Periodico di Matematica (IV) Vol. IV (n) dicembre 2022, pp. 43-64

Strumenti matematici minimi per la fisica moderna

Matteo Tanferna*

*Mathesis Abruzzo, Liceo "G.Marconi" Pescara; matteotnf@libero.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.096

Sunto*:* *Viene indagata la possibilità di introdurre l'algebra delle derivate formali fin dai primi anni del liceo, allo scopo di dotare l'insegnate di fisica di una strumentazione matematica più efficace e consentirgli di affrontare la fisica del 900 in maniera non solo informativa, come solitamente accade, ma anche più formalizzata. Poiché la proposta comporterebbe una ridefinizione dei programmi sia di matematica che di fisica, si rende necessaria un'approfondita indagine sulla liceità didattico-pedagogica di un simile passo, e al giudizio critico dei matematici e, in particolare, alla sensibilità specifica degli analisti, spetterebbe infine l'ultima sentenza.*

Parole Chiave*: Fisica, algebra, derivate, didattica.*

Abstract: *For the purpose of giving physics teachers a more efficient mathematical instrument and, so, giving them the chance to face the 20th century's physics not only in an informative manner, as it usually happens, but also more formalized, since the first few years of secondary school it has been taken into account the possibility to introduce formal derivatives algebra. As the proposal would mean a re-definition of programs, both, in mathematics and in physics, it makes necessary an in-depth didactic-pedagogical investigation about the legitimacy of taking such a step, and to the critical judgement of mathematicians and, in particular, due to the specific sensibility analysts have, they should have the last word.*

Keywords*:* *Physics, algebra, derivatives, didactics.*

1 – L'algebra delle derivate nei primi anni di scuola superiore

Se si eccettuano alcuni indirizzi negli istituti tecnici, dove l'analisi matematica viene affrontata già al quarto anno di corso, nel resto delle scuole superiori italiane, e segnatamente nei licei, l'analisi viene affrontata nell'ultimo anno di studi. Poiché al calcolo differenziale, usualmente, si perviene solo dopo il primo quadrimestre, l'insegnante di fisica non ha più il tempo materiale per affrontare con il bagaglio minimo necessario le scoperte e le teorie della fisica del 900. Tutto ciò è già noto, e da tempo molte proposte sono state avanzate per risolvere il problema; un esempio è il progetto d'introduzione dell'analisi non standard nei programmi di matematica. Qui si suggerisce la possibilità di una via diversa: introdurre fin dai primi anni delle scuole superiori l'algebra delle derivate formali, dando a questa il più efficace raccordo con gli usuali argomenti matematici che attualmente vengono svolti.

All'algebra delle derivate l'insegnate perviene al 5° anno solo dopo una lunga serie di premesse; egli: generalizza il concetto di funzione, introduce elementi di topologia, affronta le definizioni di limite, ne ricava le proprietà e le utilizza per dimostrare alcuni teoremi sulle funzioni e sui limiti notevoli, infine introduce il concetto di derivata come limite del rapporto incrementale. Ricava poi una tabella di derivate fondamentali e di regole adatta per i nuovi esercizi e problemi da affrontare, e a questo punto lo studio dei limiti cede il passo all'algebra delle derivate che diviene autonoma dai suoi fondamenti. Gli studenti sono chiamati a svolgere derivate sempre più articolate e annidate, usando solo regole e proprietà delle derivate.

Inizialmente questi esercizi sono relativi a funzioni continue e derivabili, e viene naturale pensare che, restringendosi a un nucleo di funzioni con proprietà utili nella fisica di base, potrebbero non esserci particolari difficoltà a operare su di esse direttamente con le sole regole di derivazione, anche se soltanto formalmente, cioè senza il bagaglio coerente ma oneroso di topologia e limiti, perfino negli anni che precedono lo studio dell'analisi.

Il passo sarebbe troppo ingenuo, e forse anche pericoloso, se motivato solo con questo livello di analogia e meccanismo estrinseco. A tal riguardo, conviene rammentare l'anatema di Dieudonné, che egli lanciò trovandosi a dover fronteggiare la ribellione di genitori, studenti, insegnati e politici, e cioè dell'intera società civile, per la riforma dei programmi di matematica suggerita da Bourbaki. Dieudonné reagì proponendo di non insegnare più matematica nelle scuole, e di lasciare questo compito alla sola università, perché altrimenti si sarebbero prodotti a valle più danni di quanti benefici si credeva di conseguire a monte. L'anatema potrebbe sembrare troppo drastico, tuttavia gli insegnati delle scuole conoscono bene quanto sia, a volte, impresa ardua correggere concetti appresi male all'inizio, e quanto sia difficile ricalibrare un imprinting sconnesso. Dunque, non basta rilevare il fatto che eseguire derivate sulle funzioni continue elementari è operazione semplice e alla portata degli adolescenti, occorre trovare delle giustificazioni più forti e connessioni più coerenti con il resto dei programmi di matematica che vengono già svolti.

Esponiamo di seguito gli elementi con cui è stata effettuata una sperimentazione al Liceo Scientifico Tecnologico, facendo leva sulle numerose ore di fisica e laboratorio a disposizione.

Le 21 ore di fisica del quinquennio, infatti, permettevano, usando molta cautela, di sperimentare senza pregiudicare la corretta formazione degli studenti, ottenendo in aggiunta importanti riscontri positivi. Un primo ragguaglio di questa sperimentazione fu esposto in un corso di aggiornamento in didattica della matematica e del laboratorio di fisica, tenuto all'università G. D'Annunzio di Chieti-Pescara nel 2001, e, partendo dalle riflessioni che scaturirono in quell'occasione sui limiti del procedere per sola analogia, si indagò su come dare maggiore spessore matematico alla proposta.

2 – Derivazioni formali sull'anello dei polinomi

Avendo preso atto che l'analogia empirica, indotta dall'osservazione del carattere meccanico degli esercizi sulle derivate, condannerebbe l'adozione di questa pratica estrinseca nei bienni delle scuole superiori a essere un'improvvisazione fin troppo strumentale e un'estensione indebita di un'attività che trova i suoi saldi fondamenti nell'analisi, si nota che una legittimazione alternativa più profonda potrebbe essere raggiunta e la pratica meccanica riscattata, se quest'ultima venisse coordinata con la teoria delle derivazioni formali sugli anelli di polinomi, teoria già ben sviluppata nei testi di matematica dedicati alle strutture algebriche.

In sostanza, decidendo di restringersi a un opportuno sottoinsieme di funzioni, utili nell'ambito della fisica dei licei, si può sfruttare l'impianto di una teoria matematica decisamente più semplice di quella dell'analisi, e tuttavia ben consolidata e coerente.

Dal punto di vista matematico si tratterebbe, quindi, di approfondire lo studio delle proprietà dei polinomi quando questo studio è specificamente previsto, e cioè proprio nei bienni delle scuole superiori, includendo in esso l'argomento, appunto, delle derivazioni formali sull'anello dei polinomi. Inoltre, questa integrazione permetterebbe di far conoscere il concetto di operatore lineare in un contesto operativo semplice, che nella fattispecie trasforma un polinomio in un altro polinomio ma, più in generale, è strumento di grande rilievo e utilità. Dal punto di vista fisico, il possesso dello strumento matematico della derivata, seppur solo formale, già da quando si affrontano le prime grandezze derivate, velocità e accelerazione, permetterebbe di reimpostare l'intero studio su basi molto più profonde, come del resto fu già in origine a partire da Newton.

Ciò che qui vorremmo inizialmente dire, lo estraiamo dal libro di Mario Girardi e Giorgio Israel *Teoria dei campi* (1976), in modo da indicare direttamente anche un luogo di raccordo con le teorie consolidate a cui sopra si accennava. Al capitolo primo, nella seconda parte di pag. 38 si legge:

6. Derivazioni.

In questo paragrafo ci proponiamo di introdurre la nozione di *derivata* di un polinomio a coefficienti in un anello. Si intuisce facilmente che la difficoltà di introdurre questa nozione è, nel nostro caso, legata all'arbitrarietà dell'anello. In altri termini, non è possibile procedere, come nel caso delle funzioni reali di variabile reale, tramite un passaggio al limite, e ciò perché questo procedimento è legato a nozioni di carattere topologico e, più precisamente, alla struttura topologica "naturale" del campo reale (e non alla sua struttura algebrica).

Tuttavia, se ci si limita alla considerazione di funzioni polinomiali a coefficienti reali, si può osservare che la derivata di una funzione polinomiale $f = \Sigma_i aX^i$ è ancora una funzione polinomiale, e precisamente $f' = \Sigma_i \, i \, aX^{i-1}$. Pertanto il risultato dell'operazione di derivazione, espresso dalla formula precedente, potrebbe essere assunto come *definizione* –si noti– *puramente algebrica* della derivata di una funzione polinomiale. Il carattere puramente algebrico della definizione permette di abbandonare la restrizione al caso reale, riferendosi a funzioni a coefficienti in un anello qualsiasi. A questo punto possiamo compiere un'ulteriore generalizzazione, definendo l'operazione di derivazione in un *qualsiasi anello A* (come una applicazione D che associa a $x \in A$ la sua derivata $D(x)$), assumendo come assiomi, in questo contesto più generale, le proprietà formali di cui gode l'usuale derivazione e da cui possono essere dedotte tutte le altre proprietà. Diremo pertanto che l'applicazione $D: A \to A$ è una *derivazione dell'anello A*, se verifica le condizioni:

a) $D(x + y) = D(x) + D(y);$

b) $D(xy) = D(x)\, y + x\, D(y) \qquad (x,y \in A).$

Questa breve citazione contiene quanto serve per iniziare, e, utilizzando la proprietà b), si ottengono le prime semplici deduzioni:

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2\,D(1) \;\; \to \;\; D(1) = 0;$$

$$D(x^2) = D(x\cdot x) = D(x) \cdot x + x \cdot D(x) = 2\, x\, D(x).$$

Scegliendo una derivazione formale su anelli in cui D(x) = 1, si ottiene l'usuale monomio derivato a cui si dà l'usuale nome di derivata: $D(x^2) = 2\, x$.

E reiterando si ottiene naturalmente: $D(x^n) = n\, x^{n-1}$.

Poiché si dimostra che questa restrizione è unica (vedi libro appena citato), dunque lo schema è ben formulato.

Dopo queste prime deduzioni, dalle regole a) e b) si può procedere ricavando tutte le principali proprietà dell'operatore D, e tutto ciò può ben diventare il materiale per i primi esercizi da effettuare nella matematica del biennio, subito dopo quelli usuali sui polinomi, potendo così estenderne lo studio in modo coerente oltre i limiti attuali.

Se l'indeterminata di questi polinomi viene elevata al rango di variabile, i polinomi divengono funzioni polinomiali rappresentabili sul piano cartesiano, e le prime deduzioni utili, ricavate dalle regole basilari, possono essere quelle che permettono di ricostruire all'indietro il legame tra i polinomi derivati e i coefficienti angolari delle tangenti alle curve determinate dalle funzioni polinomiali di partenza.

Per il caso di: $y = cost.$, e per il caso dell'equazione della retta in forma esplicita: $y = m\, x + q$, la constatazione è immediata. Per la parabola: $y = a\, x^2 + b\, x + c$, questo è un poco più laborioso, ma si tratta di un normale esercizio del terzo anno. La generalizzazione alle funzioni polinomiali di grado maggiore potrebbe essere presentata come utile esercizio di applicazione della regola di Ruffini o di quella della divisione di polinomi senza resto.

Infatti, poiché il polinomio: $(y - y(x_0)) - y'(x_0)\,(x - x_0)$ ha uno zero in x_0, in generale si tratta solo di mostrare che il polinomio: $(y - y(x_0)) / (x - x_0) - y'(x_0)$ ha un'altra radice in $x = x_0$, e questo, ad esempio, può essere mostrato agli studenti in modo agevole per gli usuali polinomi a coefficienti interi, scegliendo opportuni polinomi di grado non elevato, ma può dimostrarsi valido per polinomi di grado n qualsiasi, usando sempre la regola di Ruffini o la divisione tra polinomi.

Il tutto equivale a dire che il polinomio costruito con l'intersezione tra la funzione polinomio e la retta tangente in un suo punto ha una radice doppia nel punto di tangenza.

Oltre all'uso della notazione di Arbogast per definire l'operatore di derivata, la notazione di Lagrange, utilizzata per indicare il risultato dell'applicazione di questo operatore, è utile per presentare sinteticamente le regole finora viste, e facilitarne così l'assimilazione già dal primo anno. Inoltre, poiché usualmente nei libri di testo attuali le indeterminate vengono indicati con le lettere x, y, z ecc., conviene riscrivere le regole a) e b) indicando con f e g i polinomi in una sola indeterminata, e sottintendendo che l'operatore D agisce proprio su quella particolare indeterminata. Dunque, le prime due regole possono essere presentate agli studenti come:

$$a')\quad D(f+g) = f' + g'$$
$$b')\quad D(f\cdot g) = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Continuiamo a chiamare queste formule semplicemente *regole* di trasformazione dei polinomi attraverso l'operatore D, per sottolineare l'aspetto formale delle operazioni che compiamo e non ingenerare confusioni con le formule che verranno poi dimostrate nel successivo corso d'analisi.

Il formalismo si estende con semplicità ai polinomi in più indeterminate: $f = f(x,y,z.....)$, e questo permette di introdurre subito anche il concetto di derivata parziale:

$$D_x(f) = f_x.$$

Poiché l'operazione può essere iterata, si perviene con uguale naturalezza al concetto di derivata seconda:

$$D(D(f)) = D^2(f) = f'',$$

e ancora di derivata k-esima.

Con la stessa naturalezza, l'operazione può essere estesa agli array di polinomi, cioè a una sequenza di polinomi, a una o più indeterminate, raccolti in una lista, e ciò potrà servire da base per estendere il calcolo alle funzioni polinomiali a valori vettoriali.

Ad esempio, nel caso di un'unica indeterminata si ha:

$\underline{P} = (f; g; h; ...) \quad \rightarrow \quad D(\underline{P}) = (D(f); D(g); D(h);...) = (f'; g'; h';...)$,

e di seguito, allo stesso modo, nel caso più generale di più indeterminate e delle derivate parziali:

$$D_y\, D_x\, (\underline{P}) = (f_{xy}; g_{xy}; h_{xy}; ....)\,.$$

È superfluo rimarcare quanto ciò sia utile nei corsi di fisica.

Il passo successivo sarà quello di estendere la definizione di derivazione al campo K dei quozienti dell'anello dei polinomi.

La regola formale ulteriore può essere introdotta partendo dalla regola precedente b') ed effettuando la derivazione:

$$D(g\cdot f/g) = D(f) = D(g)\cdot f/g + g\cdot D(f/g) \qquad (f,g \in A \text{ e } g \neq 0)$$

che riorganizzata diviene naturalmente:

c) $D(f/g) = (D(f) \cdot g - f \cdot D(g))/g^2$,

e può essere presentata con la più facilmente memorizzabile:

c') $D(f/g) = (f' \cdot g - f \cdot g')/g^2$.

In molti licei l'argomento relativo alle frazioni algebriche viene introdotto al secondo anno, e quindi, decidendo in favore di questa proposta e dell'estensione relativa dei programmi di fisica e di matematica, ciò porterebbe all'introduzione di esercizi relativi alla derivazione formale del rapporto di polinomi già al secondo anno, o, più in generale, appena fossero stati introdotti i quozienti tra polinomi e relative scomposizioni.

Molto utile, per i successivi impieghi in fisica, è anche l'introduzione d'una regola formale che corrisponda al teorema della derivazione di funzioni composte, la quale può essere mostrata valida nei casi dei polinomi e delle frazioni algebriche, e assunta come regola generale operante su generiche espressioni formali. Questa ulteriore estensione dovrà, tuttavia, essere accompagnata da precisazioni che permettano di escludere situazioni ambigue.

Presi, dunque, i due polinomi f e g e indicando il polinomio composto con il simbolo $f \circ g$, la nuova regola formale si può introdurre come:

d) $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$,

ovvero nella versione semplificata, ma da illustrare con cura e molti esempi:

d') $D(f(g)) = f'(g) \cdot g'$

Da quest'ultima regola si potrà derivare anche la formula per la derivata della funzione inversa. Infatti, partendo dal caso $f \circ g = x$, e poiché: $D(f \circ g) = \mathrm{D}\,(\,\mathrm{x}\,) = 1 = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$,

riorganizzando questa relazione, si trova:

e) $D(f) \circ g \;=\; 1 \,/\, D(g)$

la quale, presentata in forma più sintetica e più facilmente memorizzabile, apparirà come:

e') $f'(g) = 1/g'$

Utilizzando le regole fin qui presentate, e attraverso riorganizzazioni simili a quella appena esposta, si possono ricavare anche le relazioni formali per le potenze a esponente razionale, consentendo al formalismo di estendere il suo campo di applicazione anche alle espressioni irrazionali.

Anche qui, ma quando necessario pure altrove, queste estensioni vanno accompagnate da considerazioni e precisazioni che ne calibrino l'uso, in modo da evitare la deduzione di affermazioni improprie e, più in generale, in modo da evitare equivoci quando l'intera teoria verrà presentata in maniera più precisa nel corso di analisi.

L'ulteriore estensione didattica del formalismo potrebbe avvenire con maggiore naturalezza al terzo anno, in concomitanza con gli altri stimoli didattici e culturali. Ad esempio, nel terzo anno, usualmente, in filosofia vengono studiati i paradossi di Zenone, e in particolare quello di Achille e la tartaruga o quello della freccia che deve raggiungere un bersaglio.

È noto, e anche abusato, che questi paradossi possono servire per introdurre in matematica il concetto di serie e di addizione di infiniti termini che sfocia in un risultato determinato.

Per gli scopi sottostanti questa proposta, non occorrerà affrontare tutta la teoria della convergenza delle serie di potenze, ci si può limitare all'introduzione di alcune serie formali di potenze, principalmente quelle utili in fisica.

Occuparsi più in dettaglio del problema della convergenza nei casi più generali, potrà essere materia di studio successivo, rimandato al momento in cui si avranno strumenti matematici più adeguati, tuttavia, anche questo argomento matematico: le serie formali di potenze, è già ben sviluppato e definito in letteratura; inoltre, in questa ulteriore estensione formale, non si pretende di introdurre materiale eccessivo.

Per quanto riguarda le esigenze dei programmi di fisica dei licei, in realtà basterebbe solo introdurre le serie formali:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! \ldots.$$
$$cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! \ldots...$$
$$sen(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! \ldots...$$

ricavando empiricamente le relazioni formali fondamentali:

$$D(e^x) = e^x$$
$$D^2(cos(x)) = - cos(x)$$
$$D^2(sen(x)) = - sen(x)$$

Sono queste le funzioni e queste le relazioni che risultano indispensabili nei corsi di fisica, ad esempio per affrontare con strumenti più adeguati i fenomeni di decadimento o quelli di oscillazione, oltre a permettere anche l'introduzione del concetto di equazione differenziale in casi semplici.

Un'alternativa è quella di generalizzare agli anelli a coefficienti complessi, trattando l'unità immaginaria sotto derivazione come ogni altra costante, e introducendo per definizione una funzione che rimane indenne rispetto all'operatore di derivazione, riservandosi di mostrare successivamente la possibilità di una sua costruzione effettiva. A partire da essa si potrebbero definire le funzioni goniometriche come una particolare combinazione lineare, cioè sostanzialmente usando la formula di Eulero, e infine ricavare le precedenti proprietà sotto derivazione doppia, usando le sole regole formali.

E, anche qui, è inutile sottolineare quanto un uso esteso dell'unità immaginaria divenga elemento utile per esporre molti argomenti di fisica classica in forma sintetica, e indispensabile per proporre argomenti di fisica moderna.

Quanto esposto finora, non deve essere considerato solo un modo di torcere la matematica per gli scopi della didattica della fisica. Si consideri, ad esempio, quanto viene esposto nel libro di Tom Apostol "*Calcolo*" (in particolare a pag. 26, Vol. 2, edizione 1977 Bollati Boringhieri, ma eventualmente anche altrove). Qui, diffusamente, viene indicato come possano essere ricavate, a partire dalle relazioni di derivazione delle funzioni seno e coseno, tutte le proprietà di queste funzioni per via esclusivamente algebrica, senza far riferimento alla circonferenza goniometrica.

Certamente nel libro di Tom Apostol tutto questo viene prodotto solo dopo aver esposto la teoria dei cerchi di convergenza delle serie di potenze, ma, considerando che le indagini precise potranno essere effettuate in seguito e che qui l'esigenza pratica si restringe a queste sole 3 funzioni definite formalmente, ecco un'altra ragione, o se si vuole: un'attenuante, per poter pensare che l'introduzione di questa strumentazione formale non rimarrebbe utile solo agli stretti scopi dell'insegnamento della fisica, ma permetterebbe anche alla matematica di sfruttarne le potenzialità per anticipare argomenti, assumendo punti di vista differenti sugli argomenti classici dei programmi che vengono già svolti.

3 – Semplici applicazioni ad alcune leggi della cinematica e della dinamica

Ora, illustreremo come, utilizzando questo formalismo, i concetti fondamentali della fisica possono essere presentati in modo nuovo e più efficace rispetto a quello usuale.

Come si è detto, il prezzo da pagare è una limitazione degli strumenti matematici a disposizione e da usare; occorre restringersi a espressioni continue e compatte, ma questo non limita lo studio della fisica affrontata nei licei.

La prima connessione, che può essere mostrata, è tra le varie leggi cinematiche del moto.

Una legge oraria si può costruire a partire da una tabella sperimentale dove siano state registrate le posizioni di un certo corpo in movimento e i tempi nei vari istanti in cui le posizioni sono assunte, e questo si può effettuare, ad esempio, usando un orologio e le pietre miliari lungo una strada, ovvero con un cronometro e un righello, se si esegue un esperimento in laboratorio.

I dati, con i loro errori, riportati in un grafico su un piano di coordinate $(t,\ s)$, possono essere interpolati con una curva continua che corrisponde a una certa funzione polinomiale. Questo è sempre possibile per il fatto che il numero di misure da interpolare è necessariamente finito, ma si può decidere di utilizzare un polinomio che approssimi al meglio i dati, pur essendo esso di grado inferiore al numero di misure.

Quest'ultima possibilità è legata alla circostanza che ciascuna misura è affetta da errore sperimentale, e la coppia di misure tempo-posizione appare nel piano cartesiano $(t,\ s)$ non come un determinato punto isolato, ma come una regione rettangolare intorno a un punto centrale, ovvero, se gli errori vengono assunti di tipo statistico, come una regione sfumata intorno al punto centrale. Questo modo di procedere corrisponde alla ricerca di una legge fisica generale e sintetica che governa gli eventi.

In qualsiasi caso, la funzione polinomiale che viene scelta per descrivere il fenomeno diviene, per definizione, la legge oraria del moto che si sta studiando, e possiamo esprimere questo fatto con i simboli: $s = s(\,t\,).$

Nel seguito, per semplificare la simbologia, indicheremo la legge oraria, ovvero la funzione polinomiale che la rappresenta, con la sola lettera s, sottintendendo la sua dipendenza dal tempo t.

A partire dalla legge oraria, e utilizzando l'operatore di derivata formale sul polinomio, si possono introdurre le seguenti grandezze fisiche:

$v = D(\,s\,)$: velocità come derivata della legge oraria;

$a = D(v)$: accelerazione come derivata della velocità.

E quindi, anche: $a = D(D(s)) = D^2(s)$.

Vediamo ora cosa si può dedurre con questo formalismo nei primi casi semplici di moto. Partiamo da quei casi che possono essere rappresentati attraverso polinomi a una sola indeterminata, la t appunto, con potenza via via maggiore. Lo studio dei moti diviene, quindi, uno studio formale sui polinomi con potenza crescente.

Se un corpo è fermo:

$s = s_0 =$ cost., e naturalmente $v = 0$, perciò: $D(\text{cost.}) = 0$.

Se il corpo è in moto con velocità costante $v_0 = 10$ km/h (ma nel seguito, per brevità e miglior chiarezza, tralasciamo di indicare esplicitamente le unità di misura), allora la sua rappresentazione come polinomio sarà:

$s = 10\, t$, perché appunto: $v = D(10\, t) = 10$.

Se, invece: $v_0 = 1$, si avrà: $s = 1\, t$, e quindi: $D(t) = 1$.

Si ritrovano così, attraverso l'intuizione empirica, le prime regole di derivazione della costante e della variabile isolata.

Il caso successivo è quello del polinomio di secondo grado. Poiché, abbiamo già evidenziato i significati fisici nel caso di polinomio costante e lineare in t, esprimiamo il polinomio di secondo grado nel modo seguente: $s = b\, t^2 + v_0\ t + s_0$, e, utilizzando l'operatore derivata, ricaviamo l'espressione per il coefficiente b: $v = D(s) = 2\, b\, t + v_0$, $a = D(v) = 2\, b \rightarrow\ b = a/2$.

Cioè ricostruiamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato mediante l'uso della derivata: $s = ½\, a\, t^2 + v_0\ t + s_0$.

Esaminiamo ora, un caso fondamentale di legge dinamica:

– 2° Principio di Newton: $F = m\, a$,

– Legge di Hooke: $F = -k\ s$.

Equazione per le oscillazioni di una molla: $m\ a = -k\ s$,

quindi: $a = D^2(s) \rightarrow D^2(s) = -(k/m)\ s \rightarrow D^2(s) = -\omega^2 s$,

e questo permette di introdurre anche il concetto di equazione differenziale, e persino suggerisce come risolverla.

Infatti, partendo dalla relazione: $D^2(cos(x)) = - cos(x)$,

si ha una prima semplice soluzione particolare: $s = A\ cos(\omega t)$.

4 – Un accenno alle enormi potenzialità didattiche del formalismo per i corsi di fisica

Vediamo alcuni concetti fisici che si possono introdurre utilizzando anche le derivate parziali.

Conserviamo il simbolo D per la derivata totale rispetto al tempo, e cioè la derivata che può essere eseguita una volta che alle varie grandezze siano state sostituite le loro espressioni dipendenti dal tempo, e indichiamo con D_s e D_t le derivate parziali, eseguite direttamente sulle indeterminate s e t.

Le varie indeterminate corrispondono alle relative grandezze fisiche presenti nelle espressioni delle leggi fisiche.

Partendo, ora, dalle relazioni fondamentali per le seguenti grandezze fisiche:

energia potenziale gravitazionale: $U = m\ g\ h \rightarrow m\ g\ s$;
energia cinetica: $T = ½\ m\ v^2$;
forza peso: $F = m\ g$;

utilizzando le derivate formali possiamo scrivere: $F = D_s(U)$,

questo in valore assoluto, ma considerando che l'energia potenziale gravitazionale U aumenta salendo verso l'alto, mentre la forza peso F è diretta verso il basso, correggiamo per il segno: $F = D_s(- U)$.

D'altra parte possiamo scrivere anche: $D_v(T) = m\, v = p$,

dove il simbolo p indica la quantità di moto: $m\, v$, ed è il momento coniugato alla coordinata s.

Inoltre per il secondo principio della dinamica: $F = m\, a$

$\rightarrow \quad D_s(- U) = m\, D(v) = D(p) = D(D_v(T))$

$\rightarrow \quad D_s(- U) = D(D_v(T))$

e poiché: $D_s(T) = 0$ e $D_v(- U) = 0$,

possiamo scrivere: $D_s(T - U) = D(D_v(T - U))$.

Indicando ora con: $L = T - U$ (la lagrangiana),

possiamo riscrive l'equazione di Newton nella forma di Lagrange: $D_s(L) = D(D_v(L))$.

Questa sequenza di espressioni ha una valenza molto generale, perché permette di introdurre un formalismo e dei concetti che sono già un primo buon passo per parlare, ad esempio, di meccanica razionale, di elettrodinamica, di fisica delle particelle e dell'alta energia, con meno genericità.

Se, d'altra parte, si vuol affrontare con maggiore profondità la fisica atomica o nucleare, si può agilmente introdurre il formalismo hamiltoniano.

Allora, innanzi tutto, sfruttando la relazione: $p = m\, v$,

possiamo riscrivere l'energia cinetica:

$$T = ½\, m\, v^2 \;\rightarrow\; T = p^2 / 2m,$$

e con questa nuova espressione possiamo introdurre l'hamiltoniana come:

$$H = T + U$$

osservando, in questo modo, che essa dipende dalle due coordinate s e p.

Questo è la via più semplice per introdurre l'hamiltoniana, ed è un caso molto particolare della più generale, ma meno intuitiva, trasformazione di Legendre: $H = v\,p - L$.

Per inciso, delle trasformazioni di Legendre si fa largo uso in termodinamica, ma per poterle introdurre e utilizzare con qualche cognizione, occorre, in generale, essere in grado di maneggiare la relazione che intercorre tra la nuova coordinata (qui la p) e la derivata parziale della vecchia funzione (qui la L) rispetto alla variabile da rimpiazzare (qui la v), quindi occorre saper maneggiare la derivata: $p = D_v(L)$.

Una volta introdotta la funzione hamiltoniana si trova agevolmente che:

$$D_s(H) = H_s = \; -F \; = -D(p)$$
$$D_p(H) = H_p = p / m = v = D(s)$$

che, sostanzialmente, sono le usuali equazioni di Hamilton.

Come noto, da queste relazioni si ricava che la grandezza fisica legata all'hamiltoniana si conserva nel tempo in molti casi importanti.

Infatti, usando la regola della derivata delle funzioni composte sulla funzione H, ed effettuando la derivata totale di H rispetto al tempo quando essa dipende dal tempo solo attraverso le variabili s e p, impiegando le equazioni di Hamilton si ottiene:

$$D(H) = D_s(H)\, D(s) + D_p(H)\, D(p) = 0,$$

la qual cosa equivale a dire che H è costante rispetto al tempo, dunque la grandezza fisica che in questo caso essa rappresenta si conserva nel tempo, e questo è un modo diverso, ma anche più profondo, di introdurre la legge di conservazione dell'energia nei fenomeni fisici che vengono usualmente studiati nelle scuole superiori.

Sia il formalismo lagrangiano che quello hamiltoniano sono strumenti indispensabili per affrontare la fisica moderna con qualche speranza di non rimanere al solo modesto livello di informazione. Si pensi, ad esempio, al primo semplice caso dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo.

5 – Conclusioni

Su questo intero schema fu eseguita una sperimentazione ottenendo alcuni primi successi senza, apparentemente, controindicazioni. I programmi di analisi matematica del quinto anno non risentirono negativamente della precedete introduzione formale di alcuni suoi concetti, anzi, per lo più tutt'altro, i concetti di analisi trovarono più immediata e veloce assimilazione. I programmi di fisica, in aggiunta, si arricchirono in maniera molto significativa.

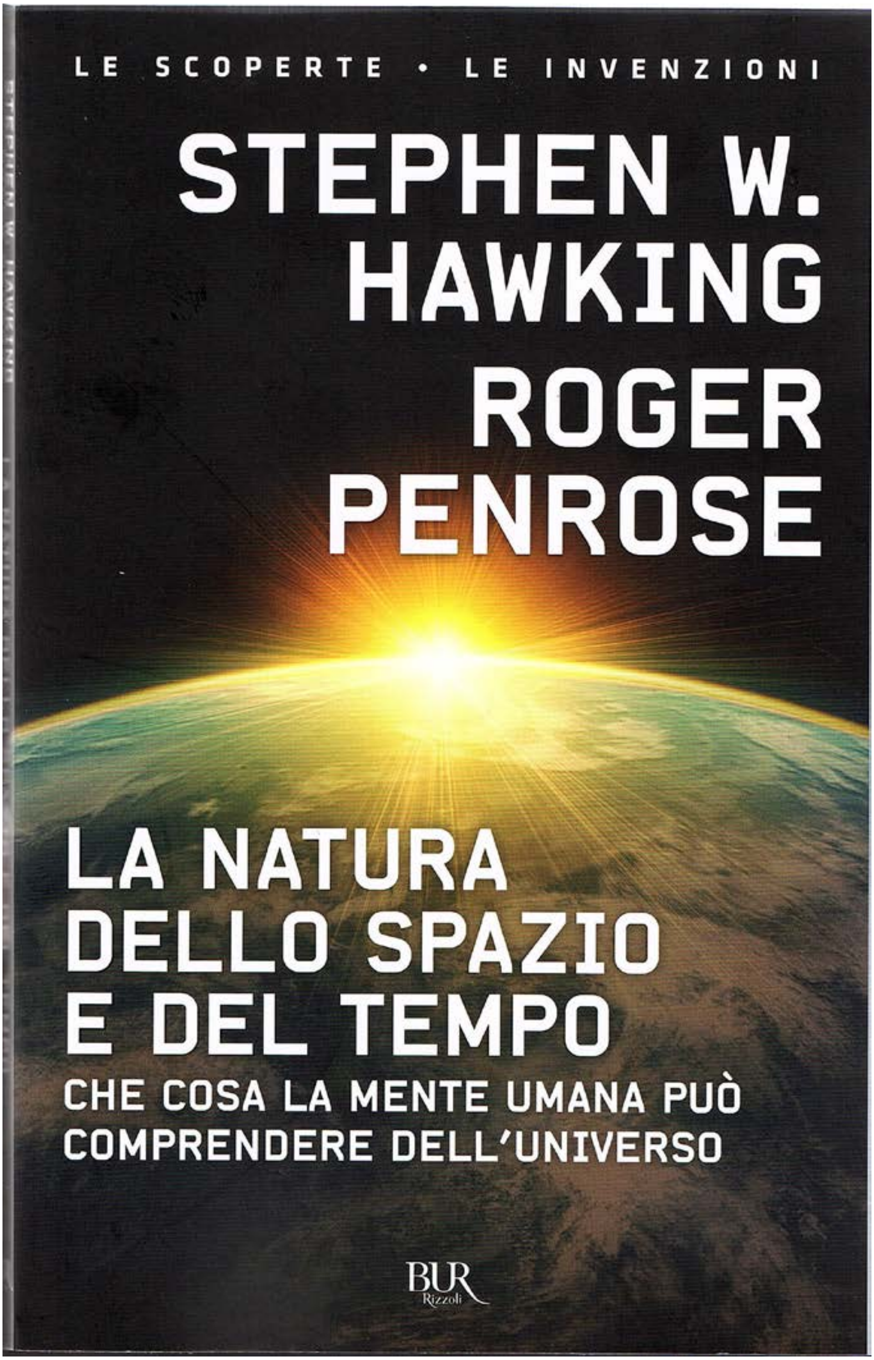
Tuttavia, la sperimentazione poté avvenire senza causare contraccolpi negli usuali programmi di fisica, grazie alla disponibilità d'orario; ma, considerando che il Liceo Scientifico Tecnologico è oramai soppresso, e tenendo conto delle riduzioni d'orario e degli ingenti e aggravati oneri didattici degli insegnanti di fisica e matematica, la proposta va intesa nel senso di indicare un orizzonte di possibilità, una via percorribile all'occorrenza in circostanze più favorevoli, con l'obiettivo di trattare in modo meno generico la fisica moderna, e di ampliare con coerenza i contenuti matematici.

Questo o qualsiasi altro, anche più efficace, modo si trovi e venga proposto, qualcosa dovrà comunque essere fatto per aggiornare i programmi di fisica, perché attualmente ogni anno di ricerca e scoperte in più, ogni anno di scienza in più, è un anno in più di ritardo nei contenuti della fisica svolta nei licei, ma, del resto, sembra che anche nella matematica si manifesti lo stesso destino. Infine, bisogna tener conto che, dal punto di vista fisico, per i problemi empirici che si studiano nelle scuole superiori, ma anche per problemi più astratti e complessi che si studiano nei primi anni di università, ogni tipo di formalizzazione è un'astrazione, utile fino al limite sperimentale, cioè giustificata fino al limite che viene concesso dalla natura e dalla struttura intrinsecamente sperimentale della fisica.

Bibliografia

GIRARDI M. e ISRAEL G. (1976). *Teoria dei campi*. Milano: Feltrinelli.

APOSTOL Tom M. (1969.) *Calculus.* New York: Wiley. Trad. italiana: *Calcolo* in 3 volumi, Torino: Bollati Boringhier, 1977.


LE SCOPERTE • LE INVENZIONI
STEPHEN W. HAWKING
ROGER PENROSE
LA NATURA DELLO SPAZIO E DEL TEMPO
CHE COSA LA MENTE UMANA PUÒ COMPRENDERE DELL'UNIVERSO
BUR
Rizzoli