

Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica

Un utilizzo didattico

Bonaventura Paolillo*

*Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno;
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.097

Sunto: *E' noto che la Matematica è indispensabile alla Fisica. Diversi matematici, tra cui Tokieda e Levi, utilizzano l'intuizione fisica per risolvere alcuni problemi di matematica. In effetti, la Fisica può semplificare le dimostrazioni matematiche e condurre a soluzioni rapide e nuovi teoremi. Tale approccio, non trova spazio nella pratica didattica quotidiana. Il seguente lavoro, offre un'opportunità in tal senso, per realizzare un'attività didattica per studenti delle scuole secondarie di secondo grado. Ad esempio, è possibile derivare il teorema di Pitagora da una vaschetta piena d'acqua, con un'argomentazione basata sul moto perpetuo. Viviamo in un mondo in cui tutto è collegato e il vincolo tra Matematica e Fisica è un esempio di questo.*

Parole Chiave: *esperimento fisico, dimostrazione fisica, didattica della Matematica e Fisica.*

Abstract: *It is known that Mathematics is indispensable for the developing of Physics. Several mathematicians, especially Tokieda and Levi, demonstrate how to*

use physical intuition to solve math problems. In fact, Physics can simplify proofs and lead, in a easier way to quick solutions and new theorems. Many reflections on this topic don't find the space they deserve in teaching practice. The following work offers an opportunity useful for the mathematics education. The aim is to make a didactic activity take place for High School, for example, it is possible to derive the Pythagorean theorem from a tank filled with water, with an argumentation based on perpetual motion. We live in a world where everything it's all linked and the bond between Math and Physics is just an example of this.

Keywords: *experimental physics, physics proof, mathematics education.*

1 - Introduzione

In questo lavoro si vuole presentare una riflessione più ampia sul significato di esperimento fisico e su come possa essere utilizzato per fornire una convalida a teoremi o a risultati di carattere prettamente matematico. Usualmente, partendo da contesti derivanti dalle scienze sperimentali, si cercano dei modelli matematici utili a descrivere e a simulare determinati comportamenti, si pensi ad esempio alle comuni previsioni meteorologiche. Negli ultimi decenni si è assistito, ad una serie di ricerche di un certo interesse, sul percorso inverso, cioè sulla possibilità che risultati o equazioni matematiche possano essere convalidati da esperimenti o congegni di tipo fisico, seppur spesso in maniera ideale. Il percorso non è nuovo e riprende in qualche misura i metodi empirici che trattava già il grande Archimede, per esempio risolvendo la quadratura della parabola. Studiosi influenti come Tadashi Tokieda (Stanford University) e Mark Levi (The Pennsylvania State University), hanno evidenziato tali aspetti negli ultimi due decenni orientando le ricerche in tale

direzione: l'obiettivo è valutare se e in quale misura la Fisica possa essere considerata una valida ancella della Matematica [1], [2], [3]. Si esamineranno alcuni contesti didattici significativi, come la dimostrazione fisica del teorema di Pitagora nel piano e nello spazio, l'individuazione dei punti notevoli in relazione all'equilibrio statico, la catena di Stevino, il principio di Archimede in Idrostatica.

Il discorso si potrebbe ampliare ad altre situazioni fisiche. Tuttavia, si sottolinea che determinare dimostrazioni fisiche o ragionamenti ideali ad hoc, capaci di descrivere questioni matematiche non è un compito facile e potrebbe risultare altrettanto arduo da risolvere. L'incarnazione fisica diventa però l'oggetto di ricerca del meccanico matematico che dovrebbe escogitare qualche esperimento fisico per le sue esigenze. A livello didattico, la rielaborazione di tali nuclei di Fisica calati nella Matematica, è una chiara occasione di introspezione per il docente e gli allievi, oltre a costituire un momento di crescita che si misura come consolidamento delle competenze di base.

2 - Teoremi di Pitagora

Oltre alle centinaia di dimostrazioni del celebre teorema di Pitagora, è poco nota la seguente prova di tipo fisico, riportata in [1], [2], [3].

2.1 - Il teorema di Pitagora nel piano

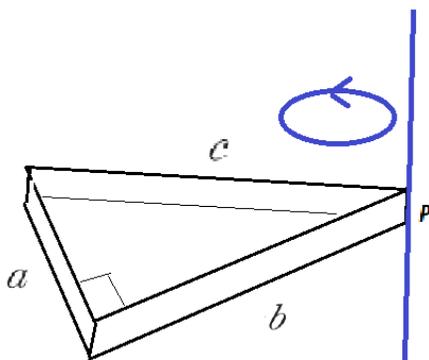
Teorema

In un triangolo rettangolo di cateti a , b e ipotenusa c vale

$$a^2 + b^2 = c^2$$

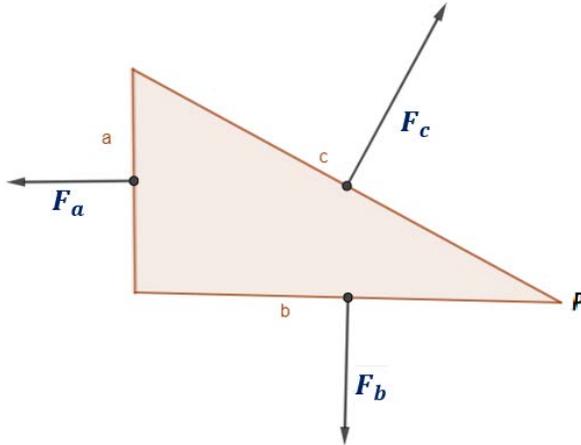
Dimostrazione.

Si scelga una vaschetta che abbia la forma di un prisma con altezza h e con le facce orizzontali, come il triangolo rettangolo dato. Viene quindi riempita con dell'acqua ed ancorata ad un perno P in cui può ruotare liberamente, come in figura.



Si osserva che un'eventuale rotazione farebbe muovere la vaschetta in maniera continua e permanente, generando *un moto perpetuo*. Essendo questo in contrasto con la conservazione dell'energia, la vaschetta è necessariamente in equilibrio.

La vista dall'alto, nella prossima figura, ne mostra la situazione fisica con le relative forze in gioco:



Le forze che agiscono sulle facce superiore ed inferiore della vaschetta si neutralizzano a vicenda, mentre quelle sulle facce laterali sono pari a:

$$\begin{aligned} |F_a| &= p(ah); & |F_b| &= p(bh); \\ |F_c| &= p(ch); \end{aligned}$$

Le direzioni sono rette passanti per il centro delle facce e naturalmente perpendicolari ad esse.

Le equazioni della statica ci garantiscono che è nulla la risultante di queste forze e la somma dei momenti di esse rispetto ad un qualsiasi punto. Esplicitando quest'ultima e scegliendo il polo P come in figura, si avrà:

$$M_{F_a} + M_{F_b} + M_{F_c} = 0$$

ovvero:

$$p(ah)\frac{a}{2} + p(abh)\frac{b}{2} - p(ch)\frac{c}{2} = 0$$

da cui eliminando p, h ed il fattore $1/2$, si ha la tesi cercata

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.2 - Il teorema di Pitagora nello spazio

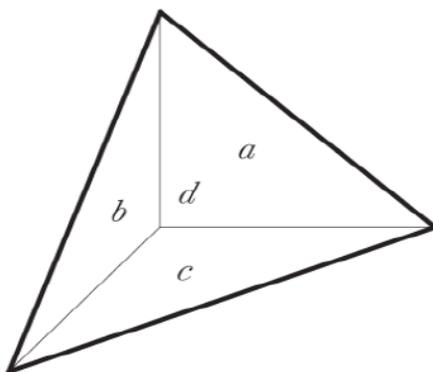
E' chiamato anche *teorema di De Gua* e costituisce, appunto, una *versione spaziale* del teorema di Pitagora. Viene qui esposto, secondo un argomento fisico, come fatto in [2].

Storicamente era stato provato nel 1783 da *Jean Paul de Gua de Malves* (1713-1785) ma era noto probabilmente a *Cartesio* (1596-1650) e *Johann Faulhaber* (1580-1635).

Teorema De Gua

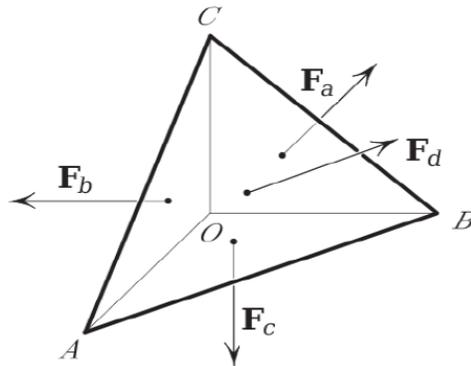
In un tetraedro formato da tre piani mutuamente ortogonali e il quarto piano, non parallelo ai primi tre, risulta:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$



Dimostrazione Fisica.

Si indichino con *a*, *b*, *c*, *d*, le superfici relative alle quattro facce e si riempia quindi il recipiente con del gas.



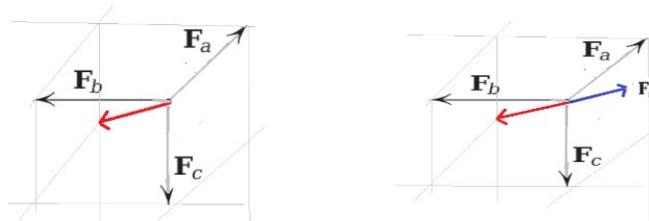
Per l'equilibrio del solido, deve risultare che la somma vettoriale delle quattro forze è nulla, cioè:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d = \mathbf{0}.$$

In particolare, il modulo della somma delle prime tre forze, è pari al modulo della quarta forza, perpendicolare al piano obliquo d :

$$|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c| = |\mathbf{F}_d|$$

Ciò si evidenzia ancora di più dalla seguente illustrazione:



Discende allora, dalla mutua perpendicolarità, che:

$$|\mathbf{F}_a|^2 + |\mathbf{F}_b|^2 + |\mathbf{F}_c|^2 = |\mathbf{F}_d|^2$$

Essendo poi, $F = \text{pressione} \times \text{area}$:

$$|\mathbf{F}_a| = pa; \quad |\mathbf{F}_b| = pb; \quad |\mathbf{F}_c| = pc;$$

e sostituendo nella espressione precedente, si ricava:

$$(pa)^2 + (pb)^2 + (pc)^2 = (pd)^2.$$

Eliminando p^2 , segue subito la tesi:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

L'impiego in aula di tali prove, è proponibile sin dal primo anno di un Liceo o Istituto Tecnico e costituisce un efficace motivo di approfondimento, sia in chiave matematica che fisica. In questo modo, emerge il carattere polivalente di un risultato scientifico.

3 – I Punti Notevoli e la loro verifica fisica

La trattazione dei punti notevoli di un triangolo si inserisce all'interno di un nucleo geometrico significativo ed in relazione all'elaborazione di alcuni luoghi geometrici fondamentali, come *asse e bisettrice*.

Si mostrerà che i punti notevoli oltre ad essere interpretati in un'accezione puramente geometrica, si possono inquadrare in diversi contesti fisici, come per esempio la *Statica del corpo rigido*. Si possono allora realizzare strutture rigide triangolari in cui le varie sollecitazioni, cioè forze, conducono all'equilibrio statico.

Tale approccio in [1], è stato descritto e sviluppato in modo originale, anche se in maniera prevalentemente teorica. Si fornirà qui, un'impronta maggiormente votata all'aspetto didattico, che consenta all'allievo un'acquisizione più

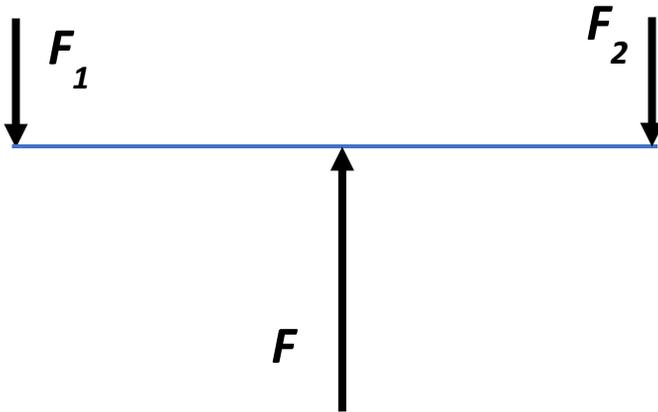
immediata di tali procedimenti. Si premette, a tale scopo, il seguente utilissimo

LEMMA DELLE TRE FORZE

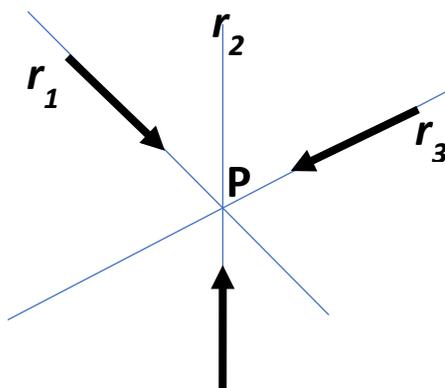
Se un corpo è soggetto a tre forze complanari ed è in equilibrio allora le tre forze hanno risultante nulla e sono parallele tra loro oppure concorrenti in un punto.

Dimostrazione

Si mostra, in figura, il caso esplicito di tre forze parallele per una leva in equilibrio, dove nel suo punto medio agisce la forza F di intensità doppia rispetto a F_1 , F_2 , applicate agli estremi.



Se le tre forze non sono parallele tra loro, esisteranno due di queste, con direzioni r_1 e r_2 , incidenti in P :



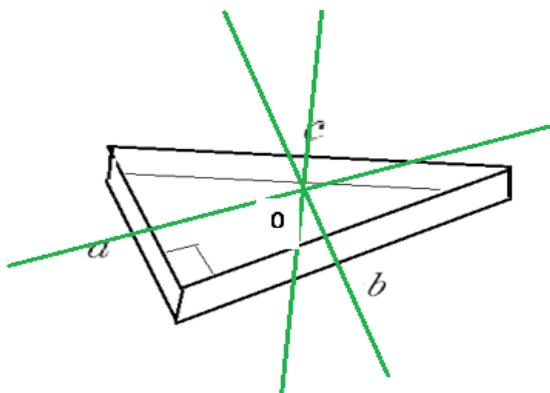
Per analizzare il momento risultante, che è nullo per ipotesi di equilibrio, si scelga il punto P come polo. Risulterà subito che $M_1 = 0$ e $M_2 = 0$. Necessariamente segue che $M_3 = 0$ e ciò significa che la retta r_3 passa per P .

3.1 - Il circocentro in un triangolo

Come dimostrare che gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un solo punto?

Si riprenda l'esempio della vaschetta piena d'acqua a forma di prisma che ha come basi quelle di un triangolo dato. Si può considerare la stessa senza far uso dell'ancoraggio all'asse. Le usuali forze di spinta, lungo le pareti, lasciano la vaschetta in equilibrio ed hanno come direzioni quelle degli assi dei lati, si può infatti considerare l'altezza della vaschetta trascurabile.

Dal *Lemma delle tre forze* discende subito che è individuato il circocentro.

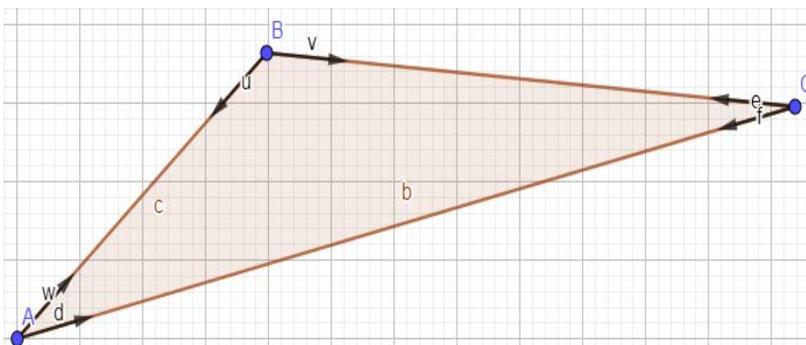


3.2 - L' incentro e l'ex-centro in un triangolo

Come dimostrare che le bisettrici si incontrano in un solo punto?

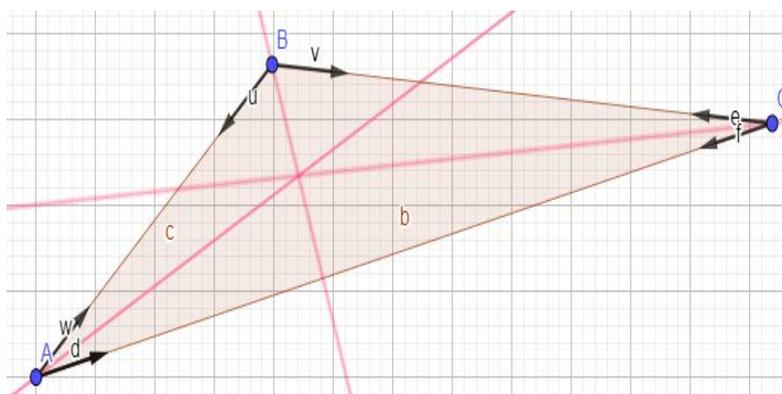
Una prova statica è la seguente: si considerino **6 forze** uguali tra loro in modulo e disposte come in figura:

- per il vertice **A** si considerano le forze w e d
- per il vertice **B** si considerano le forze u e v
- per il vertice **C** si considerano le forze e e f



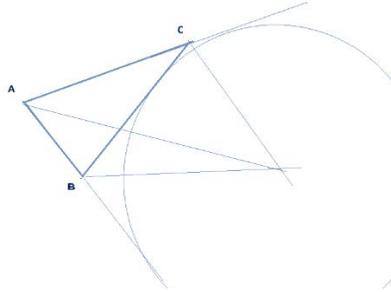
La somma delle forze è naturalmente zero ed il nostro “telaio triangolare” è in equilibrio.

L’idea è allora riorganizzare il calcolo delle somme delle forze secondo le proprietà usuali dell’addizione dei vettori, ovvero sfruttare le proprietà commutativa e associativa.

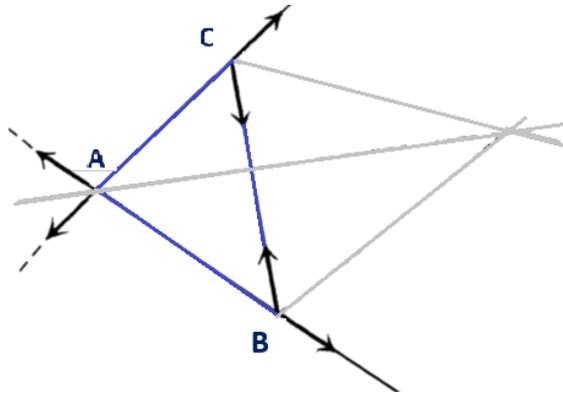


Si nota che, per ogni vertice fissato, la composizione della somma delle forze dà luogo ad un rombo. Inoltre, per esso, per una nota proprietà, le diagonali coincidono con le bisettrici. Dal *Lemma delle tre forze* si ha subito che le bisettrici concorrono in un punto, ovvero l’incentro.

Un procedimento simile può applicarsi per un altro punto notevole, il cosiddetto *ex-centro* definito dall’usuale proprietà che le bisettrici di due angoli esterni e la bisettrice interna dell’altro angolo, non adiacente ad essi, si intersecano in un punto.



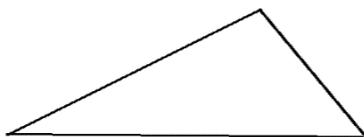
Per dimostrarlo si scelgano ancora sei forze uguali in modulo tra loro, come in figura, e si dispongano lungo i lati del triangolo dato ABC , di colore blu'.



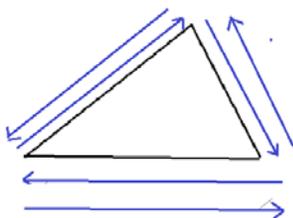
Applicando il *lemma delle tre forze* si conclude che le bisettrici, in grigio, sono concorrenti nell'ex-centro.

3.3 - Il Baricentro in un triangolo

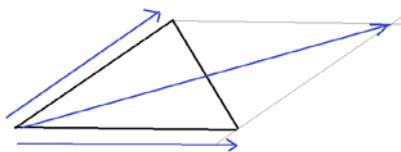
Per verificare che le mediane si incontrano in uno stesso punto, si consideri il seguente generico triangolo, visto ancora come modello di un telaio rigido.



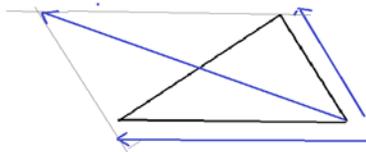
Si inseriscano sei forze in modo tale che lascino in equilibrio il triangolo, cioè immaginiamo che per ogni lato agiscano due forze opposte, con relativo modulo proporzionale alla lunghezza del lato stesso.



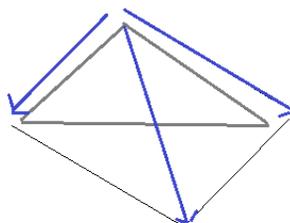
Si riorganizzano opportunamente la somma delle forze secondo i lati consecutivi, ottenendo:



Prima coppia



Seconda coppia



Terza coppia

Si osserva che tali forze in coppie, così raggruppate, hanno la somma che risulta sempre nulla. Applicando il lemma precedente le mediane concorreranno in uno stesso punto, cioè il baricentro del triangolo. Si è utilizzata infatti, la nota proprietà, in cui le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente per metà.

Non si conosce esplicitamente una prova fisica dell'ortocentro, se non interpretato questo come il circocentro del triangolo duale, secondo la dimostrazione euclidea classica.

4 - La Catena di Stevino

Simon Stevin (o Stevino); Bruges, 1548 – L'Aia, 1620; è stato uno scienziato fiammingo noto per i suoi importanti contributi alla Statica ed Idrostatica, ma anche alla Trigonometria Sferica, Navigazione e Geometria Proiettiva.

Un suo particolare congegno si è rivelato utile nel descrivere la condizione di equilibrio statico per il piano inclinato, da un punto di vista teorico e sperimentale. In sintesi, Stevino immaginava di appendere una catena ad un piano inclinato, assumendo essere priva di peso e con il movimento, tra le parti in causa, compiuto senza attrito. (in figura, il frontespizio dell'Opera *De Weeghdaet beschreven duer Simon Stevin van Brugghe*).

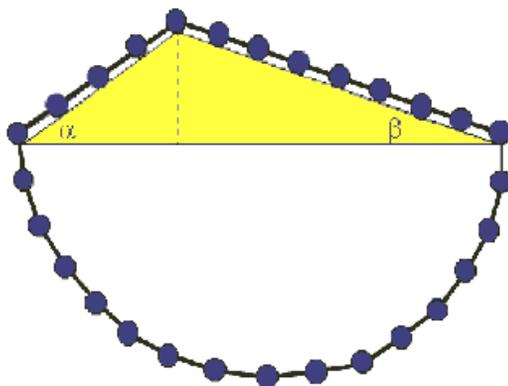
DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.



TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By François van Raphelinghen.
M.D.C.LXXXVI.

La catena sarà in equilibrio, oppure no?

L'argomentazione è del tutto originale in quanto l'equilibrio scaturisce da considerazioni sul moto perpetuo. Precisamente si può considerare un triangolo generico, non necessariamente un triangolo rettangolo, come in figura.



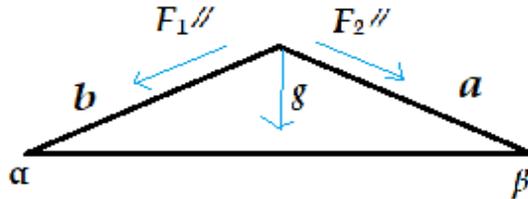
Se la catena non fosse in equilibrio, si dovrebbe muovere, ruotando in senso orario o antiorario; la rotazione, anche se di

piccola entità, porterebbe ad una nuova configurazione, identica a quella precedente. Continuando ulteriormente il movimento, *la catena sarebbe in moto per sempre!*

Poiché il moto perpetuo è impossibile, Stevino conclude che la catena è necessariamente in equilibrio.

La parte sottostante curva della catena è simmetrica e il suo peso non ha effetto sull'equilibrio complessivo; ci sarà allora equilibrio anche tra i due segmenti di catena.

Si possono evidenziare quindi le forze $F_1//$ e $F_2//$, a cui i segmenti di corda sono sottoposti verso il basso.



Tale argomentazione può essere adottata per sviluppare aspetti complementari prettamente matematici e stabilendo il *Teorema dei Seni* in Goniometria [1]. Si nota che:

1. Le componenti dell'accelerazione g sono:

$$g \sin a \quad \text{e} \quad g \sin \beta$$

2. Le masse sui lati risultano proporzionali alle lunghezze dei lati.

Dall'uguaglianza delle forze $F_1// = F_2//$ risulta che:

$$b g \sin a = a g \sin \beta$$

cioè:

$$a/\sin a = b/\sin \beta$$

Adattando qualche accorgimento¹ sulla configurazione del dispositivo, se ne deduce l'uguaglianza dei rapporti, ovvero il teorema dei seni:

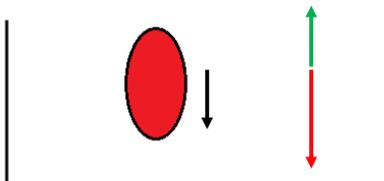
$$a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$$

5 - Oltre la Statica ... l'Idrostatica

E' spesso presente nei testi di Fisica la seguente prova del *Principio di Archimede*.

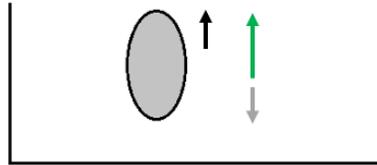
Si abbia un sacchettino di peso ininfluenza, immerso completamente in un liquido, per esempio acqua, non colorata in figura. E' plausibile ipotizzare che la *spinta di Archimede* dipenda *solo* dalla pressione che l'acqua esercita sulla superficie dell'involucro esterno. Si indichi il valore della spinta, che quindi è costante, con S , vettore di colore verde. Si denotino poi, i pesi dei liquidi inseriti successivamente nel sacchettino con vettori di colore rosso, grigio e giallo ed il vettore risultante col nero. Possono realizzarsi i seguenti casi:

densità fluido rosso > densità dell'acqua

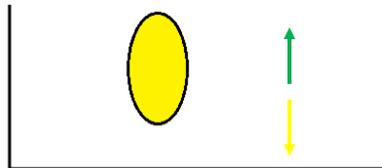


¹ Se ci fosse un angolo ottuso con il lato orizzontale, l'accorgimento potrebbe consistere nel far scivolare la catena a fianco dell'altro lato dell'angolo ottuso, seguendo una guida scorrevole in modo ad esso parallelo.

densità fluido grigio < densità dell'acqua



densità fluido giallo = densità dell'acqua



Da quest'ultimo caso si riesce a dedurre subito che la spinta di Archimede coincide con l'intensità del peso del sacchetto, ovvero $S=mg=dVg$, dove d è la densità dell'acqua e V il volume del sacchetto immerso. Evidentemente, tale argomentazione costituisce una *prova fisica del Principio di Archimede* e si può affiancare, nell'attività didattica, sia alle comuni esperienze sperimentali fatte con bilancia idrostatica, sia alla prova analitica, basata sulla legge di Stevino sui fluidi. Si veda anche Levi in [2]. Altre branche della Fisica, come *l'Elettricità, la Termodinamica, l'Ottica*, ecc, possono essere coinvolte per una prova fisica, come spiegato nel bel libro di M. Levi. (Per la *Cinematica* collegata alle serie numeriche, si può vedere anche B. Paolillo, *Lettera Matematica Pristem*; n. 61-60-64; anno 2007).

6 - Conclusioni

La panoramica di teoremi e risultati offerti è da una parte, indicativa di una gamma di esperienze da proporre in aula, ma anche direttamente fruibile per un loro impiego concreto. In questo modo, si può facilmente arricchire il curricolo di base di matematica e fisica, e far leva su evidenti aspetti motivazionali degli allievi. A discrezione del contesto classe, il singolo docente ne potrà dosare l'impiego effettivo.

Si evidenzia che tale approccio, nella prassi didattica, è sostanzialmente assente. In questo senso, purtroppo, lo sviluppo didattico delle due discipline non è riuscito a fornire contributi significativi o almeno incisivi per una modesta realizzazione in aula.

*In ricordo del collega e caro
amico Alberto Trotta*

Bibliografia

TOKIEDA Tadashi (1998). Mechanical Ideas in Geometry, *The American Mathematical Monthly*; Vol. 105, No. 8 (Oct., 1998), pp. 697-703

LEVI Mark . (2009). *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems(book)*. Princeton: Univ. Press.

LOLLI Gabriele (2011). Pensiero matematico e fisico, *Numero 3, Serie XI, anno CXXI*