Una proposta didattica per l'insegnamento della relatività

Andrea Lanzillo*

*Docente nel liceo scientifico-linguistico A.M De Carlo di Giugliano (Na); alanzilllo@libero.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.092

Sunto*: Questo articolo descrive una proposta didattica riguardante la teoria della relatività di Einstein. A partire dalle trasformazioni galileiane e con una semplice ipotesi, si ricava il fattore gamma e quindi le trasformazioni di Lorentz, da qui si determinano le leggi della contrazione della lunghezza e quella della dilatazione dei tempi. Poi, dopo aver introdotto il principio di equivalenza, si considera il fenomeno della dilatazione dei tempi in prossimità della massa e infine se ne dà un'applicazione ai satelliti GPS*

Parole Chiave*: Lorentz, contrazione, dilatazione, massa*

Abstract*: This article describes a didactic proposal regarding Einstein's theory of relativity. Starting from the Galilean transformations and with a simple hypothesis, we obtain the gamma factor and therefore the Lorentz transformations, from here we determine the laws of length contraction and that of time dilation. Then, after introducing the principle of general relativity, the phenomenon of time dilation near the mass is considered and finally applied to GPS satellite.*

Keywords*: Lorentz, contraction, dilation, mass*

1 - Premessa

Le Indicazioni nazionali per il Liceo scientifico prevedono al quinto anno lo studio della relatività ristretta e le leggi della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi. Solitamente i libri di testo riportano questi argomenti seguendo più o meno lo stesso percorso che si concretizza nelle seguenti fasi: descrizione dell'esperienza di Michelson e Morley, tempo misurato da un orologio a luce e deduzione del fattore gamma, derivazione della legge di dilatazione dei tempi e quella della contrazione delle lunghezze, vengono poi proposte le conferme sperimentali. Si aggiunge quindi a questo percorso il riferimento alle trasformazioni galileiane affermando che esse non sono più valide in generale e vanno quindi modificate. Vengono quindi enunciate le trasformazioni di Lorentz che, per basse velocità, restituiscono proprio quelle galileiane. Questo approccio può essere definito come la scaletta della tradizione didattica "alla Resnick"[1] che così si compone:

- situazione di fine '800 (esperimento di Michelson-Morley)
- la relatività come la teoria che ha permesso di risolvere i problemi aperti di fine '800
- i postulati e le sue conseguenze (effetti relativistici)
- prove sperimentali e applicazioni tecnologiche

La scaletta ricalca la struttura dell'articolo di Einstein del 1905 (salvo alcuni importanti cambiamenti, come il ruolo dell'esperimento di M&M).

[1]https://www.lfns.it/STORIA/Scuola_2017/20_febbraio/3levrini_RR/Levrini_Cagliari_RR.pdf

A mio avviso, si può proporre lo studio degli argomenti di relatività previsti dalle Indicazioni nazionali con un percorso alternativo che si fonda su alcune conoscenze di fisica già possedute dagli alunni e su una tecnica, utilizzata spesso anche in geometria analitica, che è quella del calcolo del valore di un parametro corrispondente a condizioni assegnate. Il percorso che propongo mi sembra molto lineare e costituisce un modo diretto per arrivare ai risultati della relatività. Inoltre, sempre perché utilizzo degli strumenti concettuali molto semplici e quindi anche alla portata degli alunni, mi spingo a fare qualche considerazione su un aspetto della relatività generale che è quello della dilatazione dei tempi dovuto alla gravità, che non sempre si trova nei libri di testo. Beninteso, se si vuole poi discutere anche dei tentativi fatti dai fisici per conciliare i risultati della fisica classica con quelli derivanti dalle equazioni di Maxwell considerando, in particolare, l'esistenza dell'etere e di un sistema di riferimento assoluto ad esso solidale, occorrerà progettare un altro intervento didattico e contestualizzarlo in un percorso diverso come potrebbe essere, ad esempio, quello riguardante la vita di una teoria fisica.

In quello che segue si troveranno le fasi che compongono il percorso da me proposto:

1. Passaggio dalle trasformazioni galileiane a quelle di Lorentz
2. Dilatazione dei tempi
3. Contrazione delle lunghezze
4. Dilatazione del tempo dovuto alla gravità
5. I satelliti GPS

2 - Dalle trasformazioni galileiane a quelle di Lorentz (con una semplice ipotesi)

Di solito in un liceo scientifico le trasformazioni galileiane vengono trattate al terzo anno, durante lo studio della cinematica del punto, quindi sono un prerequisito che si può ritenere posseduto dagli alunni e, riprendendo perciò tale conoscenza, l'insegnante può riproporre le loro espressioni articolando un discorso come il seguente:

Le trasformazioni di Galilei sono:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{1}$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1.1}$$

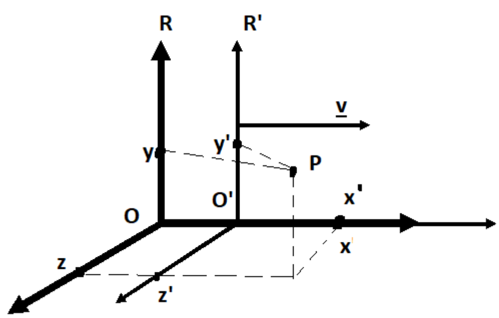

Fig. 1

Per come sono stati fissati i due sistemi di riferimento e per come è diretta la velocità del sistema in moto (parallelamente all'asse x) le coordinate y e z restano legate dalle stesse relazioni e quindi non influiscono su quanto si dirà in seguito. Quindi possiamo scrivere le (1) in modo più sintetico considerando solo la prima e l'ultima equazione dei sistemi precedenti ottenendo:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases} \qquad (2)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \qquad (2.1)$$

Queste equazioni evidenziano che il tempo misurato dall'osservatore O e quello misurato dall'osservatore O′ sono uguali, ossia due orologi identici segnano lo stesso tempo. Adesso occorre innanzitutto osservare che, se si ammettono i postulati della relatività ristretta, i tempi non possono fluire allo stesso modo in sistemi di riferimenti in moto reciproco.

Per evidenziare ciò si possono enunciare i due postulati della relatività ristretta:

Primo principio della relatività ristretta: le leggi e i principi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Secondo principio (principio di invarianza della velocità della luce): la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

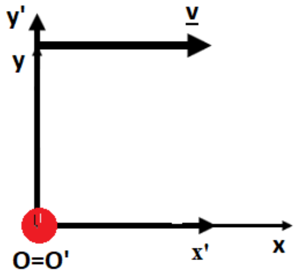

Fig. 2

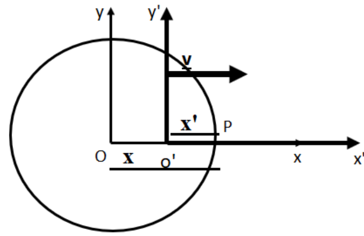

Fig 3

Poi, considerando le figure 2 e 3, dove sono rappresentati il sistema di riferimento fisso R=xOy e quello in moto R′=x′O′y′ in due istanti diversi, si può argomentare dicendo che se nell'istante t=t′=0 i due sistemi sono sovrapposti e se in questo istante viene inviato dall'origine un segnale luminoso, questo si propagherà nello spazio, supposto isotropo, secondo una sfera e, dopo che è trascorso un intervallo di tempo Δt per l'osservatore in R e corrispondentemente un tempo $\Delta t'$ per l'osservatore in R,′ il raggio si troverà nel punto P che avrà ascissa x rispetto al riferimento fisso R e ascissa x′ rispetto a quello in moto R′, con $x \neq x'$ come si vede dalla figura. Dato che le ascisse di P in R e R′ rappresentano anche lo spazio percorso dal raggio luminoso si ha

$$x = c \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad x' = c \cdot \Delta t'$$

E poiché $x \neq x'$ non può essere $\Delta t = \Delta t'$

Questo dimostra che il tempo misurato dai due osservatori non può fluire allo stesso modo. Quindi non è possibile postulare l'esistenza di un tempo assoluto e occorre trovare una relazione tra i tempi misurati dai due osservatori O ed O′, indichiamo per il momento tali relazioni in modo generico così: $t = t(variabili)$ (invece di t=t′) e $t' = t'(variabili)$ (invece di t′=t)

Adesso occorre modificare le trasformazioni galileiane in modo che sia rispettato il secondo principio della relatività ristretta e sia formulabile una legge che metta in relazione i tempi nei due sistemi di riferimento. E′ ovvio che vi sono molteplici possibilità di modificare un'espressione, però ci si può limitare ad una delle più semplici, se non la più semplice, che consiste nell'introdurre un parametro moltiplicativo k. Pertanto si può modificare la prima delle equazioni galileiane (2) moltiplicandola per un parametro positivo k il cui valore è da calcolare imponendo che la velocità della luce sia c nei due sistemi di riferimento R e R′ in moto relativo. Introducendo la costante k e osservando che non è possibile postulare l'esistenza di un tempo assoluto, le (2) diventano

$$\begin{cases} x = k(x' + vt') \\ t = t(variabili) \end{cases} \qquad (3)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) \\ t' = t'(variabili) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Adesso si consideri l'istante t=0 e si ammetta che i due sistemi di riferimento siano coincidenti in questo istante, se in tale istante viene emesso un raggio luminoso dall'origine, esso si muoverà con velocità c sia in R che in R′, perciò dopo un intervallo di tempo t=t-0 per l'osservatore O e dopo un intervallo di tempo t′=t′-0 per l'osservatore O′, il raggio luminoso avrà percorso una distanza x in R e una distanza x′ in R′, applicando la definizione di velocità si ha:

$$c = \frac{x}{t} \quad in\ R \qquad (4)$$

e $c = \frac{x'}{t'} \quad in\ R'$ (4.1)

Da qui si ricava rispettivamente:

$$x = c \cdot t \quad \text{e} \quad x' = c \cdot t'$$

Sostituendo nella prima delle (3) e (3.1) si ha

$$x = k(c \cdot t' + vt') = kt'(c + v) \text{ e}$$

$$x' = k(c \cdot t - vt) = kt(c - v),$$

moltiplicando membro a membro si ha

$$x \cdot x' = k^2 t' t(c^2 - v^2)$$

e dividendo per tt′ si ottiene:

$$\frac{xx'}{tt'} = k^2(c^2 - v^2)$$

ossia

$$\frac{x}{t}\frac{x'}{t'} = k^2(c^2 - v^2)$$

e ricordando le (4) si ha:

$$c^2 = k^2(c^2 - v^2) \qquad (5)$$

da cui

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

e quindi:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6)$$

che è il fattore gamma

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Adesso occorre determinare la relazione tra i tempi dei due osservatori O ed O′.

Dalla prima delle (4) si ha:

$$t = \frac{x}{c} = \frac{\gamma(x' + vt')}{c} = \gamma\left(\frac{x'}{c} + \frac{vt'}{c}\right) \qquad (7)$$

dalla (4.1) si ha $\frac{x'}{c} = t'$, cioè $ct' = x'$ e dividendo per c^2 si ha: $\frac{t'}{c} = \frac{x'}{c^2}$ e sostituendo nella (7) si ottiene

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Pertanto si ricavano le equazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (8)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \qquad (8.1)$$

Da queste relazioni si possono determinare quella della dilatazione dei tempi e l'altra, della contrazione delle lunghezze.

3 - Dilatazione dei tempi

Occorre prima precisare il concetto di tempo proprio e di tempo non proprio di un fenomeno. Il tempo proprio è la durata del fenomeno misurata da un osservatore che si trova nello stesso riferimento in cui si svolge il fenomeno, mentre il tempo non proprio è la durata misurata da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento in moto rispetto a quello in cui avviene il fenomeno. Per trovare la relazione tra questi due tempi consideriamo i due sistemi di riferimento R ed R' con R' in moto rispetto a R con velocità $\vec{v}$. Se un fenomeno avviene in R' allora l'osservatore O' ne misurerà il tempo proprio, Δt_0, mentre O misurerà quello non proprio, Δt. Si vuole dimostrare la relazione:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0. \qquad (9).$$

A questo scopo detta x' la posizione dell'osservatore O' in R', si può affermare che l'evento consistente nell'inizio del fenomeno ha coordinate spaziotemporali (x′,t′i) mentre l'evento finale avrà coordinate (x′,t′f). Invece le coordinate spaziotemporali dell'inizio e della fine del fenomeno nel sistema R saranno (xi,ti) e (xf,tf) rispettivamente. Passando al calcolo degli intervalli si ha:

$\Delta t = t_f - t_i$ mentre $\Delta t_0 = t'_f - t'_i$. Per trovare la (9), calcolo Δt applicando la seconda delle (8):

$$\Delta t = t_f - t_i^2 = \gamma\left(t'_f - \frac{vx'}{c^2}\right)^2 - \gamma\left(t'_i - \frac{vx'}{c^2}\right) =$$

$$= \gamma\left(t'_f - \frac{vx'}{c^2} - \mathrm{t}'_i + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

e riducendo i termini opposti si ottiene

$$\Delta t = \gamma\left(t'_f - t'_i\right) = \gamma \Delta t_0$$

e cioè la (9).

(Si sarebbe potuto partire dal calcolo di Δt_0 e ottenere lo stesso risultato con qualche considerazione in più).

Per il prosieguo può essere utile la seguente considerazione: essendo γ>1 segue che $\Delta t > \Delta t_0$ e cioè l'intervallo misurato dall'orologio in moto è più piccolo di quello misurato da un orologio fisso, in altre parole l'orologio in moto rallenta rispetto a quello fisso.

4 - La contrazione delle lunghezze

Occorre definire prima la lunghezza a riposo di un oggetto e poi la sua lunghezza in moto. La lunghezza a riposo di un oggetto è quella misurata da un osservatore rispetto a cui l'oggetto è in quiete, mentre quella in moto è misurata da un osservatore rispetto a cui l'oggetto è in movimento. Per trovare la relazione tra queste due lunghezze consideriamo ancora i due sistemi di riferimento R e R′ con R′ in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto ad R. Sia AB un segmento parallelo all'asse x e solidale ad R′ segue subito che AB è in moto rispetto al riferimento R, perciò l'osservatore O′ di R′ misurerà la lunghezza a riposo l_0 di AB mentre l'osservatore O di R misurerà quella in moto l dello stesso segmento AB. Si vuole dimostrare la relazione:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (10)$$

A questo scopo consideriamo l'osservatore O, egli per poter determinare la lunghezza di AB deve conoscere le ascisse degli estremi in uno stesso istante t siano esse x_A e x_B, segue che le coordinate spaziotemporali degli estremi in R saranno (x_A,t), (x_B,t) e la lunghezza in moto sarà:

$$l=x_B-x_A. \qquad (11)$$

Adesso consideriamo l'osservatore O′, fermo rispetto al segmento AB, egli troverà per gli estremi di AB le coordinate x'_A e x'_B e determinerà la lunghezza a riposo

$$l_0 = x'_B - x'_A. \qquad (12)$$

Ciò premesso e ricordando la prima delle 8.1 si ha:

$$x'_A = \gamma \cdot (x_A - vt) \text{ e } x'_B = \gamma \cdot (x_B - vt)$$

e quindi dalla (12)

$$l_0 = x'_B - x'_A = \gamma \cdot (x_B - vt) - \gamma \cdot (x_A - vt) =$$
$$= \gamma \cdot (x_B - vt - x_A + vt) = \gamma \cdot (x_B - x_A) = \gamma \cdot l$$

ossia:

$$l_0 = \gamma \cdot l$$

e dividendo per γ si ha la (10).

(Si sarebbe pure potuto iniziare dalla (11) e, con qualche passaggio in più, si sarebbe pervenuti alla stessa conclusione).

5 - La dilatazione del tempo dovuta alla gravità

Poiché le argomentazioni precedenti mi sembrano alla portata di studenti del quinto anno di liceo, mi spingo a fare qualche considerazione, con lo stesso livello di difficoltà, anche sulla relazione che c'è tra tempo e massa.

Una conseguenza dei principi della relatività generale è che gli orologi rallentano in prossimità delle masse: se due osservatori sono a distanze diverse da una stessa massa accade che il tempo scorre più lentamente per l'osservatore più vicino alla massa e più velocemente per quello più lontano. Questo effetto è evidente anche in prossimità della terra e interessa, in particolare, i sistemi di posizionamento satellitari o GPS (Global Positioning System). Infatti, si può notare sperimentalmente che per i satelliti del GPS, che viaggiano a circa 20.000Km di altezza, il tempo fluisce più rapidamente, cioè gli orologi sono in anticipo, di circa 46 microsecondi al giorno a causa della loro distanza dalla terra.

Per comprendere come si possa stabilire una relazione tra i tempi misurati da due orologi a distanze diverse da una massa, occorre prima considerare il principio di equivalenza enunciato da Einstein: *un sistema di riferimento inerziale in cui è presente un campo gravitazionale è equivalente a un sistema di riferimento accelerato*. Esso si può anche enunciare dicendo che: *la descrizione di un fenomeno fatta in un sistema di riferimento inerziale in cui è presente un campo gravitazionale, si può sostituire con quella fatta in un sistema accelerato con un'accelerazione opposta a quella del campo.*

Quindi, un osservatore inerziale solidale alla massa che genera un campo gravitazionale $\vec{g}$, descriverà i fenomeni allo stesso modo di un altro osservatore, ancora solidale alla massa, che si muove però con accelerazione -$\vec{g}$. Pertanto, considerare un osservatore in un sistema inerziale soggetto ad un'accelerazione $\vec{g}$, dovuta alla massa, equivale a considerare un osservatore in moto con accelerazione $-\vec{g}$.

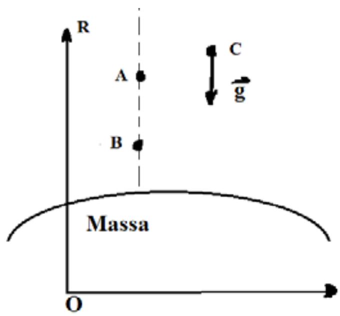

Fig. 4

O è inerziale e solidale alla massa che genera il campo $\vec{g}$. A, B e la massa sono fissi e C è in moto con accelerazione $\vec{g}$.

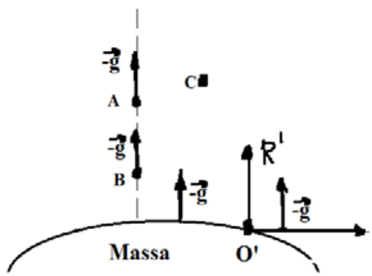

Fig. 5

O' si muove con accelerazione $-\vec{g}$ assieme alla massa e ai punti A e B. Il punto C è fermo.

Premesso ciò, consideriamo due punti A e B posti sulla stessa verticale, con B più vicino alla massa, e supponiamoli ad una distanza AB tale che l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ si possa ritenere costante lungo il segmento verticale AB, consideriamo ora un terzo osservatore C che cade verso la massa con accelerazione $\vec{g}$. La fig. 4 descrive la situazione vista da un osservatore inerziale solidale alla massa che genera il campo gravitazionale. Per il principio di equivalenza, è possibile descrivere la stessa situazione in modo diverso e cioè: eliminare il campo gravitazionale e considerare un osservatore O′ che si muova verso l'alto con accelerazione $-\vec{g}$ assieme alla massa e ai punti A e B (vedi Fig.4 e 5). Specificando meglio il punto di vista di O′ si può affermare che A e B si muovono di moto accelerato verso l'alto con accelerazione g mentre C è fermo.

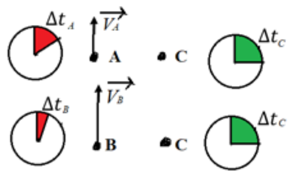

Fig. 6 Gli orologi in A e B segnano un tempo inferiore a quello in C

Man mano che O′ sale verso l'alto anche A e B salgono e, ad un certo punto, prima A e poi B passeranno vicino a C con velocità diverse (Fig. 6). Adesso consideriamo la situazione in cui A sta passando accanto a C, sia Δt_C un intervallo di tempo misurato da C, corrispondentemente A misurerà un intervallo pari a Δt_A e, ricordando che C è in quiete mentre A è in moto, la relazione tra i due sarà:

$$\Delta t_C = \gamma_A \cdot \Delta t_A \qquad (13.1)$$

Analogamente procediamo per B, quindi anche quando B passa accanto a C questi misura lo stesso intervallo Δt_C, mentre B misurerà corrispondentemente un intervallo Δt_B e i due intervalli saranno nella relazione

$$\Delta t_C = \gamma_B \cdot \Delta t_B \qquad (13.2)$$

dove il fattore γ non è lo stesso per A e B in quanto le velocità di questi due punti non sono le stesse quando passano vicino a C. A causa del loro moto accelerato, si ha infatti:

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A{}^2}{c^2}}} \text{ e } \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_B{}^2}{c^2}}} \qquad (14)$$

Calcolando il rapporto membro a membro delle (13.1) e (13.2) si ottiene:

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_C} = \frac{\gamma_A \cdot \Delta t_A}{\gamma_B \cdot \Delta t_B} \text{ ossia } \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{\gamma_B}{\gamma_A} \quad (15)$$

Ricordando che vale l'approssimazione $(1+x)^{\alpha} = (1+\alpha x)$ quando x è molto piccolo, possiamo esprimere il fattore gamma diversamente:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

e perciò la (15) si può scrivere così:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{\gamma_B}{\gamma_A} = \frac{\left(1-\frac{{v_A}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{{v_B}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(1-\frac{{v_A}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{{v_B}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1-\frac{{v_A}^2}{2c^2}\right) \cdot \left(1+\frac{{v_B}^2}{2c^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{{v_B}^2}{2c^2} - \frac{{v_A}^2}{2c^2} - \frac{{v_A}^2}{2c^2} \cdot \frac{{v_B}^2}{2c^2}$$

e, osservando che il prodotto $\frac{{v_A}^2}{2c^2} \cdot \frac{{v_B}^2}{2c^2}$ si può considerare infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri due, risulta:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 1 + \frac{1}{2c^2}\left({v_B}^2 - {v_A}^2\right) \quad (16)$$

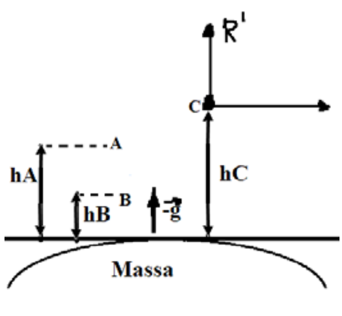

Fig.7

Ricordando che il moto di A e B è uniformemente vario si può considerare la relazione $v = \sqrt{2as}$, dove v è la velocità, a è l'accelerazione e s è lo spazio percorso. Quindi dalla fig. 7 si ha:

$$v_A = \sqrt{2g(h_C - h_A)} \quad \text{e} \quad v_B = \sqrt{2g(h_C - h_B)} \quad (17)$$

da cui si ricava:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g(h_C - h_B) - 2g(h_C - h_A) = \\ = 2g(h_A - h_B) \qquad (18)$$

e, sostituendo nella (16), si ottiene:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 1 + \frac{g(h_A - h_B)}{c^2} \text{ da cui:}$$

$$\Delta t_A = \Delta t_B \left(1 + \frac{g(h_A - h_B)}{c^2}\right) \qquad (19)$$

Questa uguaglianza mette in evidenza la relazione che intercorre tra la durata di un fenomeno misurata da un osservatore B, vicino alla massa, e la durata dello stesso fenomeno misurata da un osservatore A più lontano dalla stessa massa. Si nota che la quantità in parentesi tonde è maggiore di uno e quindi il tempo trascorso per l'osservatore A è superiore a quello trascorso per l'osservatore B. In altre parole l'orologio in A, più distante dalla massa, è più veloce dell'orologio in B, più vicino alla massa. Più in generale, detta h la distanza verticale tra due punti a distanza diversa da una massa, indicata con Δt_g e Δt le durate misurate rispettivamente da un osservatore più vicino alla massa e da uno più distante si ha la relazione:

$$\Delta t = \Delta t_g \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = \Delta t_g + \Delta t_g \frac{gh}{c^2} \text{ ossia}$$

$$\frac{\Delta t - \Delta t_g}{\Delta t_g} = \frac{gh}{c^2} \qquad (20)$$

Formula che esprime la relazione tra la variazione relativa delle durate di uno stesso fenomeno misurate da osservatori posti a distanze diverse da una massa.

Come precisato all'inizio, l'accelerazione $\vec{g}$ è supposta costante tra A e B, naturalmente ciò è tanto più vero quanto più i punti A e B sono vicini tra loro. Pertanto risulta altrettanto vera la relazione tra quantità infinitesime:

$$\frac{dt-dt_g}{dt_g}=\frac{gdh}{c^2} \qquad (21)$$

dove dh indica la variazione infinitesima di altezza.

Questa relazione consente di calcolare il legame intercorrente tra le durate temporali misurate da due osservatori A e B posti a distanza h_A e h_B da una massa attraverso l'integrale seguente:

$$\frac{\Delta t_{g-\Delta t}}{\Delta t}=\int_{h_B}^{h_A} \mathrm{g}(h)\,\frac{dh}{c^2} \qquad (22)$$

Dove g(h) è la funzione che esprime la relazione esistente tra l'accelerazione di gravità è l'altezza, essa si può ricavare dalla legge di gravitazione universale:

$$F=G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2} \qquad (23)$$

Dove r è la distanza dal centro del pianeta, m e M sono rispettivamente la massa di un corpo e la massa del pianeta. Interpretando la F come il peso del corpo mg, si ottiene:

$m\cdot g=G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}$ da cui $g=G\cdot\frac{M}{r^2}$ e, detto R il raggio della massa e h la distanza del corpo dalla superficie terrestre si ha:

$$g(h)=G\cdot\frac{M}{(R+h)^2} \qquad (24)$$

Sostituendo nella 22 si ottiene:

$$\frac{\Delta t_g-\Delta t}{\Delta t}=\int_{h_B}^{h_A} G\cdot\frac{M}{(R+h)^2}\frac{dh}{c^2}=-\left[\frac{G}{c^2}\cdot\frac{M}{R+h}\right]_{h_B}^{h_A}=$$

$$-\frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{R+h_A}-\frac{1}{R+h_B}\right]=\frac{GM}{c^2}\left[\frac{h_A-h_B}{(R+h_A)(R+h_B)}\right] \qquad (25)$$

Questo rapporto dipende dall'altezza (o distanza verticale) che separa i due punti A e B, posto $k=\frac{GM}{c^2}\left[\frac{h_B-h_A}{(R+h_A)(R+h_B)}\right]$ si può ricavare la durata Δt misurata dall'osservatore più distante dalla massa. Si ha: $\frac{\Delta t_g - \Delta t}{\Delta t} = k$

e l'espressione di Δt diventa:

$$\Delta t = \frac{1}{k+1} \Delta t_g \qquad (26)$$

Questo vuol dire che se un osservatore posto sulla superficie del pianeta misura una durata Δt_g, quello che si trova ad un'altezza $h_A - h_B$ misura una durata data dalla (26).

6- Il tempo dei satelliti del GPS

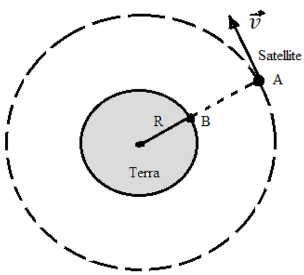

Fig. 8 Satellite GPS

Il navigatore satellitare è un dispositivo molto comune e permette di determinare la posizione di uno o più punti sulla superficie terrestre assieme ad un percorso che li colleghi. Il funzionamento di questo apparecchio è possibile perché è in grado di collegarsi con alcuni satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra ad un'altezza di circa 20.000Km, con una velocità di circa 4Km/s [2] e che fanno parte di una rete di satelliti che formano il Global Positioning System.

È esperienza comune il fatto di constatare che le informazioni fornite da un navigatore satellitare siano molto precise e ciò richiede una considerevole sincronizzazione tra il

[2]Dati esposti in: https ://web.infn.it/fisicainbarca2011 /images/ stories/napoli/gps_infn.pdf

tempo misurato dal satellite e quello misurato dal navigatore. Tale sincronizzazione non è affatto scontata, vista la considerevole altezza a cui si trovano i satelliti e considerata la velocità abbastanza elevata con cui essi si muovono. Infatti, come poco più avanti vedremo, l'orologio di un satellite è in anticipo di circa 46μs al giorno rispetto ad un orologio terrestre, a causa della sua altezza e, contemporaneamente, è in ritardo di circa 8 μs circa al giorno a causa della sua velocità. Pertanto ogni giorno occorre apportare una modifica all'ora del satellite pari a 46 μs -8 μs=38 μs, ossia occorre aggiungere all'ora del satellite 38 μs al giorno per mantenere in sincronia gli orologi satellitari con quelli del navigatore.

Adesso vediamo un'applicazione di alcune formule ricavate precedentemente per ricavare questi valori del tempo.

6.1 – Anticipo dovuto all'altezza del satellite

Per un satellite del GPS che orbita ad un'altezza di circa 20.000Km si ha che il punto A coincide col satellite mentre il punto B si trova sulla superficie terrestre perciò:

$h_A - h_B$=20.000Km=$2 \cdot 10^7 m$ e, considerando per la massa della terra il valore $M = 5{,}972 \cdot 10^{24} Kg$, per il raggio della terra $R = 6370Km = 6{,}37 \cdot 10^6 m$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$, $\Delta t_g = 86400s$ e $c = 3 \cdot 10^8 m/s$

Si ottiene per il rapporto il valore:

$$k = \frac{GM}{c^2}\left[\frac{h_A - h_B}{(R+h_A)(R+h_B)}\right]\frac{\Delta t - \Delta t_g}{\Delta t_g} = 5{,}26967 \cdot 10^{-10} \quad (27)$$

Da ciò di può calcolare lo sfasamento corrispondente alla durata di un giorno. Se l'osservatore della terra misura per un giorno la durata di 86.400s, quello posto sul satellite ne misura una data dalla (26) e cioè:

$$\Delta t = \frac{1}{k+1}\Delta t_g = 86399{,}999954470$$

e da qui $\Delta t_g - \Delta t = 0{,}000045529959606938 10 \approx 46\mu s$

e si può dire che la durata di un giorno solare medio misurata da un osservatore sul satellite è circa $46\mu s$ più breve di quella misurata da un osservatore sulla superficie terrestre.

6.2 – Ritardo dovuto alla velocità del satellite

La misura del tempo di un satellite GPS differisce da quella fatta da un osservatore terrestre anche per la velocità con cui il satellite si muove. Se un osservatore terrestre misura per il giorno solare medio una durata di 86400s, quello sul satellite ne misurerà una diversa. Più precisamente la durata misurata dall'osservatore sulla terra è il tempo proprio mentre quella dell'osservatore sul satellite è quella non propria e perciò la relazione esistente tra i due tempi è data dalla (9)

$$\Delta t_{satellite} = \gamma \cdot \Delta t_{terra}$$

Con il fattore γ dato da:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4000^2}{(3\cdot 10^8)^2}}} = 1{,}00000000008889000000000000000$$

Da cui la durata del giorno solare medio misurato dal satellite è dato da

$$\Delta t_{satellite} = \gamma \cdot \Delta t_{terra} =$$

=1,00000000008889000000000000000*86400=
=86400,000007680

E la differenza tra i due tempi è data da:

86400,000007680-86400=0,000007680≈ $8\mu s$

Queste considerazioni fatte sul tempo misurato dal satellite e quello misurato da terra porta a concludere che l'osservatore satellitare deve aggiungere circa $46\mu s$ a causa della propria posizione nel campo gravitazionale e sottrarre $8\mu s$ a causa della sua velocità rispetto ad un osservatore terrestre, per cui si ha uno sfasamento temporale di $46\mu s - 8\mu s = 38\mu s$, che è coerente con il valore osservato sperimentalmente.

Bibliografia

NOLAN Peter J. (2000) - *Complementi di fisica - fisica moderna– pp 1023-1025 e 1084 e 1089.* Bologna: Zanichelli

Sitografia

https://www.lfns.it/STORIA/Scuola_2017/20_febbraio/3levrini_RR/Levrini_Cagliari_RR.pdf

https://web.infn.it/fisicainbarca2011/images/stories/napoli/gps_infn.pdf

****

Primo introntro con l'unità immaginaria

Nell'opera "Algebra" in 3 volumi , pubblicata tra il 1572 e il 1579, di Raffaele Bombelli (1526-1572) si ha il primo incontro con l'immaginario. Bombelli introduce due simboli pdm (+i) e mdm (-i) che definisce come segue (pdm)²+1 = 0 , pdm + mdm = 0. Tratta dunque l'equazione:

$$x^3 - 15\,x = 4$$

alla quale applicando "il procedimento messo a punto dal Signor Girolamo Cardano" si ha:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11pdm} + \sqrt[3]{2 - 11pdm} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

questo punto Bombelli dichiara che con sue procedure ha provato che :

$$(2 + \mathrm{pdm})^3 = 2+11\mathrm{pdm} \quad , \quad (2 + \mathrm{mdm})^3 = 2+11\mathrm{mdm}$$

che in simboli attuali è ovviamente:

$$(2 + i)^3 = 2+11i \qquad , \qquad (2 - i)^3 = 2-11i$$

così che risulta:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11pdm} + \sqrt[3]{2 - 11pdm} = 2 + \mathrm{pdm} + 2 + 11\mathrm{mdm} = 2 + \mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 4.$$

Cfr. Bagni G.T. (2006). Ma+ema+1C1, Ed.Antilia , Treviso. pp.126-129.

Critica. *Sia pure con una disinvolta trattazione della radice cubica, che in campo complesso è più complicata, e che in tal caso si userebbe la cosiddetta radice principale, Bombelli esprime il fatto generale che per utilizzare, a pieno, le formule di Cardano occorre per: $x^3 + p\,x + q = 0$, trovare a, b tali che:*

$$(a+ib)^3 = p^3/27 + q^2/4.$$

In ogni caso Bombelli perde le due soluzioni immaginarie, ma quello che fa è un "miracolo del suo tempo"!

Franco Eugeni