useremo le parole oggettivo e soggettivo nel senso corrispondente alla concezione empirica, che mantiene anche per noi un significato ben definito. Un empirista direbbe che sono oggettivi i fatti, che hanno un valore oggettivo quelle proposizioni che sono vere o false a seconda che un evento ben determinato si verifica o non si verifica, quelle proposizioni la cui verità o falsità si riduce a una pura e semplice constatazione che ci è imposta. Ora poco importa, dal punto di vista formale, che io creda effettivamente che tali fatti costituiscano una realtà esterna, o li consideri soltanto delle mie sensazioni; resta questo di in discutibile: che, una proposizione siffatta, so sempre in quali circostanze io debbo dire che è vera e in quali altre che è falsa. Che io la dica vera o falsa, ciò non implica da parte mia nessuna manifestazione affettiva, ciò non significa un giudizio, ciò non ha nessun valore concettuale. [...] Negando alla probabilità ogni valore oggettivo, intendo dunque affermare che, comunque un individuo valuti la probabilità di un dato evento, nessun'esperienza potrà dargli ragione e nessuna potrà dargli torto, e, più in generale, nessun criterio può immaginarsi che doni un senso qualunque, obbiettivo, alla distinzione che si vorrebbe qui stabilire fra ragione e torto.

[...]Cosa vogliamo dire, nel linguaggio ordinario, dicendo che un avvenimento è più o meno probabile? [...]Vogliamo dire che ci sentiamo di fare un grado più o meno grande d'affidamento sull'eventualità che esso abbia ad avverarsi.

La valutazione del grado di affidamento nell'avverarsi di un evento è sempre incerta (de Finetti B., 1989, Capitolo "La previsione: le sue leggi logiche, le sue fonti soggettive", p. 90):

Ma ogni evento può solo accadere o non accadere e in nessuno dei due casi è possibile decidere con quale grado di dubbio sarebbe stato «ragionevole» o «giusto» aspettarsi l'evento prima di sapere se è accaduto o meno.

Ed è sempre relativa, dipendendo dal soggetto e dalle informazioni da lui possedute nel momento in cui valuta il grado di affidamento nell'avverarsi dell'evento. Il caso di eventi equiprobabili, nell'ottica della probabilità oggettiva sarebbe l'ammissione di una natura semideterministica (de Finetti B., 1931, pp. 12-13):

Il concetto di probabilità è relativo: il fatto che due casi ci appaiano ugualmente probabili dipende dal gruppo di circostanze che ci sono note od ignote. Basta questo per distruggere il feticcio di una probabilità 'vera', esistente nel "regno di tenebre e di mistero" della realtà ultrasensibile, per abbattere una specie di semi-determinismo che considera due casi ugualmente probabili come due casi di fronte a cui la natura è ancor libera di scegliere, e che, non presentando nessuna caratteristica per farsi preferire, mettono la natura nell'atroce imbarazzo dell'asino di Buridano. Sembra impossibile. Ma qualcuno pensa proprio così: che la probabilità dipenda dal fatto che un evento non è ancora 'deciso'.

A conclusione delle sue riflessioni critiche sulla probabilità oggettiva, de Finetti diede una nuova definizione di probabilità, con le vere caratteristiche di una definizione, in contrapposizione alle pseudodefinitioni della probabilità oggettiva precedentemente viste: «grado di fiducia di un dato soggetto, in

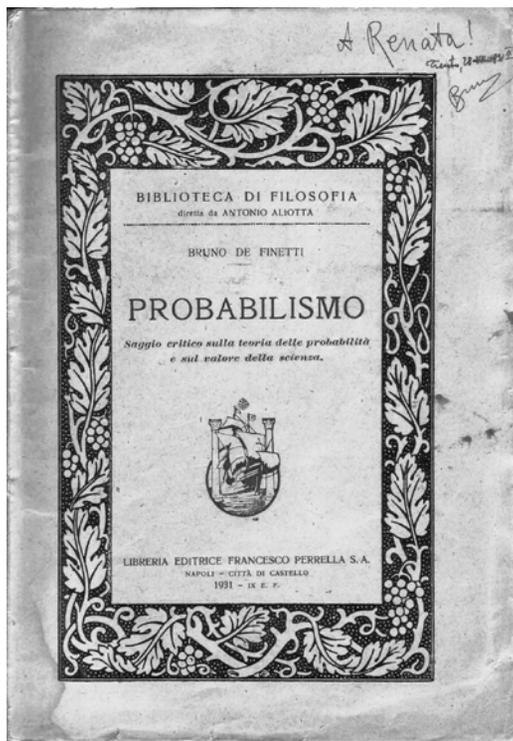


Fig. 2 – Bruno de Finetti, *Probabilismo* con la dedica di Bruno de Finetti alla moglie Renata (1930). Fotografia tratta da Fulvia de Finetti e Luca Nicotra, *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Belforte, 2008.

un dato istante e con un dato insieme di informazioni, riguardo al verificarsi di un dato evento» (de Finetti B., 1970, vol.1. p. 6) . Formalmente quindi potremmo scrivere: $P_E(S,t,I)$ dove P_E è la probabilità di un evento, S è un soggetto “giudicante”, t il tempo, I l’insieme di informazioni coerenti riguardo l’evento E .

Questa definizione della probabilità riporta il significato di probabilità alla comune accezione dell’uomo della strada.

La definizione soggettiva è (finalmente!) una definizione nominale e non “operativa”, nel senso che non indica una procedura specifica per assegnare alla probabilità un valore numerico, salvo che dovrà essere un valore, compreso fra 0 e 1, tanto più vicino a uno quanto maggiore è la nostra convinzione che l’evento si verifichi e tanto più vicino a zero quanto maggiore è la nostra convinzione che l’evento non si verifichi. Per assegnare un valore numerico o misura alla probabilità, de Finetti ricorre alle sue origini nel gioco d’azzardo e applica lo schema delle scommesse: il valore assegnato alla probabilità di un evento è il rapporto tra la “posta” di chi valuta la probabilità e la somma delle “poste” dei due scommettitori.

Così, per esempio, se Giovanni è disposto a scommettere 3 contro 1 che il cavallo Destriero vincerà la prossima corsa, significa che il suo avversario è invece disposto a scommettere 1 contro 3 che quel cavallo vincerà: la probabilità che Giovanni attribuisce alla vittoria di Destriero, quindi, è per lui, $\frac{3}{4}$, vale a dire il 75%, mentre per il suo avversario è $\frac{1}{4}$, pari al 25%. In altri termini la scuola soggettivista di de Finetti e Ramsey, provocatoriamente, assegna alla probabilità di un evento il valore numerico pari «alla massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria». La “posta” impegnata nella definizione di de Finetti può essere determinata in svariati modi (simulazioni al computer, calcoli scientifici, calcoli combinatori, frequenza relativa, valutazioni puramente intuitive, rapporto casi favorevoli/casi possibili, ecc.), ma sempre in maniera “equa e coe-

rente con le informazioni” possedute dal soggetto che valuta la probabilità.²³

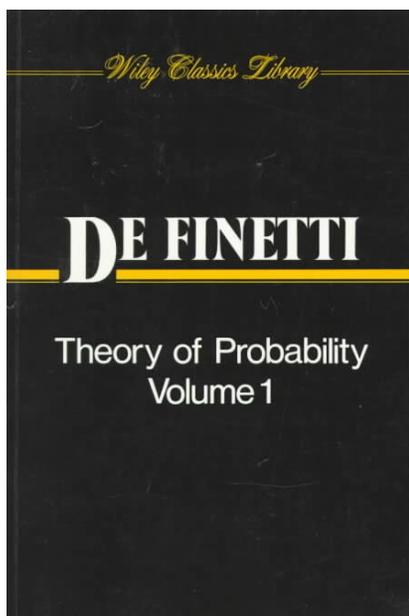
La definizione soggettivista di probabilità, dunque, non rigetta le precedenti definizioni, ma le recupera sottraendole all’errata pretesa di oggettivismo, per utilizzarle più ragionevolmente e realisticamente in ottica soggettivista, come scelte non necessarie, bensì ritenute utili da chi deve dare un valore alla probabilità, in base alle “sue” informazioni o al “suo” intuito. Il soggettivismo in essa presente non è pertanto “arbitrarietà”, come a volte è frainteso da alcuni, ma l’espressione dell’opinione del soggetto che valuta la probabilità, coerente con le informazioni, di qualunque tipo, di cui egli dispone sull’evento, comprendendo fra esse anche la conoscenza di diverse valutazioni della probabilità dell’evento espresse da altri soggetti o, perfino, la mancanza di qualunque informazione.

Le tecniche di calcolo messe a punto da Bruno de Finetti, grazie al suo teorema di scambiabilità, sono tali da consentire di ricavare, in maniera coerente con le premesse, il valore della probabilità e pertanto sono “oggettive”, pur essendo le premesse stesse soggettive, in accordo con l’osservazione sulla sostanziale differenza fra il calcolo delle probabilità, che ha valore oggettivo, e i metodi per la definizione di probabilità (teoria della probabilità), che possono variare. La definizione di probabilità dello Zingarelli: «La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile», che a prima vista può sembrare poco scientifica, contiene, invece, proprio i tre elementi essenziali che caratterizzano la definizione più

²³ Per il significato della frase «equa e coerente con le informazioni» si rimanda alle trattazioni specialistiche sulla probabilità soggettiva.

generale di probabilità data da de Finetti: misura, giudizio e realizzabilità.

La definizione definettiana ha il pregio innegabile di fornire “sempre” un valore della probabilità, anche nei casi in cui l’evento non è ripetibile, non è mai accaduto o le informazioni



**Fig. 3 – Il primo volume di
Teoria della Probabilità
nell’edizione inglese.**

disponibili sono molto scarse o inesistenti. Inoltre, è notevole constatare che esistono casi in cui alcuni eventi sono composti di altri ai quali, in base alle precedenti definizioni “oggettive”, non sarebbe possibile assegnare alcun valore di probabilità e che, d’altra parte, la probabilità di tali eventi complessi risulta poco influenzata dalle probabilità assegnate agli eventi componenti. Di conseguenza, non ha molto senso discutere sulla “attendibilità” dei valori di probabilità assegnati agli eventi elemen-

tari, mentre è essenziale prendere l’iniziativa di assegnare in qualche modo tali valori. L’approccio soggettivista consente di sbloccare brillantemente tali situazioni, applicando il calcolo delle probabilità laddove sarebbe impossibile con le altre definizioni di probabilità. Bruno de Finetti applicò le sue vedute probabilistiche anche in psicologia, a molti aspetti dell’istinto,

del subconscio e dell'intuizione, ai quali riconobbe sempre un ruolo decisivo nel processo della scoperta matematica. Una curiosità: egli pose in evidenza, per esempio, la manifestazione di un certo senso della probabilità da parte dei cinghiali quando, inseguiti dai cacciatori, cercano di trovare una via di scampo.

Bibliografia

BALDINI Massimo (1993). *Aforismi, novelle e profezie di Leonardo da Vinci*. Roma: Newton Compton, ed. web: www.liber.it.

DE FINETTI Bruno (1931a). Probabilismo. In: «*Logos*», Napoli: Perrella.

DE FINETTI Bruno (1931b). "Sul significato soggettivo della probabilità". In: «*Fundamenta Mathematicae*», Warsawa, 1931, pp. 298, 299, 300, 301, 302, 304, 305.

DE FINETTI Bruno (1931c). "Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico". In: "Atti della XIX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze" (Bolzano- Trento 1930), SIPS, Roma, 1931, p.44.

DE FINETTI Bruno (1937). "Pirandello Maestro di Logica". In: «*Quadrivio*» 5-12-1937 ; "Luigi Pirandello, maestro di logica". In: "Il Brennero", 9-12-1937.

DE FINETTI Bruno (1966). "Sull'insegnamento della matematica". In «*Homo Faber*», anno XVII n.164, 1966.

DE FINETTI Bruno (1974a). "Il ruolo delle regioni negli sforzi per il rinnovamento della scuola". Appendice In: «*Periodico di Matematiche*», 50, n. 3 (1974).

DE FINETTI Bruno (1974b), "Interventi al Convegno della C.I.I.M.", Viareggio 24-26 ottobre 1974. In «*Notiziario del Bollettino della Unione Matematica*», dicembre 1974.

DE FINETTI Bruno (1978). "Rischi di una 'matematica di base 'assiomatica'". In: «*Tuttoscuola*», Anno IV, n. 62 4 - 10-1978.

DE FINETTI Bruno (1989). *La logica dell'incerto*, a cura di Marco Mondadori. Milano: Il Saggiatore.

DESCARTES Renato (1961). *Discorso sul metodo*. Traduzione con introduzione, note e commento filosofico a cura di Giuseppe Saitta. Settima edizione. Bologna: Zanichelli.

DESCARTES Renato (1961). *Meditazioni filosofiche*. Introduzione, traduzione e note a cura di Guido De Giuli. Terza ristampa. Quarta edizione. Torino: Paravia.

ENRIQUES Federigo (1938). *Le matematiche nella scuola e nella cultura. Lezioni pubblicate a cura di Attilio Frajese*. Bologna: Zanichelli.

EINSTEIN Albert (1952). "La questione del metodo". In: *Come io vedo il mondo*, Milano: Giachini.

GALILEI Galileo (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

BRUNO Giordano (1585). *De gli eroici furori*. Parigi: Antonio Baio.

LEONARDO DA VINCI (2004). *Aforismi*. Prato: Giunti Editore.

LOMBARDO RADICE Lucio (1974). "Il punto di vista matematico". In: «*Periodico di Matematiche*», serie V, Volume 50, n. 5-6 ottobre 1974.

NICOTRA Luca (2007). "Bruno de Finetti scrive a Adriano Tilgher". In «*Lettera Matematica Pristem*» n. 64, luglio 2007. Milano: Springer.

DE FINETTI Fulvia, NICOTRA Luca (2008). *Bruno de Finetti. Un matematico scomodo*. Livorno:Belforte.

NICOTRA Luca (2015). "Il ruolo dell'Islàm nello sviluppo delle scienze". In «*ArteScienza*», n.4, dicembre 2015, Roma http://www.assculturale-arte-scienza.it/Rivista%20ArteScienza/ArteScienza_N4/Luca%20Nicotra/L_Nicotra_ArteScienzaN4_91-138.pdf.

NICOTRA Luca (2019). "Leonardo da Vinci: artista-scienziato o scienziato-artista?". In *Ugo Locatelli. Così il tempo presente. Omaggio al pensiero di Leonardo* (a cura di Carlo Francou). Roma:UniversItalia, 2019, pp. 72-87.

POINCARÉ' Henry (1950). *La scienza e l'ipotesi*. Firenze: La Nuova Italia, 1950.