Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (3) settembre 2022, pp.83-140

Proprietà degli insiemi completi del IV ordine

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.090

Sunto*: Nell'articolo: ''Insiemi completi del terzo ordine'' di Francia F., pubblicato sul Periodico di matematica, Vol. I(1-2), sono esposte le condizioni di completezza di un insieme ternario di punti materiali posizionati su una retta; da quello studio risulta che la completezza di un insieme ternario deriva dalle distanze intercorrenti fra i punti dell'insieme di sostegno e le relative masse. Anche nel presente articolo si ricercano le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali che, a differenza del caso precedente, sono posizionati sul piano. I risultati di questo studio sono formalmente analoghi a quelli precedentemente citati: le condizioni di completezza di un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π derivano dalla relazione intercorrente fra le masse degli elementi dell'insieme completo I e le aree dei triangoli i cui vertici sono i punti di sostegno di J.*

Parole Chiave*: Insiemi di punti materiali eqivalenti, Quadrato di un insieme di punti materiali.*

Abstract*: In the article: "Complete sets of the third order"' by Francia F., published in the Periodical of Mathematics, Vol. I(1-2), are exposed the conditions of completeness of a ternary set of material points placed on a straight line; from that study it results that the completeness of a ternary set derives from the distances between the points of the set and their masses. Also in the present paper, we search for the conditions of completeness of a set of material points which, unlike the previous case, are positioned on the plane. The results of this study are* *formally analogous to those previously mentioned: the conditions of completeness of a quaternary set containing triads of unaligned points belonging to the plane π are derived from the relation between the masses of the elements of the complete set I and the areas of the triangles whose vertices are the support points of J.*

Keywords: *Eqivalent sets of material points, Square of a set of material points.*

1 – Cenni sugli insiemi quaternari

Nota 1: Per rendere più agevole la lettura del presente articolo, evitando consultazioni di lavori pregressi, sono richiamati, in modo sommario, alcuni enunciati di teoremi e alcune definizioni contenute nell'articolo: "Insiemi del IV ordine appartenenti al piano".

Sia J un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano π. Siano (X,Y) e (W,Z) gli elementi di una qualsiasi partizione di J in coppie di punti; siano r e t le rette passanti , rispettivamente, per (X,Y) e (W,Z). Fra le partizioni consideriamo quelle contenenti coppie che individuano rette r e t con intersezione H (escludiamo coppie appartenenti a rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Caso a)

Se il punto H è interno ai segmenti [X,Y] e [W,Z], diciamo che i due insiemi ternari (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di J= (X,Y,W,Z) sono esterni (o aderenti) (fig.1).I segmenti [X,Y] e [W,Z] sono detti diagonali. Il poligono P(J) è detto quadrilatero.

Caso b)

Se H è esterno ai segmenti [X,Y] e [W,Z] diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di J sono esterni (o aderenti) all'insieme (fig.2).

Anche in questo caso P(J) è detto quadrilatero

Caso c)

Se H è esterno al segmento [X,Y] ed interno a [W,Z] (o viceversa) diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni; in particolare (X,H,Y) è detto coniugato esterno di J e (W,H,Z) è detto coniugato interno di J (o viceversa). In questo caso si dimostra che J contiene un punto interno; i rimanenti punti di J sono esterni (o aderenti) (fig.3)

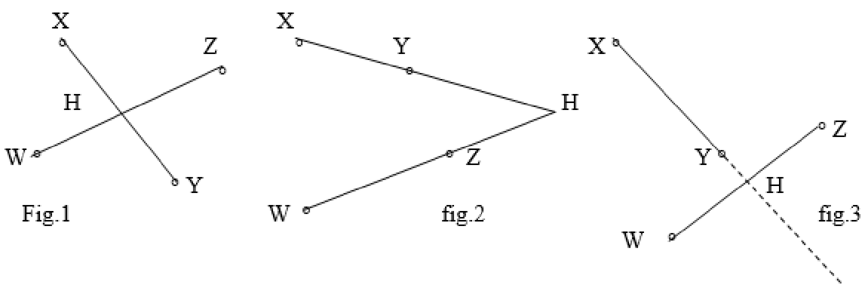
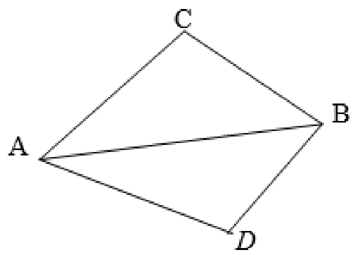
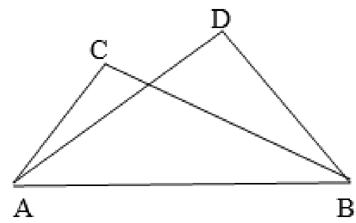


Fig.1 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni.
Fig.2 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni.
Fig.3 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni.

Def.1: Sia (A, B) la coppia di punti comuni ai due insiemi ternari J'= (A,B,C) e J''= (A,B,D) appartenenti al piano π. Se C e D appartengono, rispettivamente, ai semipiani opposti individuati dalla retta r passante per A,B, allora J' e J'' sono detti adiacenti. In caso contrario sono dette non adiacenti.





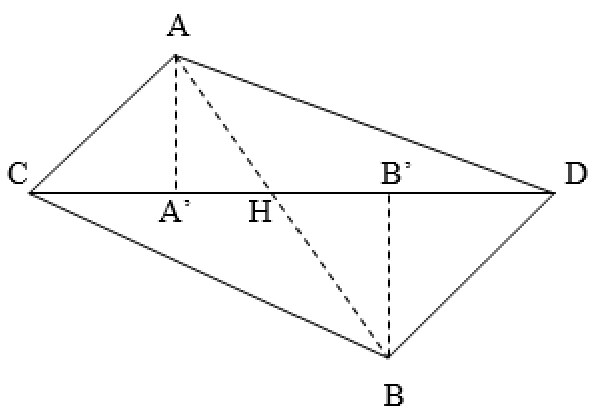
Nota 2: Per procedere più speditamente nell'esposizione che segue introduciamo alcuni simboli.

Con T(J) intendiamo riferirci al triangolo i cui vertici sono i punti dell'insieme J = (A,B,C). Indichiamo con S_{ABC} l'area del triangolo T(J). Analogamente, con Q(J), intendiamo riferirci

ad un quadrilatero i cui vertici sono gli elementi di J= (A,B,C,D). Indichiamo con S_{ABCD} l'area del rettangolo Q(J).

2 – Masse e superfici

TH.1: Sia J = (A,B,C,D) un insieme di punti del piano π. Se (A,H,B) e (C,H,D) sono coniugati interni, allora, l'insieme (S_{CBD} A, S_{DAC} B, – S_{BDA} C, – S_{ACB} D) è completo.



Siano A′ e B′ le proiezioni ortogonali di A e B su [C,D].

Posto $d(A, A') = h_1$ e $d(B, B') = h_2$ si ha :

$S_{ACH} = \frac{1}{2}\, d(C, H) \cdot h_1$ e $S_{AHD} = \frac{1}{2}\, d(H, D) \cdot h_1$ da cui :

$$\frac{S_{ACH}}{d(C, H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H, D)} \qquad (2,1)$$

Analogamente , essendo

$S_{BCH} = \frac{1}{2}\, d(C, H) \cdot h_2$ e $S_{BHD} = \frac{1}{2}\, d(H, D) \cdot h_2$ si ha :

$$\frac{S_{BCH}}{d(C, H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H, D)} \qquad (2,2)$$

Sommando membro a membro la (2,1) e la (2,2), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C, H)} + \frac{S_{BCH}}{d(C, H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H, D)} + \frac{S_{BHD}}{d(H, D)}$$

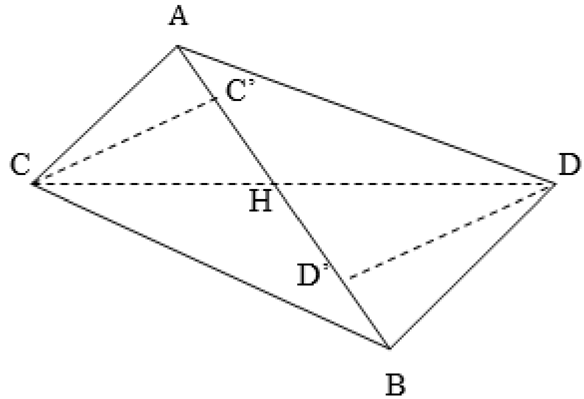
Essendo SACH + SBCH = SACB e SAHD + SBHD = SABD, la precedente relazione diviene:

$$\frac{S_{ACB}}{d(C, H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H, D)}$$

Posto $\frac{S_{ACB}}{d(C,H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H,D)} = \frac{1}{K'}$, *con* $K' \in R^*$, *si ha:*

$$d(C,H) = K' \cdot S_{ACB},\ d(H,D) = K' \cdot S_{ABD},\ d(C,D) = K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \qquad (2,3)$$

Analogamente, siano C′ e D′ le proiezioni ortogonali di C e D su [A,B]. Posto d(C,C′) = h_3, d(D,D′) = h_4, si ha:



$S_{ACH} = \frac{1}{2}$ d(A,H) $\cdot h_3$ e $S_{CHB} = \frac{1}{2}$ d(H,B) $\cdot h_3$, da cui:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} \qquad (2,1')$$

$S_{AHD} = \frac{1}{2}$ d(A,H) $\cdot h_4$ e $S_{BHD} = \frac{1}{2}$ d(H,D) $\cdot h_4$, da cui:

$$\frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)} \qquad (2,2')$$

Sommando membro a membro la (2,1′) e la (2,2′), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} + \frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)}$$

che possiamo riscrivere così:

$$\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)}$$

Posto $\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)} = \frac{1}{K''}$, con K" $\in$ R^*, si ha

$d(A,H) = K'' \cdot S_{ACD}$, $d(H,B) = K'' \cdot S_{CBD}$, $d(A,B) =$
$= K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD})$ (2,3′)

Sostituendo le (2,3) e le (2,3′) negli insiemi completi:

$I' = [d(H,D) \cdot C, - d(C,D) \cdot H, d(C,H) \cdot D]$ e
$I'' = [d(H,B) \cdot A , - d(A,B) \cdot H, d(A,H) \cdot B]$ si ha:

$I' = [K' \cdot S_{ABD} \cdot C , - K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, K' \cdot S_{ACB} \cdot D]$
$I'' = [K'' \cdot S_{CBD} \cdot A , - K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, K'' \cdot S_{ACD} \cdot B]$

Dividendo I′ per K′, I′′per K′′, sottraendo un insieme all'altro, tenendo conto dell'eguaglianza

$(S_{ACB} + S_{ABD}) = (S_{ACD} + S_{CBD})$, si ha: $I = \frac{1}{K''} I'' - \frac{1}{K'} I' =$
$= [S_{CBD} \cdot A, - (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, S_{ACD} \cdot B] -$
$- [S_{ABD} \cdot C , - (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, S_{ACB} \cdot D] =$
$= (S_{CBD} \cdot A, S_{ACD} \cdot B, - S_{ABD} \cdot C, - S_{ACB} \cdot D)$.

TH.2: Siano (A,H,B) e (C,H,D) i coniugati interni dell'insieme quaternario del piano J = (A,B,C,D) contenente terne di punti non allineati. Se $I' = (m \cdot A, n \cdot B, - s \cdot C, - h \cdot D)$ è un insieme completo, con $m ,n, s ,h \in R+$, allora sussistono le seguenti eguaglianze:

$m = K \cdot S_{BCD,}\, n = K \cdot S_{ACD,}\, s = K \cdot S_{BDA,}\, h = K \cdot S_{ABC}$,
con $K \in R^*$. (2,4)

Supponiamo che $I' = (m \cdot A,\ n \cdot B,\ -s \cdot C,\ -h \cdot D)$ sia completo; per il *TH.1*, anche l'insieme
$I = (S_{CBD} \cdot A,\ S_{DAC} \cdot B,\ -S_{BDA} \cdot C,\ -S_{ACB} \cdot D)$ è completo.

Conseguentemente è completo
$I'' = I' - K \cdot I = [(m - K \cdot S_{CBD}) \cdot A,\ (n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B,$
$-(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C,\ -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D\ ]$.

Attribuiamo a K un reale che annulli una qualsiasi massa di I''. Ad esempio, posto:

$K = \frac{m}{S_{CBD}}$, si ha: $(m - K \cdot S_{CBD}) = 0$ e I diviene:

$I''' = [(n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B,\ -(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C,\ -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D\ ]$.

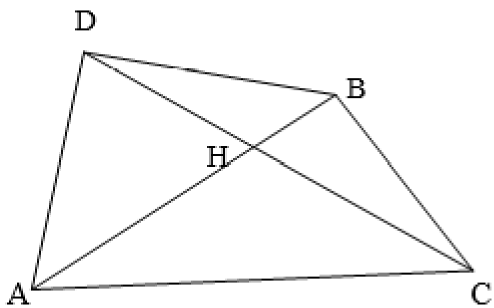
Poiché I''' è un insieme ternario di punti non allineati, essendo completo deve essere improprio: tutte le masse di I''' devono essere nulle:

$(n - K \cdot S_{DAC}) = 0,\ (s - K \cdot S_{BDA}) = 0,\ (h - K \cdot S_{ACB}) = 0.$

Conseguentemente le (2,4) risultano verificate.

Il precedente teorema permette di affermare che il rapporto fra masse di punti materiali di I e I', egualmente posizionati, è costante. Diciamo, allora, che I' appartiene alla stessa classe individuata da I. Gli insiemi I e I' sono detti equivalenti.

TH.3: Sia $I = (m \cdot A,\ n \cdot B,\ -s \cdot C,\ -h \cdot D)$ un insieme quaternario completo con sostegno
$J = (A,B,C,D)$ e masse $m,\ n,\ s,\ h \in R^+$. Il poligono P(J) è un quadrilatero le cui diagonali sono [A,B] [C,D].



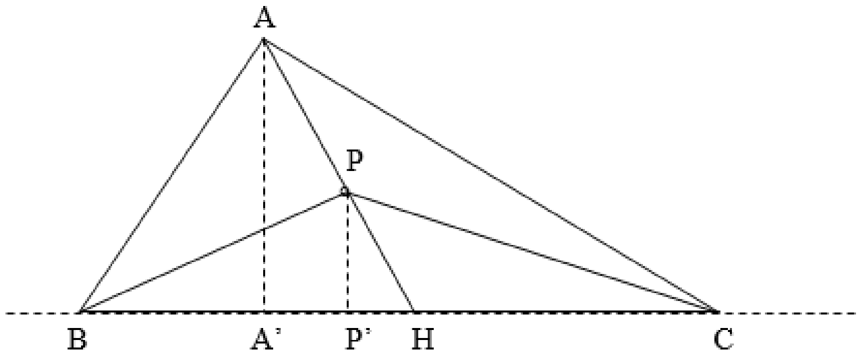
Sia –(m+n) H il complementare di m·A e n·B. Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo I′= [m·A, –(m+n) H, n·b], risulta che il punto H è interno a (A, H, B). Effettuando la differenza I′ – I = I′′, essendo m + n = s + h, si ha:

I′′= [s C, – (m + n) H, h D] = [s C, – (s + h) H, h D].

Anche in questo caso il punto H di J′′= (C, H, D), sostegno dell'insieme completo I′′, è interno a (C, D). Così, essendo gli insiemi di sostegno di I′ = [m · A, – (m + n) H, n · B]
e I′′ = [s C – (s + h) H, h D] coniugati interni, per la nota 1, caso a), P(J) è un quadrilatero e [A,B] , [C,D] sono le diagonali.

TH.4: Sia J = (A,B,C,P) un insieme di punti appartenenti a π. Se (A,P,H) e (B,H,C) sono coniugati alterni, (cioè H è interno di [B,H,C] ed esterno di [A,P,H]), allora, l'insieme

(S_{PCB} ·A, S_{PCA} ·B, S_{ABP} · C, – S_{ABC} · P) è completo.



Siano A′ e P′ le proiezioni ortogonali di A e P su [B,C].
Posto d(A,A′) = h_1 e d(P,P′) = h_2, si ha: $S_{ABH} = \frac{1}{2}$ d(B,H) · h_1 e

$S_{AHC} = \frac{1}{2}$ d(H,C) · h_1 da cui:

$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H,)} \tag{2,5}$$

$S_{PBH} = \frac{1}{2}$ d(B,H) · h_2 e $S_{PCH} = \frac{1}{2}$ d(C,H) · h_2 da cui:

$$\frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{PCH}}{d(C,H)} \tag{2,6}$$

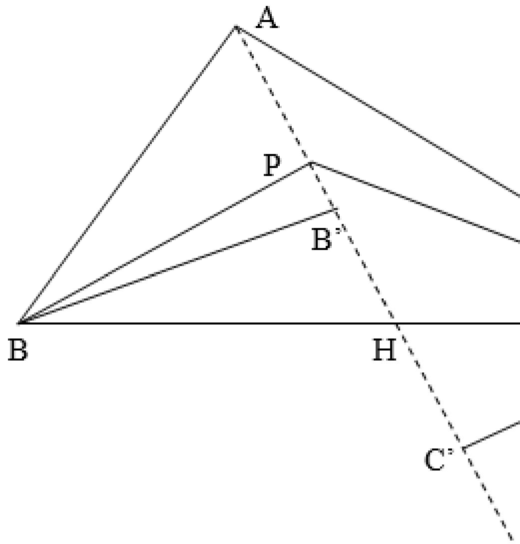
Sottraendo la (2,5) alla (2,6), si ha:

$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} - \frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H,)} - \frac{S_{PCH}}{d(C,H)}.$$

.

Essendo
$S_{ABH} - S_{PBH} = S_{ABP}$ e $S_{AHC} - S_{PCH} = S_{APC}$, la precedente relazione diviene: $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)}$

Posto $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)} = \frac{1}{K'}$, si ha:



$d(B,H)= K' \cdot S_{ABP,}\ d(C,H) = K' \cdot S_{APC,}\ d(B,C) =$ (2,7)
$= K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC})$

Analogamente, siano C' e B' le proiezioni ortogonali di C e B sulla retta s passante per (A,P).

Posto $d(B,B') = h_3$ e $d(C,C') = h_4$; si ha:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_3,\ S_{BPH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_3 \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H,)} \qquad (2,5')$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_4,\ S_{PCH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_4 \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \qquad (2,6')$$

Sommando membro a membro la (2,5′) e la (2,6′), si ha:

$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} + \frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H,)} + \frac{S_{PCH}}{d(P,H)}$ da cui, posto

$$\frac{S_{ABP}+S_{APC}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPC}}{d(P,H,)} = \frac{1}{K''}\text{ , si ha:}$$

$$d(A,P) = K''\cdot(S_{ABP}+S_{APC})\text{ , } d(P,H) = K''\cdot S_{BPC}\text{ ,}$$
$$d(A,H) = K''\cdot(S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC}) \qquad (2,7')$$

Sostituendo le (2,7) e le (2,7′) negli insiemi completi:
$I_1 = [d(H,C)\cdot B\text{ , } - d(B,C)\cdot H\text{, } d(B,H)\cdot C]$ e $I_2 = [d(P,H,)\cdot A\text{ , } - d(A,H)\cdot P\text{, } d(A,P)\cdot H]$ si ha:
$I_1 = [K'\cdot S_{APC}\cdot B, - K'\cdot(S_{ABP}+S_{APC})\cdot H, K'\cdot S_{ABP}\cdot C]$
$I_2=[K'\cdot S_{BPC}\cdot A, -K''\cdot(S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC})\cdot P, K''\cdot(S_{ABP}+S_{APC})\cdot H]$

Dividendo I_1 per K′ e I_2 per K′′ si ottengono gli equivalenti
$I' = [S_{APC}\cdot B\text{ , } -(S_{ABP}+S_{APC})\cdot H\text{, } S_{ABP}\cdot C]$
$I'' = [S_{BPC}\cdot A\text{ , } -(S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC})\cdot P\text{, } (S_{ABP}+S_{APC})\cdot H]$

Effettuando l'unione degli insiemi I′ e I′′ si ottiene:
$I' \cup I''= [S_{BPC}\cdot A, S_{APC}\cdot B\text{ , } S_{ABP}\cdot C, -(S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC})\cdot P]$.

Tenendo conto che $(S_{ABP}+S_{APC}+S_{BPC})=S_{ABC}$, si ha la tesi.

Così come i teoremi 2 e 3 sono strettamente collegati al TH.1, allo stesso modo, al TH.4 sono collegati i teoremi 5 e 6 che enunciamo omettendone la dimostrazione.

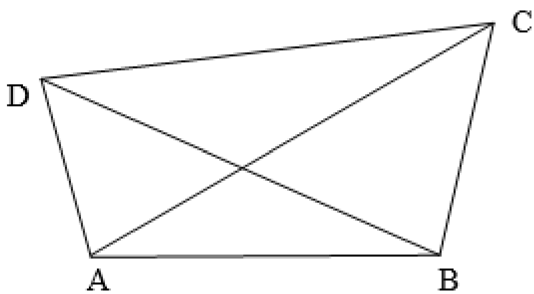
TH.5: Sia J = (A,B,C,P) un insieme di punti del piano π. Se (A P,H) e (B,H,C) sono coniugati alterni essendo P interno ad (A,H) ed H interno a [B,C], allora, se $I'=(m\cdot A,\ n\cdot B,\ s\cdot C,\ -h\cdot P)$ è un insieme completo, le masse m ,n, s, h $\in R^*$ sono così definite:

$$m = K\cdot S_{BCP},\ n = K\cdot S_{ACP},\ s = K\cdot S_{BPA},\ h = K\cdot S_{ABC}$$

TH.6: Sia J il sostegno dell'insieme quaternario I contenente tre punti materiali di segno concorde ed un punto di segno discorde rispetto ai precedenti. L'insieme J contiene un punto interno.

3 - Applicazioni

Applicazione 1: Siano (A,B,D) e (A,D,C) due insiemi ternari non adiacenti e risulti: d(A,B) = 6, d(B,D) = $4\sqrt{5}$, d(A,D) = $2\sqrt{5}$, d(A,C) = $7\sqrt{2}$, d(D,C) = $3\sqrt{10}$. Trovare d(B,C).



L'insieme completo con sostegno J = (A,B,C,D) è

(S_{BCD} A, S_{ACD} B, S_{ABD} C, S_{ABC} D).

Utilizzando la formula di Eulero:

$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$ si ha: S_{ABD} =12, S_{ACD} =21.

Posto S_{ABC} = x, S_{BCD} = y, essendo: S_{ABD} +S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ADC} si ha: 12 + y = 21 + x da cui S_{BCD} = x + 9. Affinché l'insieme I = [(x + 9) A, – 21 B, 12 C, – x D] sia completo deve risultare:

A · I = D · I.

Sviluppando si ha:

– 21[d(A,B)]^2 + 12[d(A,C)]^2 – x [d(A,D)]^2 = (x+9)[d(D,A)]^2 – 21[d(D,B)]^2+ 12 [d(D,C)]^2

da cui x = 21. Sostituendo si ha: S_{ABD} =12, S_{ADC} = 21,

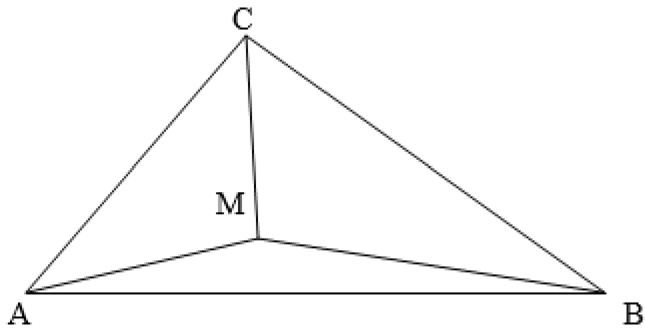
S_{BCD} = 30, S_{ABC} = 21 e l'insieme I diviene: I = [30·A, –21·B, 12·C, – 21·D].

Per calcolare d(B,C) risolviamo l'equazione B · I = D · I: 30$[d(B,A)]^2$ + 12$[d(B,C)]^2$ – 21$[d(B,D)]^2$ = 30$[d(DA)]^2$ –21 $[d(D,B)]^2$ +12 $[d(D,C)]^2$, da cui d(B,C) = $5\sqrt{2}$.

Applicazione 2: Sia J = (A,B,C,M) un insieme di punti del piano con M interno a J e risulti: d(A,M) = $2\sqrt{5}$, d(B,M)=$2\sqrt{17}$, d(C,M)=$5\sqrt{2}$. Trovare d(A,B), d(B,C), d(C,A).

Sapendo che si ha:

$$\frac{S_{BCM}}{9} = \frac{S_{CAM}}{5} = \frac{S_{ABM}}{4} = K \qquad (3,1)$$



dalla (3,1) si ha: S_{BCM} = 9 · K, S_{CAM} = 5 · K, S_{ABM} = 4 · K, S_{ABC} = 18 · K , con K ∈ R*; per il *TH.4*, l'insieme (9K·A, 5k · B, 4K· C, –18K·M) è completo e completo è l'equivalente I = (9·A, 5· B, 4· C, –18· M) pertanto si ha: A · I = M · I, B · I = M · I, C · I = M · I, da cui

$$\begin{cases} 5[d(A,B)]^2 + 4[d(A,C)]^2 - 18[d(A,M)]^2 = 9\,[d(M,A)]^2 + 5\,[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,B)]^2 + 4[d(B,C)]^2 - 18[d(B,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,C)]^2 + 5[d(B,C)]^2 - 18[d(C,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \end{cases}$$

Posto d(A,B) = x, d(B,C) = y, d(C,A) = z, si ha:

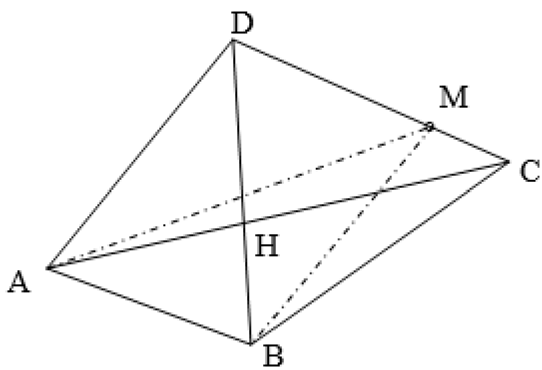
$$\begin{cases} 5x^2 + 4\,z^2 = 1080 \\ 9x^2 + \; 4y^2 = 1944 \\ 9z^2 + 5y^2 = 1620 \end{cases}$$ da cui $x = 12$, $y = 9\sqrt{2}$, $z = 3\sqrt{10}$

Applicazione 3: Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero T(J), con J = (A,B,C,D), e risulti:

$S_{CBD} = 36$, $S_{DAC} = 72$, $S_{BDA} = 108$, $S_{ACB} = 72$ (3,2)

Sia M un punto sul lato [D,C] e risulti: $\frac{d(D,M)}{d(M,C)} = 3$.

Trovare: S_{BMD}, S_{MDA}, S_{ABM}.



Per il *TH.1* l'insieme completo con sostegno J è:
I′= ($S_{CBD} \cdot$ A, – S_{DAC} $\cdot$B, $S_{BDA} \cdot$ C, – S_{ACB} $\cdot$ D) da cui
I' = (36 $\cdot$A, – 72$\cdot$B, 108$\cdot$C, – 72 D).

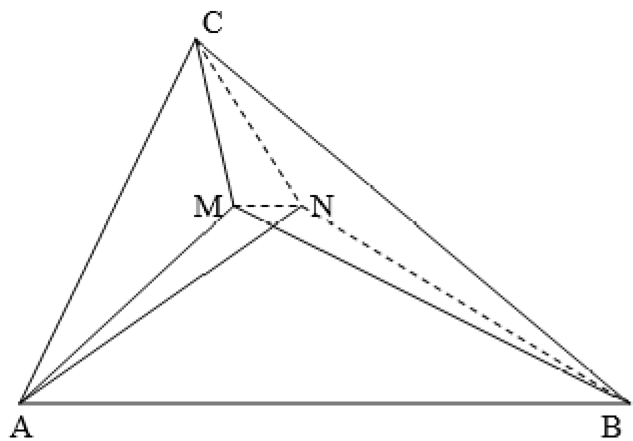
L'insieme completo avente sostegno (C,M,D) è
I''= (D, –4 M, 3 C). Ricaviamo l'insieme completo con sostegno J'''=(A,B,M,D): I'''={I' ∪ [(−36)I'']}=(36 A,–108 D,–72 B, 144 M).

Poiché, per il *TH.2*, deve risultare:
$36 = K \cdot S_{BMD}$, $108 = K \cdot S_{ABM}$, $144 = K \cdot S_{BDA}$, $72 = K \cdot S_{ADM}$ (3,3)

con $K \in R^*$, essendo per le (3,2) $144 = K \cdot S_{BDA} = K \cdot 108$, si ha $K = \frac{4}{3}$; sostituendo la costante K così ricavata nelle (3,3), si ha:
$S_{BDA} = 108$, $S_{BMD} = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27$, $S_{ABM} = 108 \cdot \frac{3}{4} = 81$,
$S_{ADM} = 72 \cdot \frac{3}{4} = 54$.

Applicazione 4: Sia J' = (A,B,C,M) un insieme di punti del piano con **M** interno a J' e risulti:
$S_{ABM} = 64$, $S_{BCM} = 28$, $S_{AMC} = 20$, $S_{ABC} = 112$ (3,4)

Sia N interno di J'' = (C,M,B,N) e risulti:
$S_{MBN} = 12$, $S_{BCN} = 7$, $S_{MNC} = 9$, $S_{MBC} = 28$. Trovare S_{MNA}.



L'insieme completo I', avente sostegno J', è:
I' = (28 A, 20 B, 64 C, – 112 M).

L'insieme completo I'', avente sostegno J'', è:
I'' = (9 B, 7 M, 12 C, – 28 N).

Effettuando l'unione dei due insiemi I' e I'' moltiplicati, rispettivamente, per $\frac{9}{4}$ e per –5 , riducendo e dividendo per 7 si ha :

rid. [($\frac{9}{4}$ I’) ∪ (–5 I'')=(63 A, 45 B, 144 C, – 252 M, – 45 B – 35 M, – 60 C, 140 N) == (63 A, 84 C, 140 N, – 287 M).

Dividendo per 7 l’equivalente è: (9 A , 12 C, 20 N, – 41 M)

Per il *TH.4*, essendo:

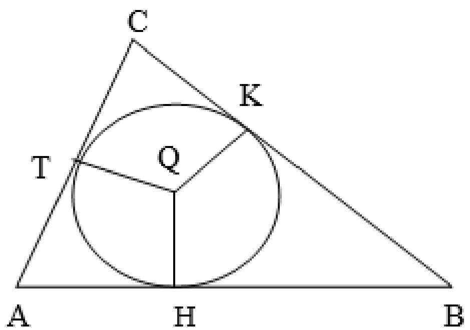
$S_{ANM} = 12 \cdot K$, $S_{NCM} = K \cdot 9$, $S_{AMC} = K \cdot 20$, $S_{ANC} = K \cdot 41$ (3,5)

con K ϵ R *, tenendo conto della (3,4) si ha:

$$S_{ACM} = 20 = K \cdot 20 = S_{ACM} \text{ da cui } K = 1.$$

Sostituendo nelle (3,5) si ha: $S_{ANM} = 12 \cdot 1 = 12$.

Applicazione 5: Sia Q l’incentro del triangolo T(J’) con J’ = (A,B,C). Siano H,K,T le proiezioni ortogonali di Q, rispettivamente, sui lati [A,B], [B,C], [C,A]. Trovare l’insieme completo I con sostegno J = (A,B,C,Q).



Posto d(A,B) = c, d(B,C) = a, d(C,A) = b, essendo r il raggio della circonferenza inscritta in T(J), si ha:

$$S_{B,C,Q} = \frac{1}{2}\,a\,r,\ \ S_{CAQ} = \frac{1}{2}\,b\,r,\ S_{ABQ} = \frac{1}{2}\,c\,r,$$

$$S_{A,B,C} = S_{B,C,Q} + S_{CAQ} + S_{ABQ} = \frac{1}{2}\,(a+b+c)\,r.$$

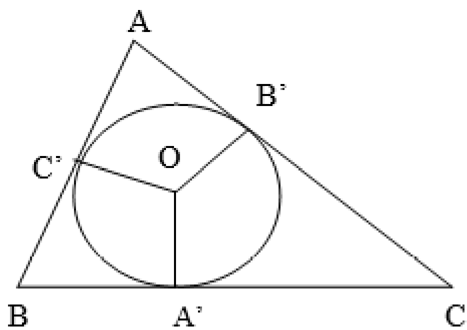
Tenendo conto del TH.4 si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{a\,r}\right) A\,,\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{b\,r}\right) B\,,\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{c\,r}\right) C,-\left(\frac{1}{2}\ (\mathrm{a+b+c})\,\mathrm{r}\right) Q\,\right]$$

Moltiplicando per $\frac{2}{r}$ si ha l'equivalente:

$$I = [a \cdot A, b \cdot B, c \cdot C, -(a+b+c) \cdot Q].$$

Applicazione 6 Sia S la circonferenza di centro O inscritta nel triangolo T(J), con J = (A,B,C) e A′,B′,C′ siano i punti di tangenza di S, rispettivamente, con i lati [B,C], [A,C], [A,B]. Mostrare che: $S_{AOB} = K \cdot S_{A'OB'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'OC'}$,
$S_{COA} = K \cdot S_{C'OA'}$ con $K \in R$.



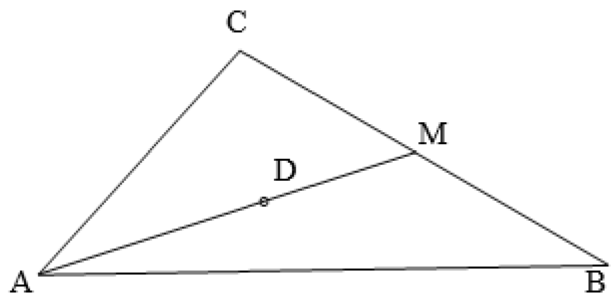
Dalla geometria elementare risulta:
d(A,C′)=d(A,B′)=u, d(B,C′)=d(B,A′)=v, d(C,A′)=d(C,B′)=w.

Tenendo conto dell'applicazione 5 l'insieme:
$I° = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2 (u + v + w)O]$ risulta completo. Anche gli insiemi $I' = [vA, -(u + v)C', uB]$,
$I'' = [wB, -(w + v)A', vC]$, $I''' = [uC, -(u + w)B', wA]$, risultano completi. Dall'unione di I′, I′′, I′′′ si ottiene:
$I^* = I' \cup I'' \cup I''' = [(v + w)A, (u + w)B, (v + u)C, -(u + v)C',$
$-(w + v)A', -(u + w)B']$.

Effettuando la differenza dei due insiemi $I° - I^*$ si ottiene:
$I = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2 (u + v + w)O - (v + w)A, -(u + w)B, -(v + u)C, (u + v)C', (w + v)A', (u + w)B'] =$
$= [(w + v)A', (u + w)B', (u + v)C', -2 (u + v + w)O]$.

Confrontando i due insiemi completi
I° = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, – 2 (u + v + w)O] e
I = [(w + v)A′, (u + w)B′, (u + v)C′ , – 2 (u + v + w)O]
risulta che le masse di I°, riferite ai punti A, B, C, O, sono uguali, rispettivamente, alle masse di A′, B′, C′, O pertanto si ha:
$S_{AOB} = K \cdot S_{A'O\,B'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'O\,C'}$, $S_{COA} = K \cdot S_{C'O\,A'}$, con $K \in R^*$.

Applicazione 7: Sia D il punto interno di J = (A,B,C,D), insieme contenente terne di punti non allineati del piano π. Risulti: $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, con $K \in R^*$. Ricavare l'insieme completo con sostegno J e verificare che d(A,D) = 2 d(D,M) .



Essendo $S_{ABC} = 3$ K, $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, si ha:
(K · A, K · B, K · C, – 3K · D).
Dividendo per K si ha:
I = (A, B, C, – 3 · D) (3,6)
Indicando con –2 M il complementare di (B,C) risulta completo l'insieme
I′ = (B, –2 M, C) (3,7)
da cui si deduce: $\frac{d(B,M)}{d(M,C)} = 1$.
Sottraendo la (3,7) alla (3,6) si ottiene l'insieme completo

I′′ = I – I′ = (A, –3D, 2M) da cui si deduce: $\frac{d(A,D)}{d(D,M)} = 2.$

Nota 3. Dato un insieme quaternario completo $I = (s_1 \cdot P_1, s_2 \cdot P_2, s_3 \cdot P_3, s_4 \cdot P_4)$ è sempre possibile trovare l'equivalente I′ le cui masse siano espresse mediante due parametri: m, n. Infatti, moltiplicando le masse di I per un K $\in$ R* si ottiene un insieme completo equivalente a I′; ponendo, ad esempio, $K = \frac{1}{s_3}$, si ha:

$$I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_2, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_3, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_4\right) \qquad (3,8)$$

Effettuando le seguenti sostituzioni:

$\frac{s_1}{s_3} = m$, $\frac{s_2}{s_3} = n$, essendo $\frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0$, si ha:

$$m + n + 1 + \frac{s_4}{s_3} = 0$$

da cui $\frac{s_4}{s_3} = -(m + n + 1)$. Sostituendo nella (3,8) si ha:

$$I' = [m \cdot P_1, n \cdot P_2, 1 \cdot P_3, -(m + n + 1) \cdot P_4]$$

da cui risulta che le masse sono espresse mediante m e n. Naturalmente I′ non è l'unico insieme equivalente a I. E′ possibile ricavarne altri , formalmente distinti da I′, elaborando diversamente le masse di I.

Una ulteriore elaborazione di un insieme completo le cui masse siano espresse mediante due parametri è la seguente:

Nota 4. Siano J′ =(A,H,C) e J′′= (B,H,D) i coniugati interni di un insieme quaternario del piano : J = (A,B,C,D). Gli insiemi completi aventi sostegno J′ e J′′ sono:
[m A, –(m + s) H , s C] e [(n B, –(n + h) H , h D]. Dividendo i due insiemi, rispettivamente, per (m + s) e per (n + h) si ottiene:

$$\left(\frac{m}{m+s}A, -H, \frac{s}{m+s}C\right) \quad e \quad \left(\frac{n}{n+h}B, -H, \frac{h}{n+h}D\right).$$

Sottraendo l'uno dall'altro si ha:

$$\left(\frac{m}{m+s}A, \frac{s}{m+s}C, -\frac{n}{n+h}B, -\frac{h}{n+h}D\right) \tag{3,9}$$

Posto $\frac{m}{m+s} = u \;\; e \;\; \frac{n}{n+h} = v$ (3,10)

si ha:

$$\frac{s}{m+s} = 1 - \frac{m}{m+s} = 1 - u \; e \; \frac{h}{n+h} = 1 - \frac{n}{n+h} = 1 - v \tag{3,11}$$

Sostituendo le (3,10) e le (3,11) nella (3,9) si ha:

$$I = [u\,A, (1-u)C, -v\,B, -(1-v)D]$$

Risulta evidente che l'insieme completo I dipende da due parametri: u e v.

4 - L'equazione $I^2 = 0$ essendo I completo

Def.2: Il prodotto di due insiemi di punti materiali I′ e I″, e scriviamo I′ · I″, è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascun punto materiale di I′ per ciascun punto materiale di I″.

Nota 5. È facile mostrare che il prodotto di due insiemi di punti materiali gode della proprietà commutativa e distributiva.

$I' \cdot I'' = I'' \cdot I'$

$I \cdot I^* = I \cdot (I' \cup I'') = (I \cdot I' + I \cdot I'')$

essendo I' e I'' una partizione di I^*.

Def.3: È detto quadrato di un insieme di punti materiali, e scriviamo I^2, il prodotto $I \cdot I$.

Th.7: Supponiamo che le masse degli elementi dell'insieme di punti materiali di ordine n, $H=(m_1Q_1 + m_2Q_2 + \ldots + m_nQ_n)$, soddisfino la seguente condizione: $\sum m_i = 0$.

Il prodotto $H \cdot I$, essendo I un insieme completo di ordine s, è identicamente nullo.

Sia $I = (n_1 P_1, n_2 P_2, \ldots, n_s P_s)$ un insieme completo.

Effettuando il prodotto $H \cdot I$, si ottiene:

$$H \cdot I = (m_1 Q_1 \cdot I + m_2 Q_2 \cdot I + \ldots + m_n Q_n \cdot I) \qquad (4,1)$$

Essendo I completo si ha: $Q_1 \cdot I = Q_2 \cdot I = \ldots = Q_n \cdot I = K$, con $K \in R$.

Sostituendo nella (4,1), si ha:

$$H \cdot I = (m_1 \cdot K + m_2 \cdot K + \ldots + m_n \cdot K) = K \cdot \sum m_i = K \cdot 0 = 0.$$

I teoremi successivi potrebbero essere riferiti ad insiemi completi di qualsiasi ordine. Preferiamo svolgerli prendendo in considerazione, esclusivamente, insiemi completi quaternari conformemente al contesto della trattazione.

Th.8: Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ è un insieme quaternario completo, si ha: $I^2 = 0$.

Svolgendo il quadrato si ha:

$$I^2 = m_1 P_1 \cdot I + m_2 P_2 \cdot I + m_3 P_3 \cdot I + m_4 P_4 \cdot I \qquad (4,1')$$

La completezza di I implica che sia: $P_i \cdot I = K$, con $K \in R$ costante, pertanto la (4,1′) diviene:

$$I^2 = (m_1 K + m_2 K + m_3 K + m_4 K) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) K.$$

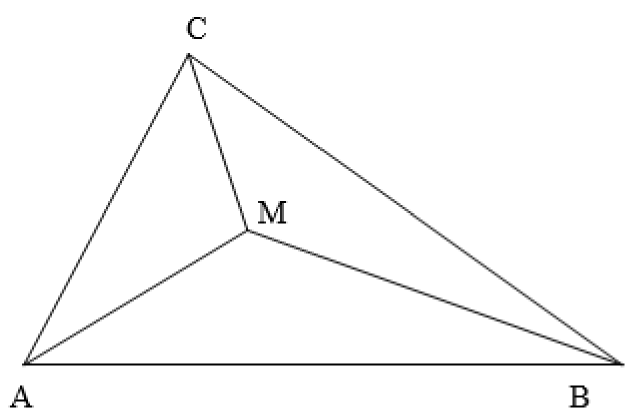
Essendo I completo si ha: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$
da cui: $I^2 = 0$.

Th.9: Sia $I = (m_1 P_1\ ,\ m_2 P_2\ ,\ m_3 P_3\ ,\ m_4 P_4)$ un insieme quaternario completo del IV ordine e I_i sia il sottoinsieme ternario: $I_i = I - m_i P_i$, per $i \in \{1,2,3,4\}$. Si ha, allora:

$$2\, m_i\, (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \quad \text{per} \quad k \in \{1,2,3,4\}.$$

Per il *TH.8*, essendo $I^2 = 0$, si ha:
$I^2 = [(m_i P_i) \cup I_i]^2 = (m_i P_i)^2 + 2 \cdot (m_i P_i) \cdot I_i + (I_i)^2 = 0.$
Poiché $(m_i P_i)^2 = (m_i)^2 [d(P_i, P_i)]^2 = 0$ la precedente diviene:
$2\ m_i\, (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0$.
Inoltre, essendo $P_i \cdot I_i = P_i \cdot I = P_k \cdot I$, la precedente diviene:
$2\, m_i\, (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0$ per qualsiasi $k \in \{1,2,3,4\}$.

Applicazione 8: Sia $J = (A,B,C,M)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati, complanari, con M punto interno. Siano $d(A,B) = 6$, $d(B,M) = 2\sqrt{5}$, $d(M,A) = 2\sqrt{2}$.
Sapendo che $S_{AMC} = 4$, $S_{BCM} = 5$, $S_{ABM} = 6$, $S_{ABC} = 15$, trovare: $d(A,C)$, $d(M,C)$, $d(B,C)$.



L'insieme completo avente sostegno J è: I = (5A, 4B, 6C,–5M).

Scegliamo il sottoinsieme ternario I_C di I il cui sostegno $J_C = (A,B,M)$ contiene punti di cui si conoscono le distanze: $I_C = (5\,A, 4\,B, -15\,M)$. Per il TH.9, si ha:
$I^2 = [(6 \cdot C) \cup I_C]^2 = (6 \cdot C)^2 + 2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I_C) + (I_C)^2 = 0$

Essendo $(6 \cdot C)^2 = 0$ e $C \cdot I_C = C \cdot I$, la precedente diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \qquad (4,2)$$

Il prodotto $(C \cdot I)$ della (4,2) contiene i quadrati dei seguenti moduli:
d(C,A) = x, d(C,M) = y, d(C,B) = z; il prodotto $(A \cdot I)$ contiene, invece, la lunghezza incognita del solo segmento [C,A].

Per calcolare d(C,A) = x, essendo $(C \cdot I) = (A \cdot I)$, effettuiamo nella (4,2) la sostituzione:

$$2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \qquad (4,3)$$

Posto d(A, C) = x, sviluppiamo separatamente $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I)$ e $(I_C)^2 = 0$: $2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) = 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(A, A)]^2 + 4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{4 \cdot 36 + 6\,x^2 - 15 \cdot 8\} = 2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6\,x^2\}$
$(I_C)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4\,[d(A,B)]^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15\,[d(B,M)]^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15\,[d(M,A)]^2 =$
$= 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 36 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 8 = 2 \cdot (-1080)$

Sostituendo nella (4,3) si ha: $2 \cdot 6 \cdot \{24+6\,x^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$ da cui $d(A, C) = \sqrt{26}$

Per calcolare d(C,M) si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $M \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito d(C,M) = y. L'equazione diviene:
$2 \cdot 6 \cdot (M \cdot I) + (I_C)^2 = 0$ da cui $2 \cdot 6 \cdot \{5[d(M, A)]^2 + 4[d(M, B)]^2 + 6[d(M, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{5 \cdot 8 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot y^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$ da cui $d(C,M) = \sqrt{10}$.

Per calcolare d(C,B) si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $B \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito d(C,B) = z. L'equazione diviene:

$2 \cdot 6 \cdot (B \cdot I) + (I_C)^2 = 0$ da cui $2 \cdot 6 \cdot \{5[d(B, A)]^2 - 15\,[d(B, M)]^2 + 6[d(B, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot [5 \cdot 36 - 15 \cdot 20 + 6 \cdot z^2] - 2 \cdot 1080 = 0$ da cui $d(C,B) = 5\sqrt{2}$.

Applicazione 9: Fra i punti dell'insieme J = (A,B,C,D) sussistano le seguenti distanze:

$d(A,B)= 6$, $d(B,C)= 2$, $d(A,C) = 2\sqrt{10}$,
$d(A,D) = 2\sqrt{5}$, $d(B,D) = 4\sqrt{2}$.

Trovare l'insieme completo con sostegno J e la distanza (D,C).

Formalmente,

$$[- m\, A, (m + n - 1)\, B, - n\, C, D] \qquad (4,4)$$

è l'insieme completo avente sostegno J indipendentemente dal fatto che le terne (A,B,C) e (A,B,D) siano adiacenti o non adiacenti

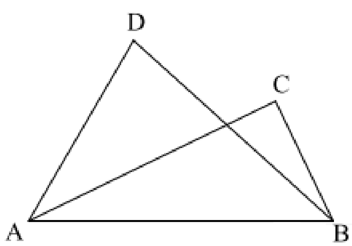


Fig. (1)

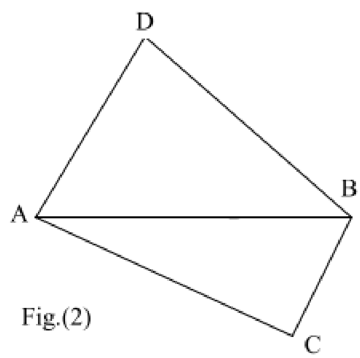


Fig.(2)

Nella fig. (1) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono non adiacenti; nella fig. (2) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono adiacenti.

Come nell'esercizio precedente,
posto $I_D = [-mA, (m+n-1) B, -nC]$ si ha:

$$I^2 = [I_D \cup (I \cdot D)]^2 = (I_D)^2 + 2\cdot (D \cdot I_D) + (D)^2 = 0 \qquad (4,5)$$

Tenendo conto che $D \cdot I_D = D \cdot I$, $(D)^2 = 0$ e che, essendo I completo, si ha: $D \cdot I = A \cdot I = B \cdot I$, dalla (4,5) si ricavano le seguenti equazioni.

$$\begin{cases} (I_D)^2 + 2 \cdot (B \cdot I) = 0 \\ (I_D)^2 + 2 \cdot (A \cdot I) = 0 \end{cases} \qquad (4,6)$$

si ha:

a) $(I_D)^2 = [-m \cdot A, (m+n-1) \cdot B, -n \cdot C]^2 =$
$= 2\{-m(m+n-1)[d(A,B)]^2 - n(m+n-1)[d(B,C)]^2 + m\,n[d(A,C)]^2\} =$
$= 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n)$

b) $2 \cdot (B \cdot I) = 2\{-m\,[d(B,A)]^2 + [d(B,D)]^2 - n\,[d(B,C)]^2\} =$
$= 8(-9m + 8 - n)$

c) $2 \cdot (A \cdot I) = 2\{[d(A,D)]^2 - n\,[d(A,C)]^2 + (m+n-1)[d(A,B)]^2\}$
$= 8(9m - n - 4)$

Sostituendo nelle (4,6), si ha:

$$\begin{cases} 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(-9m + 8 - n) = 0 \\ 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(9m - n - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m_2 = \frac{2}{3} \\ n_2 = -2 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) si ottengono i seguenti insiemi completi:

$$I' = (-2A, 5B, -6C, 3D) \quad \text{e} \quad I'' = (-2A, -7B, 6C, 3D)$$

contenenti entrambi punti esterni.

Per calcolare d(D,C) svolgiamo le seguenti equazioni:

$$D \cdot I' = C \cdot I' \quad (4,7') \qquad D \cdot I'' = C \cdot I'' \quad (4,7'')$$

Dalla (4,7′) si ha:

$-2[d(D,A)]^2 + 5\,[d(D,B)]^2 - 6[d(D,C)]^2 = -2[d(C,A)]^2 + 5\,[d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$

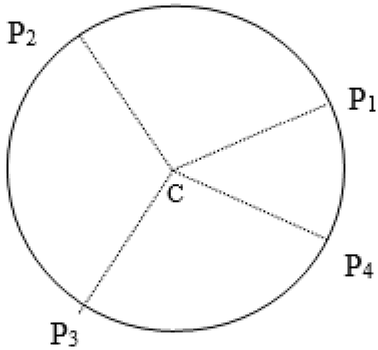
Posto $d(D,C) = x$, si ha $x = 2\sqrt{5}$;
dalla (4,7'') si ha:
$- 2 [d(D,A)]^2 - 7[d(D,B)]^2 + 6[d(D,C)]^2 = - 2[d(C,A)]^2 - 7 [d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$

Posto $d(D,C) = y$, si ha $y = 2\sqrt{13}$

5 - Insiemi completi divisori dello zero

In questo capitolo riprendiamo in considerazione gli insiemi completi, divisori dello zero, ai quali avevamo brevemente accennato, in modo esemplificativo, nell'articolo "Insiemi completi del IV ordine" di Francia F. contenuto nel Periodico di matematica, Vol.II (2). In quel lavoro veniva richiamata l'attenzione su insiemi quaternari completi, divisori dello zero, ottenuti dall'unione di due terne di punti materiali, completi e congruenti.

<u>*TH.10:*</u> Sia $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ un insieme di punti della circonferenza S con raggio R e centro C. Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ l'insieme completo avente sostegno J. Si ha: $Q \cdot I = 0$ essendo Q un qualsiasi punto dello spazio .



Se I è completo si ha: $Q \cdot I = C \cdot I = m_1 [d(CP_1)]^2 + m_2 [d(CP_2)]^2 + m_3 [d(CP_3)]^2 + m_4 [d(CP_4)]^2$.

Indicando con R il raggio della circonferenza, essendo $R = d(CP_1) = d(CP_2) = \ldots = d(CP_n)$, la precedente diviene:

$Q \cdot I = C \cdot I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots + m_n R^2 = R^2 (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) =$

$= R^2 \cdot 0 = 0$

TH. 11: Sia $J= (P_1, P_2, P_3, P_4)$ un insieme di punti della circonferenza S con raggi R e centro C. Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ l'insieme completo, divisore dello zero, avente sostegno J. Posto $I_i = (I - m_i P_i)$, si ha:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot I_1 &= 0 \\ P_2 \cdot I_2 &= 0 \\ P_3 \cdot I_3 &= 0 \\ P_4 \cdot I_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (5,1) \qquad\qquad \begin{aligned} (I_1)^2 &= 0 \\ (I_2)^2 &= 0 \\ (I_3)^2 &= 0 \\ (I_4)^2 &= 0 \end{aligned} \qquad (5,2)$$

Dal *TH.10* si ha: $Q \cdot I = 0$, essendo Q un qualsiasi punto dello spazio. Sostituendo Q con P_i si ha:

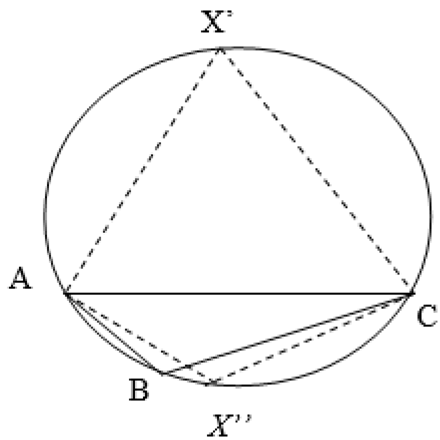
$$P_i \cdot I_i = 0 \qquad (5,3)$$

da cui le (5,1).

Dal *TH.9* si ha:

$2 m_i (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0$; sostituendo la (5,3) nella precedente equazione si ha: $(I_i)^2 = 0$ da cui le (5,2)

Applicazione 10: Sia S la circonferenza di centro O e raggio R passante per i punti A, B, C le cui distanze reciproche siano: $d(A,C) = 8$, $d(A,B) = \sqrt{2}$, $d(B,C) = 5\sqrt{2}$. Trovare $d(A,X) = d(C,X)$ essendo X un punto della circonferenza S equidistante da A e C. Trovare il raggio di S.



L'insieme completo con sostegno J = (A,B,C,X) è:

$$[m \cdot A, 1 \cdot B, n \cdot C, -(m+n+1) \cdot X] \qquad (5,4)$$

Applicando il *TH.11* si ha: $A \cdot I = 0$, $C \cdot I = 0$, $(m \cdot A, n \cdot C, 1 \cdot B)^2 = 0$.

Sviluppando:

$$\begin{cases} [d(A,B)]^2 + n[d(A,C)]^2 - (m+n+1)[d(A,X)]^2 = 0 \\ [d(C,B)]^2 + m[d(C,A)]^2 - (m+n+1)\,[d(C,X)]^2 = 0 \\ mn[d(A,C)]^2 + n[d(B,C)]^2 + m\,[d(A,B)]^2 = 0 \end{cases}$$

Posto d(A,X) = d(C,X) = x , si ha:

$$\begin{cases} 2 + 64\,n - (m+n+1)x^2 = 0 \\ 50 + 64\,m - (m+n+1)x^2 = 0 \\ 64\,m\,n + 50\,n + 2\,m = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} n = m + \frac{3}{4} \\ 32\,m^2 + 50\,m + \frac{75}{4} = 0 \\ 2 + 64\,n - (m+n+1)x^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$m_1 = -\frac{15}{16}$, $n_1 = -\frac{3}{16}$, $m_2 = -\frac{10}{16}$, $n_2 = \frac{2}{16}$;
sostituendole nella (5,4) si ottengono i seguenti insiemi completi:

I′= (–15 · A, 16 · B, –3 · C, 2 · X′) e I′′= (–5 · A, 8 · B, C, – 4 · X′′).

Per trovare d(A,X′), essendo (A,B,C,X′) il sostegno di I′, si svolge l'equazione A · I′ = 0:

$16\,[d(A,B)]^2 - 3[d(A,C)]^2 + 2[d(A,X')]^2 = 0$ da cui $d(A,X') = 4\sqrt{5}$

Per trovare d(A,X′′), essendo (A,B,C,X′′) il sostegno di I′′, si svolge l'equazione

$$A \cdot I'' = 0 : 8\,[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 - 4\,[d(A,X'')]^2 = 0$$

da cui $d(A,X'') = 2\sqrt{5}$.

Sia I = I′ – 2 I′′ = (– 5 ·A, –5 · C, 2 · X′, 8 · X′′).

L'insieme I è un divisore dello zero e si ha:

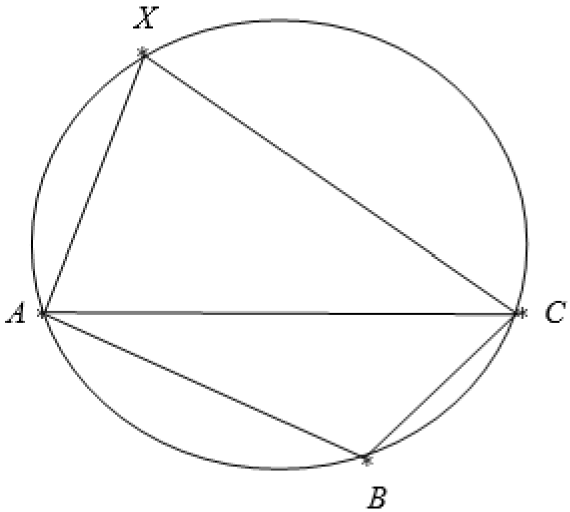
X′ · I = 0. Sviluppando risulta:

$-5 \cdot [d(A,X')]^2 - 5 \cdot [d(C,X')]^2 + 8 \cdot [d(X'',X')]^2 = 0$

$8 \cdot [d(X'',X')]^2 = 5 \cdot 80 + 5 \cdot 80 = 800$ da cui $[d(X'',X') = 10$ e R=5.

Applicazione 11: Sia J = (A,B,C,P) un insieme quaternario di punti appartenenti alla circonferenza S. Siano [X,A], [A,B], [B,C] i lati di Q(J) e [A,C] sia la diagonale. Risulti: $d(A,X) = 4\sqrt{10}$, $d(A,B) = 2\sqrt{10}$, $d(B,C) = 2\sqrt{5}$, d(A,C) = 10.

Calcolare d(XC).



L′insieme completo con sostegno J può essere così rappresentato:

$$I = [m\,A, -B, n\,C, (-m - n + 1)\,X] \qquad (5,4')$$

Per calcolare m e n svolgiamo il seguente sistema (*TH.11*):

$$\begin{cases} A \cdot I_A = 0 \\ [I - (-m - n + 1)X]^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

$$-[d(A,B)]^2 + n[d(A,C)]^2 + (-m - n + 1)[d(A,X)]^2 = 0$$
$$-m[d(A,B)]^2 - n[d(B,C)]^2 + mn[d(A,C)]^2 = 0$$

$$\begin{cases} -2m - n + 5\,nm = 0 \\ n = 2 - \dfrac{8}{3}\,m \end{cases}$$

Si hanno due soluzioni:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{2}\ , \qquad n_1 = \dfrac{2}{3} \\ m_2 = \dfrac{3}{10}\quad , n_2 = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Sostituendole nella (5,4′) si ottengono i seguenti insiemi

I′ = (3 A, – 6 B, 4 C, – P), I′ = (3 A, – 10 B, 12 C, – 5 Q).

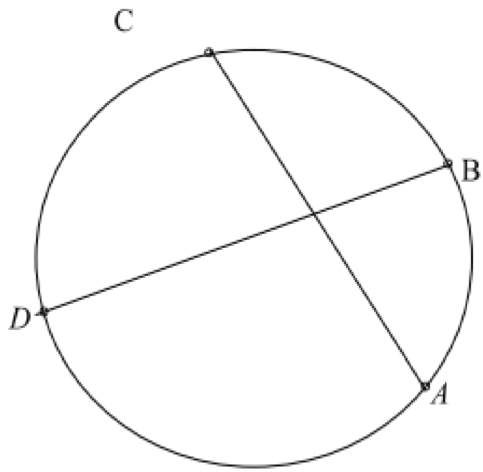
(Nei due insiemi, I′ e I′′, la X è sostituita con P e Q).

Per calcolare d(P,C) e d(Q,C) svolgiamo le due equazioni: C ·I′ e C ·I′′:

C ·I′ = 3 $[d(A,C)]^2$ – 6 $[d(B,C)]^2$ – $[d(P,C)]^2$ = 0 da cui d(P,C) = 6 $\sqrt{5}$

C ·I′′ = 3 $[d(A,C)]^2$ – 10 $[d(B,C)]^2$ – 5 $[d(Q,C)]^2$ = 0 da cui d(Q,C) = 2 $\sqrt{5}$

Applicazione 12: Siano [A,C] e [B,D] le diagonali del quadrilatero di vertici J = (A,B,C,D) appartenenti alla circonferenza S. Sapendo che d(A,B) = 10, d(B,C) = 6 $\sqrt{5}$, d(C,D) = 2 $\sqrt{10}$, d(A,D) = 6 $\sqrt{2}$, calcolare d(A,C) e d(B,D).



L′insieme completo avente sostegno J è:

$$I = [m\,A, (n-1)\,B, (1-m)\,C, -n\,D]$$

Per trovare le masse di I svolgiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A \cdot I = 0 \\ C \cdot I = 0 \end{cases} \qquad (5,5)$$

Posto $d(A,C) = y$, si ha:

$$A \cdot I = (n-1)\,[d(A,B)]^2 + (1-m)[d(A,C)]^2 - n\,[d(A,D)]^2 = (n-1)100 + (1-m)\,y^2 - n\,72 = 0 \qquad (5,6)$$

$$C \cdot I = m\,[d(C,A)]^2 + (n-1)\,[d(C,B)]^2 - n\,[d(C,D)]^2 = m\,y^2 + (n-1)\,180 - n\,40 = 0 \qquad (5,7)$$

Eliminando $m\,y^2$ fra le precedenti relazioni si ha:

$$y^2 = -168\,n + 280 \qquad (5,8)$$

Sostituendo la (5,8) nella (5,7), si ha:

$$-42\,m\,n + 70\,m + 35\,n - 45 = 0 \qquad (5,9)$$

Procedendo in modo analogo, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} D \cdot I = 0 \\ B \cdot I = 0 \end{cases} \qquad (5,5')$$

Posto $d(D,B) = x$, si ha:

$$D \cdot I = m\,[d(D,A)]^2 + (n-1)\,[d(D,B)]^2 + (1-m) \cdot [d(D,C)]^2 = m72 + (n-1)\,x^2 + (1-m)\,40 = 0 \qquad (5,6')$$

$$B \cdot I = m\,[d(B,A)]^2 + (1-m)\,[d(B,C)]^2 - n\,[d(B,D)]^2 = m\,100 + (1-m)\,180 - n\,x^2 = 0 \qquad (5,7')$$

eliminando $n\,x^2$ fra le precedenti relazioni si ha:

$$x^2 = -48\,m + 220 \qquad (5,8')$$

Sostituendo la (5,8') nella (5,7'), si ha:

$$12\,m\,n - 20\,m - 55\,n + 45 = 0 \qquad (5,9')$$

Mettendo a sistema la (5,9) e la (5,9') si ha:

$$\begin{cases} m(70-42\,n)=45-35\,n \\ m\,(12\,n-20)=55\,n-45 \end{cases} \quad , \quad \frac{9-7\,n}{35-21\,n}=\frac{11\,n-9}{6\,n-10}$$

da cui $n_1=\frac{5}{7}$, $m_1=\frac{1}{2}$

Sostituendo nell'insieme completo I si ottiene:

I = (7 A, – 4 B, 7 C, – 10 D)

Per calcolare d(D,B) svolgiamo l'equazione

$$D \cdot I = 7\,[d(D,A)]^2 - 4[d(D,B)]^2 + 7[d(D,C)]^2 = 0$$

da cui d(D,B) =14.

Per calcolare d(A,C) svolgiamo l'equazione

$A \cdot I = -4\ [d(A,B)]^2 + 7[d(A,C)]^2 - 10\ [d(A,D)]^2 = 0$

da cui $d(A,C) = 4\sqrt{10}$.

Th.12: Sia I un insieme completo di ordine n ed

$$H = (m_1\,Q_1, m_2\,Q_2, \ldots, m_j\,Q_j)$$

un insieme di punti materiali di ordine h e risulti $\sum m_i = 0$.

Si ha: $(I - H)^2 = H^2$.

Per il *TH.8* si ha: $I^2 = 0$ da cui segue:

$0 = I^2 = [(I - H) + H]^2 = (I - H)^2 + 2\,(I - H) \cdot H + H^2 = (1 - H)^2 + 2(I \cdot H) - 2\,H^2 + H^2 = 0$

Per il *TH.7* si ha: $I \cdot H = 0$ pertanto risulta: $(I - H)^2 - H^2 = 0$ da cui la tesi.

NOTA 6: Analizziamo un possibile procedimento per risolvere problemi di geometria mediante il *TH.12*.

Sia J = (A,B,C,M) un insieme contenente terne di punti del piano non allineati, con M interno a J.

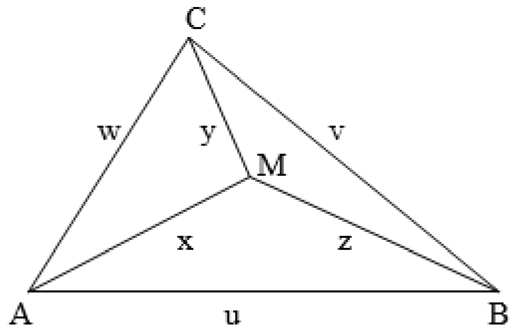
Sia

$$I = [m\,A, n\,B, s\,C, -(m+n+s)\,M] \qquad (5,10)$$

l'insieme completo con sostegno J. Distanze note intercorrenti fra elementi di J siano: d(A,B) = u ,d(B,C = v, d(A,C)= w; quelle incognite siano: d(A,M) = x, d(C,M) = y, d(B,M) =z. Utilizziamo l'equazione

$$(I - H)^2 = H^2 \qquad (5,11)$$

per ricavare le distanze incognite. Calcoliamo d(A,M) = x .



Osserviamo che le distanze incognite si riferiscono a segmenti aventi l'estremo M in comune; ricerchiamo, quindi, un insieme H soddisfacente le condizioni del Th.12 e tale che, sottraendolo ad I, permetta di ottenere un insieme, I – H, non contenente il punto M.

Con tale esclusione segue che, il primo membro della (5,11), $(1 - H)^2$, elevato al quadrato, non contiene distanze incognite. Ad esempio, scelto

$$H = [-(m + n + s)\, M ,\, (m + n + s)\, A] \qquad (5,12)$$

il primo membro della (5,11) diviene:

$(1 - H)^2 = \{[m\,A, n\,B, s\,C, -(m + n + s)\,M] - [-(m + n + s)\,M, (m + n + s)\,A]\}^2 =$

$= \{m\,A, n\,B, s\,C, -(m + n + s)\,M, +(m + n + s)\,M, -(m + n + s)\,A]\}^2 =$

$[m\,A, n\,B, s\,C, -(m+n+s)\,A]^2 = [-(n+s)\,A, n\,B, s\,C]^2$ (5,13)

Sostituendo la (5,12) e la (5,13) nella (5,11), si ha:
$[-(n+s)\,A, n\,B, s\,C\,]^2 = [-(\,m+n+s)\,M, (\,m+n+s)\,A]^2$ (5,14)

Svolgendo il primo membro della (5,14), si ha:
$[\,-(n+s)\,A,\ n\,B, s\,C\,]^2 = -\,n(n+s)\,[d(A,B)]^2 + n\,s\,[d(B,C)]^2 - s(n+s)\,[d(A,C)]^2 = -\,n(n+s)\,u^2 + n\,s\,v^2 - s(n+s)\,w^2$.

Svolgendo il secondo membro della (5,14), si ha: $-\,(m+n+s)^2\,[d(A,M)]^2 = -\,(m+n+s)^2\,x^2$.

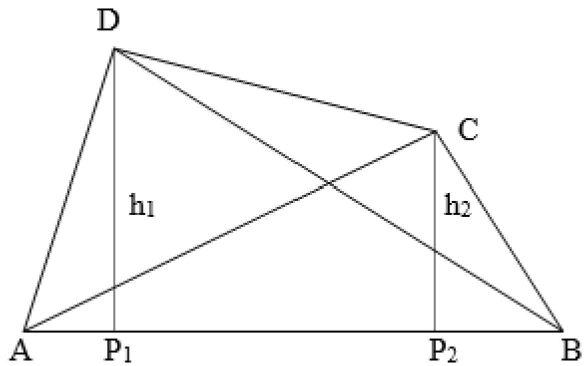
Dall'equazione $-\,(m+n+s)^2\,x^2 =$
$= -\,n(n+s)\,u^2 + n\,s\,v^2 - s(n+s)\,w^2$ si ha:

$$x = d(A,M) = \frac{\sqrt{n(n+s)u^2 - n\,sv^2 + s(n+s)w^2}}{m+n+s}$$

Procedendo in modo analogo si calcola $d(C,M)$ e $d(B,M)$.

Applicazione 13: Siano [A,C] e [B,D] le diagonali del quadrilatero Q(J) con J = (A,B,C,D). Il rapporto fra le altezze $d(D,P_1) = h_1$ e $d(C,P_2) = h_2$, rispettivamente, dei due triangoli T(J') e T(J'') con J' = (A,B,D) e J''= (A,B,C), riferite alla base comune [A,B], è: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$. Sapendo che $d(A,D) = 2\sqrt{10}$,

$d(A,C) = 4\sqrt{5}$, $d(C,D) = 2\sqrt{10}$, $d(B,D) = 10$, trovare le masse di un insieme completo con sostegno J e calcolare la distanza [A,B].



L'insieme completo, avente sostegno J, è:

$(S_{BCD} \cdot A, -S_{ACD} \cdot B, S_{ABD} \cdot C, -S_{ABC} \cdot D)$ (5,15)

Poiché dal testo risulta: $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$, posto $S_{ABC} = 2$ K, con K ∈ R^*, si ha: $S_{ABD} = 3$ K.

Essendo $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$ sostituendo S_{ABC} e S_{ABD}, si ha:

$2\ K + S_{ACD} = 3\ K + S_{BCD}$. Posto $S_{BCD} = x \cdot K$ la precedente diviene: $S_{ACD} = K(1 + x)$.

Sostituendo le aree così ricavate nella (5,15) e dividendo per K, si ha:

$$I = [x \cdot A, -(1+x) \cdot B, 3 \cdot C, -2 \cdot D].$$

Iniziamo operando in modo che le incognite contenute nell'equazione

$$(I - H)^2 = H^2 \qquad (5,16)$$

non siano le distanze dei punti di J ma le masse dei punti.

Ricerchiamo, quindi, un insieme H soddisfacente le condizioni del *Th.12*, tale che, sottraendolo ad I, permetta di ottenere un insieme, I – H, contenente punti le cui distanze siano note.

Posto $H = [-(1+x) \cdot B, (1+x) \cdot D]$, si ha:

$(I - H)^2 = \{ [x \cdot A, -(1+x) \cdot B, 3 \cdot C, -2 \cdot D] - [-(1+x) \cdot B, (1+x) \cdot D] \}^2 =$
$= [x \cdot A, 3 \cdot C, -2 \cdot D, -(1+x) \cdot D]^2 = [x \cdot A, 3 \cdot C, -(3+x) \cdot D]^2.$

Sostituendo nella $(I - H)^2 = H^2$ si ha:

$[x \cdot A, 3 \cdot C, -(3+x) \cdot D]^2 = [-(1+x) \cdot B, (1+x) \cdot D]^2$

sviluppando si ha

$3x \cdot [d(A,C)]^2 - 3(3+x)[d(C,D)]^2 - x(3+x) \cdot [d(A,D)]^2 =$
$= -(1+x)^2 \cdot [d(B,D)]^2$

$3x \cdot 80 - 3(3+x) \cdot 40 - x(3+x) \cdot 40 = -(1+x)^2 \cdot 100$ da cui

$3x^2 + 10x - 13 = 0.$

Dalle due soluzioni: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{13}{3}$ derivano due insiemi completi:

a) $I' = [1 \cdot A, -2 \cdot B, 3 \cdot C, -2 \cdot D]$ essendo $x_1 = 1$;

b) $I'' = [-13 \cdot A, 10 \cdot B, 9 \cdot C, -6 \cdot D]$ essendo $x_2 = -\frac{13}{3}$.

Solo l'insieme completo I' contiene punti posizionati secondo le indicazioni del testo; infatti, solo in questo caso, [A,C] e [B,D] sono le diagonali del quadrilatero Q(J), con
J = (A,B,C,D). Per calcolare d(A,B) operiamo così: essendo [A,B] e [C,B] le distanze incognite degli elementi di J, attribuiamo all'insieme H dell'equazione (5,16), i seguenti punti materiali:

$H = (-2B, 2A)$. Si ha:

$[(1 \cdot A, -2 \cdot B, 3 \cdot C, -2 \cdot D) - (-2B, 2A)]^2 = (-2B, 2A)^2$

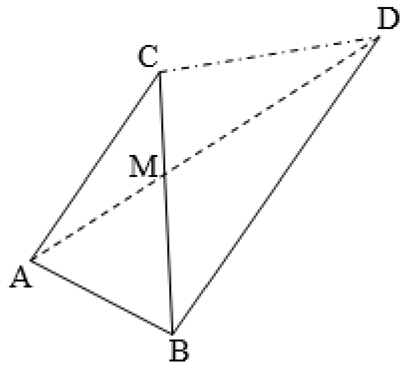
$(-A, 3 \cdot C, -2 \cdot D)^2 = (-2B, 2A)^2$

$-3 \cdot [d(A,C)]^2 - 6 \cdot [d(D,C)]^2 + 2 \cdot [d(A,D)]^2 = -4 \cdot [d(A,B)]^2.$

Posto $d(A,B) = x$ si ha: $d(A,B) = 10$

Applicazione 14: Sia M il punto di intersezione delle diagonali [A,D] e [C,B] del quadrilatero Q(J), con

J = (A,B,C,D). Sapendo che d(A,B) = $\sqrt{5}$, d(A,C) = 2 $\sqrt{10}$, d(B,C) = 7, d(B,D) = 3$\sqrt{5}$ e che $\frac{d(A,M)}{d(M,D)} = \frac{2}{3}$ (5,17)
calcolare d(A,D).



Dalla (5,17) si ricava l'insieme completo: I_1=(3 ·A, – 5 ·M, 2 ·D). Attribuendo a M la massa – 5 e al punto B la massa x, l'insieme completo avente sostegno (C,M,B), formalmente, diviene:
I_2 = [x · B, – 5 · M, (5 – x) · C]. Sottraendo I_2 a I_1 si ricava l'insieme completo:
I = I_1 – I_2 = [3 · A, 2 · D, – x · B, (x – 5) · C].

Posto H = (2 D, – 2B), applicando il *TH.12* a I si ha:
$(I - H)^2 = H^2$, da cui: $[3 \cdot A, (2-x) \cdot B, (x-5) \cdot C]^2 = (2 \cdot D, -2 \cdot B)^2$.
Svolgendo si ha:
$49x^2 - 448x + 880 = 0$ e quindi : $x_1 = \frac{44}{7}$, $x_2 = \frac{20}{7}$.

Sostituendo la x dell'insieme I con x_1 e x_2 si ottengono, rispettivamente, i due insiemi completi:
I′ = (21 · A, 14 · D, – 44 · B, 9 · C)
I″ = (21 ·A, 14 · D, – 20 · B, – 15 · C).

Solo l'insieme completo I″si riferisce al quadrilatero Q(J).

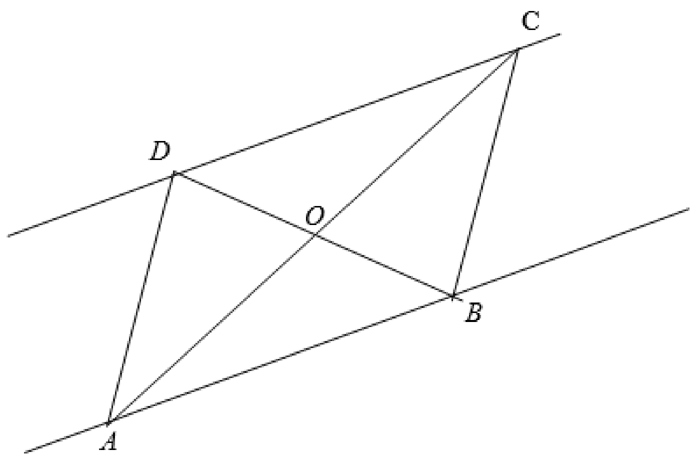
Infatti, i punti di I′ non sono tutti esterni pertanto non sono vertici di un quadrilatero.

Per calcolare d(A,D) applichiamo ancora il *TH.12*:
$[\, I'' \cup (-14 \cdot D, 14 \cdot A)]^2 = (-14 \cdot D\, , 14 \cdot A)^2$.

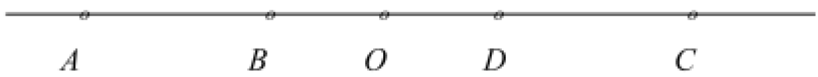
Svolgendo l'equazione
$(35 \cdot A, -20 \cdot b, -15 \cdot c)^2 = (-14 \cdot D, 14 \cdot A)^2$ si ha:
$-700\, [d(A,B)]^2 + 300\, [d(C,B)]^2 - 525[d(A,C)]^2 = -14^2\, d(A,D)]^2$
da cui $d(A,D) = 5\sqrt{2}$

6 - Figure geometriche elementari

Def.4: Un insieme quaternario J di punti del piano π è detto "insieme quaternario di punti paralleli" se ha un centro di simmetria.



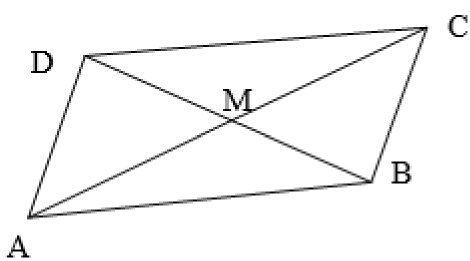
Nota 7: Sia J = (A,B,C,D) un insieme quaternario di punti paralleli essendo A e C simmetrici rispetto al centro O, e così B e D. I segmenti [A,C] e [B,D] sono le diagonali del parallelogramma P(J). Nel caso che J contenga punti allineati diciamo che P(J) è un parallelogramma improprio.



Sia P(J), con J = (A,B,C,D), il parallelogramma le cui diagonali, intersecandosi nel punto medio O, siano [A,C] e [B,D]. I punti degli insiemi J_1 = (A,B,O) e J_2 = (C,D,O), sono i vertici di triangoli congruenti così come J_3 = (A,D,O) e J_4 = (C,B,O); conseguentemente è facile dedurre che d(A,B) = d(D,C) e d(A,D) = d(B,C) e che le rette r_1 e r_2, passanti, rispettivamente, per i lati opposti (A,B) e (D,C) del parallelogramma P(J), sono parallele. Analogamente, anche le rette passanti per (A,D) e (B,C) sono parallele.

Def.5: I segmenti [A,B] e [C,D], lati opposti di un parallelogramma, sono detti paralleli e scriviamo: [A,B] // [C,D]

Th.13: Sia M il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del poligono P(J), con J = (A,B,C,D). Condizione necessaria e sufficiente affinché P(J) sia un parallelogramma è che risulti completo l'insieme I = (A, C, – B, – D).



Condizione necessaria: Sia P(J) un parallelogramma ed M il punto medio delle diagonali [A,C] e [B,D]. Risultano completi gli insiemi I′ = (A, – 2 M, C) e I′′ = (B – 2 M, D). Effettuando la differenza dei due insiemi si ha: I=I′∪[(– 1) I′′]=(A, C, – B, –D).

Condizione sufficiente Sia I= (A, C, – B, – D) un insieme completo; scelti due punti materiali di I, con masse eguali, ad esempio A e C, risulta completo l'insieme I′ = (A, – 2 X, C), essendo 2 X il complementare di (A,C). Sottraendo I′ a I si ottiene l'insieme completo: I′′= I′ – I = (B, – 2 X, D).

Confrontando le masse di I′ e I′′ si deduce che X è il punto medio di (A,C) e (B,D).

Nota.8: Il *TH.13* non solo permette di classificare, mediante l'insieme completo I = (A, C, –B, –D), la figura geometrica avente per estremi i punti (A,B,C,D), ma permette di riconoscere gli estremi di ciascuna diagonale e di ciascun lato del parallelogramma: coppie di punti materiali di segno concorde sono estremi di diagonali, coppie di punti materiali di segno discorde sono estremi di lati.

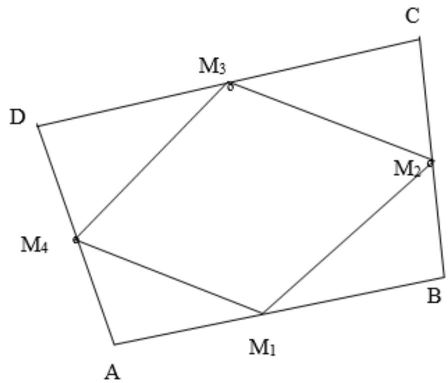
Applicazione 15: Siano [A,C] e [B,D] le diagonali di un quadrilatero Q(J), con J = (A,B,C,D) .

Mostrare che i punti medi M_1, M_2, M_3, M_4, rispettivamente, dei lati [A,B], [B,C], [C,D], [D,A], sono i vertici di un parallelogramma.

Essendo M_1 punto medio di (A,B) risulta completo l'insieme I_1 = (A, – 2 M_1 , B).

Analogamente risultano completi gli insiemi I_2 = (B, – 2 M_2 , C), I_3 = (C, – 2 M_3 , D), I_4 = (D, – 2 M_4 , A).

Effettuando l'unione: $I_1 \cup [(-1)\, I_2] \cup I_3 \cup [(-1)\, I_4]$ si ha:



(A, – 2 M_1, B, – B, 2 M_2, – C, C, – 2 M_3, D, – D, 2 M_4, – A) =
= 2 (– M_1, M_2,– M_3, M_4) equivalente a I = (– M_1, M_2, – M_3, M_4).

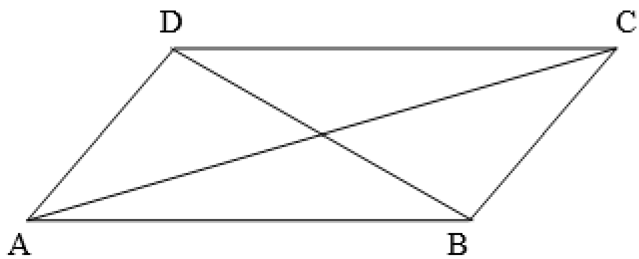
Per il *TH.13* Q(J), con J = (M_1, M_2, M_3, M_4), è un parallelogramma.

Def.6: È detto rettangolo il parallelogramma le cui diagonali sono congruenti.

Th.14: Se P(J), con J = (A,B,C,D), è un rettangolo, allora, l'insieme completo I = (A, C, – B, –D), con sostegno J, è un divisore dello zero.

Infatti, essendo M il punto medio di entrambe le coppie (A, C) e (B,D), si ha:
d(A,M) = d(M,C) = d(B,M) = d(M,D) = r pertanto gli elementi di J appartengono ad una circonferenza di raggio eguale a r. Per il *TH.10* si ha $P \cdot I = 0$.

Applicazione 16: Due lati consecutivi del parallelogramma P(J), con J = (A,B,C,D), siano [A,B] e [A,D]. Sia nota una delle due diagonali di P(J): d(D,B)= c; trovare la diagonale d(A,C).



Sia I = (A,–B, C, –D) l'insieme completo di P(J). Per il *TH.12* si ha: $[I-(C,-A)]^2=(C,-A)^2$ da cui $(2A,-B,-D)^2=(C,-A)^2$.

Sviluppando si ha:
$-2\,[d(A,B)]^2+[d(B,D)]^2-2\,[d(A,D)]^2=-[d(A,C)]^2$.

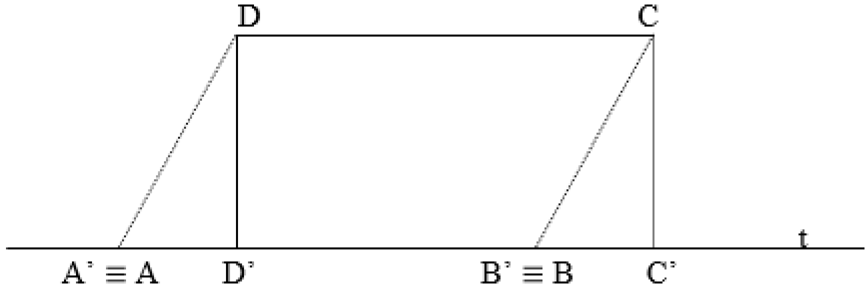
Posto d(A,B)= a e d(A,D)= b la precedente diviene:
$[d(A,C)]^2 = 2\,a^2+2b^2-c^2$ e $d(A,C)=\sqrt{2\,a^2+\,2\,b^2-c^2}$.

Def.7: Sia I = (A, – B , C, – D) un insieme completo e J = (A,B,C,D) il relativo sostegno. Il prodotto di un punto di J per I, diviso per 2, è detto prodotto scalare del parallelogramma.

I prodotti scalari di I sono: $\frac{1}{2}A\cdot I,\ -\ \frac{1}{2}\ B\cdot I,\ \frac{1}{2}C\cdot I,\ -\ \frac{1}{2}\ D\cdot I.$

Th.15: Sia I = (A, – B, C, – D) l'insieme completo avente sostegno J=(A,B,C,D), insieme dei vertici del parallelogramma P(J).

Siano A', B', C', D' (con A' ≡ A, B' ≡ B) le proiezioni ortogonali, rispettivamente, dei punti A, B, C, D sulla retta t passante per gli estremi del lato [A, B] di P(J).



Si ha:

1. $I^t = (A', -B', C', -D')$ è un insieme completo;
2. per un qualsiasi punto P si ha: $P \cdot I = P \cdot I^t$;
3. posto $d(A,D') = \delta$ e $d(A,B) = a$, si ha: $\frac{1}{2} A \cdot I = \pm \delta \cdot a$.

1. I punti dell'insieme $J° = (D, C, D', C')$, essendo D′ e C′ le proiezioni ortogonali di D e C sulla retta t, sono i vertici del rettangolo P(J°) pertanto:

$I° = (D, -C, C', -D')$ è completo ed è divisore dello zero:

$$P \cdot I° = 0 \qquad (6,1)$$

Indichiamo con I^t l'insieme completo, unione dei due insiemi completi: I e I°, si ha:

$$I \cup I° = (A, -B, C, -D, D, -C, C', -D') = (A, -B, -D', C') = I^t \qquad (6,2)$$

da cui risulta che l'insieme $I^t = (A', -B', C', -D')$ è completo.

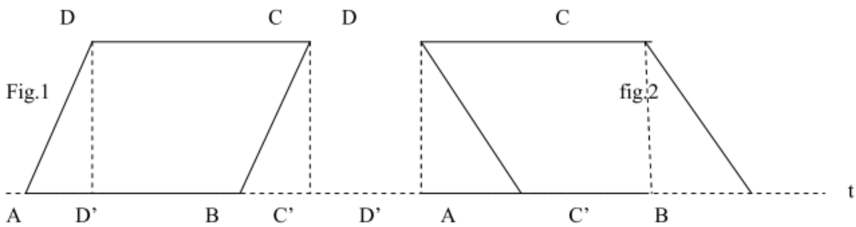
2. Dalla (6,2) si ha: $I \cup I° = I^t$. Moltiplicando entrambi i membri per P si ha: $P \cdot (I \cup I°) = P \cdot I^t$.

Svolgendo, tenendo conto della (6,1), si ha:

$$P \cdot I^t = P \cdot (I \cup I°) = P \cdot I + P \cdot I° = P \cdot I + 0 = P \cdot I \qquad (6,3)$$

3. Posto $d(A,B)=d(D,C)=d(D',C')=a$, $d(A,D')=d(B,C')=\delta$, si ha:

$$d(A,C') = a \pm \delta \qquad (6,4)$$

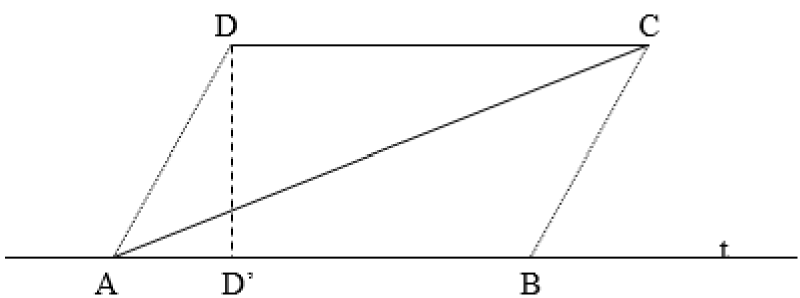


In fig.1) d(A,C') = a + δ; in fig.2) d(A,C') = a – δ

Sostituendo A con P nella (6,3) si ha: $A \cdot I = A \cdot I^t$ da cui $A \cdot I = -[d(A,D')]^2 - [d(A,B)]^2 + [d(A,C')]^2 = -\delta^2 - a^2 + (a \pm\delta)^2 = \pm 2\, a\, \delta$ e quindi $\frac{1}{2}\ A \cdot I = \pm\, a \cdot \delta$.

Risultati analoghi si ottengono proiettando ortogonalmente i punti di J su rette passanti per (B,C), (C,D), (D,A).

Applicazione 17: Sia [A,C] la diagonale del parallelogramma P(J) con J = (A,B,C,D) e risulti D(A,C) = c. Sia [A,B] un qualsiasi lato di P(J) e risulti d(A,B) = d(D,C) =a. Sia t la retta passante per A e B. Il punto D′ sia la proiezione ortogonale di D su t; essendo D′ interno a [A,B] risulti: d(A,D′) = δ. Trovare d(A,D).



Essendo I = (A, –B, C, –D) l'insieme completo con sostegno J, posto d(A,D) = x, si ha:

$\frac{1}{2}$ A · I= $\frac{1}{2}$ {–[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 –[d(A,D)]^2} =
= d(A,D') · d(A,B) da cui

$$\frac{1}{2}(-a^2 + c^2 - x^2) = \delta \cdot a,\ x^2 = c^2 - a^2 - 2\,\delta \cdot a$$

da cui d(A,D) = $\sqrt{c^2 - a^2 - 2\,\delta \cdot a}$

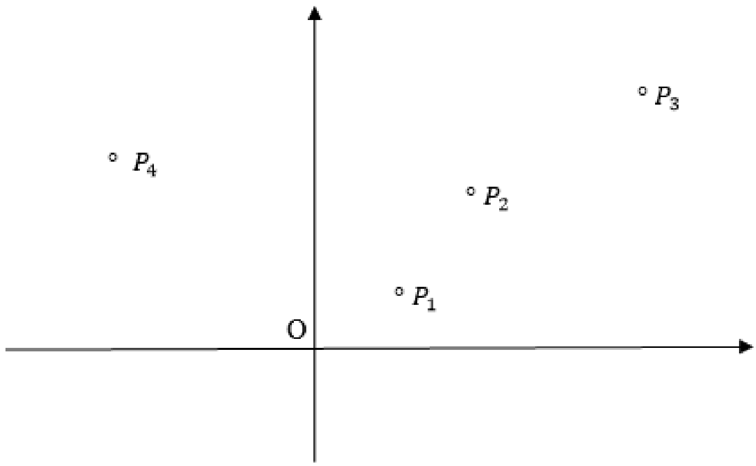
NOTA 9: Le proprietà degli insiemi completi permettono di risolvere problemi conoscendo sia le distanze sia le posizioni dei punti definite mediante coordinate cartesiane. Il metodo analitico di risoluzione dei problemi si fonda sul *TH.7* contenuto nell'articolo "*Insiemi completi del 3° ordine*" pubblicato sul N.1 della rivista "Periodico di matematica", giugno – dicembre 2019. Del *TH.7* ricordiamo, di seguito, l'enunciato:

Th.16: L'insieme J = (P_1,P_2,P_3,P_4) contenga terne di punti non allineati, appartenenti al piano π sul quale sia fissato un qualsiasi sistema cartesiano ortonormale (O,x,y), mediante il quale risulti: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_4 = (x_4, y_4)$.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché l'insieme

I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4), con $m_i \in$ R, sia completo, sono le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0 \\ m_1y_1 + m_2y + m_3y_3 + m_4y_4 = 0 \end{cases}$$



Th.17 Mediante un sistema di assi ortonormali risulti così individuata una terna di punti del piano π: A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3). Affinché l'insieme I = (A, – B, Q, – C) sia completo, essendo P(J) un parallelogramma con J = (A,B,C,Q), il punto Q deve risultare individuato dalle coordinate: $x = -x_1 + x_2 + x_3$, $y = -y_1 + y_2 + y_3$.

Se I è completo, posto Q = (x,y), per il *TH.16* deve risultare soddisfatto il seguente sistema:

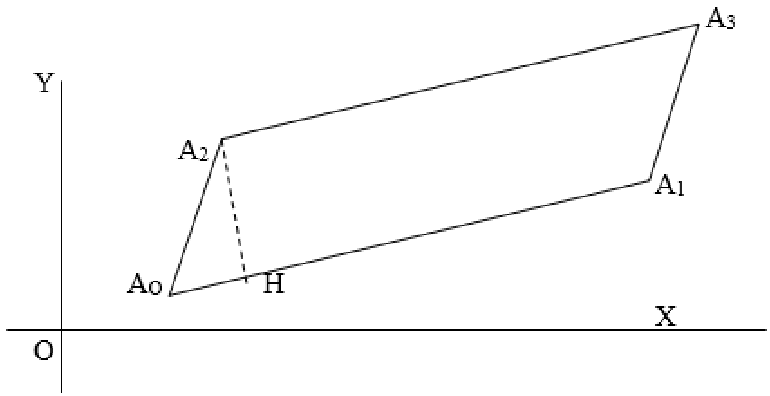
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x = 0 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y = 0 \end{cases}$ da cui la tesi: $\begin{cases} x = -x_1 + x_2 + x_3 \\ y = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$

Ricaviamo nella successiva applicazione 18 il prodotto scalare essendo note le coordinate del parallelogramma.

Applicazione 18: Sia I = $(A_O, -A_1, -A_2, A_3)$ un insieme completo e risulti:

A_o,= (x_o, y_o), A_1,= (x_1, y_1), A_2,= (x_2, y_2).

Calcolare $d(A_O,A_1) \cdot d(A_O, H)$ essendo H la proiezione ortogonale di A_2 su $[A_O, A_1]$



Essendo I completo, dal *TH. 17*, posto $A_3 = (x, y)$, si ha:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 - x_2 + x = 0 \\ y_0 - y_1 - y_2 + y = 0 \end{cases}$$

da cui $A_3 = (-x_o + x_1 + x_2, -y_o + y_1 + y_2)$.

Per il *TH.15* si ha:

$d(A_O, A_1) \cdot d(A_O, H) = \frac{1}{2} A_O \cdot I = \frac{1}{2} O \cdot I =$

$= \frac{1}{2} \{[d(O, A_O)]^2 - [d(O, A_1)]^2 - [d(O, A_2)]^2 + [d(O, A_3)]^2\} =$

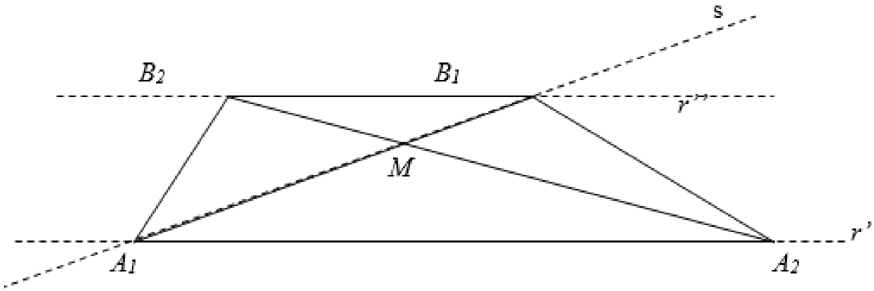
$= \frac{1}{2} [(x_o)^2 + (y_o)^2 - (x_1)^2 - (y_1)^2 - (x_2)^2 - (y_2)^2 + (-x_o + x_1 + x_2)^2$
$+ (-y_o + y_1 + y_2)^2$

da cui $\frac{1}{2} O \cdot I = (x_o - x_1)(x_o - x_2) + (y_o - y_1)(y_o - y_2)$.

Naturalmente, se $A_O = (0, 0)$, si ha: $\frac{1}{2} A_O \cdot I = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

7– Il trapezio

Def.8: I punti B_1, B_2 siano i corrispondenti, rispettivamente, di A_1, A_2 secondo l'omotetia $\sigma_{M,K}$ di centro M e rapporto K: $\sigma_{M,K}(A_i) = (B_i)$. Il quadrilatero P(J), essendo $J = (A_1, A_2, B_1, B_2)$, è detto trapezio.



NOTA 10: Nel caso di omotetia inversa, essendo: $\sigma_{M,K}(A_1)=(B_1)$, $\sigma_{M,K}(A_2)=(B_2)$, i segmenti $[A_1, B_1]$ e $[A_2, B_2]$ sono le diagonali del trapezio. Corrispondendosi gli insiemi $J_1 = (A_1, A_2, M)$ e $J_2 = (B_1, B_2, M)$ mediante omotetia, i triangoli $T(J_1)$, $T(J_2)$ sono simili, posto $d(A_1,A_2) = a$, $d(B_1,B_2) =b$, si ha:

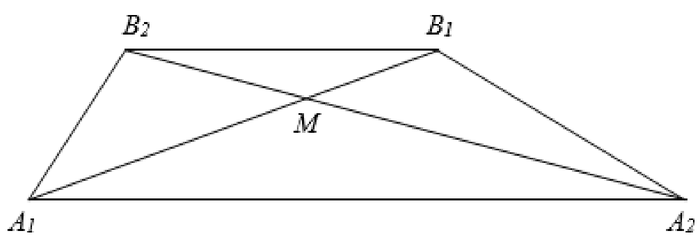
$$\frac{d(A_1\ M)}{d(B_1\ M)} = \frac{d(A_2\ M)}{d(B_2\ M)} = \frac{d(A_1 A_2)}{d(B_1 B_2)} = \frac{a}{b}$$

Dalla corrispondenza indotta dalla omotetia $\sigma_{M,K}$ risulta, inoltre, che le rette r' e r'', passanti, rispettivamente, per (A_1,A_2) e (B_1, B_2), sono parallele.

TH.18: Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A_1,B_1]$ e $[A_2, B_2]$ di un quadrilatero $T(J)$ con $J = (A_1,A_2,B_1,B_2)$. La completezza di

$$I = (b\,A_1, -b\,A_2, a\,B_1, -a\,B_2) \qquad (6,5)$$

essendo $d(A_1, A_2) = a$, $d(B_1, B_2) = b$, è condizione necessaria e sufficiente affinché $T(J)$ sia un trapezio.



Condizione necessaria: EssendoT(J) un trapezio, i triangoli T(J′) e T(J′′), con J′ = (A_1, A_2, M) e J′ = (B_1, B_2, M), per la *nota 10*, sono simili. Posto d(A_1, A_2) = a, d(B_1, B_2) = b, si ha, quindi:

$$\frac{d\,(A_1\;M)}{d(B_1\,M)} = \frac{d\,(A_2\;M)}{d(B_2\,M)} = \frac{d(A_1 A_2)}{d(B_1 B_2)} = \frac{a}{b}\ .$$

Essendo $\frac{d\,(A_1\;M)}{d(B_1\,M)} = \frac{a}{b}$ risulta completo l'insieme

I′ = [b A_1, – (a + b) M, a B_1].

Essendo $\frac{d\,(A_2\;M)}{d(B_2\,M)} = \frac{a}{b}$ risulta completo l'insieme

I′′ = [b A_2, – (a + b) M, a B_2].

Sottraendo: I′ – I′′ = I = [b A_1, – (a + b) M, a B_1 –, b A_2, (a + b) M, – a B_2] si ottiene l'insieme completo:

I = (b A_1, a B_1, – b A_2, – a B_2).

Condizione sufficiente: Sia – (a + b) M il complementare dei punti materiali b ·A_1, a ·B_1 di I; l'insieme
I′ = [b A_1, – (a + b) M, a B_1] è completo. Anche l'insieme
I′′= I′– I = [b A_1, – (a + b) M, a B_1, –b A_1, b A_2, – a B_1, a B_2] =
= [a A_2, – (a + b) M, a B_2] è completo.

Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo:
I′ = [b A_1, – (a + b) M, a B_1] completo, si ha $\frac{d\,(A_1\;M)}{d(B_1\,M)} = \frac{a}{b}$; analogamente essendo I′′=[b A_2, –(a + b) M, a B_2] completo, si ha $\frac{d\,(A_2\;M)}{d(B_2\,M)} = \frac{a}{b}$. L'eguaglianza dei due rapporti, $\frac{d\,(A_1\;M)}{d(B_1\,M)} = \frac{d\,(A_2\;M)}{d(B_2\,M)}$ evidenzia la corrispondenza $\sigma_{M,K}$ fra A_1, B_1 e A_2, B_2 pertanto, per la definizione 8, T(J) è un trapezio.

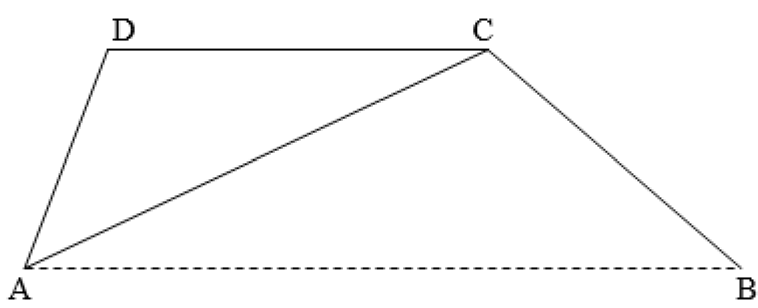
Nota.11: Il *TH.18*, non solo permette di classificare, mediante l'insieme completo I = (a A_1, – a A_2, b B_1, – b B_2), la figura geometrica avente per estremi i punti (A,B,C,D), ma permette di riconoscere gli estremi di ciascuna diagonale e di ciascun lato obliquo del trapezio: punti di I, con masse di segno concorde, sono posizionati agli estremi di una diagonale, punti materiali con massa opposte sono posizionati agli estremi di ciascuna base.

TH.19: Sia I = (x A, – x B, y C, – y D) l'insieme completo avente sostegno J = (A,B,C,D), insieme dei vertici del trapezio T(J). Siano A′, B′, C′, D′ le proiezioni ortogonali, rispettivamente, dei punti A, B, C, D sulla retta passante per gli estremi del lato [A,B] di T(J). Si ha:

1) I = (x A′, – x B′, y C′, – y D′) è un insieme completo;
2) qualunque sia P si ha P · I = P · I′;

È stata omessa la dimostrazione del teorema essendo simile a quella del *TH.15*.

Applicazione 19: Siano [A,D] e [B,C] i lati obliqui del trapezio P(J) con J = (A,B,C,D) e risulti d(A,D) = 3 $\sqrt{5}$, d(B,C) = 6$\sqrt{2}$. Sia [D,C] la base minore e [A,C] una diagonale di P(J) e risulti: d(D,C) = 5, d(A,C) = 10. Trovare d(A,B) e d(D,B) essendo [A,B] la base maggiore e [D,B] la diagonale di P(J).



Posto d(A,B) = x, per il TH.8, l'insieme completo con sostegno J è: I = (5 A, – 5 B, x C, – x D).

Determiniamo la x utilizzando il *TH.12*:
$[I - (5\ C - 5\ B)]^2 = (5\ C - 5\ B)^2$. Sviluppando:
$[5\ A, (x - 5)\ C, - x\ D]^2 = - 25\ [d(B,C)]^2$
$5(x-5)\ [d(A,C)]^2 - x(x-5)[d(D,C)]^2 - 5x[d(D,A)]^2 = - 25\ [d(B,C)]^2$.

Sostituendo i dati numerici: $x^2 - 16\ x + 28 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = 14$ e $x_2 = 2$

Caso a) Per $x_1 = 14$ si ha $I_1 = (5\ A, - 5\ B, 14\ C, - 14\ D)$.

Per calcolare d(A,B) applichiamo il *TH.12*; si ha:
$[I_1 - (5\ A, - 5\ B)]^2 = (5\ A, - 5\ B)^2$ e quindi
$(14\ C, - 14\ D)^2 = (5\ A, -5\ B)^2$, $25\ d(A,B)^2 = 196 \cdot 25$, $d(A,B)=14$.

Procedendo in modo analogo calcoliamo d(B,D):
$[I_1 - (5\ D, - 5\ B)]^2 = (5\ D, - 5\ B)^2$.

Sviluppando si ha: $(5\ A, 14\ C, - 19\ D)^2 = (5\ D, - 5\ B)^2$ da cui $d(B,D) = \sqrt{157}$

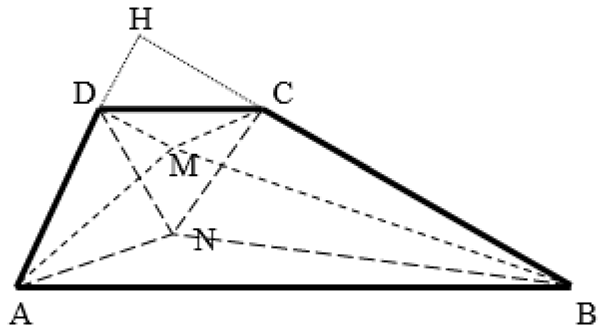
Caso b) Per $x_2 = 2$ l'insieme completo è
$I_2 = (5\ A, -5\ B, 2\ C, -2\ D)$. Per il calcolo delle distanze d(A,B) e d(D,B) si procede come nel caso a).

Applicazione 20: Sia

$$I = (x\ A, -x\ B, y\ C, -y\ D) \tag{6,6}$$

l'insieme completo con sostegno J = (A,B,C,D). Siano r e s le rette passanti per (A,D) e (B,C); essendo $r \cap s = H$, si ha: $d(H,D) = 2\sqrt{5}$. Essendo M e N due punti del piano π contenente J, si ha: $d(M,A) = 3\sqrt{2}$, $d(M,B) = \sqrt{17}$, d(M,C) = $3\sqrt{5}$, d(M,D) = 3, d(N,A) = $\sqrt{29}$, d(N,B) = $2\sqrt{26}$, d(N,C) = $4\sqrt{2}$, d(N,D) = $2\sqrt{5}$. Rappresentare la figura geometrica T(J) e calcolare d(A,D) e d(B,C).

Risulta (vedere *TH.18* e *nota 11*) che T(J) è un trapezio: [A,C] e [B,D] sono le diagonali, [A,.D] e [B,C] sono i lati obliqui, [A,B], [D,C] sono le basi, pertanto si ha:



Essendo I completo si ha: M · I = N · I. Sviluppando si ha:
$x\,[d(M,A)]^2 - x\,[d(M,B)]^2 + y\,[d(M,C)]^2 - y\,[d(M,D)]^2 =$
$= x\,[d(N,A)]^2 - x\,[d(N,B)]^2 + y\,[d(N,C)]^2 - y\,[d(N,D)]^2$.

Sostituendo si ha:
$-135\,x + 36\,y = -75\,x + 12\,y$ da cui $y = \frac{5}{2}\,x$.

Posto y = 5 si ha: x = 2 e la (6,6) diviene
I = (2 A, – 2 B, 5 C, –5 D). Tenendo conto della *nota 10* si ha:
$\frac{d(A,B)}{d(C,D)} = \frac{5}{2}$. Essendo simili i triangoli di vertici (A,B,H) e (D,C,H) si ha: $\frac{d(H,A)}{d(H,D)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)} = \frac{5}{2}$ da cui:
$d(H,A) = d(H,D) \cdot \frac{5}{2} = 5\sqrt{5}$.

Analogamente, essendo $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{5}{2}$, posto d(H,C) = 2 z, si ha

$$d(H,B) = 5\,z \qquad (6,7)$$

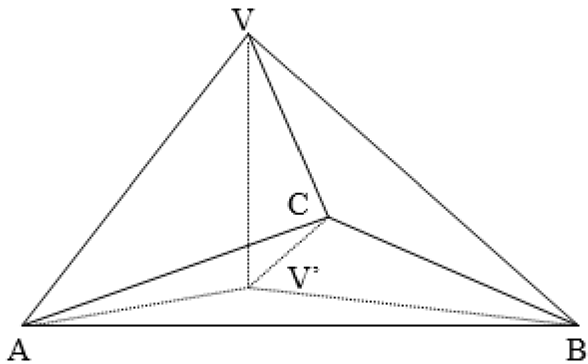
Essendo $M \cdot I = H \cdot I$ si ha:
$2\,[d(M,A)]^2 - 2\,[d(M,B)]^2 + 5\,[d(M,C)]^2 - 5\,[d(M,D)]^2 =$
$= 2\,[d(H,A)]^2 - 2\,[d(H,B)]^2 + 5\,[d(H,C)]^2 - 5\,[d(H,D)]^2$
$2 \cdot 18 - 2 \cdot 153 + 5 \cdot 45 - 5 \cdot 9 = 2 \cdot 125 - 50 \cdot z^2 + 20 \cdot z^2 - 5 \cdot 20$ da cui $z^2 = 8$.

Sostituendo nelle (6,2) si ha: $d(H,C) = 4\sqrt{2}$, $d(H,B) = 10\sqrt{2}$.

I lati obliqui sono: $d(A,D) = d(H,A) - d(H,D = 3\sqrt{5}$, : $d(B,C) = d(H,B) - d(H,C) = 6\sqrt{2}$.

NOTA 12: Un insieme completo di punti materiali avente per sostegno una terna di punti allineati permette di risolvere problemi geometrici sia nell'ambito dello spazio bidimensionale che tridimensionale; altrettanto un insieme completo di punti materiali avente per sostegno una quaterna di punti complanari non solo può essere impiegato per la risoluzione di problemi nello spazio bidimensionale ma anche tridimensionale.

Applicazione 21: Sia V il vertice di una piramide con base triangolare T(J) con J = (A,B,C) essendo $d(A,B) = 8$, $d(B,C) = 2\sqrt{5}$, $d(A,C) = 2\sqrt{13}$. Sapendo che $d(V,A) = 6$,
$d(V,B) = 2\sqrt{5}$, $d(V,C) = 2\sqrt{3}$, trovare l'altezza della piramide relativa alla base T.



Sia V′ la proiezione ortogonale di V sul piano π individuato da A,B,C. Posto d(V,V′) = y, si ha:
$[d(A,V')]^2 = [d(A,V)]^2 - [d(V,V')]^2 = 36 - y^2$. Analogamente, si ha: $[d(B,V')]^2 = 20 - y^2$, $[d(C,V')]^2 = 12 - y^2$. L'insieme completo avente sostegno J = (A,B,C,V′) è:
I = [m A, n B, C, – (n + m + 1) V′]. Per calcolare m e n risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ B \cdot I = C \cdot I \end{cases}$$ Sviluppando si ha:

$$\begin{cases} n[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 - (m+n+1)[d(A,V')]^2 = \\ = m[d(A,B)]^2 + [d(CB)]^2 - (m+n+1)[d(V',B)]^2 \\ \\ m[d(A,B)]^2 + [d(B,C)]^2 - (m+n+1)[d(B,V')]^2 = \\ = m[d(A,C)]^2 + n[d(B,C)]^2 - (m+n+1)[d(V',C)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n - 5m + 1 = 0 \\ n + m - 1 = 0 \end{cases}$$ da cui $m = \frac{1}{2}$ e $n = \frac{1}{2}$

Sostituendo in I e moltiplicando per 2 si ha: I = (A,B,2C,–4V′). Applicando il *TH.12* si ha:
$[(A, B, 2\,C, -4\,V') \cup (4\,V', -4\,A)]^2 = (4\,V', -4\,A)^2$

$(B, 2\,C, -3\,A)^2 = (4\,V', -4\,A)]^2$

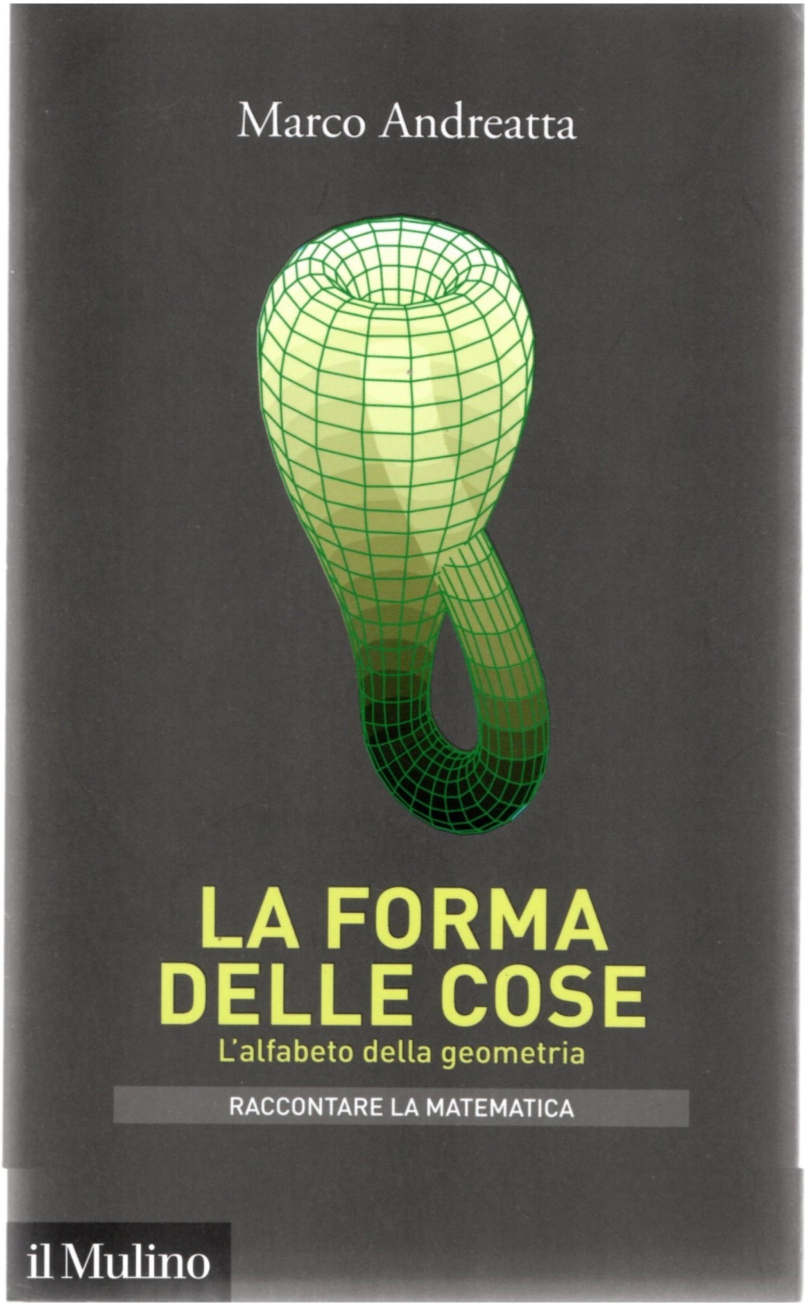
$[-3\,d(A,B)]^2 + 2\,[d(B,C)]^2 - 6[d(A,C)]^2 = -16[d(V',A)]^2$ da cui $[d(V',A)]^2 = 29$;

essendo $[d(V,V')]^2 = [d(V,A)]^2 - [d(V',A)]^2$ si ha $d(V',V) = \sqrt{7}$.

Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). "Insiemi di punti materiali", «*Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). "Insiemi completi del terzo ordine". «*Periodico di Matematica*», Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019.


Marco Andreatta
LA FORMA
DELLE COSE
L'alfabeto della geometria
RACCONTARE LA MATEMATICA
il Mulino