

L'algebra complessa nella ricerca di pianeti extrasolari

Valerio Bozza*

*Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università di Salerno, Via Giovanni Paolo II 132, 84084 Fisciano, Italia; vbozza@unisa.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.101

Sunto: *L'astrofisica cerca di rispondere a domande fondamentali sulla nostra esistenza, dall'origine dell'Universo alla nascita delle prime forme di vita. La ricerca di pianeti extrasolari è una delle frontiere più appassionanti dell'astrofisica, con scoperte che si susseguono a ritmo incalzante. Tra i vari metodi di indagine, il microlensing, basato sull'effetto lente gravitazionale, sarà al centro di nuove missioni spaziali per completare il quadro delle nostre conoscenze. L'analisi delle osservazioni di microlensing passa per la risoluzione dell'equazione della lente gravitazionale, che richiede l'uso dell'algebra complessa e che ne stimola a sua volta interessanti approfondimenti. Il microlensing si propone, quindi, come emblematico esempio di connubio tra matematica, fisica e astrofisica.*

Parole Chiave: *Pianeti extrasolari, algebra complessa, lenti gravitazionali*

Abstract: *Astrophysics attempts to answer fundamental questions about our existence, from the origin of the Universe to the formation of life. The search for exoplanets is one of the most exciting frontiers of astrophysics, with discoveries following one another at an ever increasing pace. Among the various methods of investigation, microlensing, based on the gravitational lens effect, will be at the center of new space missions aimed at completing our knowledge. The analysis of microlensing observations steps through the resolution of the gravitational lens*

equation, which requires the use of complex algebra and which has in turn stimulated interesting insights. Microlensing stands as an emblematic example of the synergy between mathematics, physics and astrophysics.

Keywords: *Extrasolar planets, complex algebra, gravitational lenses*

1 - Alla ricerca di pianeti extrasolari

Da alcuni mesi è stato lanciato dalla NASA il nuovo telescopio spaziale, il James Webb Space Telescope¹, che, dopo aver raggiunto il punto Lagrangiano L2, ha dispiegato i suoi specchi per cominciare a scrutare le profondità del cosmo. E subito sono arrivate le prime entusiasmanti immagini: paesaggi di infinite galassie che si succedono l'una a fianco all'altra e l'una dietro l'altra come in un castello di specchi. Le più lontane visibili nelle immagini risalgono a pochi milioni di anni dopo il Big Bang e contengono le stelle di prima generazione del nostro Universo. Certamente è da queste immagini che speriamo di comprendere come il nostro Universo si sia evoluto dopo il Big Bang e cosa siano materia e energia oscura.

Puntando da tutt'altra parte, verso stelle vicine al nostro angolo di Universo, Webb ci ha mostrato la fioca luce di un pianeta, percepibile solo dopo aver sottratto l'abbagliante luce della stella intorno a cui orbita. Ma Webb può fare anche di più oltre a mostrarci l'esistenza di pianeti extrasolari, orbitanti intorno ad altre stelle. Attraverso i suoi spettrografi, Webb può analizzare la luce delle stelle durante il transito di un pianeta. L'atmosfera del pianeta, filtrando la luce della stella,

¹ <https://webb.nasa.gov/>

imprime sullo spettro caratteristiche righe e bande di assorbimento, che possono essere ricondotte alla presenza di determinate sostanze assorbitive nell'atmosfera. Se da Terra queste osservazioni erano condotte a livello pionieristico, Webb le sta portando a livelli di approfondimento irraggiungibili se non con telescopi spaziali. Già sono stati trovati i segnali di vapore acqueo, anidride carbonica e anidride solforosa, mentre manca ancora la scoperta più attesa, quella dell'ossigeno, che sarebbe un fortissimo indizio della presenza di vita extraterrestre. Non è più fantascienza ormai prevedere che nel prossimo decennio potremmo avere le prove dell'esistenza di vita su altri mondi!

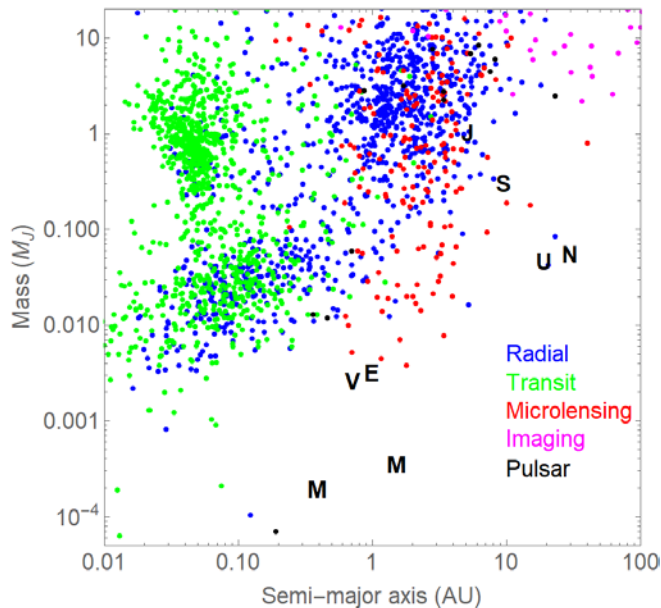


Fig. 1- Pianeti extrasolari trovati con vari metodi nel piano (semiasse maggiore, massa). I pianeti del Sistema Solare sono indicati dalle rispettive iniziali

I pianeti extrasolari noti sono ormai più di 5000², scoperti con vari metodi. Innanzitutto, abbiamo il metodo dei transiti, che, grazie al satellite Kepler, ha fatto la parte del leone. Poi abbiamo il metodo delle velocità radiali, che ha aperto le danze con la scoperta del primo pianeta 51 Pegasi b da parte di Mayor e Queloz, che hanno per questo ricevuto il premio Nobel nel 2019 (Mayor & Queloz 1995). Questi due metodi coprono circa il 95% delle scoperte, comprese quelle dei 59 pianeti nella cosiddetta “zona abitabile”, ovvero quelli alla giusta distanza dalla loro stella per poter ospitare acqua liquida sulla propria superficie. Questi metodi, però, sono fortemente focalizzati su pianeti orbitanti nelle immediate vicinanze della propria stella, mentre trascurano pianeti su orbite più ampie. Al contrario, l’immagine diretta di un pianeta è possibile solo per pianeti molto distanti dalla propria stella e soprattutto per sistemi planetari molto giovani. Sembra proprio che i pianeti di un sistema planetario simile al Sistema Solare sfuggirebbero agevolmente alla rivelazione con tutti i metodi messi in campo, con l’eccezione del nostro gigante gassoso Giove. In effetti, la Fig. 1, che rappresenta i pianeti nel piano (semiasse maggiore, massa) evidenzia proprio il fatto che i pianeti del nostro Sistema Solare si trovano in una zona al di fuori della portata degli attuali metodi di ricerca.

Tuttavia, il quarto metodo, dopo transiti, velocità radiali e immagine diretta, riempie proprio questo vuoto. Si tratta del microlensing, un caso particolare dell’effetto lente gravitazionale previsto dalla Relatività Generale di Einstein (per una review si veda Gaudi 2012). Vediamo in dettaglio

² <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>, <http://exoplanet.eu/>.

come funziona e perché può essere la chiave per un importante balzo in avanti nella ricerca di pianeti.

L'effetto lente gravitazionale si riferisce alla deflessione della luce da parte di un campo gravitazionale. Nel caso in cui si realizzi un fortunato allineamento tra una stella-sorgente, una stella-lente e l'osservatore, l'effetto si traduce in un'amplificazione temporanea del flusso osservato della stella-sorgente. In pratica, la luce della stella sorgente, viene deflessa e "focalizzata" dal campo gravitazionale della stella-lente verso l'osservatore, che così osserva un temporaneo aumento della luminosità della stella sorgente.

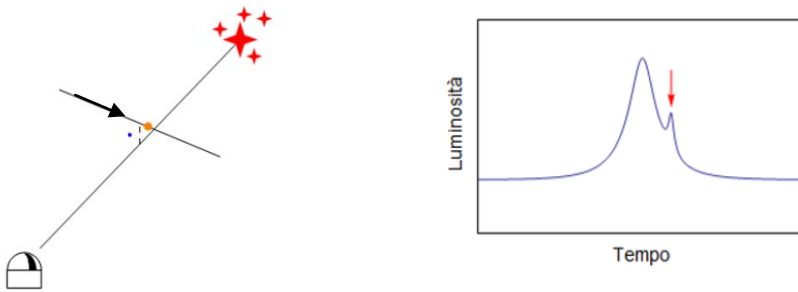


Fig. 2- A sinistra, Schematizzazione del microlensing: la stella-lente (gialla) passa vicino alla linea di vista tra l'osservatore e la stella-sorgente (rossa). La stella-lente è accompagnata da un pianeta (azzurro). A destra, curva di luce osservata della stella-sorgente. All'amplificazione dovuta alla stella-lente, si aggiunge l'anomalia creata dal pianeta, indicata dalla freccia rossa.

Se la stella-lente è accompagnata da un pianeta, anche il campo gravitazionale del pianeta può contribuire all'effetto lente gravitazionale, portando a delle "anomalie" nella curva di luce, come mostrato in Fig. 2. In effetti, il microlensing ha portato alla scoperta di 133 pianeti anche di piccola massa

grazie al fatto che il segnale scala con la radice quadrata della massa, anziché linearmente come nel caso delle velocità radiali. Inoltre, la massima sensibilità si ha su pianeti che orbitano a 1-2 unità astronomiche³ dalla loro stella. Questa caratteristica mette il microlensing in ottima posizione per scoprire analoghi del Sistema Solare e per studiare le regioni esterne dei sistemi esoplanetari, caratterizzate dalla presenza di corpi ghiacciati che crescono molto più rapidamente dei corpi rocciosi nelle regioni interne. E' solo oltre la "linea del ghiaccio" che può avvenire la formazione di giganti gassosi grazie a questi grandi nuclei ghiacciati.

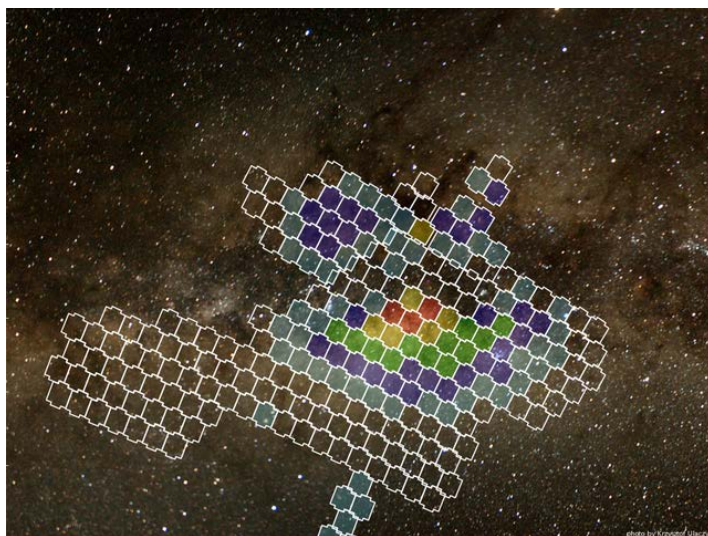


Fig. 3- Campi stellari del nucleo della nostra Galassia monitorati dalla collaborazione OGLE alla ricerca di eventi di microlensing.

³ L'unità astronomica è la distanza Terra-Sole, pari a circa 150 milioni di km.

Il microlensing richiede un allineamento quasi perfetto tra lente e sorgente e, perciò, è un fenomeno relativamente raro. Occorre monitorare un gran numero di stelle per trovare un numero cospicuo di eventi di microlensing. Le campagne osservative condotte dalle collaborazioni OGLE⁴, MOA⁵ e KMTNet⁶ si concentrano nei campi stellari più densi verso il centro della Galassia, dove è più probabile che si realizzi il desiderato allineamento (Fig. 3). Telescopi dislocati in tutto il mondo con fotometria di alta precisione seguono gli eventi di microlensing per non perdere i segnali di preziose anomalie. In questo modo, vengono scoperti ogni anno circa 3000 eventi, di cui circa una decina recanti anche la segnatura di un pianeta.

Una volta trovata un'anomalia in un evento di microlensing, occorre trovare l'interpretazione corretta della curva di luce per verificare che sia dovuta ad un pianeta e per caratterizzarne i parametri. Il problema, però, è che la curva di microlensing dovuta al campo gravitazionale di due corpi celesti come la stella e il suo pianeta non è semplicemente la somma delle due curve di luce: non vale un principio di sovrapposizione! La casistica che ci si può presentare è estremamente varia. Ci sono pianeti che producono un piccolo aggiuntivo e altri che producono una depressione. Alcuni generano perturbazioni molto estese con più picchi intervallati da depressioni (Fig. 4).

⁴ <https://ogle.astrouw.edu.pl/>

⁵ <http://www2.phys.canterbury.ac.nz/moa/>

⁶ <https://kmtnet.kasi.re.kr/kmtnet/>

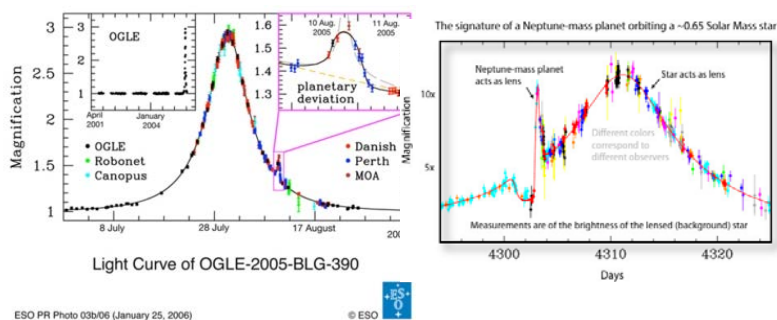


Fig. 4- Alcuni esempi di eventi di microlensing che hanno condotto alla scoperta di pianeti. Si possono notare picchi aggiuntivi e depressioni in varie combinazioni, a testimoniare la complessità del fenomeno.

Una tale complessità richiede sofisticati algoritmi di calcolo e di modellazione basati sulla matematica dell'effetto lente gravitazionale per arrivare ad un'interpretazione robusta del fenomeno e ad una caratterizzazione completa del sistema planetario.

2 - Equazione della lente e algebra complessa

Il punto di partenza per lo studio dell'effetto lente gravitazionale è l'equazione della lente, che può essere desunta da semplice trigonometria osservando lo schema in Fig. 5. La traiettoria del raggio di luce emesso dalla sorgente S viene deflessa dal campo gravitazionale generato dalla lente L di un angolo $\hat{\alpha}$ e arriva all'osservatore sotto un angolo θ anziché con l'angolo β , corrispondente alla posizione angolare reale della sorgente. Tenendo conto delle distanze tra osservatore e lente (D_{OL}), tra osservatore e sorgente (D_{OS}) e tra lente e sorgente (D_{LS}), e del fatto che gli angoli β , θ e $\hat{\alpha}$ sono

tutti molto piccoli, la relazione tra i segmenti $AS = AB - BS$ diventa

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{\alpha}$$

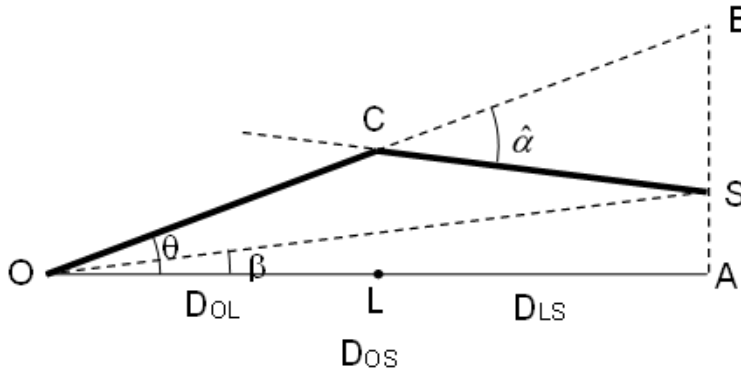


Fig. 5 - Schematizzazione dell'effetto lente gravitazionale per la formulazione dell'equazione della lente. L'osservatore in O, vede la sorgente S ad un angolo θ invece che ad un angolo β a causa della deflessione dovuta alla lente L.

L'angolo di deflessione è calcolato dalla Relatività Generale nel limite di campo debole come

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 D_{OL} \theta}$$

Sostituendo nell'equazione della lente, otteniamo l'equazione

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

dove abbiamo definito l'angolo di Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}}}$$

che raccoglie tutte le costanti e determina l'entità della deflessione.

L'equazione della lente così ottenuta descrive il gravitational lensing da parte di una sola lente nell'origine delle coordinate. Le soluzioni θ rappresentano le immagini viste dall'osservatore di una sorgente collocata in β . Se ci sono più lenti alle coordinate $\vec{\theta}_i$ l'equazione va scritta in forma vettoriale:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{E1}^2 \frac{\vec{\Delta\theta}_1}{|\vec{\Delta\theta}_1|^2} - \theta_{E2}^2 \frac{\vec{\Delta\theta}_2}{|\vec{\Delta\theta}_2|^2}$$

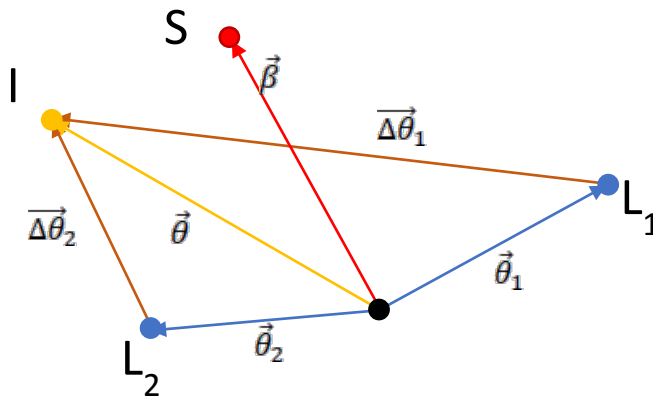


Fig. 6 - Definizione dei vettori che compaiono nell'equazione della lente per lente binaria. Le due lenti L_1 e L_2 deflettono la luce proveniente dalla sorgente S , che appare nella posizione dell'immagine I .

Fissate le distanze D_{OL} , D_{LS} , D_{OS} , le posizioni e le masse delle lenti, data una posizione $\vec{\beta}$ della sorgente, l'osservatore vedrà un'immagine per ogni $\vec{\theta}$ che risolve quest'equazione. In generale, infatti, quest'equazione può ammettere più di una soluzione. Per calcolare l'amplificazione in un evento di microlensing, occorre perciò calcolare le posizioni di tutte le immagini generate dalle lenti e valutarne le singole estensioni

per poi sommare il tutto. Questa procedura va ripetuta per ogni istante durante lo sviluppo dell'evento di microlensing.

La risoluzione dell'equazione della lente è lo scoglio centrale nella descrizione del microlensing. A tal proposito, Witt (1990) trovò che il problema poteva essere formulato in modo molto vantaggioso nel campo complesso. Infatti, sia le immagini che la posizione della sorgente sono identificati da vettori nel cielo dell'osservatore. Quindi, l'equazione della lente può essere letta come un'applicazione dallo spazio delle immagini \mathbb{R}_I^2 allo spazio delle sorgenti \mathbb{R}_S^2 . Identifichiamo questi due spazi con i campi complessi \mathbb{C}_I e \mathbb{C}_S tramite la sostituzione

$$\frac{\vec{\theta}}{\theta_E} \rightarrow z, \quad \frac{\vec{\beta}}{\theta_E} \rightarrow \zeta.$$

L'equazione della lente diventa

$$\zeta = z - \frac{m_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{m_2}{\bar{z} - \bar{z}_2}$$

dove $m_i \equiv M_i/M$ sono le frazioni in massa delle lenti sul totale e z_i le loro posizioni; la barra indica la coniugazione complessa. La forma complessa dell'equazione della lente riporta l'equazione vettoriale ad un problema algebrico per il quale possiamo impiegare i metodi consolidati dell'algebra complessa. Come vedremo, questo consente di ottenere una serie di risultati generali che impattano sulla fisica del microlensing e sull'analisi degli eventi planetari.

Partiamo innanzitutto dalla risoluzione dell'equazione della lente. Data una sorgente in ζ e N lenti disposte in z_1, \dots, z_N , con masse normalizzate m_1, \dots, m_N , vogliamo trovare tutte le immagini z create dall'effetto lente gravitazionale.

L'equazione della lente per N lenti si scrive generalizzando l'equazione della lente binaria scritta in precedenza:

$$\zeta = z - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\bar{z} - \bar{z}_i}$$

Possiamo scrivere l'equazione complessa coniugata di questa e ricavare \bar{z} in funzione di $\bar{\zeta}$ e di z . Sostituendo nell'equazione della lente e raccogliendo i termini, otteniamo un polinomio di grado N^2+1 in z

$$(\zeta - z) \prod_i \left\{ (\bar{\zeta} - \bar{z}_i) \prod_j (z - z_j) + \sum_j \left[m_j \prod_{k \neq j} (z - z_k) \right] \right\} +$$

$$[\prod_j (z - z_j) \sum_i [m_i (\prod_{p \neq i} \{ (\bar{\zeta} - \bar{z}_i) \prod_j (z - z_j) + \sum_j [m_j \prod_{k \neq j} (z - z_k) \}])] = 0$$

E qui entra in gioco il teorema fondamentale dell'algebra, che ci assicura che esistono N^2+1 soluzioni per questo polinomio. Attenzione, però! Non tutte queste soluzioni risolvono l'equazione originale. Infatti, l'uso della complessa coniugata ha introdotto radici spurie, in modo simile a quanto accade quando si risolvono equazioni irrazionali. Occorre perciò controllare le radici una per una per selezionare quelle che corrispondono a soluzioni dell'equazione originale e che sono quindi immagini genuine a tutti gli effetti. Fisici e matematici si sono chiesti se fosse possibile saturare il numero massimo di radici N^2+1 con immagini fisiche. Fu ben presto evidente che il numero di immagini scala linearmente con N e non quadraticamente come suggerirebbe il grado del polinomio (Rhie 2002). Infine, sofisticati studi matematici hanno dimostrato che il numero di immagini varia da un

minimo di $N+1$ ad un massimo di $5N - 5$ per ogni $N \geq 2$ (Khavinson & Neumann 2004).

L'uso dell'algebra complessa nel microlensing non termina qui. Infatti, se esiste un numero minimo e un numero massimo di immagini, allora il numero preciso di immagini dipende dalla posizione della sorgente. Poiché l'applicazione della lente è continua, ciò può avvenire solamente nei cosiddetti punti critici, definiti dall'annullamento del determinante Jacobiano: $\det J = 0$. In notazione complessa, l'equazione per trovare i punti critici $\det J = 0$ diventa

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 = 0$$

che per il nostro sistema di N lenti è

$$1 - \left| \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \right|^2 = 0$$

Quest'equazione indica che la quantità dentro il modulo deve essere al più un fattore di fase

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z - z_i)^2} = e^{i\varphi}$$

Quest'equazione si può mettere in forma di un polinomio di grado $2N$ in $z(\varphi)$. Al variare di φ tra 0 e 2π , otteniamo $2N$ archi di curve critiche. Questi archi possono essere disconnessi tra loro, oppure possono essere connessi agli estremi per generare un'unica curva critica.

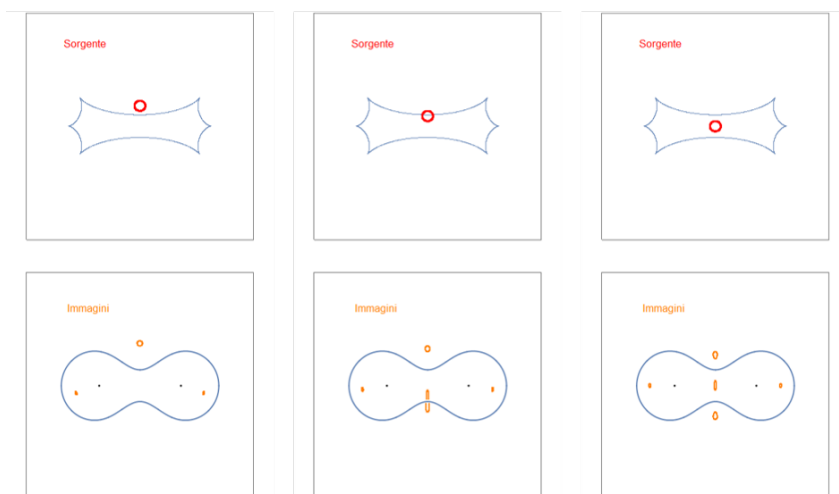


Fig. 7 - In basso abbiamo la curva critica generata da due lenti di uguale massa (indicate dai punti neri). In alto abbiamo la caustica corrispondente. Da sinistra a destra abbiamo tre posizioni diverse della sorgente (cerchio rosso), fuori, a cavallo e dentro la caustica rispettivamente. In basso vediamo le immagini corrispondenti. Quando la sorgente è esterna alla caustica, abbiamo 3 immagini. Quando la sorgente è a cavallo della caustica, vediamo la formazione di due immagini sulla curva critica. Quando la sorgente è dentro la caustica, abbiamo 5 immagini.

Da quanto detto, abbiamo capito che nuove coppie di immagini possono essere generate solo sulle curve critiche. Ovviamente, questo vincola la sorgente ad essere nel punto ζ corrispondente ottenuto tramite l'equazione della lente. Quindi, ad ogni curva critica $z(\varphi)$ corrisponde una caustica $\zeta(z(\varphi))$.

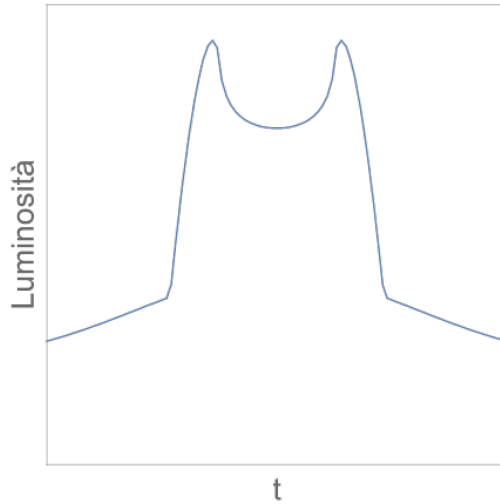


Fig. 8 - Curva di luce di microlensing per una sorgente che attraversa una caustica come in Fig. 7. I picchi si hanno in corrispondenza degli attraversamenti.

La generazione di nuove coppie di immagini si ha quando la sorgente, nel suo movimento relativo alla lente, attraversa una caustica. Le due immagini aggiuntive così create sopravvivranno fino a quando la sorgente non uscirà dalla caustica. A quel punto, le due immagini si distruggeranno nel punto critico corrispondente al punto caustico da cui la sorgente è uscita. Il processo è illustrato in Fig. 7.

Tutto questo processo di creazione e distruzione di immagini si riflette nella curva di luce osservata dai telescopi. Infatti, ciò che osserviamo è l'amplificazione della luce proveniente dalla sorgente. Questa non è altro che il rapporto tra l'estensione totale di tutte le immagini e l'estensione originale della sorgente. La massima estensione si ha proprio in corrispondenza degli attraversamenti delle caustiche. E'

così che ritroviamo nelle curve di luce, come quella in Fig. 8, dei doppi picchi intervallati da una forma ad “U”.

3 - Il microlensing tra la matematica e le prossime missioni spaziali

La matematica descritta finora è alla base dei moderni codici di calcolo delle curve di luce da microlensing, necessari per la corretta modellazione e interpretazione dei dati sperimentali. Naturalmente, i codici di calcolo più avanzati, come VBBinaryLensing⁷, il codice sviluppato all’Università di Salerno, introducono una serie di ottimizzazioni che rendono il codice robusto ed efficiente in tutte le situazioni (Bozza 2000, Bozza et al. 2018, Bozza, Khalouei & Bachelet 2021). Ad esempio, l’area delle immagini viene ottenuta tramite un’integrazione sul bordo sfruttando il teorema di Green. La precisione dell’integrazione viene migliorata introducendo una correzione parabolica sugli archi campionati con un numero finito di punti. In questo modo, i residui diventano di ordine superiore. La stima dei residui è alla base del controllo degli errori, che è essenziale per capire se la precisione desiderata è stata raggiunta o no. Inoltre, stimando l’errore per ciascun arco sul bordo dell’immagine, è possibile intensificare il campionamento sugli archi con gli errori più grandi, ottenendo un campionamento ottimizzato.

VBBinaryLensing è ormai diventato il codice di riferimento nel campo del calcolo del microlensing da lenti binarie. E’ open source e disponibile su Github. E’ scritto in linguaggio

⁷ <https://www.fisica.unisa.it/GravitationAstrophysics/VBBinaryLensing.htm>

C++, ma importabile in Python, che è diventato ormai il linguaggio più diffuso in ambito astrofisico. Di fatto, VBinaryLensing è diventato il nucleo di tutte le piattaforme di modellazione di microlensing che si rivolgono all'utente medio (RTModel⁸, pyLIMA⁹, MulensModel¹⁰, muLAn¹¹).

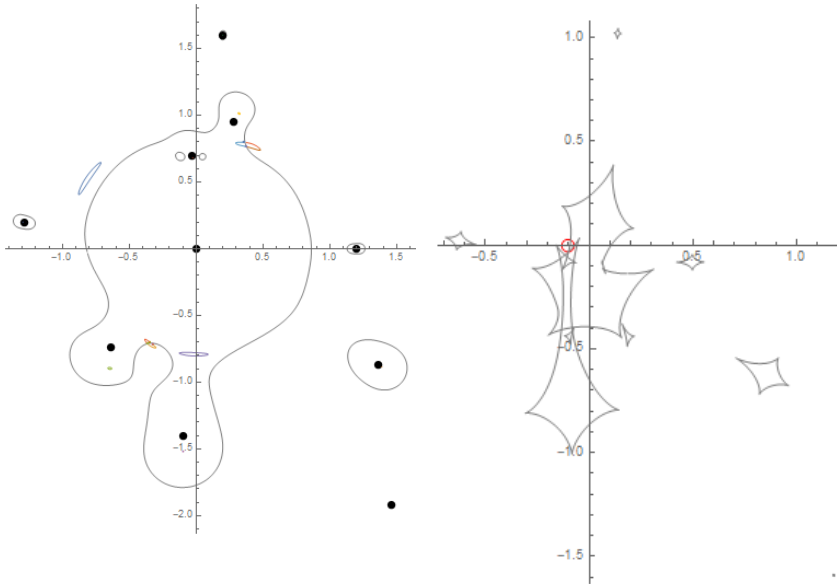


Fig. 9 - A sinistra curve critiche e immagini generate da 10 lenti corrispondenti ad una sorgente tra le caustiche mostrate a destra.

La prossima frontiera è un codice robusto ed efficiente per le lenti multiple (Fig. 9). Qui sussistono problemi numerici proprio nel caso più interessante di una lente massiva (una stella) circondata da un certo numero di piccoli pianeti. Sarà

⁸ <https://www.fisica.unisa.it/GravitationAstrophysics/RTModel.htm>

⁹ <https://github.com/ebachelet/pyLIMA>

¹⁰ <https://github.com/rpoleski/MulensModel>

¹¹ <https://github.com/muLAn-project/muLAn>

necessario inventarsi nuovi algoritmi sempre tenendo come riferimento la guida offerta dall'algebra complessa.

Lo sviluppo di codici efficienti e precisi nel microlensing diventa quanto mai importante in vista del lancio della missione Roman (ex WFIRST), da parte della NASA, previsto per il 2025-2026. Questa missione sarà rivolta allo studio della Dark Energy¹² e degli esopianeti tramite il metodo del microlensing (Fig. 10).

Monitorando il centro Galattico con una cadenza e una precisione fotometrica senza precedenti, ci si aspetta di scoprire almeno 1500 pianeti, raggiungendo anche pianeti nella parte esterna della fascia di abitabilità (Penny et al. 2019). Come detto in precedenza, il microlensing è particolarmente sensibile ai pianeti oltre 1 Unità Astronomiche e, quindi, Roman sarà in grado di trovare pianeti analoghi a quelli del Sistema Solare con l'eccezione di Mercurio (Fig. 11). In più sarebbe sensibile addirittura a satelliti dei pianeti giganti con massa simile a quella di Ganimede o Titano, pari a due volte la massa della Luna (Fig. 12).

Oltre ad avere una sensibilità eccezionale, Roman costruirà una statistica sufficientemente ampia da permettere di studiare la distribuzione dei pianeti all'interno della nostra Galassia e il numero di pianeti "vaganti", che non orbitano intorno ad alcuna stella (Johnson et al. 2020).

¹² La Dark Energy è stata introdotta per spiegare l'accelerazione osservata nell'espansione dell'Universo. Dovrebbe costituire circa il 70% dell'energia nel nostro Universo, ma la sua natura è del tutto sconosciuta.

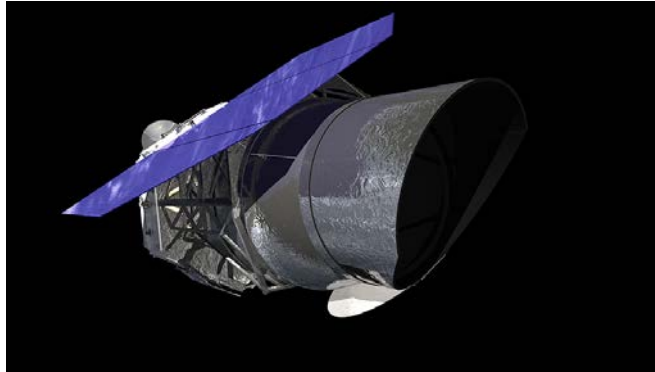


Fig. 10 - Un'immagine del satellite Roman (NASA).

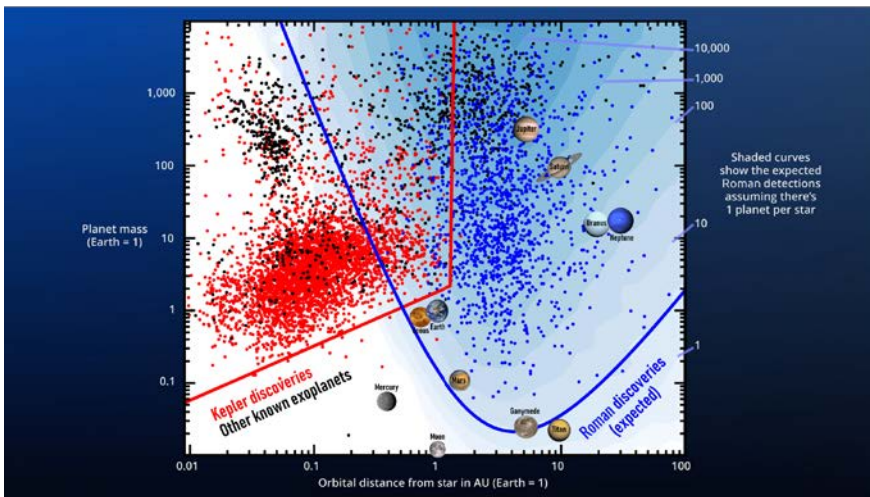


Fig. 11 - Il piano (semiasse maggiore, massa) con la curva di sensibilità di Roman. Da notare la capacità di rivelare praticamente pianeti analoghi a quelli del Sistema Solare e la potenzialità di scoprire pianeti con la massa di Ganimede.

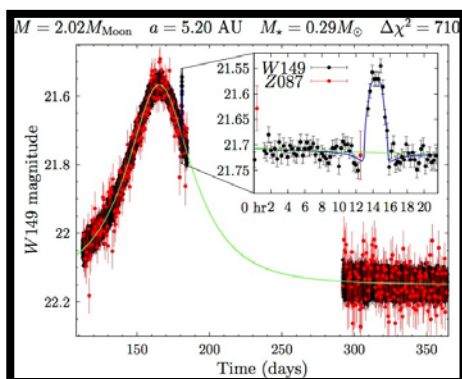


Fig. 12 - Una curva di luce simulata con un pianeta di massa pari a due volte la massa della Luna.

Questi pianeti vaganti, recentemente scoperti grazie al microlensing, potrebbero essere il risultato della formazione stellare a piccole masse, oppure pianeti formati in normali sistemi planetari e poi espulsi in conseguenza di instabilità dinamiche. Roman aiuterà a comprendere questo nuovo mistero, anche grazie al codice VBBinaryLensing, che è stato adottato nel protocollo ufficiale di analisi dati.

In conclusione, il microlensing rappresenta un caso emblematico di come le basi matematiche siano fondamentali per affrontare problemi fisici complessi e costruire strumenti in grado di far fronte alla mole crescente di dati provenienti da osservazioni sempre più precise e sofisticate nel modo più efficiente possibile. Viceversa, la fisica continua ancora oggi a stimolare la matematica proponendo problemi sempre nuovi e avvincenti da affrontare in modo rigoroso e generale.

Bibliografia

BOZZA V. (2010). Microlensing with an advanced contour integration algorithm: Green's theorem to third order, error control, optimal sampling and limb darkening. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 408, pp. 2188-2200.

BOZZA V. et al. (2018). Vbbinarylensing: a public package for microlensing light-curve computation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 479, p.5157-5167.

BOZZA V., KHALOUEI E. & BACHELET E. (2021). A public code for astrometric microlensing with contour integration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 505, pp.126-135.

GAUDI B.S. (2012). Microlensing Surveys for Exoplanets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 50, p. 411-453.

JOHNSON S. et al. (2020). Predictions of the Nancy Grace Roman Space Telescope Galactic Exoplanet Survey. II. Free-floating Planet Detection Rates. *The Astrophysical Journal* 160, 123.

KHAVINSON D. & NEUMANN G. (2004). On the number of zeros of certain rational harmonic functions. *arXiv: math/0401188*.

MAYOR M. & QUELOZ D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 378, pp. 355-359.

PENNY M. et al. (2019). Predictions of the WFIRST Microlensing Survey. I. Bound Planet Detection Rates. *The Astrophysical Journal Supplement Series* 241, 3.

RHIE S.H. (2002). n-point Gravitational Lenses with $5(n-1)$ Images. *arXiv:astro-ph/0305166*.

WITT H.J. (1990). Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars. *Astronomy and Astrophysics* 236, p. 311.

