

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVII - Serie IV – volume IV (4)
dicembre 2022**

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

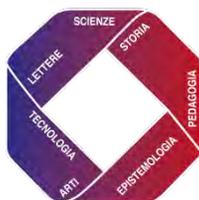
PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVII - Serie IV - Volume IV (4)
Dicembre 2022



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni

Via Lucania 1 l.

64026 Roseto degli Abruzzi (TE)

cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro

Via Camaldolilli n. 1B

80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra

Via Michele Lessona 5

00134 Roma- cell. 340 5065616

luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)

giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2022 Edizioni AFSU -

UniversItalia-Teramo, Roma -

ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019

del 19 luglio 2019 e Versione

cartacea n.695/2021 del 3 giugno

2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-622-3

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di dicembre 2022 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Francesco di Paola Bruno	7
<i>Formulazione, formalizzazione e ... rischio di formulite</i>	
Rosa Buonanno* Daniela Buono	27
<i>La funzione della matematica nell'insegnamento della fisica, la funzione della fisica nell'insegnamento della matematica</i>	
Matteo Tanferna	43
<i>Strumenti matematici minimi per la fisica moderna</i>	
Bonaventura Paolillo	65
<i>Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica</i>	
Angela Donatiello	85
<i>Regressione lineare: un metodo per il fitting di dati sperimentali</i>	
Luigi Tomasi	119
<i>Un insegnamento integrato di matematica e fisica nella Scuola Secondaria di II grado?</i>	
Giuseppe De Riso, Marco Lo Schiavo, Lidia Truda, Canio Noce	137
<i>Sull'entanglement</i>	
Valerio Bozza	159
<i>L'algebra complessa nella ricerca di pianeti extrasolari</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	181

Formulazione, formalizzazione e ... rischio di formulite

Francesco di Paola Bruno*

* Già docente di Matematica e Fisica – Castellammare di Stabia (NA);
effe.bruno@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.094

Sunto: *Vengono presentati quattro argomenti di Fisica previsti per la secondaria di 2° grado, tratti da ottica geometrica, meccanica, elettromagnetismo che, nonostante l'applicazione di differenti leggi e principi fisici, vengono descritti dalla stessa legge matematica. Tale formalizzazione permette di cogliere analogie e differenze tra i vari fenomeni e fornisce lo spunto per dare significato fisico alle condizioni di esistenza matematiche, suggerendo anche possibili nuove interpretazioni in contesto reale. Viene anche sottolineata la centralità del concetto di legge fisica generale e di modello matematico contrapposta alle formulette "magiche" il cui uso, o abuso, spesso conduce all'errata risoluzione dei problemi.*

Parole Chiave: *legge fisica, formalizzazione matematica, modellizzazione*

Abstract: *In this article I present how four different physics topics, usually taught in high school and stemming from geometric optics, mechanics and electromagnetism, can be described by the same mathematical formula, despite starting from the application of diverse physics laws and principles. This general mathematical formalization highlights the similarities between different physics phenomena while also suggesting novel and different interpretation of these*

phenomena. This general approach is also opposed to the application of ad hoc "magic" formulas, which often lead to flaws when mistakenly chosen to solve physics problems.

Keywords: *physics laws, mathematical formalization, modelling*

1 - Introduzione

Nel seguito saranno esaminate quattro leggi fisiche: legge dei punti coniugati per lenti sottili; molla equivalente di molle in serie; resistenza equivalente di resistori in parallelo; capacità equivalente di condensatori in serie. Pur richiedendo l'applicazione di differenti principi e leggi fisiche, vengono formalizzate con la stessa legge matematica che ricorda la formula della media armonica. Ciò consente di fare qualche considerazione su analogie e differenze tra le quattro situazioni presentate, immaginando un ipotetico "dialogo" tra Fisica e Matematica, in cui ciascuna disciplina considera la situazione dal proprio punto di vista.

2 - Legge dei punti coniugati per lenti sottili

L'ottica geometrica è uno dei temi di Fisica, previsti per il primo biennio della scuola secondaria di 2° grado e del liceo scientifico in particolare, che spesso per vari motivi vengono trascurati, facendo perdere così un'importante occasione per dare una connotazione reale a costruzioni e proprietà trattate in forma astratta nella geometria euclidea. È interessante anche cogliere le analogie tra il modello matematico e il modello fisico coinvolti, osservando che, come è difficile definire che cosa sia una "retta" in geometria euclidea, così è controverso definire che cosa sia un "raggio luminoso" in

ottica. Non va trascurato poi il fatto che con una spesa irrisoria si può portare in classe una comune lente di ingrandimento e sperimentare direttamente come e dove vengono a formarsi le immagini.

L'esperienza mi dice che può anche capitare che qualche alunno più motivato possa portare in classe un rudimentale videoproiettore realizzato fissando il suo smartphone all'interno di una scatola di cartone e coprendo con una comune lente di ingrandimento il foro praticato sulla parete opposta della scatola.

La "legge dei punti coniugati" valida sia nella rifrazione con lenti "sottili", sia nella riflessione con specchi parabolici o "sferici di piccola apertura", lega le posizioni di oggetto e immagine prodotta, con la distanza focale della lente o dello specchio.

Intanto vale la pena di sottolineare come la modellizzazione matematica di un fenomeno reale può richiedere delle semplificazioni di carattere fisico. Nel nostro caso, la caratteristica "sottile" riferita a una lente convergente indica che il raggio di curvatura delle superfici della lente è molto più grande del diametro della lente stessa. Ciò rende trascurabile il suo spessore al centro e quindi consente di affermare che un raggio luminoso, comunque inclinato, incidente sul centro della lente, possa essere modellizzato con un'unica retta sia nella parte incidente sia in quella rifratta dopo l'attraversamento della lente. Così la caratteristica "di piccola apertura" riferita a uno specchio sferico consente di affermare che un raggio luminoso incidente sullo specchio parallelamente all'asse ottico venga sempre riflesso verso un

unico punto detto fuoco, proprietà che a rigore è vera solo per specchi parabolici.

Per la formalizzazione matematica della legge, supponiamo di avere (Fig. 1) una lente convergente con lunghezza focale f , a sinistra della quale, a distanza p , si trovi un oggetto. Il punto P appartenente all'oggetto emette dei raggi luminosi che, dopo essere stati rifratti, si incontrano nel punto Q appartenente all'immagine che si forma a destra della lente, a distanza q da essa. Degli infiniti raggi partenti da P , possiamo considerarne due particolari, il primo PL parallelo all'asse ottico che verrà deviato verso il fuoco F_2 , il secondo PC passante per il centro della lente che, come osservato precedentemente, prosegue inalterato. I raggi rifratti LQ e CQ si incontreranno nel punto Q che determina la posizione dell'immagine.

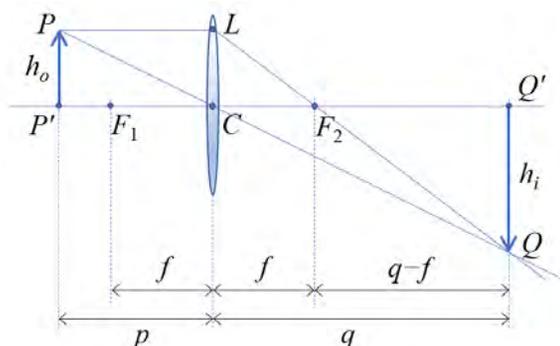


Fig. 1 - Costruzione dei punti coniugati per una lente convergente.

Pensando di operare nel piano euclideo, possiamo applicare la similitudine ai triangoli $PP'C$ e $QQ'C$ e ai triangoli LCF_2 e $QQ'F_2$, oppure, se preferiamo il piano cartesiano, possiamo più semplicemente usare la definizione di pendenza delle rette PQ ed LQ , ottenendo le seguenti uguaglianze:

$$\frac{h_o}{p} = \frac{h_i}{q} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p} \quad \frac{h_o}{f} = \frac{h_i}{q-f} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = \frac{q-f}{f}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{q-f}{f} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{q}{f} - 1 \Rightarrow \frac{q}{p} + 1 = \frac{q}{f}$$

Si perviene così alla nota legge dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Se vogliamo che la formula risponda al problema di determinare a quale distanza q dalla lente deve essere posizionato uno schermo su cui visualizzare nitidamente l'immagine dell'oggetto che si trova dall'altra parte della lente a distanza p , dovremmo scrivere:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \quad q = \frac{fp}{p-f}$$

dove q risulta funzione della variabile p , una volta che si sia fissato il parametro f . Tale funzione può essere tabulata con l'uso della calcolatrice per poi essere rappresentata graficamente per punti (Fig. 2).

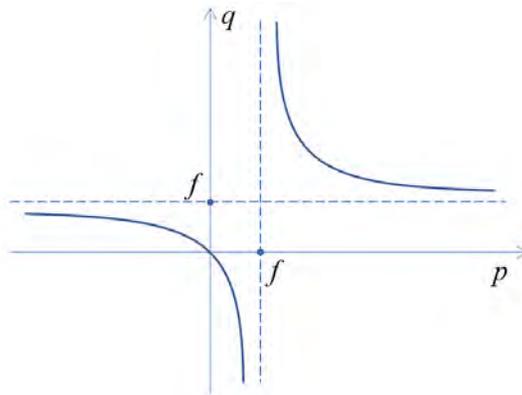


Fig. 2 - Grafico cartesiano della legge dei punti coniugati.

Anche in classi del primo biennio, sperimentalmente è possibile costruire il grafico di quella che poi, nei successivi anni, verrà classificata come funzione omografica, così come è molto intuitivo, sempre numericamente, ricavare le tendenze:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} q = f \qquad \lim_{p \rightarrow f^+} q = +\infty$$

che poi saranno chiamate limiti. È da considerare, infatti, che la didattica della matematica, invece di svilupparsi lungo una retta, dovrebbe piuttosto procedere su di una spirale in cui i concetti, per livelli successivi, vengono ripresi, approfonditi e consolidati sempre di più, creando nuovi collegamenti con gli altri concetti che nel frattempo vengono introdotti. Andrebbe sfatato il fatto che ci siano contenuti matematici “vietati” ad alunni minori di una certa età perché fanno parte del “programma” di anni scolastici successivi. Il problema non sta nei contenuti, ma nella modalità con cui vengono presentati. Solo a titolo di esempio, i concetti di integrale definito e di derivata, che la Fisica nel corso della storia ha suggerito alla Matematica, sono sicuramente più semplici e intuitivi da comprendere di quanto non lo siano alcuni contenuti di algebra o di geometria razionale che normalmente vengono trattati nel primo biennio.

Il confronto tra situazione fisica e formalizzazione matematica della legge delle lenti, consente di osservare alcuni casi particolari come la simmetria che si crea con oggetto e immagine posizionati entrambi a distanza $2f$ dalla lente (Fig. 3).

Nel caso in cui la distanza dell’oggetto sia uguale alla distanza focale (Fig. 4), dal punto di vista fisico, i raggi rifratti

risultano paralleli e non consentono la formazione di alcuna immagine. Dal punto di vista matematico, la legge che esprime q in funzione di p presenta una discontinuità per $p = f$ non essendo definita a causa del denominatore nullo. In corrispondenza il grafico cartesiano presenta un asintoto verticale.

Tale situazione è estremamente interessante, perché ci pone di fronte a un caso concreto di discontinuità anche fisica, facilmente verificabile guardando attraverso la lente.

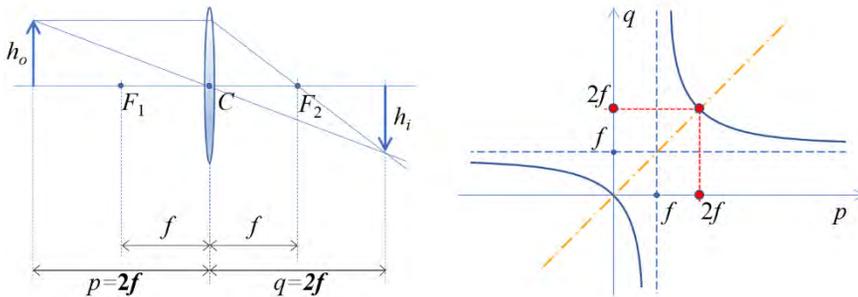


Fig. 3 - Caso di simmetria con oggetto e immagine a distanza $2f$.

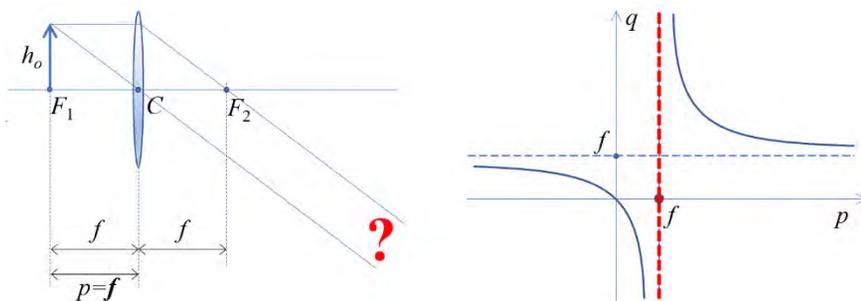


Fig. 4 - Caso di oggetto posto a distanza f con immagine mancante.

Infine, se la distanza dell'oggetto è minore della distanza focale (Fig. 5), la matematica ci dice che $q < 0$. L'esperienza

fisica, interpreta questa condizione col fatto che non si forma alcuna immagine reale come nel caso precedente però, essendo i raggi rifratti divergenti, l'osservatore avrà la sensazione che essi provengano da un punto Q posto dalla stessa parte di P rispetto alla lente e che quindi l'immagine si formi, non capovolta, dalla stessa parte dell'oggetto. La lente funziona da lente di ingrandimento e in tal caso l'immagine si dice "virtuale".

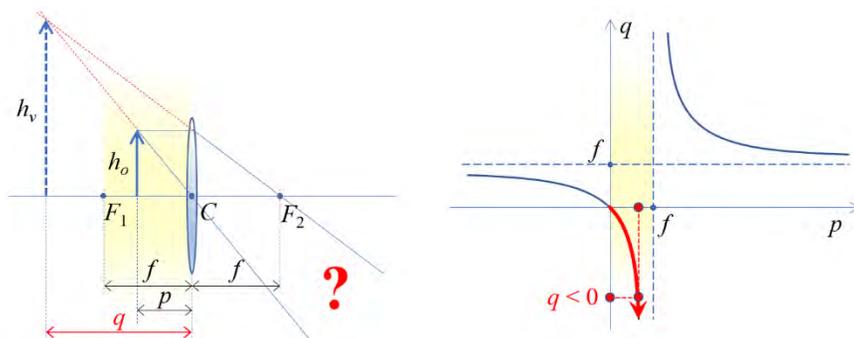


Fig. 5 - Caso di oggetto posto a distanza $0 < p < f$ con immagine virtuale.

La legge matematica, senza alcun problema, potrebbe fornire risultati anche nel caso $p < 0$ che invece, dal punto di vista fisico, non sono significativi.

3 - Molla equivalente di molle in serie

Cambiamo tema e, sempre nel primo biennio, possiamo studiare forza elastica e legge di Hooke. Ci chiediamo poi come si comporti, in seguito a deformazione, un sistema di due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 collegate in serie, cioè una di seguito all'altra (Fig. 6).

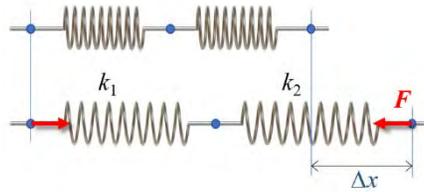


Fig. 6 - Allungamento totale di due molle in serie.

È facile verificare che il sistema delle due molle si comporta come un'unica molla che, reagendo con la forza elastica F , si allunga del tratto Δx e in base alla legge di Hooke si avrà:

$$F = k \cdot \Delta x \quad \Delta x = \frac{F}{k}$$

Se si considera ciascuna molla singolarmente (Fig. 7) si nota che ognuna reagisce sempre con la stessa forza elastica F perché il punto di collegamento intermedio sarà in equilibrio quando le forze dovute alle due molle sono opposte.

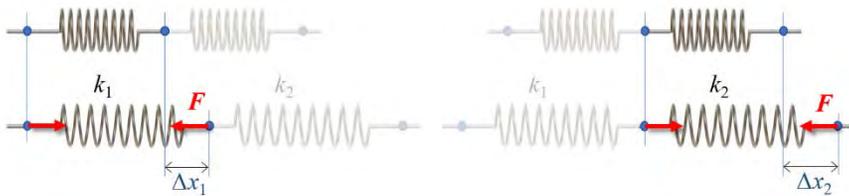


Fig. 7 - Allungamento singolo di ciascuna delle molle in serie.

La legge di Hooke applicata a ciascuna molla assicura che:

$$F = k_1 \cdot \Delta x_1 \quad \Delta x_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$F = k_2 \cdot \Delta x_2 \quad \Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$$

tenendo poi presente che l'allungamento totale è uguale alla somma degli allungamenti si ha:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x \qquad \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k}$$

Si perviene così alla legge della molla equivalente:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

che formalmente è uguale alla legge dei punti coniugati trovata per le lenti.

4 - Resistenza di resistori in parallelo

Passando a contenuti tipici del quarto e quinto anno, affrontiamo il classico problema del calcolo della resistenza equivalente di due resistori collegati in parallelo (Fig. 8) aventi resistenze rispettivamente R_1 ed R_2 .

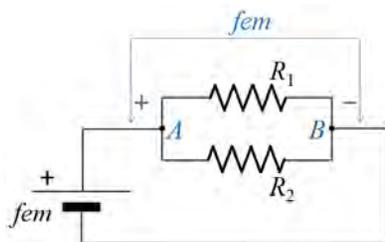


Fig. 8 - Resistori collegati in parallelo.

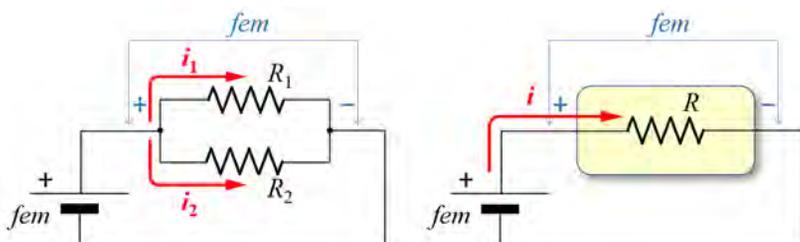


Fig. 9 - Differenze di potenziale e correnti in gioco.

Da notare (Fig. 8) che i due resistori sono sottoposti, tra i punti A e B, alla stessa differenza di potenziale uguale alla forza elettromotrice fem fornita dal generatore, mentre sono attraversati dalle correnti di differente intensità i_1 e i_2 (Fig. 9). Se si immagina di sostituire i due resistori in parallelo con uno equivalente di resistenza incognita R , esso sarà sottoposto sempre alla stessa differenza di potenziale fem e sarà percorso dalla corrente di intensità i . Applicando la prima legge di Ohm alle tre situazioni si ottengono le intensità di corrente:

$$i_1 = \frac{fem}{R_1} \quad i_2 = \frac{fem}{R_2} \quad i = \frac{fem}{R}$$

che sono legate dalla legge dei nodi di Kirchhoff:

$$i_1 + i_2 = i \quad \frac{fem}{R_1} + \frac{fem}{R_2} = \frac{fem}{R}$$

Si perviene così alla nota legge della resistenza equivalente:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

che formalmente è ancora identica alle due ricavate nei paragrafi precedenti.

5 - Capacità di condensatori in serie

Esaminiamo infine il classico problema della capacità equivalente di due condensatori, di capacità C_1 e C_2 , collegati in serie (Fig. 10).

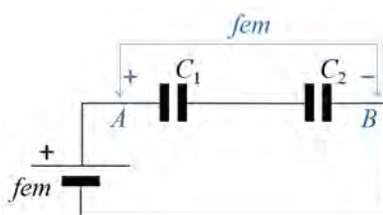


Fig. 10 - Condensatori collegati in serie.

Il sistema dei due condensatori è sottoposto, tra i punti A e B, alla differenza di potenziale uguale alla forza elettromotrice fem fornita dal generatore, mentre ognuno di essi è sottoposto alla propria differenza di potenziale ΔV_1 e ΔV_2 . Su ciascuna delle quattro armature si accumula sempre la stessa carica elettrica di valore assoluto Q (Fig. 11).

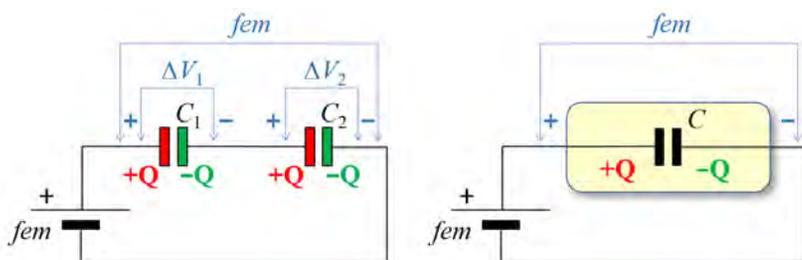


Fig. 11 - Differenze di potenziale e cariche in gioco.

Se si immagina di sostituire i due condensatori in serie con uno equivalente di capacità incognita C , esso sarà sottoposto sempre alla stessa differenza di potenziale fem accumulando ancora la stessa carica Q . La definizione di capacità di un condensatore, applicata nelle tre situazioni, consente di determinare le varie differenze di potenziale:

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V_1} \quad C_2 = \frac{Q}{\Delta V_2} \quad C = \frac{Q}{fem}$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad fem = \frac{Q}{C}$$

che sono legate dalla legge delle maglie di Kirchhoff:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = fem \quad \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

Si perviene così alla nota legge della capacità equivalente:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

che formalmente è ancora identica a tutte quelle ricavate finora.

6 - Leggi a confronto

Dal confronto delle quattro leggi ricavate:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

si può osservare che la prima differisce dalle seguenti per la tecnica dimostrativa. Infatti le ultime tre sono scaturite dall'applicazione delle tre somme:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x \quad i_1 + i_2 = i \quad \Delta V_1 + \Delta V_2 = fem$$

mentre la prima è scaturita da considerazioni geometriche. La domanda che è naturale porsi è se ci sia un modo per uniformare le dimostrazioni ricavando anche la prima da una somma di rapporti. La risposta è affermativa infatti, modificando leggermente il procedimento relativo alla Fig. 1, si può ricondurre anche la formalizzazione della legge dei punti coniugati alla somma di rapporti (Fig. 12)

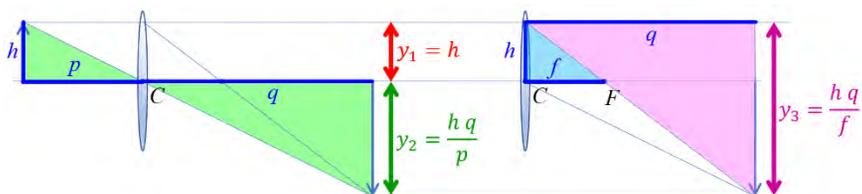


Fig. 12 - Legge dei punti coniugati dimostrata mediante somma.

$$y_1 = h = \frac{h q}{q} \quad y_2 = \frac{h q}{p} \quad y_3 = \frac{h q}{f} \quad y_1 + y_2 = y_3$$

Nonostante ciò, la legge dei punti coniugati, formalizzata matematicamente come le altre tre, continua ad essere diversa per la sua formulazione fisica, perché queste ultime si possono estendere ad n oggetti, mentre quella per le lenti è valida solo con 2 termini:

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} = \frac{1}{k} \quad \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R} \quad \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} = \frac{1}{C}$$

7 - Formulazioni geometriche

Nel *Saggiatore* si legge che:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) ... Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola.

Se da un lato ci colpisce il fatto che per Galileo Galilei la Matematica con la quale è scritto il libro della Natura si limiti alla geometria con i suoi triangoli, cerchi e altre figure, da un altro lato vi si può leggere una sfida che la Fisica lancia e che

la Matematica raccoglie, nel tentare la strada geometrica per formulare anche le altre tre leggi che sono state ricavate algebricamente, ad esempio la legge sui resistori in parallelo.

Sulla semiretta orizzontale di origine O (Fig. 13), fissata una certa lunghezza unitaria, vengono riportati i punti A e B a distanze R_1 ed R_2 da O . Si costruiscono poi i segmenti uguali AA' e BB' perpendicolari alla semiretta data, la cui lunghezza in una scala arbitraria rappresenterà il valore fem . Si possono poi costruire i due triangoli rettangoli OAA' e OBB' che intercetteranno, a distanza unitaria da O , due segmenti verticali di lunghezze i_1 e i_2 la cui somma è DD' .

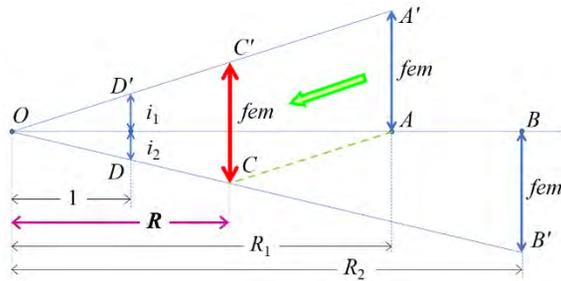


Fig. 13 - Costruzione geometrica della legge dei resistori in parallelo.

$$\frac{fem}{R_1} = \frac{i_1}{1} \qquad \frac{fem}{R_2} = \frac{i_2}{1}$$

Conducendo da A la parallela ad OA' fino ad incontrare OB' nel punto C si ottiene la distanza R incognita, infatti dalla similitudine dei triangoli ODD' e OCC' si arriva alla relazione cercata:

$$\frac{i_1 + i_2}{1} = \frac{fem}{R} \qquad \frac{fem}{R_1} + \frac{fem}{R_2} = \frac{fem}{R} \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Viceversa se sono date R_1 ed R e vogliamo ricavare R_2 , analogamente al caso precedente, a partire dal punto A della semiretta orizzontale di origine O (Fig. 14) si costruisce il segmento AA' e quindi il triangolo rettangolo OAA' . A distanza R da O si individua il segmento CC' parallelo e uguale ad AA' con C' appartenente al segmento OA' . Si può così tracciare la semiretta di origine O e passante per C per poi condurre da C' la parallela ad OC fino a incontrare in B la semiretta di partenza. Viene così a definirsi la distanza incognita R_2 , come cateto OB del triangolo rettangolo OBB' .

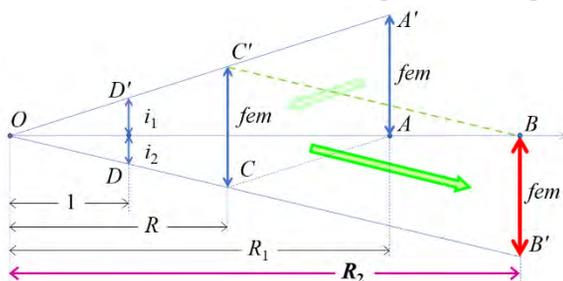


Fig. 14 - Costruzione geometrica della formula inversa per resistori in parallelo.

8 - Il condensatore, una sorta di "molla elettrica"

La somiglianza tra le leggi matematiche conduce talvolta a una somiglianza fisica dei fenomeni modellizzati, ma occorre prestare attenzione per non incorrere in errori grossolani da uso inconsapevole o improprio delle formule. Considerando la seconda e la quarta delle leggi esaminate, abbiamo già notato come, nella formalizzazione matematica, i Δx coinvolti nelle molle giochino lo stesso ruolo dei ΔV coinvolti nei condensatori. È abbastanza semplice poi scoprire l'analogia

nel comportamento fisico di una molla e di un condensatore, perché entrambi sono in grado di accumulare energia. Una molla accumula energia potenziale quando viene accorciata o allungata di un tratto Δx , un condensatore accumula energia elettrica quando viene caricato con una differenza di potenziale ΔV , secondo le formule:

$$U_{elastica} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad U_{elettrica} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

È naturale abbinare Δx con ΔV , cosa che conduce ad affermare che un condensatore di capacità C si comporta analogamente a una molla di costante elastica k . Le cose però non sono così semplici. Esaminiamo infatti il loro comportamento "dinamico" introducendo un elemento che produce inerzia; una massa m abbinata a una molla tende ad opporsi alle variazioni di velocità; un'induttanza L abbinata a un condensatore tende ad opporsi alle variazioni di corrente.

Entrambi i sistemi tendono così ad oscillare con legge armonica. Il sistema massa-molla, in assenza di attrito, oscilla con moto armonico, il sistema condensatore-induttore, in assenza di resistenza costituisce un circuito oscillante che può produrre onde elettromagnetiche armoniche. Ma accade un fatto, forse inaspettato, esaminando una diversa formulazione dell'energia potenziale e le espressioni della pulsazione dei due sistemi oscillanti:

$$U_{elastica} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad U_{elettrica} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\omega_{massa-molla} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_{induttore-condensatore} = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

Quindi una molla di costante elastica k deformata inizialmente di Δx , oscillando, si comporta questa volta come un condensatore di capacità $1/C$ caricato inizialmente con carica Q .

9 – Resistori con resistenza negativa?

Torniamo alla legge dei punti coniugati e ricordiamo che, di fronte a valori di p positivi ma minori di f , la Matematica forniva risultati q negativi. La Fisica interpretava tale situazione con la formazione di immagini virtuali. Ora nel caso di due resistori in parallelo, se il primo dovesse avere la resistenza R_1 minore della resistenza R equivalente, per la Matematica non ci sarebbero problemi ad affermare che il secondo resistore deve avere resistenza R_2 negativa. Ma la Fisica riesce a dare senso a una resistenza negativa?

Per fissare le idee esaminiamo la tabella di alcuni valori della funzione:

$$R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$$

R	R_1	R_2
100 Ω	500 Ω	125 Ω
100 Ω	300 Ω	150 Ω
100 Ω	200 Ω	200 Ω
100 Ω	150 Ω	300 Ω
100 Ω	125 Ω	500 Ω
100 Ω	100 Ω	non esiste
100 Ω	75 Ω	-300 Ω
100 Ω	50 Ω	-500 Ω

Ovviamente nel caso $R = 100 \Omega$, $R_1 = 100 \Omega$, il fatto che R_2 non esista (o tenda a ∞) fisicamente vuol dire che il ramo parallelo del secondo resistore è interrotto o mancante. Nel caso $R = 100 \Omega$, $R_1 = 75 \Omega$, il valore negativo $R_2 = -300 \Omega$, in base alla prima legge di Ohm, dovrebbe corrispondere a un dispositivo che, sottoposto alla differenza di potenziale fem , faccia passare una corrente elettrica in senso inverso. Se per esempio $fem = 30 \text{ V}$ si dovrebbe avere:

$$i_2 = \frac{fem}{R_2} = \frac{30}{-300} = -0.1 \text{ A}$$

Praticamente ciò si può ottenere sostituendo l'ipotetica resistenza R_2 negativa con una resistenza R^* collegata in serie a un ulteriore generatore di forza elettromotrice fem^* con polarità invertita in modo da produrre sul ramo parallelo con R_2 la corrente inversa richiesta (Fig. 15).

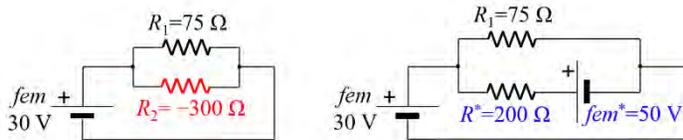


Fig. 15 - Circuito equivalente della resistenza R_2 negativa.

Applicando la legge delle maglie di Kirchhoff alla parte di circuito formato da fem , R^* , fem^* si ottiene:

$$fem - i_2 R^* - fem^* = 0$$

$$fem - \frac{fem}{R_2} R^* - fem^* = 0$$

che risulta verificata per infinite coppie di valori R^* , fem^* . Se si fissa, per esempio, $R^* = 200 \Omega$ allora risulta che $fem^* = 50 \text{ V}$.

$$fem^* = fem \left(1 - \frac{R^*}{R_2}\right) = 30 \left(1 - \frac{200}{-300}\right) = 50 V$$

10 - Conclusioni

Il “dialogo” tra Matematica e Fisica potrebbe proseguire, per esempio tentando di costruire un dispositivo meccanico, tipo pendolo inverso in equilibrio instabile, che si comporti come una molla con costante elastica negativa, oppure un sistema che si comporti come un condensatore con capacità negativa.

Da quanto esposto è evidente che è importante tenere sempre presente i principi fisici generali con la loro modellizzazione matematica senza lasciarsi fuorviare dall’uso, e spesso abuso, di formule e formulette create ad hoc per ogni singolo caso. Ciò può condurre a una sorta di “formulite” patologica, consistente nella ricerca spasmodica della formula risolutiva piuttosto che nell’analisi della situazione fisica da studiare, tendenza che è responsabile il più delle volte dell’errata risoluzione dei problemi di Fisica da parte degli studenti. Infatti persino nelle fiabe le “formule magiche” non sono infallibili!

Va infine sottolineato che, tralasciare alcuni argomenti di Fisica, cosa che spesso per motivi vari accade, può costituire un’occasione mancata per introdurre in maniera accattivante un certo argomento di Matematica. Così come, molte volte, trattare alcuni argomenti di Matematica in maniera astratta, senza la naturale implicazione fisica, fa perdere di vista il fatto che le più belle idee matematiche la maggior parte delle volte sono nate dalla Fisica.

La funzione della matematica nell'insegnamento della fisica, la funzione della fisica nell'insegnamento della matematica

*La didattica STEAM
nell'insegnamento di oggi*

Rosa Buonanno* Daniela Buono**

Liceo Pomigliano; rosa.buonanno@alice.it*

Liceo Cartesio; danielabuono79@gmail.com**



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.095

Sunto: *Si dettaglia sulle tematiche presentate al Convegno "La funzione della matematica nell'insegnamento della fisica, la funzione della fisica nell'insegnamento della matematica" che si è svolto nei giorni 09-10-11 settembre 2022 ad Agerola.*

Parole Chiave: *fisica Classica, fisica moderna, Quantistica, Relatività*

Abstract: *Details on the topics presented at the conference "The function of mathematics in the teaching of physics, the function of physics in the teaching of mathematics" which took place on 09-10-11 September 2022 Agerola*

Keywords: *Classical Physics, Modern Physics, Quantum, Relativity*

1 - Introduzione

L'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", in collaborazione con l'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU), per l'anno solare 2022, ha dedicato la propria attività alle applicazioni della matematica alle altre discipline, coerentemente con le moderne indicazioni relative alla Didattica STEAM (Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics) per le Scuole secondarie di secondo grado.

A tal proposito, considerata l'ampia richiesta di contributi, ha organizzato ed espletato in tre giornate, con doppia modalità -presenza/online-, un Convegno sulle interrelazioni tra lo studio della matematica e della fisica nella cittadina di Agerola, nei giorni 09-10-11 settembre 2022 al Campus Principe di Napoli, la Prima Università Gastronomica e Centro di Alta Formazione Universitaria .

Ha introdotto i lavori la prof.ssa Giovanna Della Vecchia che ha invitato il dott. Tommaso Naclerio, sindaco di Agerola, a portare il saluto della comunità.

Di seguito sono intervenuti, per un saluto, i professori: Aniello Buonocore, Presidente dell'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli"; Giovanni Vincenzi, professore del Dipartimento di matematica dell'Università di Salerno; Franco Eugeni, Presidente dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane.

In particolare, il prof. Eugeni, dopo aver proposto alcune questioni di Geometria assiomatica secondo la tradizione fusionistica, ha presentato il Progetto per un nuovo Polo universitario della Fondazione "G.Leibniz" da realizzare nella sede di Mosciano S.Angelo (TE), in collaborazione con la

presidente APAV, la prof.ssa Renata Santarossa, ed il dott. Diego Ferretti.

2 - La didattica nelle interrelazioni tra l'insegnamento della matematica e della fisica

La Prima sessione, *La didattica nelle interrelazioni tra l'insegnamento della matematica e della fisica*, presieduta dalla prof.ssa Renata Santarossa, ha visto in qualità di relatori i proff.ri Emilio Balzano - Geometria e fisica nella scuola secondaria di secondo grado. Proposte di attività didattiche -, Francesco Di Paola Bruno - Formulazione, formalizzazione e ... rischio di formulite -, Mariarosaria Cuomo - Una passeggiata matematica: La retta nel piano cartesiano ortogonale attraverso il moto rettilineo uniforme - e Sergio Rossano - Il decadimento radioattivo e la forza nucleare debole: una proposta didattica -.

Balzano ha discusso sulle interrelazioni tra geometria e fisica e sugli intrecci tra le due discipline, noti già nella cultura ellenistica. Nella presentazione ha evidenziato il ruolo, spesso trascurato, della geometria descrittiva (in particolare quella dello spazio) nella scuola di base e anche in quella secondaria di secondo grado, nonostante il successo di proposte didattiche sperimentate nel corso degli anni. Successivamente, ha trattato alcune proposte di esplorazione di fenomeni fisici e di modellizzazione geometrica, ponendo l'enfasi sulla modellizzazione, la quale permette agli studenti di assumere una visione unitaria e critica sul rapporto tra realtà e teorie.

Di seguito, Francesco Bruno ha presentato alcuni argomenti di fisica, di varia natura, previsti per il corso di studi di scuola secondaria di secondo grado e del liceo scientifico (in particolare, tratti da ottica geometrica, meccanica, elettromagnetismo) dove, partendo dall'applicazione di differenti principi o leggi fisiche, si giunge poi alla formalizzazione con la stessa legge matematica che richiama anche la definizione di media armonica. Si è soffermato sul "dialogo" tra fisica e matematica: la fisica si serve del linguaggio matematico per descrivere il comportamento di un certo sistema, mentre la matematica, col suo formalismo, coglie analogie astratte esistenti tra situazioni reali, consentendo di affermare, ad esempio, che un condensatore, nell'ambito dell'elettromagnetismo, si comporta esattamente come una molla con la sua legge di Hooke in meccanica. Il filo conduttore del discorso è stato comunque la centralità formativa dell'idea di legge fisica generale e di modello matematico, contrapposti all'uso, e talvolta abuso, di formule e formulette create ad hoc per ogni singolo caso e sottocaso, cosa che conduce a una "formulite" patologica, responsabile il più delle volte della errata risoluzione dei problemi di fisica da parte degli studenti.

E' stato infine sottolineato, come tralasciare alcuni argomenti di fisica possa costituire un'occasione mancata per introdurre in maniera accattivante un certo argomento di matematica e, a tempo stesso, trattare alcuni argomenti di matematica in maniera astratta, senza la naturale implicazione fisica, non faccia cogliere in maniera rilevante che le più belle idee matematiche spesso sono nate dalla fisica.

La presentazione dell'attività di Mariarosaria Cuomo ha avuto l'intento di evidenziare i due aspetti fondamentali già citati nel titolo del convegno: il ruolo fondamentale della matematica nell'insegnamento della fisica e viceversa. L'attività ha riguardato un'esperienza di laboratorio povero, in una seconda classe del liceo scientifico tradizionale; in particolare, gli studenti, attraverso una passeggiata guidata, hanno avuto modo di osservare e constatare, con la realizzazione di grafici, il legame tra la retta nel piano cartesiano ortogonale e il moto rettilineo uniforme.

Rossano, nella sua proposta didattica inerente al decadimento radioattivo e alla forza nucleare debole, ha discusso su Richard Phillips Feynman, fisico teorico e divulgatore scientifico statunitense Premio Nobel per la fisica nel 1965, per l'elaborazione dell'elettrodinamica quantistica e, attraverso esempi di realtà quotidiana, ha illustrato come la forza elettrica è incommensurabilmente più intensa della forza gravitazionale.

3 - La ricerca e i risultati recenti

La Seconda sessione, *La ricerca ed i risultati recenti*, presieduta dal prof. Giovanni Vincenzi, ha visto come relatori i proff.ri Ferdinando Casolaro - *Il contributo scientifico lasciato dal prof. Alberto Trotta* -, Vittorio De Falco - *La Scuola Superiore Meridionale e le Scienze dello Spazio* -, Canio Noce - *La correlazione quantistica può essere considerata un concetto base della meccanica quantistica* -, Vincenzo Tibullo - *Dal corpo rigido al corpo deformabile: un'introduzione alla meccanica dei continui* -.

Casolaro ha centrato il suo intervento su alcune riflessioni del prof. Trotta, già segretario della rivista "Periodico di matematica" dalla sua rinascita nel 2019, nonché attivo divulgatore di questioni di fisica moderna. In particolare, ha condiviso la riflessione secondo cui la fisica Moderna è la frontiera del sapere e la base delle tecnologie di oggi; studiarla significa mettersi al passo con i tempi e un docente di matematica e fisica non può ignorare una discussione, o eventuali richieste di chiarimento da parte degli allievi, sugli eventi scientifici odierni, seppur complessi.

Nell'intervento successivo, De Falco ha fornito una breve panoramica sulla Scuola Superiore Meridionale di Napoli, ufficialmente accreditata come istituto di eccellenza per studi umanistici e scientifici. Ha illustrato la struttura della scuola e le attività formative a livello di allievi ordinari, di dottorandi e ricercatori, concentrandosi in particolare, sull'area di ricerca "Cosmology, Space Science & Space Technology" e illustrandone l'attività didattica e di ricerca.

La relazione di Canio Noce, dal titolo *La correlazione quantistica* può essere considerata un concetto base della meccanica quantistica", è stata un omaggio al prof. Trotta.

Noce ha discusso sul concetto di "entanglement", introdotto da Schroedinger e ripreso, poi, nel famoso paradosso EPR. In particolare, si è soffermato sui diversi test sperimentali rivolti a stabilire quantitativamente le relazioni di complementarità nei sistemi quantistici, al fine di comprendere meglio il concetto di entanglement.

Partendo dai risultati di questi esperimenti, ha rivisto criticamente il concetto di "entanglement", evidenziando come questa quantità sia una caratteristica distintiva dei

sistemi quantistici e che, quindi, può essere considerata un concetto di base della meccanica quantistica, alla stregua della funzione d'onda e del dualismo onda/corpuscolo.

Tibullo ha presentato la relazione dal titolo *Dal corpo rigido al corpo deformabile: un'introduzione alla meccanica dei continui*, introducendo il concetto di "corpo rigido" e di seguito il concetto di "corpo deformabile", approfondendo in qualche dettaglio la sua cinematica, ovvero il formalismo matematico utilizzato per descrivere le sue configurazioni e il suo moto. Inoltre, ha introdotto diverse entità matematiche tramite le quali è possibile descrivere le caratteristiche salienti di un corpo deformabile e del suo moto. Successivamente, ha fornito una breve introduzione alla dinamica del corpo deformabile, estendendo ad esso le equazioni di bilancio della quantità di moto e ricavando la forma totale di tali equazioni, dette equazioni indefinite del moto, affrontando il problema della loro insufficienza a determinare il moto del corpo deformabile.

4 - Approccio sperimentale

La Terza sessione, *Approccio Sperimentale*, presieduta dal prof. Andrea Lanzillo, ha visto come relatori i proff. Angela Donatiello - *Regressione lineare: un metodo per il fitting di dati sperimentali* -, Bonaventura Paolillo - *Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica: un approccio didattico* -, Vincenzo Parente - *Laboratorio di Cinematica nella classe 2.0* -, Emilio Polverino - *Dalle curve al moto, dal moto alle curve. Esperienze didattiche* -, Matteo Tanferna - *Strumenti matematici minimi per la fisica moderna*.

Donatiello, attraverso il suo intervento, ha voluto mettere in evidenza, una possibilità di approccio alla regressione lineare nella scuola secondaria di II grado con la ricerca della retta dei minimi quadrati, sia con l'uso di materiale povero come riga e carta millimetrata, sia con l'ausilio di strumenti digitali che vanno dal semplice Foglio di Calcolo tipo Excel ad applicazioni open source come StatPlus, mostrando come il metodo possa essere agevolmente presentato a studenti del primo biennio e fino al quinto anno, con diversi livelli di approfondimento.

Dopo un breve excursus storico e teorico, ha condiviso alcune esperienze didattiche nate in collaborazione con il Piano Lauree Scientifiche del Dipartimento di fisica dell'Università degli Studi di Salerno, in cui gli studenti sono stati chiamati a costruire fitting di dati sperimentali e a valutarne la bontà con la verifica dei coefficienti statistici di riferimento. Ha sottolineato, inoltre, come l'analisi statistica dei dati sia un luogo privilegiato in cui la matematica applicata e la fisica si incontrano, favorendo negli studenti lo sviluppo del senso di autoefficacia nei confronti della matematica e della fisica e promuovendo una nuova visione delle due discipline, grazie anche ad un'azione sulla dimensione emotiva, fortemente stimolata dall'approccio esperienziale, secondo il modello tridimensionale dell'atteggiamento di Di Martino e Zan.

Successivamente, Paolillo si è soffermato sul significato di esperimento fisico e su come questo possa essere utilizzato per fornire una convalida a teoremi o a risultati di carattere prettamente matematico. Ha evidenziato come, partendo da

contesti derivanti da scienze sperimentali, si cercano modelli matematici utili a descrivere e a simulare determinati comportamenti ma a tempo stesso, negli ultimi decenni, si è assistito ad un percorso inverso, in cui i risultati o le equazioni matematiche possono essere descritti e convalidati, seppur teoricamente, da esperimenti o congegni di tipo fisico; tale percorso, riprende in qualche misura i metodi empirici che trattava già il grande Archimede. Infine, ha proposto alcune schede didattiche per gli allievi, menzionando anche la dimostrazione fisica del teorema di Pitagora.

Di seguito Parente, dopo una breve introduzione sull'ambiente didattico innovativo, che permette di rendere centrale il Learning by Doing su base quotidiana, ha presentato l'attività di laboratorio con cui introduce la cinematica ai suoi studenti, ma che rappresenta anche il *modus operandi* con cui nel primo biennio ha scelto di introdurre, passo dopo passo, tutti i moti sia in una che in due dimensioni. Sono state illustrate e discusse le fasi dell'esperienza, dalla presa dati all'elaborazione degli stessi, prestando particolare attenzione ai software utilizzati in ciascuna fase.

Polverino ha presentato alcune attività sperimentate con gli studenti relative agli aspetti grafici nello studio del moto. L'attività è stata oggetto di apprezzamento della direzione Scolastica Regionale che, nel 2015, la divulgò ai dirigenti scolastici del territorio.

La sessione di lavori si è chiusa con l'intervento di Tanferna che ha argomentato su *Strumenti matematici minimi per la fisica moderna* ed ha riassunto le idee e le considerazioni sviluppate

in una micro-sperimentazione effettuata in un Liceo Scientifico Tecnologico. Nello specifico, ha introdotto l'algebra delle derivate fin dai primi anni di corso, senza fare riferimenti ai concetti topologici ma appoggiandosi alla definizione puramente algebrica di derivazione sugli anelli, provando a verificare se ciò apportava qualche vantaggio nell'affrontare lo studio della fisica in generale e lo studio dell'analisi matematica dell'ultimo anno di corso.

5 - L'approccio didattico alla fisica moderna

La Quarta sessione, *L'approccio didattico alla fisica moderna*, presieduta dalla prof.ssa Loredana Biacino, ha avuto come relatori i proff. Valerio Bozza - *L'algebra complessa nella ricerca di pianeti extrasolari* -, Rodolfo Figari - *L'insegnamento della fisica moderna nelle Scuole Medie Superiori: difficoltà e nuove proposte* -, Andrea Lanzillo - *Una proposta didattica per l'insegnamento della relatività* -, Mario Innocenzo Mandrone - *La fisica atomica, la teoria della relatività' e la meccanica quantistica nei temi e test ministeriali per l'esame di stato*.

La sessione si è aperta con l'intervento di Valerio Bozza su "*L'algebra complessa nella ricerca di pianeti extrasolari*", riguardante alcuni fenomeni fisici che sono alla base di entusiasmanti scoperte di nuovi pianeti. Il microlensing gravitazionale si basa sulla deflessione della luce da parte di campi gravitazionali, secondo quanto predetto dalla Teoria della Relatività Generale di Einstein. Particolari algoritmi basati sull'algebra complessa sono alla base di sofisticati codici per l'analisi delle osservazioni di microlensing che conducono alla scoperta e alla caratterizzazione dei pianeti extrasolari.

Ha fatto seguito l'intervento di Figari su *"L'insegnamento della fisica moderna nelle Scuole Medie Superiori: difficoltà e nuove proposte"*. Molti libri di testo adottati negli ultimi anni della Scuola Media Superiore hanno recepito le indicazioni ministeriali sulla necessità di inserire nei programmi elementi di fisica Moderna.

L'esempio della Meccanica Quantistica è quello che mostra in maniera più chiara le difficoltà di aderire a queste indicazioni. Si tratta di una teoria che, in qualunque "versione" venga presentata, utilizza matematica sofisticata, normalmente appresa alla fine del curriculum di laurea triennale in matematica o in fisica. Inoltre, la sua evoluzione storica si è indissolubilmente legata a differenti punti di vista epistemologici e filosofici. Il prof. Figari ha indicato alcune proposte preliminari su come semplificare la matematica nell'analisi di sistemi semplici che mostrino però caratteristiche tipiche dell'evoluzione dei sistemi quantistici.

La proposta didattica di Lanzillo ha riguardato la teoria della relatività di Einstein e ha voluto rispondere a due questioni essenziali del Convegno: *cosa insegnare oggi, dopo l'evoluzione della matematica e della fisica negli ultimi 150 anni; quale ruolo deve avere "la matematica nell'insegnamento della fisica"; quale ruolo "la fisica nell'insegnamento della matematica"*. In particolare, nel suo intervento, il prof. Lanzillo ha mostrato come, a partire dalle trasformazioni galileiane e con una semplice ipotesi, si ricava il fattore gamma e quindi le trasformazioni di Lorentz, determinando le leggi della contrazione della lunghezza e della dilatazione dei tempi. Successivamente, dopo aver introdotto il principio di equivalenza, ha considerato il fenomeno della dilatazione dei

tempi in prossimità della massa e infine ha fornito un'applicazione ai satelliti GPS.

Mandrone, con la relazione su *La fisica atomica, la teoria della relatività e la meccanica quantistica nei temi e test ministeriali per l'esame di stato*, ha posto l'accento sull'evoluzione dell'insegnamento della fisica mediante la soluzione dei temi più significativi proposti agli esami di stato di liceo scientifico. Facendo riferimento al Decreto Ministeriale di gennaio 2015, che ha introdotto la fisica tra le materie caratterizzanti il corso di studio del L. S. in tutte le sue opzioni, ha presentato il volume *L'insegnamento della fisica nella Scuola secondaria*, redatto nel 2019, che raccoglie le lezioni tenute al Corso di Formazione docenti al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Mandrone ha concluso con l'auspicio che le tematiche relative alle conoscenze dei risultati della fisica pubblicati negli ultimi decenni, diventino oggetto di divulgazione da parte dei docenti agli studenti.

6 - Salotto didattico

Il pomeriggio della seconda giornata dei lavori è stato dedicato agli interventi dei docenti partecipanti, attraverso un "Salotto didattico" moderato dal prof. Umberto Salzano.

Il dibattito è stato introdotto dagli interventi dei proff.ri Carlo Toffalori e Luigi Tomasi, presentati dal prof. Emilio Polverino.

I paradossi di Zenone, ha sottolineato Toffalori, collegano logica e fisica, non solo perché investono concetti fondamentali come il tempo e la sua misura, gli infinitesimi e gli infiniti, il discreto e il continuo, ma anche perché

possiedono alcune intriganti versioni moderne, sia nella fisica quantistica che nella teoria della computazione. Tali aspetti possono incuriosire gli studenti delle scuole secondarie di secondo grado.

Tomasi, ha ribadito, come nella scuola superiore, anche quando è lo stesso docente a insegnare entrambe le materie, matematica e fisica rimangono spesso di fatto separate oltre che "sfasate" temporalmente per quanto riguarda gli argomenti da svolgere. L'insegnante spesso "si sdoppia", quasi si trattasse di due docenti diversi, che propongono metodi differenti e che inevitabilmente esprimono anche diverse concezioni relative alle due materie, anche se gli allievi capiscono subito quale delle due discipline il docente tende a "preferire". Gli allievi di solito apprendono le due materie in modo "separato", anche se hanno lo stesso docente di matematica e di fisica. Occorre, pertanto, secondo il prof. Tomasi, una didattica diversa delle due discipline e una formazione diversa degli insegnanti di matematica e fisica, sia dal punto di vista dei contenuti che della loro didattica. Nell'intervento sono stati proposti alcuni argomenti, anche con l'aiuto del software GeoGebra, che si prestano particolarmente per comprendere lo stretto legame tra matematica e fisica (in cui si vede quale può essere la "funzione della fisica nell'insegnamento della matematica" e, in alcuni casi, il viceversa.

Durante il "Salotto didattico" sono intervenuti alcuni docenti con significative osservazioni, delle quali ha preso appunti il referente del Comitato Scientifico, per successive riflessioni sull'organizzazione dei prossimi eventi.

7 - Conclusioni

Il Convegno si è chiuso con le conclusioni dei professori Ferdinando Casolaro, componente della Direzione dell'AFSU, e Aniello Buonocore, Presidente dell'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli".

Casolaro ha manifestato grande soddisfazione per la numerosa presenza (anche da remoto) di docenti da tante parti del territorio italiano; presenza che non è stata solo passiva, visto gli innumerevoli e significativi interventi nel dibattito promosso dal "Salotto didattico". Nella sua conclusione, ha puntato l'accento sulla esigenza di promuovere e valorizzare i contatti culturali tra docenti di Scuole diverse dell'intero territorio nazionale.

A tal proposito, ha ricordato che già ai Giochi matematici per la Scuola "Premio Aldo Morelli", attività per gli studenti dal 2007, partecipano circa cento scuole e sono coinvolte otto regioni (dal Friuli Venezia Giulia alla Sicilia), per cui ha invitato i partecipanti, sia in presenza che in remoto, ad aderire ai Giochi 2023.

Inoltre, ha sottolineato l'esigenza di dare continuità alle attività in collaborazione AFSSU-MathesisNapoli "A. Morelli" (Accademia/Filosofia/ScienzeUmane - matematica/fisica), per un dialogo educativo interdisciplinare, che potrà permettere di affrontare le problematiche del mondo che ci circonda.

A ciò contribuirà certamente l'approccio moderno della didattica STEAM che, secondo Casolaro, andrebbe ampliata anche alle Scienze Umane, in quanto ritiene che il disorientamento dei giovani, per una corretta analisi dei tragici eventi di oggi, sia dovuto anche alla non conoscenza di

quella parte di Storia degli ultimi settanta anni, totalmente ignorata dalla nostra Scuola.

Pertanto, una comunicazione che non isoli la disciplina che si insegna dalle altre, potrà aprire nuovi orizzonti alla formazione dei futuri studenti.

Buonocore ha concluso ritenendo che il convegno abbia fornito una conferma che il mondo della Scuola, inteso nell'accezione più generale possibile, possiede in sé un'enorme ricchezza; i relatori, chi con le proprie ricerche, chi con l'esplorazione delle tecnologie digitali, chi con le esperienze svolte sul campo, ne sono stati un'effettiva controprova.

Il Presidente ha comunicato che l'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" organizzerà il IV Congresso Nazionale della Federazione Italiana Mathesis, che si svolgerà a Napoli dal 30 novembre al primo dicembre e che aggiornerà, in itinere, docenti e dirigenti sulle varie fasi dell'organizzazione, con l'auspicio che ci possa essere la massima partecipazione possibile a tale evento.

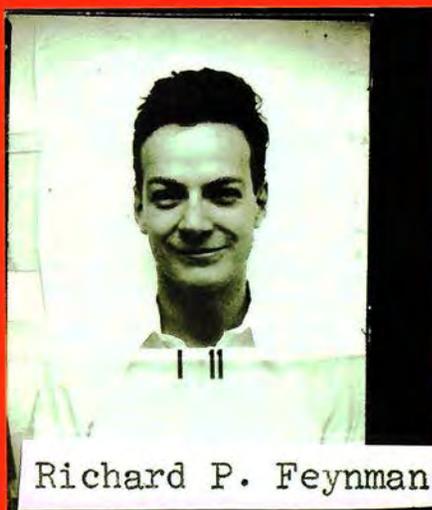
Bibliografia

I riferimenti bibliografici sono a calce dei singoli articoli pubblicati nel presente volume - numero 4 del 2022 - che raccoglie le tematiche presentate durante i lavori del Convegno.

GLI ADELPHI

Richard P. Feynman

Il piacere di scoprire



Strumenti matematici minimi per la fisica moderna

Matteo Tanferna*

*Mathesis Abruzzo, Liceo "G.Marconi" Pescara; matteotnf@libero.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v4n4.096

Sunto: *Viene indagata la possibilità di introdurre l'algebra delle derivate formali fin dai primi anni del liceo, allo scopo di dotare l'insegnante di fisica di una strumentazione matematica più efficace e consentirgli di affrontare la fisica del 900 in maniera non solo informativa, come solitamente accade, ma anche più formalizzata. Poiché la proposta comporterebbe una ridefinizione dei programmi sia di matematica che di fisica, si rende necessaria un'approfondita indagine sulla liceità didattico-pedagogica di un simile passo, e al giudizio critico dei matematici e, in particolare, alla sensibilità specifica degli analisti, spetterebbe infine l'ultima sentenza.*

Parole Chiave: *Fisica, algebra, derivate, didattica.*

Abstract: *For the purpose of giving physics teachers a more efficient mathematical instrument and, so, giving them the chance to face the 20th century's physics not only in an informative manner, as it usually happens, but also more formalized, since the first few years of secondary school it has been taken into account the possibility to introduce formal derivatives algebra. As the proposal would mean a re-definition of programs, both, in mathematics and in physics, it makes necessary an in-depth didactic-pedagogical investigation about the legitimacy of taking such a step, and to the critical judgement of mathematicians and, in particular, due to the specific sensibility analysts have, they should have the last word.*

Keywords: *Physics, algebra, derivatives, didactics.*

1 – L'algebra delle derivate nei primi anni di scuola superiore

Se si eccettuano alcuni indirizzi negli istituti tecnici, dove l'analisi matematica viene affrontata già al quarto anno di corso, nel resto delle scuole superiori italiane, e segnatamente nei licei, l'analisi viene affrontata nell'ultimo anno di studi. Poiché al calcolo differenziale, usualmente, si perviene solo dopo il primo quadrimestre, l'insegnante di fisica non ha più il tempo materiale per affrontare con il bagaglio minimo necessario le scoperte e le teorie della fisica del 900. Tutto ciò è già noto, e da tempo molte proposte sono state avanzate per risolvere il problema; un esempio è il progetto d'introduzione dell'analisi non standard nei programmi di matematica. Qui si suggerisce la possibilità di una via diversa: introdurre fin dai primi anni delle scuole superiori l'algebra delle derivate formali, dando a questa il più efficace raccordo con gli usuali argomenti matematici che attualmente vengono svolti.

All'algebra delle derivate l'insegnante perviene al 5° anno solo dopo una lunga serie di premesse; egli: generalizza il concetto di funzione, introduce elementi di topologia, affronta le definizioni di limite, ne ricava le proprietà e le utilizza per dimostrare alcuni teoremi sulle funzioni e sui limiti notevoli, infine introduce il concetto di derivata come limite del rapporto incrementale. Ricava poi una tabella di derivate fondamentali e di regole adatta per i nuovi esercizi e problemi da affrontare, e a questo punto lo studio dei limiti cede il passo all'algebra delle derivate che diviene autonoma dai suoi fondamenti. Gli studenti sono chiamati a svolgere derivate sempre più articolate e annidate, usando solo regole e proprietà delle derivate.

Inizialmente questi esercizi sono relativi a funzioni continue e derivabili, e viene naturale pensare che, restringendosi a un nucleo di funzioni con proprietà utili nella fisica di base, potrebbero non esserci particolari difficoltà a operare su di esse direttamente con le sole regole di derivazione, anche se soltanto formalmente, cioè senza il bagaglio coerente ma oneroso di topologia e limiti, perfino negli anni che precedono lo studio dell'analisi.

Il passo sarebbe troppo ingenuo, e forse anche pericoloso, se motivato solo con questo livello di analogia e meccanismo estrinseco. A tal riguardo, conviene rammentare l'anatema di Dieudonné, che egli lanciò trovandosi a dover fronteggiare la ribellione di genitori, studenti, insegnanti e politici, e cioè dell'intera società civile, per la riforma dei programmi di matematica suggerita da Bourbaki. Dieudonné reagì proponendo di non insegnare più matematica nelle scuole, e di lasciare questo compito alla sola università, perché altrimenti si sarebbero prodotti a valle più danni di quanti benefici si credeva di conseguire a monte. L'anatema potrebbe sembrare troppo drastico, tuttavia gli insegnanti delle scuole conoscono bene quanto sia, a volte, impresa ardua correggere concetti appresi male all'inizio, e quanto sia difficile ricalibrare un imprinting sconnesso. Dunque, non basta rilevare il fatto che eseguire derivate sulle funzioni continue elementari è operazione semplice e alla portata degli adolescenti, occorre trovare delle giustificazioni più forti e connessioni più coerenti con il resto dei programmi di matematica che vengono già svolti.

Esponiamo di seguito gli elementi con cui è stata effettuata una sperimentazione al Liceo Scientifico Tecnologico, facendo leva sulle numerose ore di fisica e laboratorio a disposizione.

Le 21 ore di fisica del quinquennio, infatti, permettevano, usando molta cautela, di sperimentare senza pregiudicare la corretta formazione degli studenti, ottenendo in aggiunta importanti riscontri positivi. Un primo ragguaglio di questa sperimentazione fu esposto in un corso di aggiornamento in didattica della matematica e del laboratorio di fisica, tenuto all'università G. D'Annunzio di Chieti-Pescara nel 2001, e, partendo dalle riflessioni che scaturirono in quell'occasione sui limiti del procedere per sola analogia, si indagò su come dare maggiore spessore matematico alla proposta.

2 - Derivazioni formali sull'anello dei polinomi

Avendo preso atto che l'analogia empirica, indotta dall'osservazione del carattere meccanico degli esercizi sulle derivate, condannerebbe l'adozione di questa pratica estrinseca nei bienni delle scuole superiori a essere un'improvvisazione fin troppo strumentale e un'estensione indebita di un'attività che trova i suoi saldi fondamenti nell'analisi, si nota che una legittimazione alternativa più profonda potrebbe essere raggiunta e la pratica meccanica riscattata, se quest'ultima venisse coordinata con la teoria delle derivazioni formali sugli anelli di polinomi, teoria già ben sviluppata nei testi di matematica dedicati alle strutture algebriche.

In sostanza, decidendo di restringersi a un opportuno sottoinsieme di funzioni, utili nell'ambito della fisica dei licei,

si può sfruttare l'impianto di una teoria matematica decisamente più semplice di quella dell'analisi, e tuttavia ben consolidata e coerente.

Dal punto di vista matematico si tratterebbe, quindi, di approfondire lo studio delle proprietà dei polinomi quando questo studio è specificamente previsto, e cioè proprio nei bienni delle scuole superiori, includendo in esso l'argomento, appunto, delle derivazioni formali sull'anello dei polinomi. Inoltre, questa integrazione permetterebbe di far conoscere il concetto di operatore lineare in un contesto operativo semplice, che nella fattispecie trasforma un polinomio in un altro polinomio ma, più in generale, è strumento di grande rilievo e utilità. Dal punto di vista fisico, il possesso dello strumento matematico della derivata, seppur solo formale, già da quando si affrontano le prime grandezze derivate, velocità e accelerazione, permetterebbe di reimpostare l'intero studio su basi molto più profonde, come del resto fu già in origine a partire da Newton.

Ciò che qui vorremmo inizialmente dire, lo estraiamo dal libro di Mario Girardi e Giorgio Israel *Teoria dei campi* (1976), in modo da indicare direttamente anche un luogo di raccordo con le teorie consolidate a cui sopra si accennava. Al capitolo primo, nella seconda parte di pag. 38 si legge:

6. Derivazioni.

In questo paragrafo ci proponiamo di introdurre la nozione di *derivata* di un polinomio a coefficienti in un anello. Si intuisce facilmente che la difficoltà di introdurre questa nozione è, nel nostro caso, legata all'arbitrarietà dell'anello. In altri termini, non è possibile procedere, come nel caso delle

funzioni reali di variabile reale, tramite un passaggio al limite, e ciò perché questo procedimento è legato a nozioni di carattere topologico e, più precisamente, alla struttura topologica “naturale” del campo reale (e non alla sua struttura algebrica).

Tuttavia, se ci si limita alla considerazione di funzioni polinomiali a coefficienti reali, si può osservare che la derivata di una funzione polinomiale $f = \sum_i aX^i$ è ancora una funzione polinomiale, e precisamente $f' = \sum_i i aX^{i-1}$. Pertanto il risultato dell'operazione di derivazione, espresso dalla formula precedente, potrebbe essere assunto come *definizione* –si noti *puramente algebrica* della derivata di una funzione polinomiale. Il carattere puramente algebrico della definizione permette di abbandonare la restrizione al caso reale, riferendosi a funzioni a coefficienti in un anello qualsiasi. A questo punto possiamo compiere un'ulteriore generalizzazione, definendo l'operazione di derivazione in un *qualsiasi anello* A (come una applicazione D che associa a $x \in A$ la sua derivata $D(x)$), assumendo come assiomi, in questo contesto più generale, le proprietà formali di cui gode l'usuale derivazione e da cui possono essere dedotte tutte le altre proprietà. Diremo pertanto che l'applicazione $D: A \rightarrow A$ è una *derivazione dell'anello* A , se verifica le condizioni:

- a) $D(x + y) = D(x) + D(y)$;
- b) $D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad (x, y \in A)$.

Questa breve citazione contiene quanto serve per iniziare, e, utilizzando la proprietà b), si ottengono le prime semplici deduzioni:

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1) \rightarrow D(1) = 0;$$

$$D(x^2) = D(x \cdot x) = D(x) \cdot x + x \cdot D(x) = 2x D(x).$$

Scegliendo una derivazione formale su anelli in cui $D(x) = 1$, si ottiene l'usuale monomio derivato a cui si dà l'usuale nome di derivata: $D(x^2) = 2x$.

E reiterando si ottiene naturalmente: $D(x^n) = n x^{n-1}$.

Poiché si dimostra che questa restrizione è unica (vedi libro appena citato), dunque lo schema è ben formulato.

Dopo queste prime deduzioni, dalle regole a) e b) si può procedere ricavando tutte le principali proprietà dell'operatore D , e tutto ciò può ben diventare il materiale per i primi esercizi da effettuare nella matematica del biennio, subito dopo quelli usuali sui polinomi, potendo così estenderne lo studio in modo coerente oltre i limiti attuali.

Se l'indeterminata di questi polinomi viene elevata al rango di variabile, i polinomi divengono funzioni polinomiali rappresentabili sul piano cartesiano, e le prime deduzioni utili, ricavate dalle regole basilari, possono essere quelle che permettono di ricostruire all'indietro il legame tra i polinomi derivati e i coefficienti angolari delle tangenti alle curve determinate dalle funzioni polinomiali di partenza.

Per il caso di: $y = cost.$, e per il caso dell'equazione della retta in forma esplicita: $y = m x + q$, la constatazione è immediata. Per la parabola: $y = a x^2 + b x + c$, questo è un poco più laborioso, ma si tratta di un normale esercizio del terzo anno. La generalizzazione alle funzioni polinomiali di grado maggiore potrebbe essere presentata come utile

esercizio di applicazione della regola di Ruffini o di quella della divisione di polinomi senza resto.

Infatti, poiché il polinomio: $(y - y(x_0)) - y'(x_0)(x - x_0)$ ha uno zero in x_0 , in generale si tratta solo di mostrare che il polinomio: $(y - y(x_0)) / (x - x_0) - y'(x_0)$ ha un'altra radice in $x = x_0$, e questo, ad esempio, può essere mostrato agli studenti in modo agevole per gli usuali polinomi a coefficienti interi, scegliendo opportuni polinomi di grado non elevato, ma può dimostrarsi valido per polinomi di grado n qualsiasi, usando sempre la regola di Ruffini o la divisione tra polinomi.

Il tutto equivale a dire che il polinomio costruito con l'intersezione tra la funzione polinomio e la retta tangente in un suo punto ha una radice doppia nel punto di tangenza.

Oltre all'uso della notazione di Arbogast per definire l'operatore di derivata, la notazione di Lagrange, utilizzata per indicare il risultato dell'applicazione di questo operatore, è utile per presentare sinteticamente le regole finora viste, e facilitarne così l'assimilazione già dal primo anno. Inoltre, poiché usualmente nei libri di testo attuali le indeterminate vengono indicati con le lettere x, y, z ecc., conviene riscrivere le regole a) e b) indicando con f e g i polinomi in una sola indeterminata, e sottintendendo che l'operatore D agisce proprio su quella particolare indeterminata. Dunque, le prime due regole possono essere presentate agli studenti come:

$$a') \quad D(f + g) = f' + g'$$

$$b') \quad D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Continuiamo a chiamare queste formule semplicemente *regole* di trasformazione dei polinomi attraverso l'operatore D ,

per sottolineare l'aspetto formale delle operazioni che compiamo e non ingenerare confusioni con le formule che verranno poi dimostrate nel successivo corso d'analisi.

Il formalismo si estende con semplicità ai polinomi in più indeterminate: $f = f(x, y, z, \dots)$, e questo permette di introdurre subito anche il concetto di derivata parziale:

$$D_x(f) = f_x.$$

Poiché l'operazione può essere iterata, si perviene con uguale naturalezza al concetto di derivata seconda:

$$D(D(f)) = D^2(f) = f'',$$

e ancora di derivata k-esima.

Con la stessa naturalezza, l'operazione può essere estesa agli array di polinomi, cioè a una sequenza di polinomi, a una o più indeterminate, raccolti in una lista, e ciò potrà servire da base per estendere il calcolo alle funzioni polinomiali a valori vettoriali.

Ad esempio, nel caso di un'unica indeterminata si ha:

$$\underline{P} = (f; g; h; \dots) \rightarrow D(\underline{P}) = (D(f); D(g); D(h); \dots) = (f'; g'; h'; \dots),$$

e di seguito, allo stesso modo, nel caso più generale di più indeterminate e delle derivate parziali:

$$D_y D_x (\underline{P}) = (f_{xy}; g_{xy}; h_{xy}; \dots).$$

È superfluo rimarcare quanto ciò sia utile nei corsi di fisica.

Il passo successivo sarà quello di estendere la definizione di derivazione al campo K dei quozienti dell'anello dei polinomi.

La regola formale ulteriore può essere introdotta partendo dalla regola precedente b) ed effettuando la derivazione:

$$D(g \cdot f/g) = D(f) = D(g) \cdot f/g + g \cdot D(f/g) \quad (f, g \in A \text{ e } g \neq 0)$$

che riorganizzata diviene naturalmente:

$$c) \quad D(f/g) = (D(f) \cdot g - f \cdot D(g)) / g^2,$$

e può essere presentata con la più facilmente memorizzabile:

$$c') \quad D(f/g) = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2 .$$

In molti licei l'argomento relativo alle frazioni algebriche viene introdotto al secondo anno, e quindi, decidendo in favore di questa proposta e dell'estensione relativa dei programmi di fisica e di matematica, ciò porterebbe all'introduzione di esercizi relativi alla derivazione formale del rapporto di polinomi già al secondo anno, o, più in generale, appena fossero stati introdotti i quozienti tra polinomi e relative scomposizioni.

Molto utile, per i successivi impieghi in fisica, è anche l'introduzione d'una regola formale che corrisponda al teorema della derivazione di funzioni composte, la quale può essere mostrata valida nei casi dei polinomi e delle frazioni algebriche, e assunta come regola generale operante su generiche espressioni formali. Questa ulteriore estensione dovrà, tuttavia, essere accompagnata da precisazioni che permettano di escludere situazioni ambigue.

Presi, dunque, i due polinomi f e g e indicando il polinomio composto con il simbolo $f \circ g$, la nuova regola formale si può introdurre come:

$$d) \quad D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g),$$

ovvero nella versione semplificata, ma da illustrare con cura e molti esempi:

$$d') \quad D(f(g)) = f'(g) \cdot g'$$

Da quest'ultima regola si potrà derivare anche la formula per la derivata della funzione inversa. Infatti, partendo dal caso $f \circ g = x$, e poiché: $D(f \circ g) = D(x) = 1 = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$, riorganizzando questa relazione, si trova:

$$e) \quad D(f) \circ g = 1 / D(g)$$

la quale, presentata in forma più sintetica e più facilmente memorizzabile, apparirà come:

$$e') \quad f'(g) = 1/g'$$

Utilizzando le regole fin qui presentate, e attraverso riorganizzazioni simili a quella appena esposta, si possono ricavare anche le relazioni formali per le potenze a esponente razionale, consentendo al formalismo di estendere il suo campo di applicazione anche alle espressioni irrazionali.

Anche qui, ma quando necessario pure altrove, queste estensioni vanno accompagnate da considerazioni e precisazioni che ne calibrino l'uso, in modo da evitare la deduzione di affermazioni improprie e, più in generale, in modo da evitare equivoci quando l'intera teoria verrà presentata in maniera più precisa nel corso di analisi.

L'ulteriore estensione didattica del formalismo potrebbe avvenire con maggiore naturalezza al terzo anno, in concomitanza con gli altri stimoli didattici e culturali. Ad esempio, nel terzo anno, usualmente, in filosofia vengono studiati i paradossi di Zenone, e in particolare quello di Achille e la tartaruga o quello della freccia che deve raggiungere un bersaglio.

È noto, e anche abusato, che questi paradossi possono servire per introdurre in matematica il concetto di serie e di addizione di infiniti termini che sfocia in un risultato determinato.

Per gli scopi sottostanti questa proposta, non occorrerà affrontare tutta la teoria della convergenza delle serie di potenze, ci si può limitare all'introduzione di alcune serie formali di potenze, principalmente quelle utili in fisica.

Occuparsi più in dettaglio del problema della convergenza nei casi più generali, potrà essere materia di studio successivo, rimandato al momento in cui si avranno strumenti matematici più adeguati, tuttavia, anche questo argomento matematico: le serie formali di potenze, è già ben sviluppato e definito in letteratura; inoltre, in questa ulteriore estensione formale, non si pretende di introdurre materiale eccessivo.

Per quanto riguarda le esigenze dei programmi di fisica dei licei, in realtà basterebbe solo introdurre le serie formali:

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! \dots \\ \cos(x) &= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! \dots \\ \sin(x) &= x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! \dots\end{aligned}$$

ricavando empiricamente le relazioni formali fondamentali:

$$\begin{aligned}D(e^x) &= e^x \\ D^2(\cos(x)) &= -\cos(x) \\ D^2(\sin(x)) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

Sono queste le funzioni e queste le relazioni che risultano indispensabili nei corsi di fisica, ad esempio per affrontare con

strumenti più adeguati i fenomeni di decadimento o quelli di oscillazione, oltre a permettere anche l'introduzione del concetto di equazione differenziale in casi semplici.

Un'alternativa è quella di generalizzare agli anelli a coefficienti complessi, trattando l'unità immaginaria sotto derivazione come ogni altra costante, e introducendo per definizione una funzione che rimane indenne rispetto all'operatore di derivazione, riservandosi di mostrare successivamente la possibilità di una sua costruzione effettiva. A partire da essa si potrebbero definire le funzioni goniometriche come una particolare combinazione lineare, cioè sostanzialmente usando la formula di Eulero, e infine ricavare le precedenti proprietà sotto derivazione doppia, usando le sole regole formali.

E, anche qui, è inutile sottolineare quanto un uso esteso dell'unità immaginaria divenga elemento utile per esporre molti argomenti di fisica classica in forma sintetica, e indispensabile per proporre argomenti di fisica moderna.

Quanto esposto finora, non deve essere considerato solo un modo di torcere la matematica per gli scopi della didattica della fisica. Si consideri, ad esempio, quanto viene esposto nel libro di Tom Apostol "*Calcolo*" (in particolare a pag. 26, Vol. 2, edizione 1977 Bollati Boringhieri, ma eventualmente anche altrove). Qui, diffusamente, viene indicato come possano essere ricavate, a partire dalle relazioni di derivazione delle funzioni seno e coseno, tutte le proprietà di queste funzioni per via esclusivamente algebrica, senza far riferimento alla circonferenza goniometrica.

Certamente nel libro di Tom Apostol tutto questo viene prodotto solo dopo aver esposto la teoria dei cerchi di

convergenza delle serie di potenze, ma, considerando che le indagini precise potranno essere effettuate in seguito e che qui l'esigenza pratica si restringe a queste sole 3 funzioni definite formalmente, ecco un'altra ragione, o se si vuole: un'attenuante, per poter pensare che l'introduzione di questa strumentazione formale non rimarrebbe utile solo agli stretti scopi dell'insegnamento della fisica, ma permetterebbe anche alla matematica di sfruttarne le potenzialità per anticipare argomenti, assumendo punti di vista differenti sugli argomenti classici dei programmi che vengono già svolti.

3 - Semplici applicazioni ad alcune leggi della cinematica e della dinamica

Ora, illustreremo come, utilizzando questo formalismo, i concetti fondamentali della fisica possono essere presentati in modo nuovo e più efficace rispetto a quello usuale.

Come si è detto, il prezzo da pagare è una limitazione degli strumenti matematici a disposizione e da usare; occorre restringersi a espressioni continue e compatte, ma questo non limita lo studio della fisica affrontata nei licei.

La prima connessione, che può essere mostrata, è tra le varie leggi cinematiche del moto.

Una legge oraria si può costruire a partire da una tabella sperimentale dove siano state registrate le posizioni di un certo corpo in movimento e i tempi nei vari istanti in cui le posizioni sono assunte, e questo si può effettuare, ad esempio, usando un orologio e le pietre miliari lungo una strada,

ovvero con un cronometro e un righello, se si esegue un esperimento in laboratorio.

I dati, con i loro errori, riportati in un grafico su un piano di coordinate (t, s) , possono essere interpolati con una curva continua che corrisponde a una certa funzione polinomiale. Questo è sempre possibile per il fatto che il numero di misure da interpolare è necessariamente finito, ma si può decidere di utilizzare un polinomio che approssimi al meglio i dati, pur essendo esso di grado inferiore al numero di misure.

Quest'ultima possibilità è legata alla circostanza che ciascuna misura è affetta da errore sperimentale, e la coppia di misure tempo-posizione appare nel piano cartesiano (t, s) non come un determinato punto isolato, ma come una regione rettangolare intorno a un punto centrale, ovvero, se gli errori vengono assunti di tipo statistico, come una regione sfumata intorno al punto centrale. Questo modo di procedere corrisponde alla ricerca di una legge fisica generale e sintetica che governa gli eventi.

In qualsiasi caso, la funzione polinomiale che viene scelta per descrivere il fenomeno diviene, per definizione, la legge oraria del moto che si sta studiando, e possiamo esprimere questo fatto con i simboli:

$$s = s(t).$$

Nel seguito, per semplificare la simbologia, indicheremo la legge oraria, ovvero la funzione polinomiale che la rappresenta, con la sola lettera s , sottintendendo la sua dipendenza dal tempo t .

A partire dalla legge oraria, e utilizzando l'operatore di derivata formale sul polinomio, si possono introdurre le seguenti grandezze fisiche:

$$v = D(s) : \text{velocità come derivata della legge oraria;}$$

$a = D(v)$: accelerazione come derivata della velocità.
 E quindi, anche: $a = D(D(s)) = D^2(s)$.

Vediamo ora cosa si può dedurre con questo formalismo nei primi casi semplici di moto. Partiamo da quei casi che possono essere rappresentati attraverso polinomi a una sola indeterminata, la t appunto, con potenza via via maggiore. Lo studio dei moti diviene, quindi, uno studio formale sui polinomi con potenza crescente.

Se un corpo è fermo:

$s = s_0 = \text{cost.}$, e naturalmente $v = 0$, perciò: $D(\text{cost.}) = 0$.

Se il corpo è in moto con velocità costante $v_0 = 10 \text{ km/h}$ (ma nel seguito, per brevità e miglior chiarezza, tralasciamo di indicare esplicitamente le unità di misura), allora la sua rappresentazione come polinomio sarà:

$s = 10 t$, perché appunto: $v = D(10 t) = 10$.

Se, invece: $v_0 = 1$, si avrà: $s = 1 t$, e quindi: $D(t) = 1$.

Si ritrovano così, attraverso l'intuizione empirica, le prime regole di derivazione della costante e della variabile isolata.

Il caso successivo è quello del polinomio di secondo grado. Poiché, abbiamo già evidenziato i significati fisici nel caso di polinomio costante e lineare in t , esprimiamo il polinomio di secondo grado nel modo seguente: $s = b t^2 + v_0 t + s_0$, e, utilizzando l'operatore derivata, ricaviamo l'espressione per il coefficiente b : $v = D(s) = 2 b t + v_0$, $a = D(v) = 2 b \rightarrow b = a/2$.

Cioè ricostruiamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato mediante l'uso della derivata: $s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$.

Esaminiamo ora, un caso fondamentale di legge dinamica:

- 2° Principio di Newton: $F = m a$,

- Legge di Hooke: $F = -k s$.

Equazione per le oscillazioni di una molla: $m a = -k s$

,
quindi: $a = D^2(s) \rightarrow D^2(s) = -(k/m) s \rightarrow D^2(s) = -\omega^2 s$,

e questo permette di introdurre anche il concetto di equazione differenziale, e persino suggerisce come risolverla.

Infatti, partendo dalla relazione: $D^2(\cos(x)) = -\cos(x)$,

si ha una prima semplice soluzione particolare: $s = A \cos(\omega t)$.

4 - Un accenno alle enormi potenzialità didattiche del formalismo per i corsi di fisica

Vediamo alcuni concetti fisici che si possono introdurre utilizzando anche le derivate parziali.

Conserviamo il simbolo D per la derivata totale rispetto al tempo, e cioè la derivata che può essere eseguita una volta che alle varie grandezze siano state sostituite le loro espressioni dipendenti dal tempo, e indichiamo con D_s e D_t le derivate parziali, eseguite direttamente sulle indeterminate s e t .

Le varie indeterminate corrispondono alle relative grandezze fisiche presenti nelle espressioni delle leggi fisiche.

Partendo, ora, dalle relazioni fondamentali per le seguenti grandezze fisiche:

energia potenziale gravitazionale: $U = m g h \rightarrow m g s$;

energia cinetica: $T = \frac{1}{2} m v^2$;

forza peso: $F = m g$;

utilizzando le derivate formali possiamo scrivere: $F = D_s(U)$,
 questo in valore assoluto, ma considerando che l'energia
 potenziale gravitazionale U aumenta salendo verso l'alto,
 mentre la forza peso F è diretta verso il basso, correggiamo
 per il segno: $F = D_s(-U)$.

D'altra parte possiamo scrivere anche: $D_v(T) = m v = p$,
 dove il simbolo p indica la quantità di moto: $m v$, ed è il
 momento coniugato alla coordinata s .

Inoltre per il secondo principio della dinamica: $F = m a$

$$\rightarrow D_s(-U) = m D(v) = D(p) = D(D_v(T))$$

$$\rightarrow D_s(-U) = D(D_v(T))$$

e poiché: $D_s(T) = 0$ e $D_v(-U) = 0$,

possiamo scrivere: $D_s(T - U) = D(D_v(T - U))$.

Indicando ora con: $L = T - U$ (la lagrangiana),

possiamo riscrivere l'equazione di Newton nella forma di
 Lagrange: $D_s(L) = D(D_v(L))$.

Questa sequenza di espressioni ha una valenza molto
 generale, perché permette di introdurre un formalismo e dei
 concetti che sono già un primo buon passo per parlare, ad
 esempio, di meccanica razionale, di elettrodinamica, di fisica
 delle particelle e dell'alta energia, con meno genericità.

Se, d'altra parte, si vuol affrontare con maggiore profondità
 la fisica atomica o nucleare, si può agilmente introdurre il
 formalismo hamiltoniano.

Allora, innanzi tutto, sfruttando la relazione: $p = m v$,
 possiamo riscrivere l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow T = p^2 / 2m,$$

e con questa nuova espressione possiamo introdurre
 l'hamiltoniana come:

$$H = T + U$$

osservando, in questo modo, che essa dipende dalle due coordinate s e p .

Questo è la via più semplice per introdurre l'hamiltoniana, ed è un caso molto particolare della più generale, ma meno intuitiva, trasformazione di Legendre: $H = v p - L$.

Per inciso, delle trasformazioni di Legendre si fa largo uso in termodinamica, ma per poterle introdurre e utilizzare con qualche cognizione, occorre, in generale, essere in grado di maneggiare la relazione che intercorre tra la nuova coordinata (qui la p) e la derivata parziale della vecchia funzione (qui la L) rispetto alla variabile da rimpiazzare (qui la v), quindi occorre saper maneggiare la derivata: $p = D_v(L)$.

Una volta introdotta la funzione hamiltoniana si trova agevolmente che:

$$\begin{aligned} D_s(H) = H_s &= -F &= -D(p) \\ D_p(H) = H_p &= p/m = v &= D(s) \end{aligned}$$

che, sostanzialmente, sono le usuali equazioni di Hamilton.

Come noto, da queste relazioni si ricava che la grandezza fisica legata all'hamiltoniana si conserva nel tempo in molti casi importanti.

Infatti, usando la regola della derivata delle funzioni composte sulla funzione H , ed effettuando la derivata totale di H rispetto al tempo quando essa dipende dal tempo solo attraverso le variabili s e p , impiegando le equazioni di Hamilton si ottiene:

$$D(H) = D_s(H) D(s) + D_p(H) D(p) = 0,$$

la qual cosa equivale a dire che H è costante rispetto al tempo, dunque la grandezza fisica che in questo caso essa rappresenta si conserva nel tempo, e questo è un modo diverso, ma anche più profondo, di introdurre la legge di conservazione dell'energia nei fenomeni fisici che vengono usualmente studiati nelle scuole superiori.

Sia il formalismo lagrangiano che quello hamiltoniano sono strumenti indispensabili per affrontare la fisica moderna con qualche speranza di non rimanere al solo modesto livello di informazione. Si pensi, ad esempio, al primo semplice caso dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo.

5 - Conclusioni

Su questo intero schema fu eseguita una sperimentazione ottenendo alcuni primi successi senza, apparentemente, controindicazioni. I programmi di analisi matematica del quinto anno non risentirono negativamente della precedete introduzione formale di alcuni suoi concetti, anzi, per lo più tutt'altro, i concetti di analisi trovarono più immediata e veloce assimilazione. I programmi di fisica, in aggiunta, si arricchirono in maniera molto significativa.

Tuttavia, la sperimentazione poté avvenire senza causare contraccolpi negli usuali programmi di fisica, grazie alla disponibilità d'orario; ma, considerando che il Liceo Scientifico Tecnologico è oramai soppresso, e tenendo conto delle riduzioni d'orario e degli ingenti e aggravati oneri didattici degli insegnanti di fisica e matematica, la proposta va intesa nel senso di indicare un orizzonte di possibilità, una via

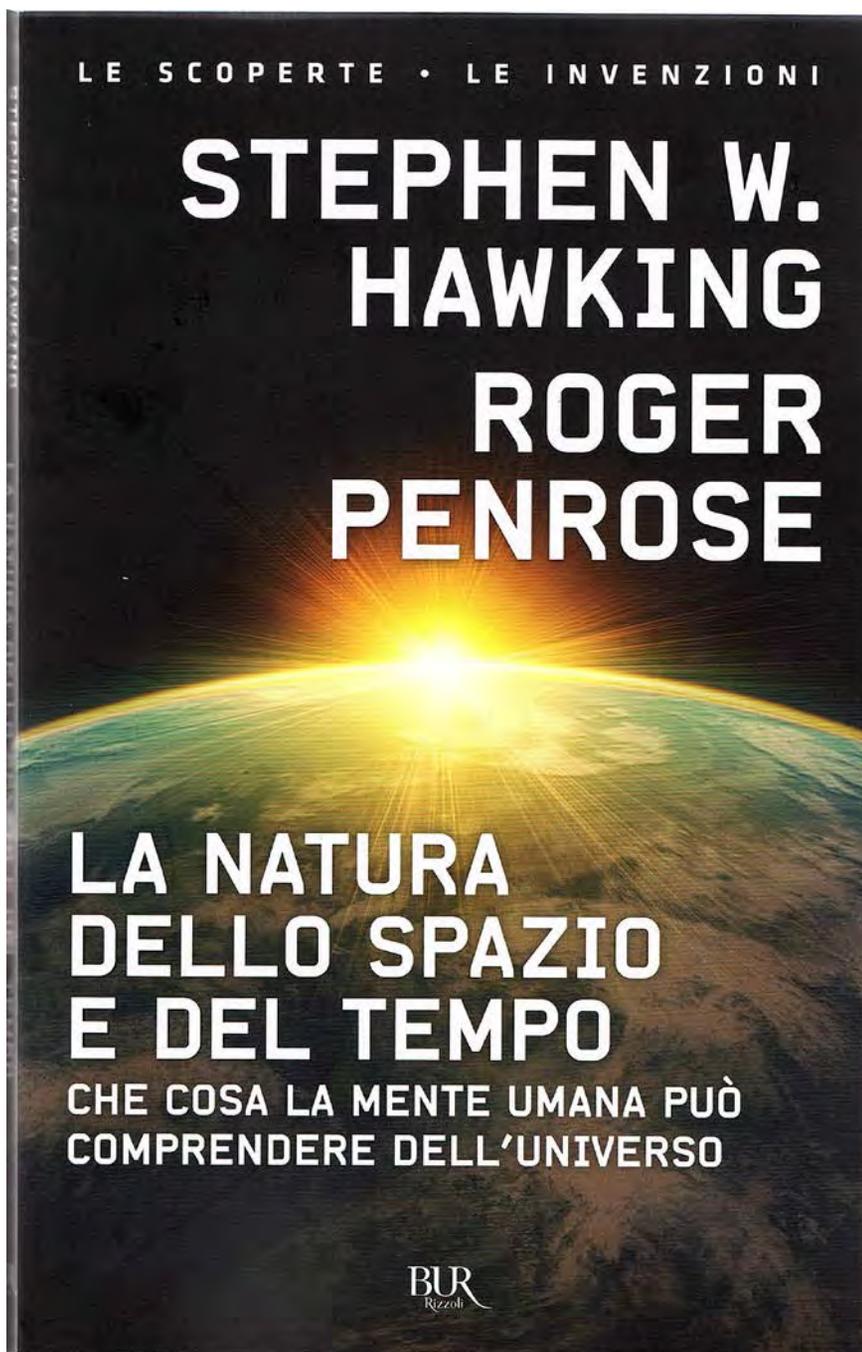
percorribile all'occorrenza in circostanze più favorevoli, con l'obiettivo di trattare in modo meno generico la fisica moderna, e di ampliare con coerenza i contenuti matematici.

Questo o qualsiasi altro, anche più efficace, modo si trovi e venga proposto, qualcosa dovrà comunque essere fatto per aggiornare i programmi di fisica, perché attualmente ogni anno di ricerca e scoperte in più, ogni anno di scienza in più, è un anno in più di ritardo nei contenuti della fisica svolta nei licei, ma, del resto, sembra che anche nella matematica si manifesti lo stesso destino. Infine, bisogna tener conto che, dal punto di vista fisico, per i problemi empirici che si studiano nelle scuole superiori, ma anche per problemi più astratti e complessi che si studiano nei primi anni di università, ogni tipo di formalizzazione è un'astrazione, utile fino al limite sperimentale, cioè giustificata fino al limite che viene concesso dalla natura e dalla struttura intrinsecamente sperimentale della fisica.

Bibliografia

GIRARDI M. e ISRAEL G. (1976). *Teoria dei campi*. Milano: Feltrinelli.

APOSTOL Tom M. (1969.) *Calculus*. New York: Wiley. Trad. italiana: *Calcolo* in 3 volumi, Torino: Bollati Boringhieri, 1977.



Gli esperimenti fisici come strumenti per l'indagine matematica

Un utilizzo didattico

Bonaventura Paolillo*

*Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno;
bonaventura.paolillo@liceoseverisalerno.net



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.097

Sunto: *E' noto che la Matematica è indispensabile alla Fisica. Diversi matematici, tra cui Tokieda e Levi, utilizzano l'intuizione fisica per risolvere alcuni problemi di matematica. In effetti, la Fisica può semplificare le dimostrazioni matematiche e condurre a soluzioni rapide e nuovi teoremi. Tale approccio, non trova spazio nella pratica didattica quotidiana. Il seguente lavoro, offre un'opportunità in tal senso, per realizzare un'attività didattica per studenti delle scuole secondarie di secondo grado. Ad esempio, è possibile derivare il teorema di Pitagora da una vaschetta piena d'acqua, con un'argomentazione basata sul moto perpetuo. Viviamo in un mondo in cui tutto è collegato e il vincolo tra Matematica e Fisica è un esempio di questo.*

Parole Chiave: *esperimento fisico, dimostrazione fisica, didattica della Matematica e Fisica.*

Abstract: *It is known that Mathematics is indispensable for the developing of Physics. Several mathematicians, especially Tokieda and Levi, demonstrate how to*

use physical intuition to solve math problems. In fact, Physics can simplify proofs and lead, in a easier way to quick solutions and new theorems. Many reflections on this topic don't find the space they deserve in teaching practice. The following work offers an opportunity useful for the mathematics education. The aim is to make a didactic activity take place for High School, for example, it is possible to derive the Pythagorean theorem from a tank filled with water, with an argumentation based on perpetual motion. We live in a world where everything it's all linked and the bond between Math and Physics is just an example of this.

Keywords: *experimental physics, physics proof, mathematics education.*

1 - Introduzione

In questo lavoro si vuole presentare una riflessione più ampia sul significato di esperimento fisico e su come possa essere utilizzato per fornire una convalida a teoremi o a risultati di carattere prettamente matematico. Usualmente, partendo da contesti derivanti dalle scienze sperimentali, si cercano dei modelli matematici utili a descrivere e a simulare determinati comportamenti, si pensi ad esempio alle comuni previsioni meteorologiche. Negli ultimi decenni si è assistito, ad una serie di ricerche di un certo interesse, sul percorso inverso, cioè sulla possibilità che risultati o equazioni matematiche possano essere convalidati da esperimenti o congegni di tipo fisico, seppur spesso in maniera ideale. Il percorso non è nuovo e riprende in qualche misura i metodi empirici che trattava già il grande Archimede, per esempio risolvendo la quadratura della parabola. Studiosi influenti come Tadashi Tokieda (Stanford University) e Mark Levi (The Pennsylvania State University), hanno evidenziato tali aspetti negli ultimi due decenni orientando le ricerche in tale

direzione: l'obiettivo è valutare se e in quale misura la Fisica possa essere considerata una valida ancella della Matematica [1], [2], [3]. Si esamineranno alcuni contesti didattici significativi, come la dimostrazione fisica del teorema di Pitagora nel piano e nello spazio, l'individuazione dei punti notevoli in relazione all'equilibrio statico, la catena di Stevino, il principio di Archimede in Idrostatica.

Il discorso si potrebbe ampliare ad altre situazioni fisiche. Tuttavia, si sottolinea che determinare dimostrazioni fisiche o ragionamenti ideali ad hoc, capaci di descrivere questioni matematiche non è un compito facile e potrebbe risultare altrettanto arduo da risolvere. L'incarnazione fisica diventa però l'oggetto di ricerca del meccanico matematico che dovrebbe escogitare qualche esperimento fisico per le sue esigenze. A livello didattico, la rielaborazione di tali nuclei di Fisica calati nella Matematica, è una chiara occasione di introspezione per il docente e gli allievi, oltre a costituire un momento di crescita che si misura come consolidamento delle competenze di base.

2 - Teoremi di Pitagora

Oltre alle centinaia di dimostrazioni del celebre teorema di Pitagora, è poco nota la seguente prova di tipo fisico, riportata in [1], [2], [3].

2.1 - Il teorema di Pitagora nel piano

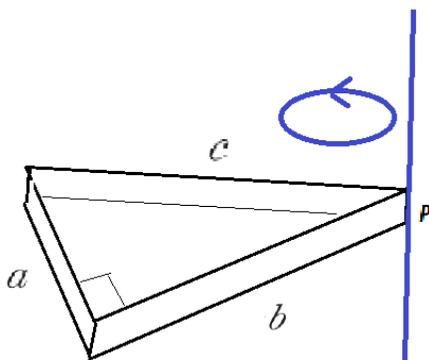
Teorema

In un triangolo rettangolo di cateti a , b e ipotenusa c vale

$$a^2 + b^2 = c^2$$

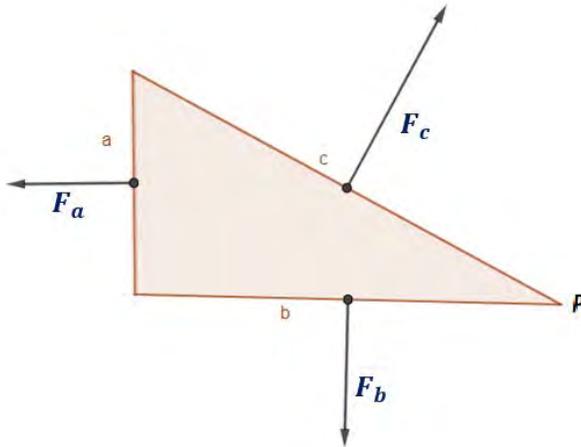
Dimostrazione.

Si scelga una vaschetta che abbia la forma di un prisma con altezza h e con le facce orizzontali, come il triangolo rettangolo dato. Viene quindi riempita con dell'acqua ed ancorata ad un perno P in cui può ruotare liberamente, come in figura.



Si osserva che un'eventuale rotazione farebbe muovere la vaschetta in maniera continua e permanente, generando *un moto perpetuo*. Essendo questo in contrasto con la conservazione dell'energia, la vaschetta è necessariamente in equilibrio.

La vista dall'alto, nella prossima figura, ne mostra la situazione fisica con le relative forze in gioco:



Le forze che agiscono sulle facce superiore ed inferiore della vaschetta si neutralizzano a vicenda, mentre quelle sulle facce laterali sono pari a:

$$\begin{aligned} |F_a| &= p(ah); & |F_b| &= p(bh); \\ |F_c| &= p(ch); \end{aligned}$$

Le direzioni sono rette passanti per il centro delle facce e naturalmente perpendicolari ad esse.

Le equazioni della statica ci garantiscono che è nulla la risultante di queste forze e la somma dei momenti di esse rispetto ad un qualsiasi punto. Esplicitando quest'ultima e scegliendo il polo P come in figura, si avrà:

$$M_{F_a} + M_{F_b} + M_{F_c} = 0$$

ovvero:

$$p(ah)\frac{a}{2} + p(abh)\frac{b}{2} - p(ch)\frac{c}{2} = 0$$

da cui eliminando p, h ed il fattore $1/2$, si ha la tesi cercata

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.2 - Il teorema di Pitagora nello spazio

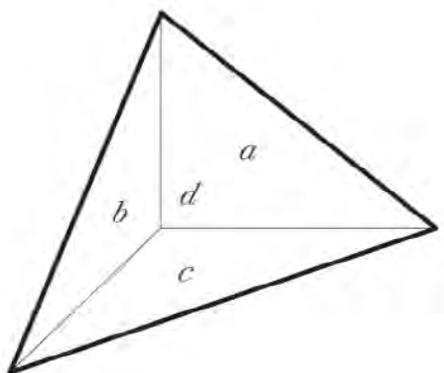
E' chiamato anche *teorema di De Gua* e costituisce, appunto, una *versione spaziale* del teorema di Pitagora. Viene qui esposto, secondo un argomento fisico, come fatto in [2].

Storicamente era stato provato nel 1783 da *Jean Paul de Gua de Malves* (1713-1785) ma era noto probabilmente a *Cartesio* (1596-1650) e *Johann Faulhaber* (1580-1635).

Teorema De Gua

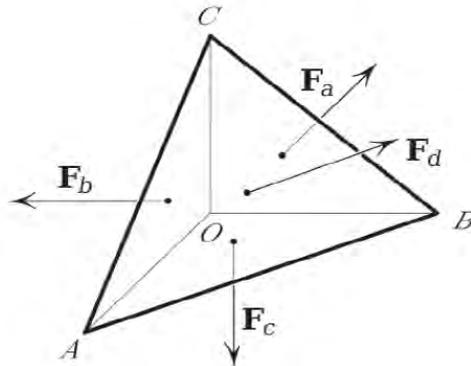
In un tetraedro formato da tre piani mutuamente ortogonali e il quarto piano, non parallelo ai primi tre, risulta:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$



Dimostrazione Fisica.

Si indichino con *a*, *b*, *c*, *d*, le superfici relative alle quattro facce e si riempia quindi il recipiente con del gas.



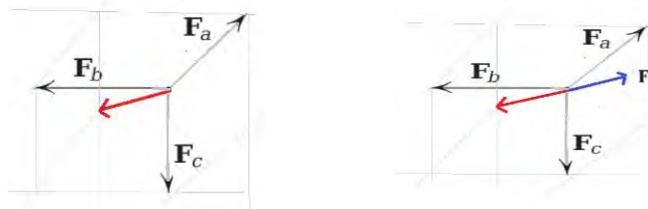
Per l'equilibrio del solido, deve risultare che la somma vettoriale delle quattro forze è nulla, cioè:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d = \mathbf{0}.$$

In particolare, il modulo della somma delle prime tre forze, è pari al modulo della quarta forza, perpendicolare al piano obliquo d :

$$|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c| = |\mathbf{F}_d|$$

Ciò si evidenzia ancora di più dalla seguente illustrazione:



Discende allora, dalla mutua perpendicolarità, che:

$$|\mathbf{F}_a|^2 + |\mathbf{F}_b|^2 + |\mathbf{F}_c|^2 = |\mathbf{F}_d|^2$$

Essendo poi, $F = \text{pressione} \times \text{area}$:

$$|\mathbf{F}_a| = pa; \quad |\mathbf{F}_b| = pb; \quad |\mathbf{F}_c| = pc;$$

e sostituendo nella espressione precedente, si ricava:

$$(pa)^2 + (pb)^2 + (pc)^2 = (pd)^2.$$

Eliminando p^2 , segue subito la tesi:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

L'impiego in aula di tali prove, è proponibile sin dal primo anno di un Liceo o Istituto Tecnico e costituisce un efficace motivo di approfondimento, sia in chiave matematica che fisica. In questo modo, emerge il carattere polivalente di un risultato scientifico.

3 – I Punti Notevoli e la loro verifica fisica

La trattazione dei punti notevoli di un triangolo si inserisce all'interno di un nucleo geometrico significativo ed in relazione all'elaborazione di alcuni luoghi geometrici fondamentali, come *asse e bisettrice*.

Si mostrerà che i punti notevoli oltre ad essere interpretati in un'accezione puramente geometrica, si possono inquadrare in diversi contesti fisici, come per esempio la *Statica del corpo rigido*. Si possono allora realizzare strutture rigide triangolari in cui le varie sollecitazioni, cioè forze, conducono all'equilibrio statico.

Tale approccio in [1], è stato descritto e sviluppato in modo originale, anche se in maniera prevalentemente teorica. Si fornirà qui, un'impronta maggiormente votata all'aspetto didattico, che consenta all'allievo un'acquisizione più

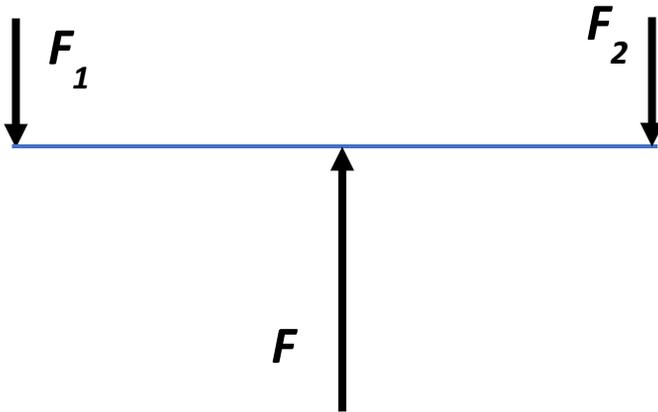
immediata di tali procedimenti. Si premette, a tale scopo, il seguente utilissimo

LEMMA DELLE TRE FORZE

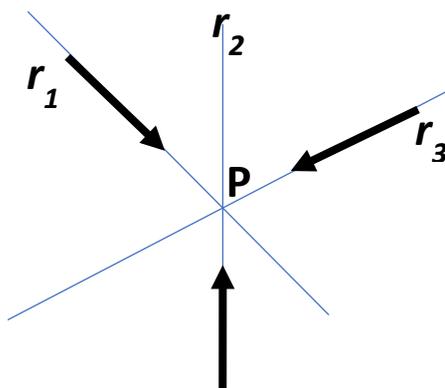
Se un corpo è soggetto a tre forze complanari ed è in equilibrio allora le tre forze hanno risultante nulla e sono parallele tra loro oppure concorrenti in un punto.

Dimostrazione

Si mostra, in figura, il caso esplicito di tre forze parallele per una leva in equilibrio, dove nel suo punto medio agisce la forza F di intensità doppia rispetto a F_1 , F_2 , applicate agli estremi.



Se le tre forze non sono parallele tra loro, esisteranno due di queste, con direzioni r_1 e r_2 , incidenti in P :



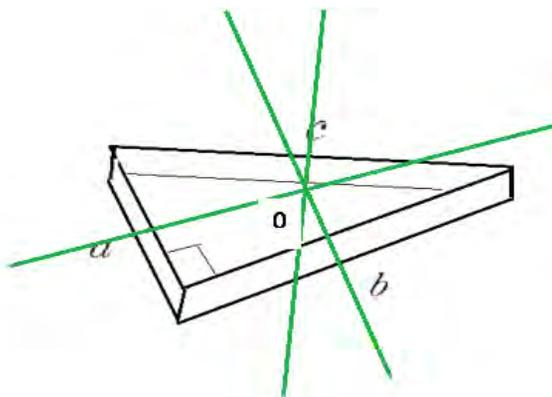
Per analizzare il momento risultante, che è nullo per ipotesi di equilibrio, si scelga il punto P come polo. Risulterà subito che $M_1 = 0$ e $M_2 = 0$. Necessariamente segue che $M_3 = 0$ e ciò significa che la retta r_3 passa per P .

3.1 - Il circocentro in un triangolo

Come dimostrare che gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un solo punto?

Si riprenda l'esempio della vaschetta piena d'acqua a forma di prisma che ha come basi quelle di un triangolo dato. Si può considerare la stessa senza far uso dell'ancoraggio all'asse. Le usuali forze di spinta, lungo le pareti, lasciano la vaschetta in equilibrio ed hanno come direzioni quelle degli assi dei lati, si può infatti considerare l'altezza della vaschetta trascurabile.

Dal *Lemma delle tre forze* discende subito che è individuato il circocentro.

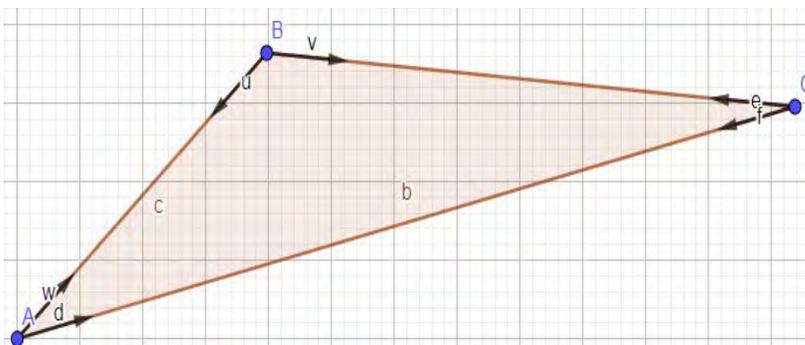


3.2 - L' incentro e l'ex-centro in un triangolo

Come dimostrare che le bisettrici si incontrano in un solo punto?

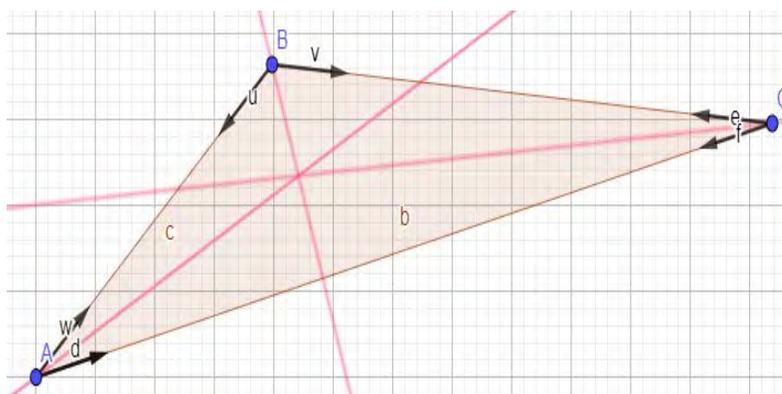
Una prova statica è la seguente: si considerino **6 forze** uguali tra loro in modulo e disposte come in figura:

- per il vertice A si considerano le forze w e d
- per il vertice B si considerano le forze u e v
- per il vertice C si considerano le forze e e f



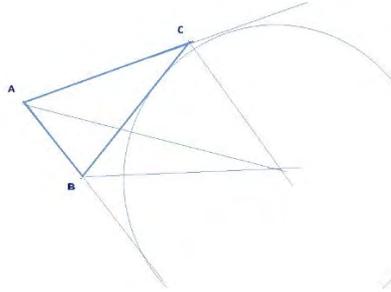
La somma delle forze è naturalmente zero ed il nostro “telaio triangolare” è in equilibrio.

L’idea è allora riorganizzare il calcolo delle somme delle forze secondo le proprietà usuali dell’addizione dei vettori, ovvero sfruttare le proprietà commutativa e associativa.

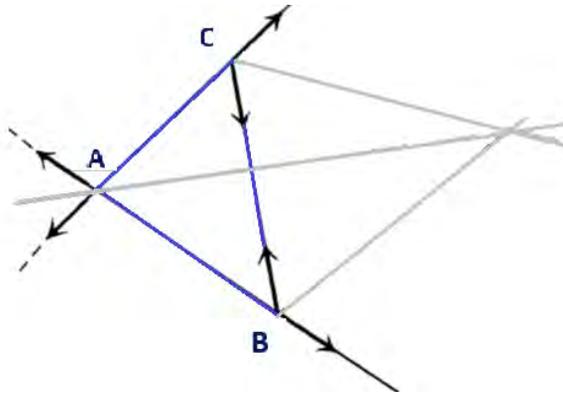


Si nota che, per ogni vertice fissato, la composizione della somma delle forze dà luogo ad un rombo. Inoltre, per esso, per una nota proprietà, le diagonali coincidono con le bisettrici. Dal *Lemma delle tre forze* si ha subito che le bisettrici concorrono in un punto, ovvero l’incentro.

Un procedimento simile può applicarsi per un altro punto notevole, il cosiddetto *ex-centro* definito dall’usuale proprietà che le bisettrici di due angoli esterni e la bisettrice interna dell’altro angolo, non adiacente ad essi, si intersecano in un punto.



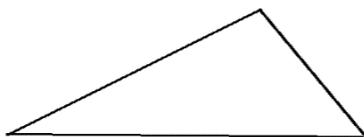
Per dimostrarlo si scelgano ancora sei forze uguali in modulo tra loro, come in figura, e si dispongano lungo i lati del triangolo dato ABC , di colore blu'.



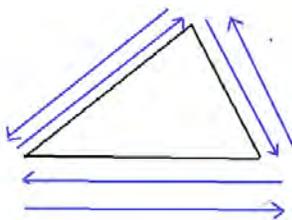
Applicando il *lemma delle tre forze* si conclude che le bisettrici, in grigio, sono concorrenti nell' ex-centro.

3.3 - Il Baricentro in un triangolo

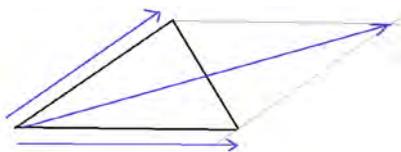
Per verificare che le mediane si incontrano in uno stesso punto, si consideri il seguente generico triangolo, visto ancora come modello di un telaio rigido.



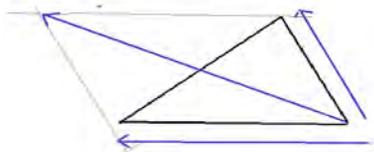
Si inseriscano sei forze in modo tale che lascino in equilibrio il triangolo, cioè immaginiamo che per ogni lato agiscano due forze opposte, con relativo modulo proporzionale alla lunghezza del lato stesso.



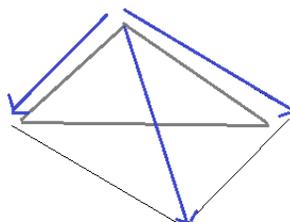
Si riorganizzano opportunamente la somma delle forze secondo i lati consecutivi, ottenendo:



Prima coppia



Seconda coppia



Terza coppia

Si osserva che tali forze in coppie, così raggruppate, hanno la somma che risulta sempre nulla. Applicando il lemma precedente le mediane concorreranno in uno stesso punto, cioè il baricentro del triangolo. Si è utilizzata infatti, la nota proprietà, in cui le diagonali di un parallelogramma si tagliano scambievolmente per metà.

Non si conosce esplicitamente una prova fisica dell'ortocentro, se non interpretato questo come il circocentro del triangolo duale, secondo la dimostrazione euclidea classica.

4 - La Catena di Stevino

Simon Stevin (o Stevino); Bruges, 1548 – L'Aia, 1620; è stato uno scienziato fiammingo noto per i suoi importanti contributi alla *Statica* ed *Idrostatica*, ma anche alla *Trigonometria Sferica*, *Navigazione* e *Geometria Proiettiva*.

Un suo particolare congegno si è rivelato utile nel descrivere la condizione di equilibrio statico per il piano inclinato, da un punto di vista teorico e sperimentale. In sintesi, Stevino immaginava di appendere una catena ad un piano inclinato, assumendo essere priva di peso e con il movimento, tra le parti in causa, compiuto senza attrito. (in figura, il frontespizio dell'Opera *De Weeghdaet beschreven duer Simon Stevin van Brugghe*).

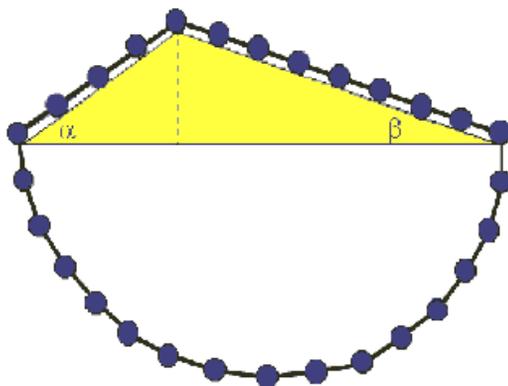
DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.



TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By François van Raphelinghen.
CLO. ID. LXXXVI.

La catena sarà in equilibrio, oppure no?

L'argomentazione è del tutto originale in quanto l'equilibrio scaturisce da considerazioni sul moto perpetuo. Precisamente si può considerare un triangolo generico, non necessariamente un triangolo rettangolo, come in figura.



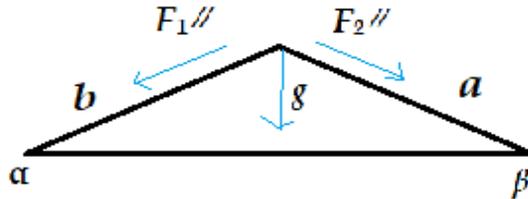
Se la catena non fosse in equilibrio, si dovrebbe muovere, ruotando in senso orario o antiorario; la rotazione, anche se di

piccola entità, porterebbe ad una nuova configurazione, identica a quella precedente. Continuando ulteriormente il movimento, *la catena sarebbe in moto per sempre!*

Poiché il moto perpetuo è impossibile, Stevino conclude che la catena è necessariamente in equilibrio.

La parte sottostante curva della catena è simmetrica e il suo peso non ha effetto sull'equilibrio complessivo; ci sarà allora equilibrio anche tra i due segmenti di catena.

Si possono evidenziare quindi le forze $F_1 //$ e $F_2 //$, a cui i segmenti di corda sono sottoposti verso il basso.



Tale argomentazione può essere adottata per sviluppare aspetti complementari prettamente matematici e stabilendo il *Teorema dei Seni* in Goniometria [1]. Si nota che:

1. Le componenti dell'accelerazione g sono:
 $g \sin a$ e $g \sin \beta$
2. Le masse sui lati risultano proporzionali alle lunghezze dei lati.

Dall'uguaglianza delle forze $F_1 // = F_2 //$ risulta che:

$$b g \sin a = a g \sin \beta$$

cioè:

$$a/\sin a = b/\sin \beta$$

Adattando qualche accorgimento¹ sulla configurazione del dispositivo, se ne deduce l'uguaglianza dei rapporti, ovvero il teorema dei seni:

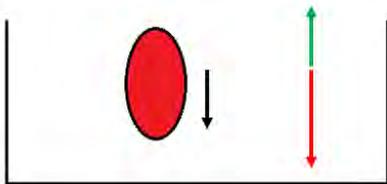
$$a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$$

5 - Oltre la Statica ... l'Idrostatica

E' spesso presente nei testi di Fisica la seguente prova del *Principio di Archimede*.

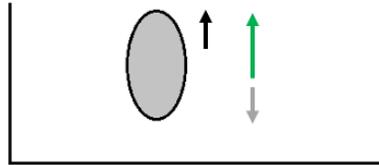
Si abbia un sacchettino di peso ininfluenza, immerso completamente in un liquido, per esempio acqua, non colorata in figura. E' plausibile ipotizzare che la *spinta di Archimede* dipenda *solo* dalla pressione che l'acqua esercita sulla superficie dell'involucro esterno. Si indichi il valore della spinta, che quindi è costante, con S , vettore di colore verde. Si denotino poi, i pesi dei liquidi inseriti successivamente nel sacchettino con vettori di colore rosso, grigio e giallo ed il vettore risultante col nero. Possono realizzarsi i seguenti casi:

densità fluido rosso > densità dell'acqua

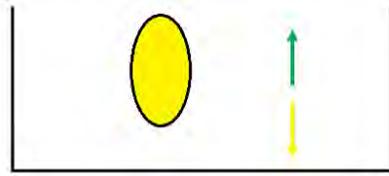


¹ Se ci fosse un angolo ottuso con il lato orizzontale, l'accorgimento potrebbe consistere nel far scivolare la catena a fianco dell'altro lato dell'angolo ottuso, seguendo una guida scorrevole in modo ad esso parallelo.

densità fluido grigio < densità dell'acqua



densità fluido giallo = densità dell'acqua



Da quest'ultimo caso si riesce a dedurre subito che la spinta di Archimede coincide con l'intensità del peso del sacchetto, ovvero $S=mg=dVg$, dove d è la densità dell'acqua e V il volume del sacchetto immerso. Evidentemente, tale argomentazione costituisce una *prova fisica del Principio di Archimede* e si può affiancare, nell'attività didattica, sia alle comuni esperienze sperimentali fatte con bilancia idrostatica, sia alla prova analitica, basata sulla legge di Stevino sui fluidi. Si veda anche Levi in [2]. Altre branche della Fisica, come *l'Elettricità, la Termodinamica, l'Ottica*, ecc, possono essere coinvolte per una prova fisica, come spiegato nel bel libro di M. Levi. (Per la *Cinematica* collegata alle serie numeriche, si può vedere anche B. Paolillo, *Lettera Matematica Pristem*; n. 61-60-64; anno 2007).

6 - Conclusioni

La panoramica di teoremi e risultati offerti è da una parte, indicativa di una gamma di esperienze da proporre in aula, ma anche direttamente fruibile per un loro impiego concreto. In questo modo, si può facilmente arricchire il curricolo di base di matematica e fisica, e far leva su evidenti aspetti motivazionali degli allievi. A discrezione del contesto classe, il singolo docente ne potrà dosare l'impiego effettivo.

Si evidenzia che tale approccio, nella prassi didattica, è sostanzialmente assente. In questo senso, purtroppo, lo sviluppo didattico delle due discipline non è riuscito a fornire contributi significativi o almeno incisivi per una modesta realizzazione in aula.

*In ricordo del collega e caro
amico Alberto Trotta*

Bibliografia

TOKIEDA Tadashi (1998). Mechanical Ideas in Geometry, *The American Mathematical Monthly*; Vol. 105, No. 8 (Oct., 1998), pp. 697-703

LEVI Mark . (2009). *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems(book)*. Princeton: Univ. Press.

LOLLI Gabriele (2011). Pensiero matematico e fisico, *Numero 3, Serie XI, anno CXXI*

Regressione lineare: un metodo per il fitting di dati sperimentali

Angela Donatiello*

*Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Salerno

adonatiello@unisa.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.098

Sunto: *Nella pratica didattica esistono due tipi di approcci sperimentali alla fisica: uno di carattere qualitativo che evidenzia le proprietà di un fenomeno senza però effettuare la misura di grandezze fisiche e un altro più propriamente quantitativo che mette lo studente in condizione di raccogliere dati sperimentali e di rielaborarli per la lettura in essi di relazioni funzionali. In quest'interovento si desidera mettere in evidenza una possibilità di approccio alla regressione lineare con la ricerca della retta dei minimi quadrati, sia con l'uso di materiale povero come riga e carta millimetrata, sia con l'ausilio di strumenti digitali, mostrando come il metodo possa essere agevolmente presentato a studenti del primo biennio e fino al quinto anno, con diversi livelli di approfondimento.*

Parole Chiave: *Regressione lineare. Retta dei Minimi quadrati.*

Abstract: *In teaching practice, there are two types of experimental approaches to physics: one of a qualitative nature which highlights the properties of a phenomenon without, however, measuring physical quantities and another, more strictly quantitative, which enables the student to collect experimental data and*

process them for the reading of functional relationships in them. In this paper we want to highlight a possibility of approaching linear regression with the search for the least squares line, both with the use of poor material such as line and graph paper, and with the aid of digital tools, showing how the method can be easily presented to students of the first two years and up to the fifth year, with different levels of detail.

Keywords: *Least Squares regression line*

1 - Introduzione

Nella pratica didattica in uso nella scuola secondaria di secondo grado esistono due tipi di approcci sperimentali alla fisica: uno di carattere più strettamente qualitativo che evidenzia le proprietà di un fenomeno senza però effettuare la misura diretta o indiretta di grandezze fisiche e un altro più propriamente quantitativo, rigoroso ed efficace, che mette lo studente in condizione di raccogliere dati sperimentali e di rielaborarli per la lettura in essi di relazioni funzionali.



Fig. 1 – Esperimenti qualitativi e quantitativi con una quinta liceo scientifico

Mentre il primo ha il merito di stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti nei confronti dei fenomeni fisici, inducendoli a costruire anche in modo autonomo l'apparato sperimentale, il secondo consente invece di esplorare nel dettaglio i fenomeni e di descriverli in modo accurato, cooperando in gruppi di lavoro.

Nel laboratorio di fisica, fin dal primo anno, ci si confronta spesso con il problema di interpretare, valutare e gestire i dati ricavati da rilevazioni ed esperimenti. A tal fine risulta dunque necessario permettere agli studenti di apprendere metodi statistici finalizzati all'elaborazione ed interpretazione dei dati raccolti. Le Indicazioni Nazionali, in particolare, raccomandano la ricerca della curva interpolante i dati sperimentali, mediante la costruzione della retta di regressione.

In quest'intervento si desidera mettere in evidenza una possibilità di approccio alla ricerca della retta di *best fit* sia con l'uso di materiale povero come riga e carta millimetrata, sia con l'ausilio di strumenti digitali, mostrando come il metodo possa essere agevolmente presentato a studenti del primo biennio e fino al quinto anno, con diversi livelli di approfondimento.

2 - Una proposta didattica per il fitting di dati

Uno dei primi esperimenti con cui gli allievi si confrontano è quello della misura del periodo di oscillazione del pendolo semplice e della ricerca della relazione esistente tra il quadrato del periodo e la lunghezza del pendolo.

Fornendo agli allievi schede di lavoro guidate (Fig. 2), essi sono indotti ad osservare una regolarità nel rapporto T^2/l , ipotizzando una relazione di proporzionalità diretta tra le grandezze in gioco.

L_1	ΔL_1	T_{10}	$T = T_{10}/10$	T media	$\Delta T = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}/2$	T^2	$\Delta T^2 = (\Delta T/T + \Delta T/T) \cdot T^2$	T^2/L
0,610	0,001	15,75	1,575	1,5742 = 1,57	1,599 - 1,561 / 2 = 0,019 = 0,02	2,4649 = 2,46	$(0,02/1,57 + 0,02/1,57) \cdot 2,4649$ = 0,0628 = 0,06	4,0408
		15,61	1,561					
		15,64	1,564					
		15,72	1,572					
		15,99	1,599					

$L = (0,610 \pm 0,001)$ $T = (1,57 \pm 0,02)$ $T^2 = (2,46 \pm 0,06)$

L_2	ΔL_2	T_{10}	$T = T_{10}/10$	T media	$\Delta T = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}/2$	T^2	$\Delta T^2 = (\Delta T/T + \Delta T/T) \cdot T^2$	T^2/L
0,632	0,001	16,19	1,619	1,6084 = 1,61	0,0135 = 0,01	2,5921 = 2,59	$(0,01/1,61 + 0,01/1,61) \cdot 2,5921$ = 0,0322 = 0,03	4,10
		16,14	1,614					
		16,20	1,620					
		15,96	1,596					
		15,93	1,593					

$L = (0,632 \pm 0,001)$ $T = (1,61 \pm 0,01)$ $T^2 = (2,59 \pm 0,03)$

L_3	ΔL_3	T_{10}	$T = T_{10}/10$	T media	$\Delta T = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}/2$	T^2	$\Delta T^2 = (\Delta T/T + \Delta T/T) \cdot T^2$	T^2/L
0,660	0,001	16,37	1,637	1,6394 = 1,64	1,653 - 1,633 / 2 = 0,01	2,6896 = 2,69	$(0,01/1,64 + 0,01/1,64) \cdot 2,6896$ = 0,0328 = 0,03	4,075
		16,40	1,640					
		16,34	1,634					
		16,33	1,633					
		16,53	1,653					

$L = (0,660 \pm 0,001)$ $T = (1,64 \pm 0,01)$ $T^2 = (2,69 \pm 0,03)$

L_4	ΔL_4	T_{10}	$T = T_{10}/10$	T media	$\Delta T = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}/2$	T^2	$\Delta T^2 = (\Delta T/T + \Delta T/T) \cdot T^2$	T^2/L
0,722		17,05	1,705	1,710	1,714 - 1,704 / 2 = 0,005	2,9241 = 2,92	$(0,005/1,71 + 0,005/1,71) \cdot 2,9241$ = 0,0171 = 0,02	4,05
		17,13	1,713					
		17,04	1,704					
		17,14	1,714					
		17,14	1,714					

$L = (0,722 \pm 0,001)$ $T = (1,710 \pm 0,005)$ $T^2 = (2,92 \pm 0,02)$

Fig.2 – Dati raccolti in DAD da una classe prima di liceo quadriennale

Per studiare la dipendenza tra T^2 ed l è utile quindi far riportare in un grafico con carta millimetrata i valori ottenuti nelle misurazioni, accompagnati dai corrispettivi errori sperimentali, mediante la rappresentazione delle *barre d'errore*. Il coefficiente della retta interpolante informerà sulla relazione cercata e darà anche una misura indiretta dell'accelerazione di gravità.

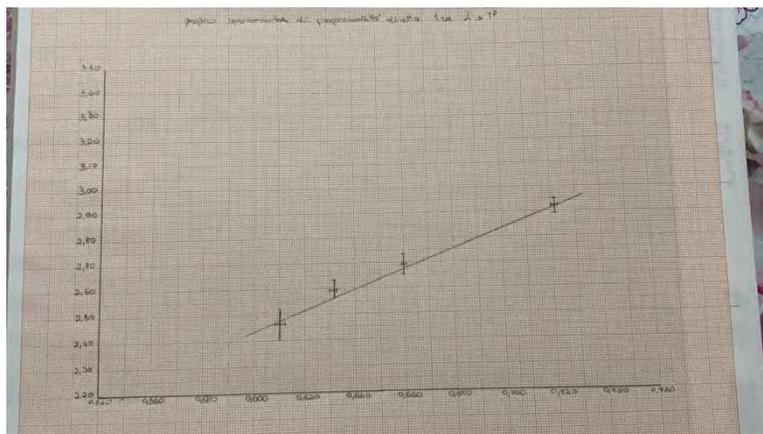


Fig. 3 – Grafico prodotto in DAD da una studentessa di una classe prima di liceo quadriennale

La ricerca della retta che meglio approssima i dati sperimentali è però un processo non banale, che richiede competenze statistiche non sempre alla portata di allievi del primo anno. E' innanzitutto fondamentale far comprendere loro che la retta cercata non deve necessariamente toccare tutti i valori medi dei dati rilevati, ma deve invece attraversare tutte le barre d'errore, in quanto la misura è un intervallo e il dato va dunque contemplato con la relativa incertezza.

2.1 - Fit con metodo grafico

Un primo approccio empirico, che media l'intervento della geometria analitica e della statistica, sta nella ricerca della retta di *best fit* con il metodo grafico della massima e minima pendenza. Alcune applicazioni grafiche digitali permettono la rappresentazione dei dati sperimentali con la visualizzazione delle incertezze. Si può quindi proporre agli studenti di

ricercare i coefficienti angolari delle rette di massima e minima pendenza e le loro equazioni, facendo scegliere due punti su ciascuna retta, in modo tale che esse delimitino tutte le rette passanti per le barre d'errore.

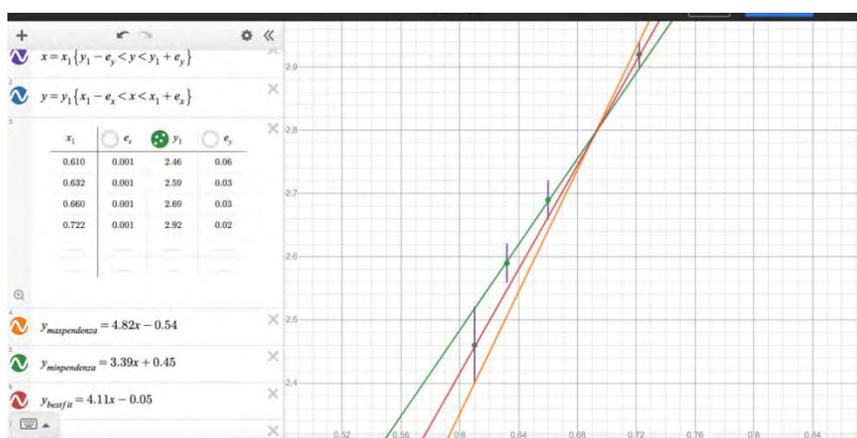


Fig. 4 – Rappresentazione digitale con Desmos delle rette di massima e minima pendenza e della retta di best fit con barre d'errore

Il coefficiente angolare e l'intercetta della retta di *best fit* si otterranno come media aritmetica dei coefficienti angolari e delle intercette delle due rette di massima e minima pendenza, mentre le loro incertezze si otterranno mediante il calcolo della semidisersione.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_{\min} + m_{\max}}{2} & \Delta m &= \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2} \\
 q &= \frac{q_{\min} + q_{\max}}{2} & \Delta q &= \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.1}$$

Tale metodo ha il vantaggio di risultare facilmente comprensibile agli studenti, in quanto costruito graficamente anche mediante l'uso della carta millimetrata.

Il metodo può essere utilizzato anche nella ricerca di un'approssimazione del numero trascendente π , facendo misurare agli studenti, con le relative incertezze, i rapporti tra la circonferenza di diversi rotoli di cartone con la lunghezza dei loro diametri e graficando il tutto con software o carta millimetrata (Agliolo Gallitto, 2016)

2.2 - Regressione lineare con metodo dei minimi quadrati

Un approccio più rigoroso, ma oggettivamente più complesso da presentare in una classe è quello della ricerca della retta di regressione con il metodo dei minimi quadrati.

Una prima pubblicazione sul metodo risale al 1805 ed è dovuta al matematico Legendre al quale si deve anche l'uso dei termini "minimi quadrati". Come spesso accade nella storia della matematica, l'attribuzione della paternità è contesa con un altro illustre matematico, contemporaneo di Legendre, Carl Friederich Gauss che pubblicò un lavoro sul medesimo tema nel 1809, ma ne rivendicò l'avvio dei lavori al 1795.

Il nome regressione è invece dovuto a F. Galton che, in studi su dati biologici, osservò che figli di genitori con altezza sopra la media avevano ancora un'altezza sopra la media, ma più prossima alla media stessa. Tale fenomeno, denominato da Galton regressione verso la media, venne poi esteso ad altri studi statistici.

Per avvicinare gli studenti al metodo dei minimi quadrati, si suggerisce di evitare inizialmente approcci eccessivamente formali e di favorire invece l'esplorazione dei dati raccolti, al

fine di costruire insieme ad essi la funzione obiettivo da minimizzare.

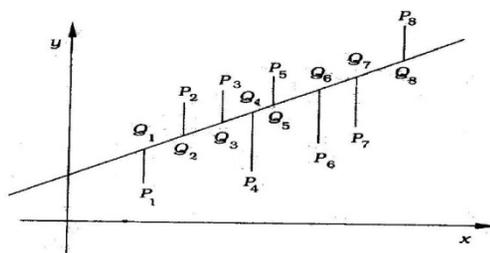


Fig. 5 – Rappresentazione grafica dei residui

Data una nuvola di dati, si propone agli studenti di tracciare quella che essi ritengono essere la miglior retta interpolante. Da tale rappresentazione si può far nascere una discussione sui residui¹ e sulla necessità di rendere minima una certa quantità per ottenere una retta più prossima ai dati.

$$r_i = \begin{cases} > 0 & \text{punto al di sopra della retta} \\ < 0 & \text{punto al di sotto della retta} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

E' interessante notare il processo di costruzione della funzione da minimizzare, in quanto gli studenti sono indotti inizialmente a credere che la somma dei residui possa essere la funzione cercata. Dopo aver accettato l'idea che i residui, essendo positivi e negativi, potrebbero avere somma nulla senza per questo ottenere la retta di best fit, spesso gli studenti tendono a immaginare di risolvere il problema passando alla somma dei moduli dei residui. La non derivabilità della

¹ Per residuo si intende la differenza tra l'ordinata del dato sperimentale e l'ordinata del punto sulla retta avente medesima ascissa.

funzione valore assoluto porta infine alla costruzione della funzione obiettivo corretta da minimizzare, data dalla somma dei quadrati dei residui (Impedovo, 2006).

$$F(m; q) = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2 \quad (2.2.2)$$

Un secondo ostacolo concettuale che rende complessa la trattazione della retta dei minimi quadrati in una secondaria di II grado, riguarda il modo in cui tradizionalmente si affronta la ricerca del minimo di una tale funzione. Essendo una funzione di due variabili, vanno infatti rese nulle le derivate parziali di tale funzione, al fine di ottenere un sistema di due equazioni in due incognite in m e q .

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2}{\partial m} = -2 \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i - m \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i q \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2}{\partial q} = -2 \left(\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i - nq \right) = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Per ovviare alla oggettiva difficoltà presente in tale metodo si può proporre un approccio alternativo nel quale la funzione da minimizzare, $F(m; q)$, venga riguardata una volta come funzione della sola variabile m , mantenendo q come parametro, e in un secondo momento come funzione della sola variabile q , mantenendo m come parametro.

$$\begin{aligned} F(m; q) &= \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2 = \\ &= \sum x_i^2 m^2 - 2 \left(\sum x_i y_i - \sum x_i q \right) m + \text{termine noto} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

In tal modo lo studio si ridurrà semplicemente alla ricerca delle coordinate del vertice di una parabola come nella 2.2.5, argomento alla portata di tutti gli studenti di una scuola secondaria di II grado.

$$x = -\frac{b}{2a} \quad m = \frac{(\sum x_i y_i - \sum x_i q)}{\sum x_i^2} \quad (2.2.5)$$

Da tale relazione si ottiene infine una delle equazioni già ritrovate nella 2.2.3:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - m \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i q = 0 \quad (2.2.6)$$

In modo analogo, mantenendo m come parametro, si ottiene

$$\begin{aligned} F(m; q) &= \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - m x_i - q)^2 = \\ &= \sum 1 q^2 - 2 \left(\sum y_i - \sum x_i m \right) q + \text{termine noto} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Da cui si ricava

$$q = \frac{(\sum y_i - \sum x_i m)}{n} \quad (2.2.8)$$

E dunque

$$\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i - nq = 0 \quad (2.2.9)$$

Il sistema lineare formato dalle equazioni 2.2.6 e 2.2.9 permette di giungere alla determinazione del coefficiente angolare della retta dei minimi quadrati, come mostrato nella 2.2.10.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{D} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\
 &= \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \frac{\sum y_i}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}
 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Dividendo infine per n l'equazione 2.2.9, si può far osservare agli studenti che il baricentro della nuvola di dati passa per la retta dei minimi quadrati cercata, che si può dunque scrivere nella forma:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \tag{2.2.11}$$

Come approccio didattico a carattere esplorativo, si segnala l'attività "Cosa dicono ... le rette?" progettata dai prof. Baruzzo, D'Arpino e Ranzani per il Piano [M@t.abel](#) e disponibile sul sito INDIRE Scuola Valore.

3 - Qualche osservazione sulla correlazione

In attività sulla regressione lineare non deve mai mancare un momento di riflessione sulla correlazione tra le variabili, anche al fine di sviluppare una visione critica degli studenti di fronte ad una serie di dati e sull'analisi talvolta superficiale

che di essi viene fatta anche da quotidiani d'informazione o siti web.

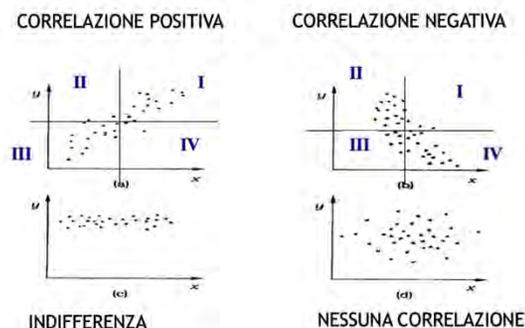


Fig. 6 – Esempi di correlazioni

Partendo da una nuvola di dati (fig. 6), si può proporre agli studenti di valutare in che modo essi si distribuiscono rispetto ai valori medi delle due variabili, far riflettere sul segno degli scarti e giungere così a costruire insieme l'espressione della covarianza.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (3.1)$$

Tale indice è però dipendente dal numero di dati ed è dunque semplice far intuire agli studenti che risulta preferibile lavorare con indici che non varino al variare del numero di dati, introducendo in tal modo la covarianza, anche nella sua forma semplificata.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (3.2)$$

Al fine di valutare la bontà della correlazione, si introduce dunque il coefficiente di correlazione lineare di Bravais - Pearson, un indice normalizzato che ha lo stesso segno della covarianza, in quanto ottenuto come rapporto tra la covarianza stessa e il prodotto delle deviazioni standard delle due variabili.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (3.3)$$

Una buona correlazione positiva non è però sempre indicatore di una reale relazione di causa - effetto tra le variabili analizzate. In generale, è consigliabile essere cauti nell'affermare che esiste una relazione causa-effetto fra due variabili, soltanto perché sono associate fortemente. Una forte correlazione non implica necessariamente un rapporto di causalità. (Moore, 2013)

Si potrebbe far osservare agli studenti che in un certo periodo dell'anno il numero di gelati venduti e il numero di incendi boschivi abbiano un forte indice di correlazione, ma chiunque converrebbe che la vendita di gelati non possa essere causa degli incendi. Tale esempio è tipico di quelle situazioni in cui tra le due variabili analizzate esiste una *variabile nascosta* fortemente correlata con entrambe, nello specifico la temperatura stagionale, ma la cui osservazione viene erroneamente trascurata nell'analisi dei dati.



The high correlation between ice-cream sales and shark sightings is finally explained.

Fig. 7 – Vignetta umoristica tratta dal sito web www.causeweb.org

Altro errore da evitare è la tentazione, spesso amata dalla comunicazione di massa, di estrapolare la tendenza lineare trovata a dati non direttamente osservati. Lo stesso Moore osserva che queste previsioni sono per lo più imprecise, in quanto poche relazioni sono lineari per tutti i valori di x ed è dunque preferibile non estendere la correlazione lineare al di fuori del range di dati ottenuti sperimentalmente.

Tali riflessioni, condotte anche con il ricorso a vignette umoristiche (Fig. 7), costituiscono una valida attività di Educazione Civica per educare gli studenti alla consapevolezza nella lettura e nell'interpretazione dei dati e alla capacità di discernere informazioni attendibili da altre che non lo sono, ma hanno la pretesa di esserlo su basi pseudo-scientifiche.

4 – Tools digitali come artefatti di mediazione

Per l'analisi della correlazione e l'esplorazione delle proprietà della retta dei minimi quadrati esistono alcuni tools digitali che favoriscono l'acquisizione di significato e

permettono la manipolazione attiva delle caratteristiche matematiche prese in esame.

La costruzione di significati in ambito laboratoriale è strettamente legata all'uso degli artefatti scelti e risiede essenzialmente negli scopi per i quali ogni singolo strumento viene utilizzato. Ognuno di essi ha un suo proprio potenziale semiotico che può essere messo in luce da una corretta progettazione delle attività (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti & Maffia, 2018).

Per una più chiara comprensione della minima somma dei quadrati, l'applicazione della PhET Colorado University risulta particolarmente efficace, in quanto permette agli studenti di costruire una propria retta di best fit su una nuvola di dati e di confrontarla poi con il modello matematico, *visualizzando* i quadrati costruiti sui residui e il valore della somma così ottenuta.

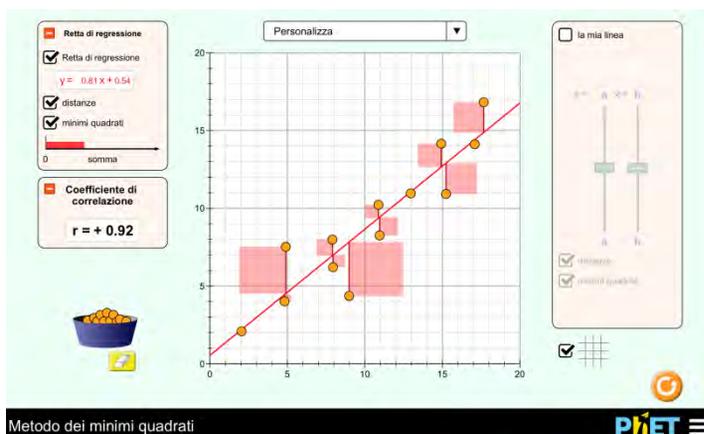


Fig. 8 – Tool che favorisce l'esplorazione della somma dei quadrati dei residui e del suo valore minimo

Il ricorso alla visualizzazione è certamente più efficace della sola valutazione analitica di tale proprietà, in quanto coinvolge aspetti esplorativi di percezione visiva e fisica, utili nel passaggio dal concreto all'astratto.

L'applicazione digitale raggiungibile al sito <http://www.shodor.org/interactivate/activities/Regression/> rappresenta invece un utile strumento per esplorare il ruolo degli outliers in una serie di dati raccolti.

Aggiungendo ed eliminando punti dalla nuvola, si potrà facilmente notare che la presenza di outliers con una elevata variazione sulla variabile x produrrà un maggior scostamento del valore della pendenza della retta di regressione rispetto al coefficiente angolare della medesima retta valutata eliminando gli outliers in questione (Fig. 9). La retta di regressione tende infatti con più facilità ad essere influenzata in modo significativo da quelle osservazioni che possiamo considerare outlier in direzione della x (Moore, 2013). Tali outliers verranno pertanto considerati *influenti*.

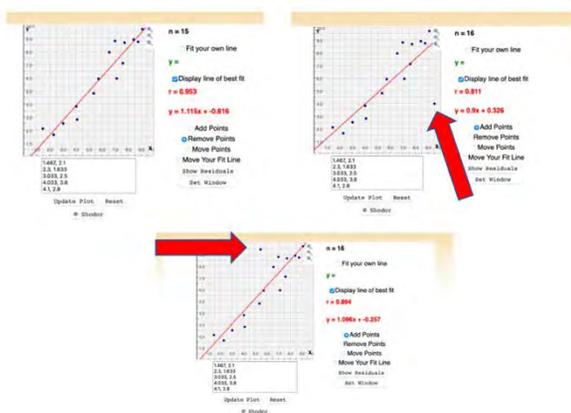


Fig. 9 – Tool utile per esplorare il ruolo degli outliers

Nel caso di outliers con una maggiore variazione sulla variabile y , i residui saranno più elevati, ma la variazione del coefficiente angolare risulta spesso meno evidente. Ciò porterà anche ad una riflessione sul ruolo della varianza della variabile x nel calcolo del coefficiente angolare della retta di regressione, come si osserva nella 2.2.11.

In un'ottica di gamification, si suggerisce invece l'utilizzo del tool <http://guessthecorrelation.com> sviluppato da Omar Wagih nel 2016 presso l'Istituto Europeo di Bioinformatica, con lo scopo di studiare la percezione umana nell'analisi di una correlazione tra variabili in grafici a dispersione. Tale videogioco può essere introdotto in contesto scolastico come utile strumento di *engage* e per allenare lo studente a riconoscere il corretto coefficiente di correlazione, evitando sottostime o sovrastime a causa di valori anomali nei dati.

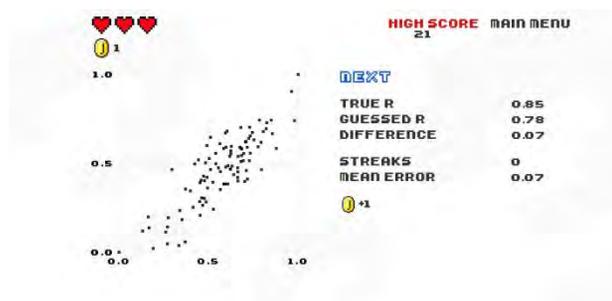


Fig. 10 – Guess the correlation – video game didattico

Infine, è importante ricordare che nella pratica didattica del laboratorio di fisica risulta molto utile e semplice far costruire agli studenti rette di regressione con l'uso di Fogli di Calcolo o di calcolatrici grafiche che restituiscono anche il valore del coefficiente di determinazione r^2 (Impedovo, 2006). Le calcolatrici grafiche sono state peraltro inserite a pieno titolo, a

partire dal 2017, tra gli strumenti utilizzabili nell'ambito degli Esami di Stato conclusivi del Secondo Ciclo.

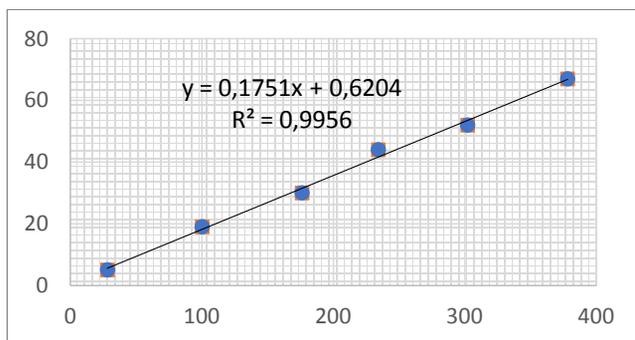


Fig. 11 – Retta di regressione con Excel

5 – Esperienze didattiche in ambito PLS

La ricerca di tendenze lineari nell'ambito della fisica è presente in tantissimi contesti laboratoriali. In particolare si riportano qui di seguito le esperienze vissute da alcune classi del Liceo Scientifico "C. Pisacane" di Padula in attività PLS².

Nella prima attività gli studenti hanno costruito il ciclo d'isteresi di un materiale ferromagnetico, misurando innanzitutto il campo magnetico all'interno di un solenoide percorso da corrente (Fig.12)³.

² Le attività del Piano Lauree Scientifiche citate sono state svolte negli anni 2019/20 e 2021/22 in collaborazione con il Dipartimento di Fisica "E. Caianiello" dell'Università di Salerno.

³ La retta di regressione ottenuta è stata realizzata con l'uso del software OriginLab versione Pro, messo a disposizione dal laboratorio di circuiti lineari a bassa ed alta frequenza del Dipartimento di fisica dell'Università di Salerno.

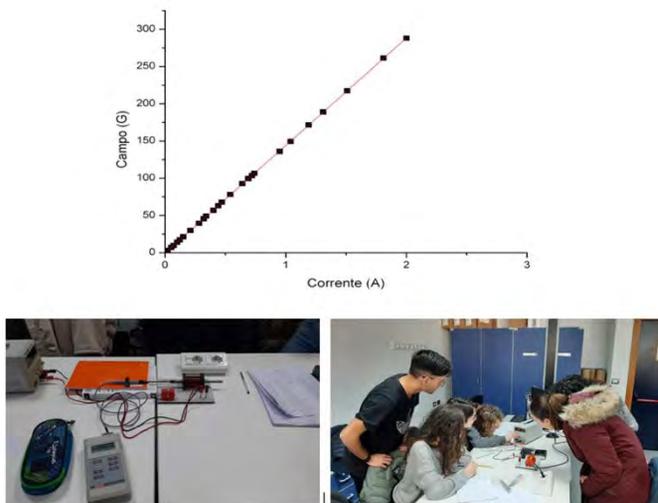


Fig. 12 – Attività di PLS sul magnetismo

Dopo aver collegato l'alimentatore alla bobina, gli studenti hanno inserito la sonda nella bobina, facendo in modo che l'estremità della prima si trovasse al centro della seconda. Partendo da zero, è stato poi aumentato il valore della corrente a intervalli di 0,2 A. Per ogni valore di corrente hanno poi registrato i valori di campo magnetico corrispondenti, prestando attenzione a non superare la soglia di 2 A per non danneggiare la bobina.

Tale esperienza, supervisionata dal Prof. Massimiliano Polichetti, ha permesso agli studenti di verificare sul campo il comportamento di alcuni materiali e in particolare di esplorare la dipendenza del campo magnetico generato in un solenoide al variare della corrente elettrica.

La seconda esperienza è stata invece realizzata nell'ambito del corso "Crisi della fisica classica. Fisica moderna" curato

dal Dott. Enver Faella. Gli studenti hanno misurato la costante di Planck con l'uso di diodi led di diversi colori.

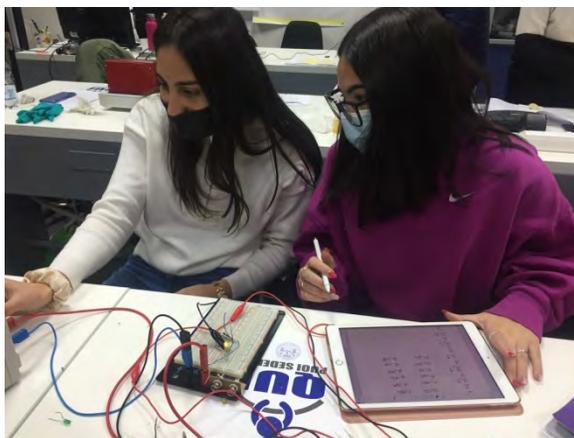
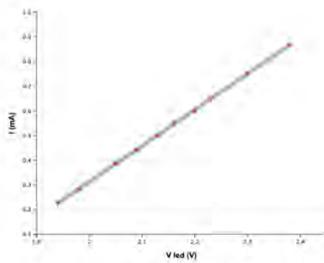


Fig. 13 – Misura della costante di Planck con diodi led

Dopo aver costruito il circuito costituito da una batteria, un resistore, un amperometro, un voltmetro e un diodo Led, è stata fatta variare la tensione del generatore, annotando tale valore in una tabella assieme ai valori di corrente e di tensione ai capi del LED. Gli studenti hanno poi riportato i dati in un diagramma tensione-corrente per visualizzare l'andamento della curva caratteristica e stimare il valore V_g tramite un fit lineare del tipo: $I = mV_{LED} + n$. Il valore di V_g , ottenuto dalla regressione lineare in corrispondenza di una corrente nulla, è stato poi utilizzato per ricavare, in modo indiretto, il valore della costante di Planck (fig. 14)⁴.

⁴ L'immagine riporta un estratto del lavoro realizzato dalle studentesse Lasalvia Chiara e Sorrentino Francesca della classe 5A del Liceo Scientifico "C. Pisacane" di Padula per il PLS nell'anno scolastico 2021/22 e mostra la



$$I = -2,605 + 1,459V$$

$$Vg = -\frac{n}{m} = -\frac{-2,605}{1,459} V = 1,785V$$

$$\frac{\Delta V_g}{V_g} = \frac{\text{erroren}}{n} + \frac{\text{errorem}}{m} = \frac{0,020}{2,605} + \frac{0,009}{1,459} = 0,0138$$

$$h = \frac{V_g e \lambda}{c} = \frac{(1,785)(1,602 \cdot 10^{-19})(690 \cdot 10^{-9})}{(2,998 \cdot 10^8)} J \cdot s = 6,584 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta V_g}{V_g} + \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2\lambda} = 0,0138 + 0,9890 = 1,0028$$

$$h = 6,584 \cdot 10^{-34} \pm 1,0028$$

Fig. 14 – Elaborazione dei dati raccolti

6 – Conclusioni

Dalle riflessioni suggerite in questo contesto, emerge chiaramente che l'analisi statistica dei dati è un luogo privilegiato in cui la matematica applicata e la fisica si incontrano, favorendo l'esplorazione e la scoperta di dati sperimentali e delle relazioni esistenti tra essi. Promuovere attività laboratoriali in cui gli studenti vengano coinvolti in prima persona nella costruzione di rette di regressione, sia mediante strumenti fisici che artefatti digitali, stimola lo sviluppo del senso di autoefficacia nei confronti della matematica e della fisica e favorisce una nuova visione delle due discipline, grazie anche ad un'azione sulla dimensione emotiva, fortemente stimolata dall'approccio esperienziale.

bontà dei dati raccolti, l'elevata correlazione individuata tra le variabili e la stima ottenuta del valore della costante di Planck, molto prossima al valore teorico.

Ciò, nell'ottica del modello tridimensionale dell'atteggiamento (Di Martino & Zan, 2010) risulta favorevole al miglioramento della propria percezione di competenza, generando reale motivazione all'apprendimento negli studenti coinvolti.

Bibliografia

AGLIOLO Gallitto A. (2016). *Introduzione al Laboratorio di Fisica: gli errori nelle misure sperimentali*. Palermo: Università degli Studi di Palermo.

BARTOLINI Bussi M. G. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematic Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

BORRA, S. & Di Ciaccio, A. (2014) *Statistica. Metodologie per le scienze economiche e sociali*, Terza edizione, McGraw-Hill.

CICCHITELLI G. & D'URSO P. & MINOZZO M. (2017) *Statistica: principi e metodi (Terza Edizione)*. Milano: Pearson Italia.

DI MARTINO P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27-48

IMPEDOVO M. (2006). "Regressione: un'ipotesi di percorso didattico", *Progetto Alice n. 19*

MARIOTTI M. A. & MAFFIA A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica, *Didattica Della Matematica. Dalla*

Ricerca Alle Pratiche d'aula, (4), 50 - 64.
<https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3>

MOORE, D.S. (2013). *Statistica di base*. Seconda Edizione, Apogeo.

Sitografia

BARUZZO, G. & D'ARPINO, A. & RANZANI, P. (2013) *Cosa dicono ... le rette?*, M@t.abel, INDIRE

<http://forum.indire.it/repository/working/export/6347/>

https://phet.colorado.edu/sims/html/least-squares-regression/latest/least-squares-regression_it.html

<http://www.shodor.org/interactivate/activities/Regression/>

<http://guessthecorrelation.com>



ARTE SCIENZA magazine

Alberto Macchi, Alessandra Spalletta, Anna Dell'Agata, Antonio Castellani, Armando Adolgho, Attilio Sommella, Claudia Mignone, Fulvio Guerrieri, Giorgio Parisi, Isabella de Paz, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Patrizia Audino, Piergiorgio Paterlini, Pierluigi Assogna, Sergio Pennisi, Stefano Torossi, Susanna Schimperia, Ugo Locatelli, Viola Spicuglia

PENSIERO CREATIVO: ARTE O SCIENZA?	ANIMA MUNDI E FUSIONE NUCLEARE	LE CASE DEGLI ASSASSINI	IL LATO UMANO DEI NUMERI PRIMI	LA SETE SA COS'E L'ACQUA	SCATENATORI DI PACE	ECOLOGIA: SIAMO ANCORA IN TEMPO
--	--------------------------------------	-------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------	---------------------------	---------------------------------------

Anno III - N. 4 - 2022 - Supplemento di *ArteScienza*
<http://www.assoculturaarte-scienza.it>
Direttore responsabile: Laura Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN Online 2359-1061 - Proprietà dell'A. P.S. "Arte o Scienza"

Un insegnamento integrato di matematica e fisica nella Scuola Secondaria di II grado?

Luigi Tomasi*

*Università di Padova; luigi.tomasi@unipd.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.099

Sunto: *L'articolo riassume quanto è stato presentato in una relazione al Convegno della Mathesis di Napoli su "La funzione della matematica nell'insegnamento della fisica, la funzione della fisica nell'insegnamento della matematica, 8-10 settembre 2022. Nell'articolo viene discusso il rapporto tra l'insegnamento della matematica e della fisica nella Scuola secondaria di II grado, con alcune considerazioni didattiche sulle due discipline, le diverse metodologie ed alcune criticità presenti nella Scuola di oggi. Nel seguito sono stati richiamati i curricula di matematica e fisica, con cenni anche alla prova scritta di matematica e fisica introdotta nel Liceo scientifico, per concludere infine con la presentazione di alcuni esempi di percorsi didattici per un insegnamento "integrato" delle due discipline.*

Parole Chiave: *matematica e fisica, Didattica della matematica e della fisica, formazione degli insegnanti di matematica e fisica, Scuola secondaria di II grado.*

Abstract: *The article summarizes what was presented in a report at the Mathesis of Naples Conference on "The function of mathematics in teaching physics, the function of physics in teaching mathematics, 8-10 September 2022. The article discusses the relationship between the teaching of Mathematics and Physics in secondary school, with some didactic considerations on the two disciplines, the different methodologies and some critical issues present in today's schools. The mathematics and physics curricula were recalled below, with*

references also to the written test of mathematics and physics introduced in the scientific high school, finally concluding with the presentation of some examples of educational paths for an "integrated" teaching of the two disciplines.

Keywords: *Mathematics and Physics, Didactics of Mathematics and Physics, teacher training of Mathematics and Physics, secondary school.*

1 - Introduzione

Questo contributo nasce dall'esperienza di insegnamento di matematica e fisica nel liceo scientifico dell'autore e anche da quella di supervisore di tirocinio e di tutor nella formazione degli insegnanti di matematica e fisica nella SSIS e nel TFA.

Il tema del Convegno è molto vasto e dibattuto, ossia se la matematica e la fisica debbano essere insegnate in modo "integrato" oppure -anche se non in modo "separato"- ciascuna in base alla propria epistemologia, alla propria storia e ai propri metodi, pur tenendo conto dei legami strettissimi e fondamentali che sono presenti in fisica per quanto riguarda l'uso del linguaggio, dei metodi e modelli della matematica.

Il tema del Convegno è molto vasto e difficile da approfondire anche perché sullo sfondo ci sono alcune domande -peraltro proposte agli organizzatori del Convegno- alle quali è altrettanto difficile rispondere:

-Che cos'è la matematica oggi?

-Che cos'è la fisica oggi?

-Cosa (e come) insegnare queste due discipline oggi, in una società in rapida evoluzione in cui le tecnologie informatiche, la rete e le applicazioni della scienza sono sempre più pervasive, in presenza di seri limiti ambientali per il pianeta?

2 - Osservazioni e considerazioni sull'insegnamento della matematica e della fisica nella Scuola secondaria

Nella scuola secondaria di II grado, anche quando è lo stesso docente a insegnare entrambe le materie, matematica e fisica rimangono spesso, di fatto, separate oltre che "sfasate" temporalmente per quanto riguarda gli argomenti che vengono svolti. L'insegnante talvolta "si sdoppia" (oserei dire, nel senso psicologico del termine...), quasi si trattasse di due docenti diversi, che propongono metodi differenti e che inevitabilmente esprimono anche diverse concezioni relative alle due materie, anche se gli allievi capiscono abbastanza presto quale delle due discipline il docente tende a "preferire"...

Anche gli allievi tendono ad apprendere, di conseguenza, le due materie in modo "separato", anche se hanno lo stesso docente di matematica e di fisica e, solo per fare un esempio, non sanno a volte riconoscere un'equazione di 2° grado quando si inizia lo studio del moto parabolico oppure quando l'incognita non è più indicata con x , ecc. Lo studio della fisica fa spesso emergere gli apprendimenti carenti che gli allievi hanno in matematica (forse, meno il viceversa) e anche i limiti che ha un insegnamento della matematica, che possiamo chiamare "purista" -che, a torto o a ragione, è prevalente- e che vede la matematica come qualcosa di astratto e lontano dalle applicazioni, studiata solo "per sé stessa", con centinaia di esercizi dove quasi non si vedono mai delle applicazioni e dove il più delle volte predominano le tecniche di calcolo, più che il metodo e il ragionamento matematico.

Un altro esempio riguarda anche i numeri che si usano in matematica negli esercizi e nei problemi, espressi in modo simbolicamente esatto, e la loro diversità dai “numeri della fisica”, sempre approssimati e che dovrebbero essere presentati con attenzione al numero di cifre significative, agli ordini di grandezza e alle incertezze di misura. Insomma in fisica, per gli allievi, sembra che si usi una “matematica diversa”, che possiamo chiamare “la matematica per la fisica”, molto più attenta agli aspetti concreti ed applicativi e alle approssimazioni numeriche, diversa da quella insegnata nel corso di matematica che viene proposta senza alcun riferimento al mondo reale e alle sue applicazioni.

Questa situazione, oltre che all’insegnamento, è anche dovuta ai libri di testo di matematica e di fisica –comunque scelti dagli insegnanti...- che sono impostati in modo “separato”. Solo recentemente, per la prova scritta “mista” di matematica e fisica al Liceo scientifico, stabilita nel 2019 dal Ministero dell’Istruzione, si è tentato di proporre, in alcuni libri di testo, qualche esempio “integrato”, in conseguenza anche delle “simulazioni” o esempi di II prova scritta d’esame proposte dal M.I. Ma certamente questa impostazione non può essere improvvisata all’ultimo anno di liceo scientifico o, addirittura, solo nella prova scritta dell’esame di Stato. Occorre, a parere dello scrivente, una didattica diversa delle due discipline e anche una formazione adeguata, diversa dall’attuale, degli insegnanti di matematica e di fisica, sia dal punto di vista dei contenuti che della loro didattica. Molto interessanti sono a tal proposito le proposte di attività che sono state sviluppate per il PLS (Piano Lauree Scientifiche) e

per la sperimentazione del «Liceo Matematico», che interessa ormai molte scuole secondarie di II grado.

Se pensiamo per esempio ai concetti di velocità istantanea, di accelerazione istantanea,... questi devono essere proposti inizialmente senza il calcolo differenziale, fin dai primi anni di scuola superiore; ed è corretto che sia così. La fisica non deve essere sempre presentata con un uso intenso della matematica; tutto dipende dall'età e dalla preparazione degli allievi. Ricordo che alcuni progetti sperimentali di insegnamento della fisica (penso al mitico "PSSC" degli anni Sessanta del secolo scorso) usavano un linguaggio matematico ridotto al minimo, perché la fisica non deve essere ridotta a una pura applicazione della matematica e quindi non si può insegnare fisica come si insegna matematica, anche se ovviamente ci sono molti aspetti metodologici comuni.

Pertanto, la didattica della matematica è diversa dalla didattica della fisica, anche se ci sono dei fondamenti psicologici e pedagogici comuni, in particolare, oggi, il costruttivismo.

Per esempio, la fisica, essendo una scienza sperimentale, privilegia il metodo induttivo rispetto a quello deduttivo (che caratterizza la matematica) e gli esperimenti. L'uso di modelli matematici è fondamentale ed è una parte importante - qualcuno dice sostanziale- della fisica, ma si può proporre solo se gli allievi hanno una conoscenza preliminare di alcuni argomenti di matematica che costituiscono un bagaglio fondamentale per la fisica; possiamo citare, per esempio, i grafici, il modello lineare, il modello quadratico, la trigonometria, la scrittura dei numeri sotto forma

esponenziale; le cifre significative, la misura e le incertezze di misura, ecc.

Le leggi della fisica devono essere espresse in linguaggio matematico. Lo studio della fisica è fondato sul metodo sperimentale che, possiamo dire, fu introdotto da Galileo nel Seicento. Per capire un fenomeno fisico è necessario porsi nella situazione più semplice possibile, eliminando gli aspetti accessori. A una legge fisica ci si arriva con l'intuizione, il ragionamento e con una serie di prove sperimentali. Alla fine del processo, in circostanze a volte fortunate, si arriva ad immaginare ed indurre una legge fisica. Il processo di induzione delle leggi della fisica cerca di risalire dunque dagli effetti alle cause dei fenomeni.

Questo processo non è fondato solo sulla logica, come in matematica, ma è affidato principalmente all'intuizione, guidata e sostenuta dai fatti osservati e anche da «una buona teoria». Una volta in possesso di una legge fisica è necessario ricavarne tutte le possibili conseguenze, con un processo deduttivo, logico - analogo a quello della matematica - e verificare per ciascuna se è vera o falsa.

Alcuni concetti però, nell'insegnamento, rimangono purtroppo confinati nei rispettivi ambiti, anche quando è lo stesso docente a insegnare entrambe le materie nella stessa classe. Pensiamo, per esempio, al concetto di vettore e al calcolo vettoriale, al prodotto scalare e al prodotto vettoriale. Nella scuola secondaria questi concetti solitamente rimangono confinati nella fisica e non sono utilizzati in matematica, dove potrebbero servire per introdurre in modo più generale la geometria analitica, in particolare quella dello spazio. Nella scuola secondaria di II grado in matematica i vettori sono

scarsamente utilizzati, al contrario di quel che gli studenti incontreranno all'Università nei corsi di studio scientifici e tecnologici in cui questo concetto è al centro dei corsi di studio di matematica del I anno, in particolare quelli di Geometria. Questi corsi sono fondati sull'algebra lineare e di solito creano problemi agli studenti del I anno di università, perché sono molto diversi dal modo, oltre che dai contenuti, in cui si insegna matematica nella Scuola Secondaria di II grado.

3 - La formazione degli insegnanti di “matematica e fisica”: dagli anni Sessanta del secolo scorso a oggi

Un tempo in Italia esisteva un corso di laurea in matematica e fisica. Agli inizi degli anni Sessanta del secolo scorso si è deciso di abolire questo corso e di separare i due corsi di laurea, con l'idea che la matematica e la fisica richiedevano, già da allora, una formazione specifica molto approfondita e specializzata. Inevitabilmente, si è quindi andati verso una “separazione” più netta tra la preparazione in matematica e quella in fisica e questo ha avuto delle ripercussioni anche nella formazione degli insegnanti.

Si tenga anche presente che in quegli stessi anni si andava diffondendo in Italia, come oltralpe qualche anno prima, il bourbakismo, ossia un'impostazione molto astratta della matematica, separata dalla fisica e lontana dal mondo reale, fondata sull'uso del linguaggio della teoria degli insiemi e sullo studio delle strutture algebriche, topologiche e d'ordine, con una riduzione molto netta della geometria, ricondotta all'Algebra lineare e in particolare alla struttura di spazio

vettoriale. Questa impostazione, nata in Francia negli anni Cinquanta del secolo scorso, si è poi diffusa provocando non poche critiche e anche fallimenti didattici. Possiamo per esempio citare la radicale critica di V.I. Arnold (1937-2010), uno dei fisico-matematici più importanti dell'ultimo secolo, che in una sua conferenza del 1997 ha affermato in modo paradossale:

Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.

Sul bourbakismo, anche se non lo nomina esplicitamente, Arnold aggiunge:

In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudomathematics to their students, then to schoolchildren (forgetting Hardy's warning that ugly mathematics has no permanent place under the Sun). Since scholastic mathematics that is cut off from physics is fit neither for teaching nor for application in any other science, the result was the universal hate towards mathematicians both on the part of the poor schoolchildren (some of whom in the meantime became ministers) and of the users. (V.I. Arnold, On the teaching of math, conferenza tenuta a Parigi, Palais de la Découverte, 1997, reperibile in Internet).

Dobbiamo tuttavia constatare che oggi, anche in conseguenza di quelle scelte avvenute nel secolo scorso, gli insegnanti di “matematica e fisica” ricevono (in Italia)

formazioni disciplinari abbastanza diverse a seconda del corso di laurea. Ad insegnare matematica e fisica (classe di concorso A027, ex A049) ci sono i laureati in matematica, laureati in fisica e anche in altri corsi di laurea. C'è chi nella laurea fa molti più corsi di matematica rispetto a quelli di fisica, chi molti più corsi di fisica, e anche chi non ne fa abbastanza in un ambito oppure nell'altro, con la necessità in seguito di recuperare dei crediti per poter partecipare ai concorsi a cattedre.

Un'esperienza particolarmente positiva nella formazione degli insegnanti di "matematica e fisica" è stata fatta nelle SSIS (Scuole universitarie di Specializzazione per l'Insegnamento Secondaria, post-laurea, di durata biennale, con una collaborazione tra Università e Scuola), ma poi abolite, probabilmente perché ritenute di una durata troppo estesa (2 anni), in seguito all'introduzione del 3+2 (triennale e magistrale) nei corsi di laurea scientifici.

Attualmente si sente molto la mancanza delle SSIS o del TFA-corso universitario di Tirocinio Formativo Attivo, anche questo abolito dopo pochissimi anni di funzionamento. Per l'insegnamento di entrambe le materie, occorrerebbe infatti una formazione docenti adeguata e maggiormente integrata tra matematica e fisica, sia universitaria che didattica, rispetto a quel che avviene oggi. Oggi sappiamo che per i concorsi di "matematica e fisica" (Classe di concorso A027, ex-A049) occorre -ed è corretto che sia così- avere un certo numero minimo di crediti formativi universitari (CFU) di matematica e altrettanti di fisica. In alcuni concorsi a cattedre, per es. quello del 2016, per la classe di "matematica e fisica" occorreva superare due concorsi, uno per matematica-(classe

A026) e uno per fisica (classe A020). L'ultimo concorso a cattedre (2022) ha invece ristabilito una prova scritta comune di matematica e fisica, con 50 domande a risposta multipla, 25 di matematica e 25 di fisica, e di una prova orale. Attualmente (2022) non esiste più una scuola universitaria post laurea dove avvenga la formazione degli insegnanti di Scuola secondaria e i neolaureati interessati all'insegnamento nella Scuola secondaria non sanno quale percorso devono seguire per poter insegnare, oltre a sostenere alcuni esami attinenti alla didattica, presenti a volte nei corsi di laurea magistrale di matematica e di fisica.

4 - Alcuni cenni e riferimenti storici per un insegnamento integrato di matematica e fisica

Storicamente la fisica, con Galileo, è nata strettamente legata alla matematica: basti pensare alla Rivoluzione Scientifica del Seicento (Galileo, Cartesio, Newton...), agli sviluppi della fisica classica fino alla Relatività, agli sviluppi della fisica moderna e ancor più oggi. Il celebre passo di Galileo, molto citato, ha costituito in qualche modo un "programma" per la Rivoluzione scientifica:

La filosofia [naturale, ossia la fisica] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente

per un oscuro laberinto. (Galileo Galilei, Il Saggiatore, 1623, cap. 6).

Si noti che per Galileo, in questo celebre passo, la matematica è sostanzialmente la geometria. Una lunga tradizione iniziata nell'antichità come studio della "misura della terra" e rafforzata con gli *Elementi* di Euclide, ci tramanda una geometria fortemente radicata nell'esperienza. In effetti, il rapporto tra geometria e mondo fisico è molto stretto e rappresenta uno degli aspetti salienti che la caratterizzano e che rappresenta un momento fondamentale dell'apprendimento di tale disciplina.

Riportiamo alcune citazioni sul rapporto tra matematica e fisica e, più in generale, con il mondo reale.

... il difetto dello spirito matematico [...] è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile strumento dialettico (F. Enriques, 1906).

Una citazione da Einstein:

Colui che nella prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti alla geometria euclidea non è nato per fare lo scienziato teorico (da una conferenza di Einstein del 1933).

Citazione da Feynman (che per certi versi riprende la citazione di Galileo vista sopra):

A quelli che non conoscono la matematica è difficile percepire, come una sensazione reale, la bellezza; la profonda

bellezza della Natura. Se volete conoscere la Natura, apprezzarla, è necessario comprendere il linguaggio che essa parla. (Richard P. Feynman)

Il legame tra matematica e fisica è strettissimo e indissolubile, ma occorre dire che si tratta di discipline diverse, che non si possono confondere. La fisica ha dato origine a intere teorie matematiche e usa continuamente strumenti e metodi matematici. Tuttavia oggi la matematica è cambiata radicalmente e non ha legami stretti soltanto con la fisica. La matematica è sempre più trasversale ed ha legami con moltissime altre discipline. Basti pensare ai legami della matematica con l'Informatica, l'Economia, la Statistica, ecc. La matematica offre metodi, strumenti e modelli per tante discipline e ovviamente ha ricevuto apporti da tutte queste. Sono nate nuove teorie, nuovi rami del sapere matematico, alcuni anche con radici antiche...; basti pensare per esempio alla teoria dei grafi, alla crittografia, ai modelli probabilistici; alla statistica matematica.

5 - Qualche cenno storico ed epistemologico sull'insegnamento della matematica e fisica

Gli organizzatori di questo Convegno hanno posto come arco di tempo di riferimento l'ultimo secolo e mezzo di storia della matematica e della fisica. Si tratta di un periodo vastissimo, che ha rivoluzionato completamente sia la matematica che la fisica, oltre alla conoscenza scientifica in generale.

In particolare cento e cinquanta anni fa correva l'anno 1872, che è stato un anno mirabile per la Storia della matematica: sono nate le teorie dei numeri reali (Cantor, Dedekind, Meray; la teoria degli insiemi. Al 1872 risale anche il "Programma di Erlangen" di Klein, ecc. Ma poi seguono altri momenti e snodi che andrebbero sottolineati e studiati per la loro importanza:

1899: *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

1900: I problemi di Hilbert

1900: fisica quantistica

1905: *annus mirabilis* di Einstein

1916: Relatività generale di Einstein

1935: nasce il gruppo Bourbaki

1940 circa: viene costruito il primo computer elettronico...

.....

Sulla importanza della matematica per la fisica, è opportuno citare il breve articolo di Wigner, *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*. Si tratta di un piccolo saggio - pubblicato nel 1960 - del fisico americano Eugene P. Wigner (1902 - 1992), Premio Nobel per la fisica nel 1963. Questo saggio ha suscitato molte discussioni di tipo epistemologico sul perché la matematica sia così efficace per esprimere le leggi della fisica (e della Natura in generale).

Una critica puntuale alle tesi sostenute da Wigner si trova in un recente libro di Gabriele Lolli, *matematica in movimento*, dove si afferma:

I rapporti tra matematica e teorie fisiche si dovrebbero considerare oggi in termini di cooperazione, non in termini di prestito, furto o comunque di priorità, con "un prima" e "un dopo". Tali rapporti si spiegano meglio considerando la

diversa concezione della natura dei modelli matematici nel passaggio da periodo classico a quello contemporaneo. Oggi la matematica utilizzata, sia nei domini tradizionali sia nei nuovi campi, si presenta soprattutto come costruzione di modelli. (G. Lolli, matematica in movimento, 2022, pp. 223-224)

Molte delle riflessioni richiamate in precedenza sono state discusse nel 2019 quando per il liceo scientifico è stata proposta dal Ministero dell'Istruzione la prova "mista" di matematica e fisica, prova che non si sa se verrà ripristinata nell'anno scolastico 2022-2023, dopo gli ultimi anni emergenziali (dal 2020 al 2022) a causa della pandemia. La prova "mista" di matematica e fisica ha suscitato molte discussioni tra gli insegnanti e tra le associazioni degli insegnanti di matematica e di fisica.

6 - Alcuni temi che si prestano a un insegnamento "integrato" di matematica e fisica

Nella parte finale di questo contributo propongo un cenno ad alcuni argomenti che, anche con l'aiuto del software (soprattutto GeoGebra), si prestano particolarmente per comprendere lo stretto legame tra matematica e fisica, in cui si vede quale può essere la "funzione della fisica nell'insegnamento della matematica" e, in alcuni casi, il viceversa. In realtà gli argomenti da proporre sarebbero innumerevoli perché ogni argomento di fisica si presta a un collegamento con matematica; ma volendo scegliere, accennerei a qualcuno dei seguenti, che ritengo

particolarmente importanti, anche nella storia della matematica e della fisica:

- Numeri, la misura in fisica (e in matematica), approssimazioni, ordini di grandezza, incertezze di misura...
- Vettori, combinazioni lineari; spazi vettoriali (in 1, 2 e 3 dimensioni); prodotto scalare; prodotto vettoriale; i vettori (da usare anche in matematica!) geometria analitica del piano e dello spazio con l'uso dei vettori
- Cinematica; traiettorie, velocità, accelerazione, ecc. ; curve nel piano e nello spazio; curve definite in modo parametrico (ossia, vettoriale)
- Campo gravitazionale, coniche ed eccentricità; traiettorie
- La cinematica del punto, il calcolo differenziale e integrale; velocità istantanea e derivata; spazio percorso e integrale definito.
- Propagazione (rettilinea?) della luce e trasformazioni geometriche (similitudini, affinità, proiettività)
- Funzioni goniometriche (dal moto circolare alle funzioni goniometriche..., alle note musicali;
- Campi elettrici e campi magnetici (il contributo della matematica alla fisica... simmetrie dello spazio...; forza di Lorentz, campo elettrico e campo magnetico; traiettorie)
- Derivata e legge di Faraday-Neumann-Lenz (induzione elettromagnetica)
- Semplici equazioni differenziali (dalla fisica alla matematica e viceversa; l'equazione del moto,...)
- Relatività, trasformazioni di Galileo e di Lorentz; trasformazioni geometriche

- Lo spazio-tempo, spazio di Minkowski, geometrie non euclidee; geometria e gravitazione.
- Discussione su alcuni problemi e quesiti per la prova scritta di matematica-fisica al liceo scientifico del 2019.

7 - Conclusioni

Nell'articolo si è fatto riferimento alle *Indicazioni nazionali* (2010), ai QdR-*Quadri di riferimento* (2018) per la prova scritta di matematica, di fisica e di matematica-fisica e alle discussioni emerse -tra Matematici e Fisici- in seguito all'introduzione della prova scritta "mista" di matematica e fisica al Liceo Scientifico (2019). Le *Indicazioni nazionali* di matematica e di fisica (e i relativi QdR-quadri di riferimento per la prova scritta d'esame) propongono obiettivi ed argomenti che sembrano a volte troppo impegnativi, soprattutto se si tiene conto dei relativi tempi e orari vigenti. È opportuno ricordare che matematica ha in totale 22 ore (5-5-4-4-4) nel quinquennio di Liceo scientifico, mentre fisica ha 13 ore (2-2-3-3-3).

È molto importante stabilire collegamenti tra matematica e fisica, ma anche della matematica con altre ambiti.... Ci sono molti argomenti che si prestano a un insegnamento integrato. Ma occorre tener conto che è necessario un tempo adeguato per poter sviluppare un insegnamento integrato di matematica e fisica. Una didattica di questo tipo non si può improvvisare o peggio proporre solo nell'ultimo anno di liceo scientifico in vista della prova scritta d'esame.

Bibliografia

Arnold V.I., *On teaching math*, 1997:

www.uni-muenster.de/Physik.TP/~munsteg/arnold.html

Barrow J.D. (1998). *Perché il mondo è matematico*, Bari: Laterza.

Besson U. (2015). *Didattica della fisica*, Roma: Carocci.

Bettini A. (1995). *Meccanica e termodinamica*, Padova: Cleup.

Bettini A. (1991). *Elettromagnetismo*, Padova: Cleup.

Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. (2007). *La fisica di Feynman*, 4 voll., Bologna: Zanichelli.

Lolli G. (2022). *matematica in movimento*, Torino: Bollati Boringhieri.

Wigner E.P. (2017). *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*, Milano: Adelphi.

Ministero dell'Istruzione, Prova scritta di matematica-fisica - Liceo Scientifico, giugno 2019 e «simulazioni».



Sull'entanglement

*Dai fondamenti della meccanica quantistica
alle applicazioni innovative*

Giuseppe De Riso*, Marco Lo Schiavo**,
Lidia Truda***, Canio Noce****

*Università degli Studi di Salerno; e_mail: g.deriso4@studenti.unisa.it

**Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiello, Università degli Studi di
Salerno; e_mail: mloschiavo@unisa.it

***Università degli Studi di Salerno; e_mail: l.truda@studenti.unisa.it

****Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiello, Università degli Studi di
Salerno; e_mail: cnoce@unisa.it



DOI: 10.53159 /PdM(IV).v4n4.100

Sunto: *L'entanglement è un concetto peculiare della fisica quantistica e che si sta affermando come elemento fondamentale delle innovative tecnologie quantistiche. In pratica, quando una coppia particelle diventa entangled, queste rimangono collegate anche se separate da grandi distanze e questa caratteristica viene ampiamente utilizzata nelle moderne applicazioni della meccanica quantistica. Inoltre, sono stati recentemente riportati diversi test sperimentali che suggeriscono una revisione critica del concetto di entanglement, sostenendo che questa quantità può essere annoverata a giusta ragione tra i concetti di base della meccanica quantistica.*

Parole Chiave: *Entanglement; crittografia quantistica; quantum computing.*

Abstract: *The entanglement is a peculiar concept of quantum physics, also emerging as a fundamental element of innovative quantum technologies. Specifically, when a particle pair becomes entangled, the single particles remain*

connected even when separated by large distances, and this feature is widely used in modern applications of quantum mechanics. Moreover, several experimental tests recently reported suggest a critical review of the concept of entanglement, arguing that this quantity can be listed among the basic concepts of quantum mechanics.

Keywords: *Entanglement; quantum cryptography; quantum computing.*

1 - Introduzione

L'Accademia Reale Svedese delle Scienze ha attribuito il Premio Nobel per la Fisica di quest'anno a Alain Aspect, John F. Clauser e Anton Zeilinger *"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"* [1].

Due dei vincitori, John Clauser e Alain Aspect, sono stati premiati per il lavoro che ha dato inizio a una nuova era, aprendo gli occhi della comunità fisica sull'importanza dell'entanglement e fornendo tecniche per la creazione, l'elaborazione e la misurazione di sistemi entangled in ambiti sempre più complessi e sbalorditivi [2]. Il lavoro sperimentale del terzo, Anton Zeilinger, si caratterizza per l'uso innovativo dell'entanglement, sia nella ricerca sugli aspetti concettuali della meccanica quantistica sia in contesti applicativi come la crittografia quantistica [3].

Nello specifico, Aspect, Clauser e Zeilinger hanno condotto esperimenti rivoluzionari utilizzando stati quantistici entangled, in cui due particelle si comportano come un'unica entità anche quando sono separate e collocate a grande distanza. I loro risultati hanno aperto la strada a una nuova tecnologia basata sull'informazione quantistica. In realtà, oggi

esiste un vasto campo di ricerca in ambito quantistico che comprende lo studio critico dei fondamenti della meccanica quantistica e, in un contesto applicativo, l'indagine su computer quantistici, reti quantistiche e comunicazioni sicure e criptate.

Un fattore chiave di questo sviluppo è il modo in cui la meccanica quantistica permette a due o più particelle di esistere in quello che viene chiamato stato entangled. In tale configurazione, ciò che accade a una delle particelle di una coppia entangled determina ciò che accade all'altra particella, anche se sono molto distanti tra loro.

Scopo della presente relazione è illustrare le attività di frontiera della meccanica quantistica, legate alle implementazioni e investigazioni dell'entanglement, visto come risorsa tecnologica. A tal fine, descriveremo cos'è l'entanglement utilizzando un semplice esempio che non richiede l'utilizzo di alcuna matematica superiore né la conoscenza di argomenti di fisica moderna particolarmente avanzati. Illustreremo, successivamente, i recenti risultati sui concetti base della meccanica quantistica nonché le applicazioni tecnologiche dell'entanglement che hanno favorito lo sviluppo di quella che viene ormai definita come la "seconda rivoluzione quantistica".

2 - L'entanglement: una semplice descrizione

Straordinario effetto, tipicamente quantistico, l'entanglement fu introdotto da Schrödinger in una recensione del famoso articolo sul paradosso EPR [4]. La traduzione

letterale di questo termine è “groviglio”, “intreccio” ed esprime in pieno l’essenza di questo fenomeno¹.

Infatti, con l’entanglement si intende un fenomeno fisico di correlazione a distanza tra sistemi, senza che ciò avvenga tramite scambio di particelle o generiche informazioni. In termini più formali si può affermare che, in determinate condizioni, due o più sistemi fisici rappresentano sottoinsiemi di un sistema più ampio il cui stato quantistico non è semplicemente descrivibile singolarmente, ma solo come un’unica entità, sovrapposizione di più stati.

Ciò implica che la misura di una generica grandezza fisica effettuata su uno dei sottosistemi determina simultaneamente e istantaneamente il valore della grandezza in esame anche per gli altri sottosistemi.

Per chiarire quanto detto può essere utile considerare il seguente esempio.

Consideriamo una grande sala da ballo in cui si esibiscono coppie di ballerini, distinguibili solo per il colore del loro abbigliamento, come riportato nella Figura 1.

Supponiamo, poi, che una coppia a caso esca dalla sala e i ballerini si dirigano in direzioni opposte, verso un posto di blocco (vedi Figura 2). Qui il controllo del ballerino a sinistra determina istantaneamente, con certezza, il sesso dell’altro ballerino della coppia. È evidente, infatti, che se al controllo si appura che il ballerino è un uomo, l’altro elemento della coppia è una donna e viceversa.

¹ Dal Cambridge Dictionary: *Entanglement, the condition of being wrapped and twisted together in a mass* (trad. la condizione di essere avvolti e attorcigliati insieme in una massa).



Fig.1- Coppie di ballerini.

Supponiamo, poi, che una coppia a caso esca dalla sala e i ballerini si dirigano in direzioni opposte, verso un posto di blocco (vedi Figura 2). Qui il controllo del ballerino a sinistra determina istantaneamente, con certezza, il sesso dell'altro ballerino della coppia. È evidente, infatti, che se al controllo si appura che il ballerino è un uomo, l'altro elemento della coppia è una donna e viceversa.



Fig. 2 - Checkpoint per “misurare” il genere della coppia.

In pratica, la proprietà di essere “coppia” fa sì che stabilire il sesso di uno dei due ballerini, inequivocabilmente, consente, senza effettuare misura, di stabilire il sesso dell’altro partner.

A questo punto, per completezza, occorre precisare che se si assume che la descrizione della meccanica quantistica sia completa, allora il risultato del controllo al posto di blocco porta alla conclusione che il genere dei due ballerini, nell’accezione di Einstein, può avere realtà simultanea. In altre parole, il genere del ballerino che non si trova al posto di controllo può essere stabilito con certezza, anche senza una misura.

Per Einstein questa conclusione è inaccettabile perché la meccanica quantistica attribuisce ai possibili risultati di una misura di una grandezza fisica una probabilità, nel caso non si effettui la misura. Nel nostro esempio concettuale, il genere del partner del ballerino “misurato” non è determinato tramite misura, ma non può che essere l’opposto di quello al posto di controllo. Quindi, siamo costretti a concludere, secondo Einstein, che la descrizione quantomeccanica della realtà fisica non è completa ed è necessario modificare, sostanzialmente, sia la base concettuale che quella matematica della meccanica quantistica.

Una possibile alternativa alla meccanica quantistica “ortodossa” esige, quindi, l’introduzione nella teoria variabili nascoste, non considerate, e che indicano quale risultato si deve ottenere in un esperimento. Negli anni ‘60, John Stewart Bell sviluppò una disuguaglianza che, in presenza di variabili nascoste, stabilisce la correlazione ed il limite superiore tra i risultati di un gran numero di misurazioni. Tuttavia, per tutti gli esperimenti realizzati fino ad oggi, la meccanica quantistica

“ortodossa” prevede una sistematica violazione della disuguaglianza di Bell, cosa sistematicamente verificata. Pertanto, la meccanica quantistica, così come oggi la conosciamo ed utilizziamo, risulta corretta.

3 - L'entanglement e il quantum computing

Per computazione quantistica o quantum computing si intende un tipo di computazione le cui operazioni riescono a sfruttare ed includere fenomeni intrinsecamente quantistici come la sovrapposizione, l'interferenza o l'entanglement. Le macchine che possono effettuare questo tipo di computazione sono i computer quantistici. Questi dispositivi risultano, spesso, essere estremamente efficaci per la risoluzione di problemi numerici la cui difficoltà computazionale aumenta esponenzialmente con il numero delle variabili in gioco e, dunque, nei casi in cui la risoluzione numerica risulti impraticabile a causa del tempo di computazione necessario per completare la simulazione. Si potrebbe dire che un computer quantistico, se opportunamente usato, può velocizzare incredibilmente la risoluzione numerica di un problema. Ad esempio, nel 2019 il quantum computer di Google completò in soli 200 secondi un calcolo così complesso che il più potente computer al mondo avrebbe risolto in circa 10.000 anni [5]!

3.1 -Come funziona la computazione quantistica e come è legato al concetto di entanglement

Per capire come quantum computer ed entanglement sono correlati dobbiamo considerare il più piccolo elemento di informazione nella computazione classica: il bit. Il bit può assumere, classicamente, due distinti valori: 1 (“acceso”), 0 (“spento”), quindi se abbiamo due bit di memoria avremo 4 possibili distinti metodi per occupare tale memoria (00,11,10,01). Per n bit di memoria avremo allora $\sqrt[n]{2^n}$ possibilità.

Nella computazione quantistica il bit, detto qubit, ossia *quantum bit*, non è più un numero ma un vettore rappresentabile come segue:

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questa fondamentale modifica alla base della computazione ha un effetto incredibile su tutto il resto. Prima di tutto, mentre nel caso classico una cella di memoria può essere occupata da un singolo e definito bit, una memoria quantistica potrà essere realizzata in infiniti modi, come sovrapposizione dei due qubit fondamentali:

$$|\psi\rangle := \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Si ha quindi che non solo è possibile avere lo stato “acceso” e “spento” ma anche uno stato indeterminato in cui si hanno entrambe le possibilità. Inoltre, due soli qubit possono dare luogo non a 4 configurazioni come nel caso classico ma a 16 possibili configurazioni differenti. Infatti, se abbiamo un

sistema con due qubit lo spazio geometrico in cui si opererà sarà il prodotto tensoriale dei due vettori. Ciò darà luogo alle 16 possibilità di seguito riportate:

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Fig. 3 - Possibili configurazioni ottenibili con due qubit.

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1000), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (0100), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1100);}$$

Fig. 4 - Corrispondenza tra qubit e sequenza di bit

Quindi n qubit daranno luogo a $\sqrt{2^{2n}}$ configurazioni possibili. È, dunque, evidente che la potenza di computazione del computer quantistico a parità di numero di bit è sostanzialmente maggiore: un problema con 16 possibili risultati è descritto al minimo con 4 bit o con 2 qubit.

In aggiunta, dal principio di sovrapposizione, ossia la somma di due stati è ancora un possibile stato come visto sopra per Ψ , e per la natura quantistica dei qubit il computer quantistico può lavorare su queste 16 combinazioni in contemporanea, mentre l'analogo classico deve lavorare con una possibilità alla volta.

3.2 - Entanglement e computazione quantistica

Consideriamo il terzo vettore della Figura 4. È evidente che non è esprimibile come semplice prodotto tra i due qubit iniziali, ma è uguale a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle).$$

In altri termini, i due qubit sono intrinsecamente accoppiati, ovvero sono entangled! Questa circostanza è vera per molti vettori della Figura 3 e ciò significa che molta dell'informazione aggiuntiva che si ha con la formazione quantistica è dovuta proprio agli stati entangled tra qubit.

Dal punto di vista pratico in un computer quantistico cambiare lo stato di un qubit entangled cambierà immediatamente lo stato del qubit accoppiato, come illustrato precedentemente, per cui l'entanglement migliora la velocità di elaborazione dei computer quantistici. Quindi, raddoppiare i qubit non raddoppierà necessariamente il numero di processi poiché l'intervento su un qubit fornirà informazioni anche su tutti i qubit ad esso accoppiati. Inoltre, studi di teoria della computazione dimostrano che l'entanglement consente ad un algoritmo quantistico uno speed-up esponenziale rispetto all'equivalente classico [6].

È interessante notare che tramite l'entanglement è possibile correlare uno scambio di informazione tra due utenti senza che un terzo possa copiarla o osservarla; infatti, una qualsiasi azione sul dato, perturba lo stato quantistico che lo descrive rendendo palese l'intrusione.

Infine, utilizzando l'entanglement è possibile scambiare con un opportuno circuito quantistico informazioni quantistiche

veicolate da fotoni, atomi, elettroni tra due utenti. Tale proprietà utilizzata per ridurre il consumo di energia dei computer quantistici che lavorano in parallelo consente anche di "teletrasportare" informazione [7].

4 - L'entanglement e la crittografia

La crittografia studia come inviare messaggi in modo tale che il contenuto possa essere letto solo dalle persone coinvolte nello scambio. Essa si divide principalmente in due categorie: la crittografia simmetrica o a chiave segreta e la crittografia asimmetrica o a chiave pubblica [8].

La crittografia simmetrica permette lo scambio di un messaggio criptato attraverso l'uso di una chiave segreta condivisa. Nonostante questa procedura porti ad algoritmi crittografici perfettamente sicuri da attacchi resta il problema di come distribuire la chiave tra le parti coinvolte prima dell'inizio del protocollo.

La crittografia asimmetrica risolve questo problema utilizzando una chiave pubblica per la criptazione del messaggio e una chiave privata per la decriptazione, eliminando il problema della distribuzione delle chiavi. La sicurezza si basa sulla difficoltà computazionale legata ad alcuni problemi matematici quali la fattorizzazione di numeri interi. Per questo motivo la crittografia asimmetrica è passibile di attacchi da parte di computer con sufficiente potenza di calcolo.

Come precedentemente detto, gli sviluppi della meccanica quantistica hanno permesso di ideare dispositivi innovativi, quali i computer quantistici. Questi oggetti, se efficientemente

implementati, promettono di risolvere problemi intrattabili tramite macchine classiche e rappresentano una seria minaccia per i protocolli crittografici asimmetrici attualmente in utilizzo. Incidentalmente, la meccanica quantistica è in grado di fornire anche una soluzione a questo problema consentendo di attuare protocolli intrinsecamente sicuri da attacchi. In particolare, è possibile ideare schemi noti come protocolli di Distribuzione Quantistica delle Chiavi (Quantum Key Distribution o QKD) che risolvono il problema classico della distribuzione delle chiavi.

La QKD è una procedura crittografica che permette di creare una chiave segreta casuale condivisa tra due persone, Alice e Bob, che inizialmente non condividono alcuna informazione. La chiave generata può essere successivamente utilizzata per criptare un messaggio tramite un cifrario One Time Pad.

I fenomeni quantistici alla base del funzionamento della QKD sono l'entanglement, il collasso della funzione d'onda e l'impossibilità di clonare uno stato senza perturbarlo [9]. Importante proprietà della QKD è che essa consente di individuare la presenza di origliatori che cercano di acquisire informazioni sulla chiave: ciò è conseguenza dalla natura quantistica del protocollo in quanto per ottenere informazioni sulla chiave è necessario eseguire delle misure che vanno a modificare lo stato iniziale del sistema, perturbandolo irrimediabilmente.

Tra i più promettenti protocolli di QKD vi sono quelli basati sul fenomeno dell'entanglement. Artur Eckert nel 1991 propose uno schema crittografico, denominato E91, che fa uso di stati entangled per la creazione di una chiave condivisa

[10]. Il protocollo E91 è implementato tramite l'utilizzo di coppie di fotoni polarizzati, equivalenti alle coppie di ballerini della sezione 2, e l'informazione è codificata negli stati di polarizzazione di quest'ultimi. La sicurezza del protocollo si basa sulla perfetta correlazione esistente tra gli esiti delle misure effettuate su coppie di particelle entangled. Infatti, un qualunque tentativo da parte di un origliatore di ottenere informazioni sulla chiave si traduce in una misura che distrugge la correlazione tra particelle introducendo incongruenze nei risultati.

Sono necessari due differenti canali di comunicazione per eseguire il protocollo, come rappresentato in Figura 5:

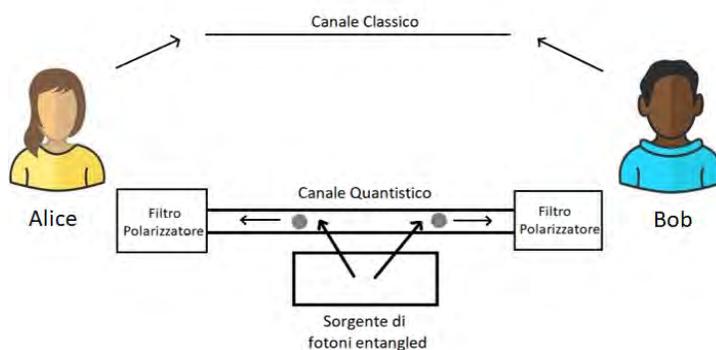
- un canale quantistico, passibile di intercettazione, per l'invio dei fotoni che trasportano l'informazione;
- un canale classico autenticato, passibile di intercettazione ma non di modifica del messaggio, per la comunicazione diretta tra Alice e Bob.

La prima fase del protocollo avviene tramite il canale quantistico attraverso i seguenti step:

- Alice e Bob scelgono tre basi tra loro non ortogonali per la descrizione dell'informazione. Le basi rappresentano le direzioni per la misura della polarizzazione² dei fotoni che trasportano l'informazione;
- Alice, Bob o una terza persona di fiducia creano uno stato entangled la cui struttura resta invariata per tutta la durata del protocollo;
- un fotone della coppia viene inviato ad Alice, l'altro a Bob.

² La polarizzazione dei fotoni equivale al genere dei ballerini.

In modo indipendente l'uno dall'altro essi effettuano una misura della polarizzazione del fotone utilizzando casualmente una delle tre basi concordate. Il primo ad effettuare la misura ottiene informazione sullo stato del fotone, che verrà poi interpretato come bit classico. Il processo di misura farà collassare il sistema entangled nello stato corrispondente.



Fi. 5 - Schema del protocollo E91.

A questo punto vi sono due possibilità:

- se la seconda persona ad effettuare la misura utilizza la stessa base usata per la prima, allora gli esiti saranno perfettamente correlati;
- se le due basi utilizzate sono differenti l'esito della seconda misura sarà casuale.

La seconda fase del protocollo avviene tramite il canale classico attraverso i seguenti step:

- Alice e Bob comunicano la sequenza di basi utilizzate per le misure, ma non i risultati ottenuti;

- quando le basi utilizzate sono uguali il risultato della misura può essere utilizzato come bit di informazione per generare una chiave, altrimenti il bit viene scartato.

Oltre alla creazione della chiave è possibile verificare praticamente la presenza di origliatori. Alice e Bob possono utilizzare il sottoinsieme delle coppie di fotoni misurate in basi differenti, e quindi scartate, per testarne la correlazione. Ciò può essere fatto utilizzando la disuguaglianza di Bell che risulta essere violata nel caso in cui le particelle sono entangled e rispettata altrimenti [11]. In quest'ultimo caso è possibile concludere che vi è stato un tentativo di intercettazione.

5 - L'entanglement e le basi concettuali della meccanica quantistica

Una descrizione concisa della meccanica quantistica può essere limitata all'introduzione dei concetti che sono alla base di questa teoria: la dualità onda-corpuscolo e il principio di complementarità di Bohr.

La dualità onda-corpuscolo, avvalorata dall'esperimento della doppia fenditura condotto dapprima su elettroni poi su altre particelle, prevede che tutte le particelle siano caratterizzate da una natura ondulatoria e corpuscolare.

L'esperimento fu realizzato sulla falsariga del ben noto esperimento di Young con la luce: una sorgente di elettroni, una barriera dotata di due fenditure e uno schermo su cui visualizzare l'immagine finale. In quanto particelle puntiformi, ci si aspettava di trovare una sorta di ombreggiatura sullo schermo in corrispondenza delle due

fenditure, una traccia lasciata dagli elettroni che oltrepassano la barriera, invece, si osservarono delle frange di interferenza, le stesse ottenute nel caso della luce.

Allo scopo di capire con l'utilizzo di rilevatori posti tra le due fenditure, quale fosse il percorso seguito da ogni singola particella, con grande sorpresa, le figure di interferenza scomparivano lasciando il posto ad una distribuzione di tracce localizzata nell'area delle due fenditure. Il motivo per cui non si apprezzano figure d'interferenza è dovuto al fatto che con questo tipo di esperimento si analizza l'aspetto corpuscolare delle particelle, per cui il comportamento ondulatorio scompare del tutto. Come conseguenza del principio di indeterminazione, non è possibile ottenere nello stesso momento l'informazione sul cammino percorso dall'elettrone e una figura di interferenza perché aspetti complementari riconducibili al dualismo onda-corpuscolo. Quanto detto è noto sotto il nome di principio di complementarità di Bohr, enunciato nel 1927 a Como durante un Congresso internazionale di fisica. Il principio, nella sostanza, afferma che il comportamento ondulatorio e corpuscolare sono due aspetti mutuamente esclusivi e complementari di ogni sistema quantistico.

Grazie a Wotters e Zurek, sul finire degli anni 70, è stato possibile dare una chiave di lettura diversa al concetto di dualità [12]. Nel loro approccio, ipotizzarono che il comportamento ondulatorio e quello corpuscolare non sono mutuamente esclusivi bensì quantità complementari in grado di descrivere a pieno le informazioni legate ad un quantone³.

³ Il quantone è una entità quantistica che mostra sia proprietà ondulatorie che proprietà corpuscolari.

Associando alla natura ondulatoria e alla natura corpuscolare due parametri quali V , ossia l'interferenza visibile, e D , il cammino percettibile, introdussero una relazione che stabilisce un limite superiore entro cui è possibile ottenere la simultaneità delle due quantità:

$$\sqrt{|V|^2 + |D|^2} \leq 1$$

In questo modo appare evidente che per un fenomeno puramente ondulatorio $\sqrt{V} = 1$ e $\sqrt{D} = 0$; viceversa per un fenomeno puramente corpuscolare. In questa descrizione, rimane plausibile la possibilità di contemplare entrambi i fenomeni contemporaneamente.

In realtà questa disuguaglianza permetterebbe il caso

$$\sqrt{V = D = 0}$$

che corrisponde al caso paradossale in cui il quantone non è né una particella né un'onda. Inoltre, il caso dell'uguaglianza ad 1, si verifica solo sotto particolari restrizioni, cioè quando si ha a che fare principalmente con stati puri (stati in cui si ha una completa informazione del sistema quantistico).

Negli stati entangled, però, la relazione non è più valida, segno evidente di omissione di una quantità, individuata nella concurrence, individuata dal parametro C e che in qualche modo misura l'entanglement. In questo modo è possibile trasformare la relazione precedente in una "trinità", relazione complementare tra la dualità e l'entanglement quantistico:

$$\sqrt{V^2 + D^2 + C^2} = 1$$

La bellezza di questa relazione risiede nel fatto che coinvolge i due concetti più controintuitivi della fisica

quantistica, appunto l'entanglement e la dualità onda-corpuscolo.

Nel gennaio 2020 sulla rivista *Physical Review Research* compare un articolo dall'accattivante titolo "*Turning off quantum duality*" [13]. In questa pubblicazione viene fornita, la prima conferma sperimentale di una "three-way quantum coherence identity", quindi una tripartita che possa descrivere sia stati puri che stati entangled. Come si evince da questa breve descrizione la relazione che coinvolgeva i parametri V e D cede il posto ad una relazione che, con l'aggiunta del terzo parametro C , correlato all'entanglement, trasforma la disuguaglianza in una identità che è in grado di descrivere a pieno anche la dualità quantistica. È interessante notare come una teoria che risale ai tempi di de Broglie, la dualità appunto, possa essere analizzata e messa in discussione quasi un secolo dopo la sua formulazione. Ai fini dell'esperimento sono stati realizzati sette stati puri di singoli fotoni lasciati interferire tra loro per generare stati entangled utilizzando un opportuno interferometro. Per ciascun stato sono stati raccolti i valori dell'interferenza visibile, del cammino percettibile e della concurrence, mettendo a confronto la vecchia relazione incentrata sulla dualità con la nuova relazione basata sulla tripartita. Per stati puri, quindi, quando l'entanglement non è coinvolto, la vecchia relazione si implementa in modo ottimale, mentre per stati entangled si ottengono valori anomali che potrebbero indicare una sorta di dualità attenuata o addirittura assente, come se fosse "spenta", come riportato nel titolo dell'articolo a cui si sta facendo riferimento. Come è stato già giustificato precedentemente, se la relazione non è verificata è perché è stato ignorato il contributo di un altro

parametro. L'intuizione è stata di individuare questa omissione nella concurrence e quindi di coinvolgere l'entanglement in una misura della dualità. Rianalizzando i dati utilizzando la nuova relazione tra V , D e C si è infatti in grado di trasformare i casi problematici di dualità attenuata-spenta in valori prossimi ad 1, confermando l'identità. Va da sé che la nuova relazione continua a funzionare anche nel caso di stati puri, per i quali si porrà $\sqrt{C} = 0$.

Quanto discusso dimostra come la meccanica quantistica sia una teoria in continua evoluzione, soggetta a modifiche e a continui approfondimenti: nulla di quanto noto è escluso da una possibile rivisitazione. Questa pubblicazione ha messo in discussione uno dei capisaldi della meccanica quantistica, un principio quasi centenario che però solo in tempi recenti è diventato oggetto di verifiche sperimentali. Se prima si considerava sufficiente descrivere la dualità quantistica tramite V e D , lo studio qui descritto dimostra che una relazione costituita solo da questi parametri risulta, invece, incompleta. La concurrence, e quindi l'entanglement, diventa il tassello mancante per una formulazione completa, estendendo il principio di de Broglie e il principio di complementarità a stati entangled.

6 - Conclusioni

Abbiamo visto che quando due particelle si trovano in stati quantistici entangled, la misura di una proprietà di una particella determina immediatamente il risultato di una

misura analoga sull'altra particella, senza bisogno di effettuare effettivamente la misura.

Questa conclusione, a prima vista, non è poi così strana. Infatti, se ci riferiamo alle coppie di ballerini invece che a delle particelle, possiamo immaginare un esperimento in cui un ballerino della coppia si muove in una direzione e l'altro partner nella direzione opposta. Un osservatore che valuta il genere di uno dei ballerini e vede che è, per esempio il maschio, può immediatamente dire che il partner che ha viaggiato nell'altra direzione è sicuramente la donna.

Ciò che rende la meccanica quantistica così speciale è che gli equivalenti dei ballerini non hanno stati determinati finché non vengono misurati. È come se entrambi i ballerini fossero indefiniti, fino a quando qualcuno non ne effettua una misura. A quel punto, stabilito il genere di uno dei due ballerini, l'altro "diventa" immediatamente del sesso opposto.

Questo bizzarro risultato è stato verificato per stati quantistici entangled tra fotoni inviati attraverso decine di chilometri di fibra ottica e tra un satellite e una stazione a terra.

Questi e altri esperimenti simili hanno gettato, poi, le basi per l'intensa ricerca nella scienza dell'informazione quantistica, del quantum computing e della crittografia. La prima rivoluzione quantistica ha consentito la progettazione e realizzazione di transistor e laser; ora stiamo entrando in una nuova era, la seconda rivoluzione quantistica, grazie ai moderni strumenti di manipolazione dei sistemi di particelle entangled.

Pertanto, considerando sia queste potenziali innovative applicazioni che la ridefinizione dei vincoli legati alla dualità,

l'entanglement, concetto non noto a Bohr, si erge, a giusto titolo, come un ulteriore *basic concept* della meccanica quantistica.

Bibliografia

[1]

<https://www.nobelprize.org/uploads/2022/10/advanced-physicsprize2022.pdf>

[2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969); S. J. Freedman and J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972); A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981); A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982); A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982); A. Aspect, Phys. Rev. D **14**, 1944 (1976).

[3] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **80**, 3891 (1998).

[4] E. Schrödinger, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**, 555 (1935).

[5] F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. Nature **574**, 505(2019).

[6] R. Jozsa and N. Linden, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **459**, 2011 (2003).

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Superdense_coding

[8] Haitjema, M. (2007). <http://www.cse.wustl.edu/~jain/cse571-07/ftp/quantum>.

[9] G. De Riso and M. Noce, in corso di stampa *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography* (2022).

[10] Eckert, Artur K., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).

[11] N. Ilic, *Journal of Phys.* **334**, 1 (2007).

[12] L. Truda, A. Trotta and C. Noce, *Science & Philosophy* **10**, 57 (2022).

[13] X. F. Qian, K. Konthasinghe, S. K. Manikandan, D. Spiecker, A. N. Vamivakas & J. H. Eberly, *Physical Review Research* **2**, 012016 (2020).

L'algebra complessa nella ricerca di pianeti extrasolari

Valerio Bozza*

*Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università di Salerno, Via Giovanni Paolo II 132, 84084 Fisciano, Italia; vbozza@unisa.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n4.101

Sunto: *L'astrofisica cerca di rispondere a domande fondamentali sulla nostra esistenza, dall'origine dell'Universo alla nascita delle prime forme di vita. La ricerca di pianeti extrasolari è una delle frontiere più appassionanti dell'astrofisica, con scoperte che si susseguono a ritmo incalzante. Tra i vari metodi di indagine, il microlensing, basato sull'effetto lente gravitazionale, sarà al centro di nuove missioni spaziali per completare il quadro delle nostre conoscenze. L'analisi delle osservazioni di microlensing passa per la risoluzione dell'equazione della lente gravitazionale, che richiede l'uso dell'algebra complessa e che ne stimola a sua volta interessanti approfondimenti. Il microlensing si propone, quindi, come emblematico esempio di connubio tra matematica, fisica e astrofisica.*

Parole Chiave: *Pianeti extrasolari, algebra complessa, lenti gravitazionali*

Abstract: *Astrophysics attempts to answer fundamental questions about our existence, from the origin of the Universe to the formation of life. The search for exoplanets is one of the most exciting frontiers of astrophysics, with discoveries following one another at an ever increasing pace. Among the various methods of investigation, microlensing, based on the gravitational lens effect, will be at the center of new space missions aimed at completing our knowledge. The analysis of microlensing observations steps through the resolution of the gravitational lens*

equation, which requires the use of complex algebra and which has in turn stimulated interesting insights. Microlensing stands as an emblematic example of the synergy between mathematics, physics and astrophysics.

Keywords: *Extrasolar planets, complex algebra, gravitational lenses*

1 - Alla ricerca di pianeti extrasolari

Da alcuni mesi è stato lanciato dalla NASA il nuovo telescopio spaziale, il James Webb Space Telescope¹, che, dopo aver raggiunto il punto Lagrangiano L2, ha dispiegato i suoi specchi per cominciare a scrutare le profondità del cosmo. E subito sono arrivate le prime entusiasmanti immagini: paesaggi di infinite galassie che si succedono l'una a fianco all'altra e l'una dietro l'altra come in un castello di specchi. Le più lontane visibili nelle immagini risalgono a pochi milioni di anni dopo il Big Bang e contengono le stelle di prima generazione del nostro Universo. Certamente è da queste immagini che speriamo di comprendere come il nostro Universo si sia evoluto dopo il Big Bang e cosa siano materia e energia oscura.

Puntando da tutt'altra parte, verso stelle vicine al nostro angolo di Universo, Webb ci ha mostrato la fioca luce di un pianeta, percepibile solo dopo aver sottratto l'abbagliante luce della stella intorno a cui orbita. Ma Webb può fare anche di più oltre a mostrarci l'esistenza di pianeti extrasolari, orbitanti intorno ad altre stelle. Attraverso i suoi spettrografi, Webb può analizzare la luce delle stelle durante il transito di un pianeta. L'atmosfera del pianeta, filtrando la luce della stella,

¹ <https://webb.nasa.gov/>

imprime sullo spettro caratteristiche righe e bande di assorbimento, che possono essere ricondotte alla presenza di determinate sostanze assorbitive nell'atmosfera. Se da Terra queste osservazioni erano condotte a livello pionieristico, Webb le sta portando a livelli di approfondimento irraggiungibili se non con telescopi spaziali. Già sono stati trovati i segnali di vapore acqueo, anidride carbonica e anidride solforosa, mentre manca ancora la scoperta più attesa, quella dell'ossigeno, che sarebbe un fortissimo indizio della presenza di vita extraterrestre. Non è più fantascienza ormai prevedere che nel prossimo decennio potremmo avere le prove dell'esistenza di vita su altri mondi!

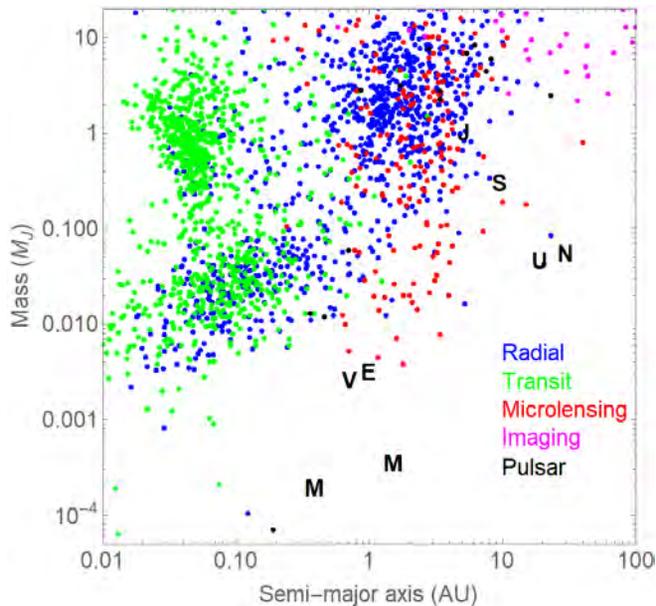


Fig. 1- Pianeti extrasolari trovati con vari metodi nel piano (semiasse maggiore, massa). I pianeti del Sistema Solare sono indicati dalle rispettive iniziali

I pianeti extrasolari noti sono ormai più di 5000², scoperti con vari metodi. Innanzitutto, abbiamo il metodo dei transiti, che, grazie al satellite Kepler, ha fatto la parte del leone. Poi abbiamo il metodo delle velocità radiali, che ha aperto le danze con la scoperta del primo pianeta 51 Pegasi b da parte di Mayor e Queloz, che hanno per questo ricevuto il premio Nobel nel 2019 (Mayor & Queloz 1995). Questi due metodi coprono circa il 95% delle scoperte, comprese quelle dei 59 pianeti nella cosiddetta “zona abitabile”, ovvero quelli alla giusta distanza dalla loro stella per poter ospitare acqua liquida sulla propria superficie. Questi metodi, però, sono fortemente focalizzati su pianeti orbitanti nelle immediate vicinanze dalla propria stella, mentre trascurano pianeti su orbite più ampie. Al contrario, l’immagine diretta di un pianeta è possibile solo per pianeti molto distanti dalla propria stella e soprattutto per sistemi planetari molto giovani. Sembra proprio che i pianeti di un sistema planetario simile al Sistema Solare sfuggirebbero agevolmente alla rivelazione con tutti i metodi messi in campo, con l’eccezione del nostro gigante gassoso Giove. In effetti, la Fig. 1, che rappresenta i pianeti nel piano (semiasse maggiore, massa) evidenzia proprio il fatto che i pianeti del nostro Sistema Solare si trovano in una zona al di fuori della portata degli attuali metodi di ricerca.

Tuttavia, il quarto metodo, dopo transiti, velocità radiali e immagine diretta, riempie proprio questo vuoto. Si tratta del microlensing, un caso particolare dell’effetto lente gravitazionale previsto dalla Relatività Generale di Einstein (per una review si veda Gaudi 2012). Vediamo in dettaglio

² <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>, <http://exoplanet.eu/>.

come funziona e perché può essere la chiave per un importante balzo in avanti nella ricerca di pianeti.

L'effetto lente gravitazionale si riferisce alla deflessione della luce da parte di un campo gravitazionale. Nel caso in cui si realizzi un fortunato allineamento tra una stella-sorgente, una stella-lente e l'osservatore, l'effetto si traduce in un'amplificazione temporanea del flusso osservato della stella-sorgente. In pratica, la luce della stella sorgente, viene deflessa e "focalizzata" dal campo gravitazionale della stella-lente verso l'osservatore, che così osserva un temporaneo aumento della luminosità della stella sorgente.

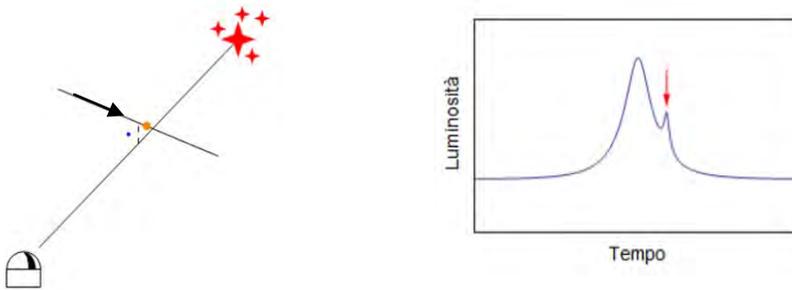


Fig. 2- A sinistra, Schematizzazione del microlensing: la stella-lente (gialla) passa vicino alla linea di vista tra l'osservatore e la stella-sorgente (rossa). La stella-lente è accompagnata da un pianeta (azzurro). A destra, curva di luce osservata della stella-sorgente. All'amplificazione dovuta alla stella-lente, si aggiunge l'anomalia creata dal pianeta, indicata dalla freccia rossa.

Se la stella-lente è accompagnata da un pianeta, anche il campo gravitazionale del pianeta può contribuire all'effetto lente gravitazionale, portando a delle "anomalie" nella curva di luce, come mostrato in Fig. 2. In effetti, il microlensing ha portato alla scoperta di 133 pianeti anche di piccola massa

grazie al fatto che il segnale scala con la radice quadrata della massa, anziché linearmente come nel caso delle velocità radiali. Inoltre, la massima sensibilità si ha su pianeti che orbitano a 1-2 unità astronomiche³ dalla loro stella. Questa caratteristica mette il microlensing in ottima posizione per scoprire analoghi del Sistema Solare e per studiare le regioni esterne dei sistemi esoplanetari, caratterizzate dalla presenza di corpi ghiacciati che crescono molto più rapidamente dei corpi rocciosi nelle regioni interne. E' solo oltre la "linea del ghiaccio" che può avvenire la formazione di giganti gassosi grazie a questi grandi nuclei ghiacciati.

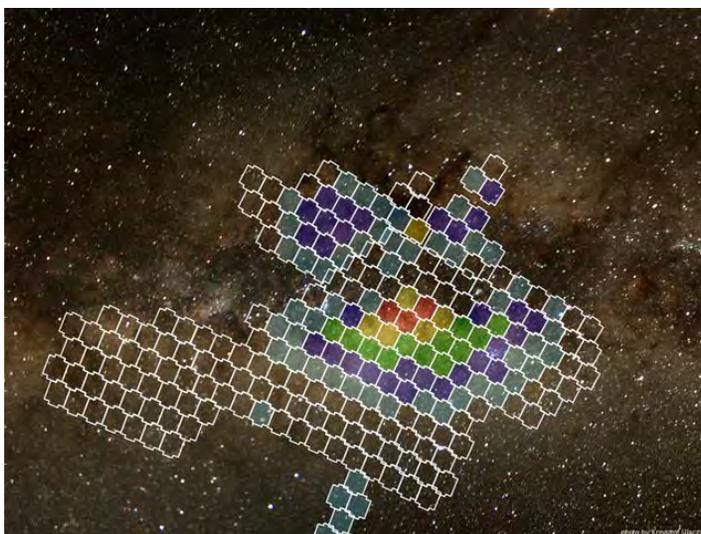


Fig. 3- Campi stellari del nucleo della nostra Galassia monitorati dalla collaborazione OGLE alla ricerca di eventi di microlensing.

³ L'unità astronomica è la distanza Terra-Sole, pari a circa 150 milioni di km.

Il microlensing richiede un allineamento quasi perfetto tra lente e sorgente e, perciò, è un fenomeno relativamente raro. Occorre monitorare un gran numero di stelle per trovare un numero cospicuo di eventi di microlensing. Le campagne osservative condotte dalle collaborazioni OGLE⁴, MOA⁵ e KMTNet⁶ si concentrano nei campi stellari più densi verso il centro della Galassia, dove è più probabile che si realizzi il desiderato allineamento (Fig. 3). Telescopi dislocati in tutto il mondo con fotometria di alta precisione seguono gli eventi di microlensing per non perdere i segnali di preziose anomalie. In questo modo, vengono scoperti ogni anno circa 3000 eventi, di cui circa una decina recanti anche la segnatura di un pianeta.

Una volta trovata un'anomalia in un evento di microlensing, occorre trovare l'interpretazione corretta della curva di luce per verificare che sia dovuta ad un pianeta e per caratterizzarne i parametri. Il problema, però, è che la curva di microlensing dovuta al campo gravitazionale di due corpi celesti come la stella e il suo pianeta non è semplicemente la somma delle due curve di luce: non vale un principio di sovrapposizione! La casistica che ci si può presentare è estremamente varia. Ci sono pianeti che producono un piccolo aggiuntivo e altri che producono una depressione. Alcuni generano perturbazioni molto estese con più picchi intervallati da depressioni (Fig. 4).

⁴ <https://ogle.astrouw.edu.pl/>

⁵ <http://www2.phys.canterbury.ac.nz/moa/>

⁶ <https://kmtnet.kasi.re.kr/kmtnet/>

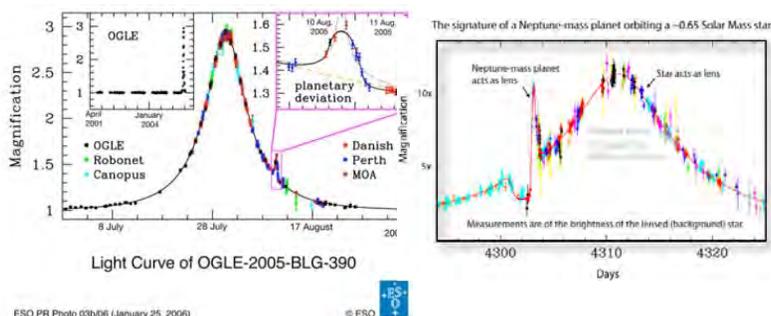


Fig. 4- Alcuni esempi di eventi di microlensing che hanno condotto alla scoperta di pianeti. Si possono notare picchi aggiuntivi e depressioni in varie combinazioni, a testimoniare la complessità del fenomeno.

Una tale complessità richiede sofisticati algoritmi di calcolo e di modellazione basati sulla matematica dell'effetto lente gravitazionale per arrivare ad un'interpretazione robusta del fenomeno e ad una caratterizzazione completa del sistema planetario.

2 - Equazione della lente e algebra complessa

Il punto di partenza per lo studio dell'effetto lente gravitazionale è l'equazione della lente, che può essere desunta da semplice trigonometria osservando lo schema in Fig. 5. La traiettoria del raggio di luce emesso dalla sorgente S viene deflessa dal campo gravitazionale generato dalla lente L di un angolo $\hat{\alpha}$ e arriva all'osservatore sotto un angolo θ anziché con l'angolo β , corrispondente alla posizione angolare reale della sorgente. Tenendo conto delle distanze tra osservatore e lente (D_{OL}), tra osservatore e sorgente (D_{OS}) e tra lente e sorgente (D_{LS}), e del fatto che gli angoli β , θ e $\hat{\alpha}$ sono

tutti molto piccoli, la relazione tra i segmenti $AS = AB - BS$ diventa

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{\alpha}$$

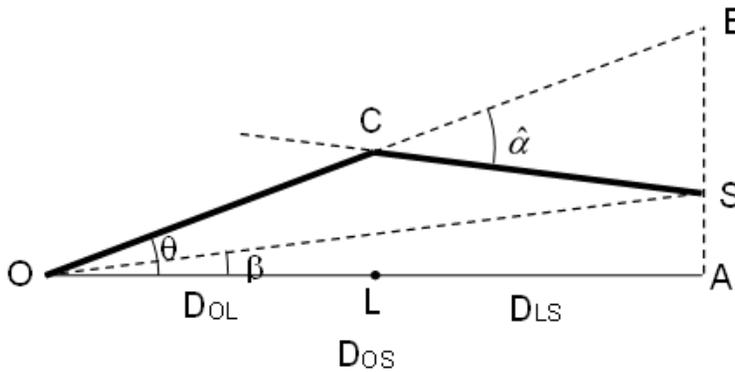


Fig. 5 - Schematizzazione dell'effetto lente gravitazionale per la formulazione dell'equazione della lente. L'osservatore in O, vede la sorgente S ad un angolo θ invece che ad un angolo β a causa della deflessione dovuta alla lente L.

L'angolo di deflessione è calcolato dalla Relatività Generale nel limite di campo debole come

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 D_{OL} \theta}$$

Sostituendo nell'equazione della lente, otteniamo l'equazione

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

dove abbiamo definito l'angolo di Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}}}$$

che raccoglie tutte le costanti e determina l'entità della deflessione.

L'equazione della lente così ottenuta descrive il gravitational lensing da parte di una sola lente nell'origine delle coordinate. Le soluzioni θ rappresentano le immagini viste dall'osservatore di una sorgente collocata in β . Se ci sono più lenti alle coordinate $\vec{\theta}_i$ l'equazione va scritta in forma vettoriale:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_{E1}^2 \frac{\vec{\Delta\theta}_1}{|\vec{\Delta\theta}_1|^2} - \theta_{E2}^2 \frac{\vec{\Delta\theta}_2}{|\vec{\Delta\theta}_2|^2}$$

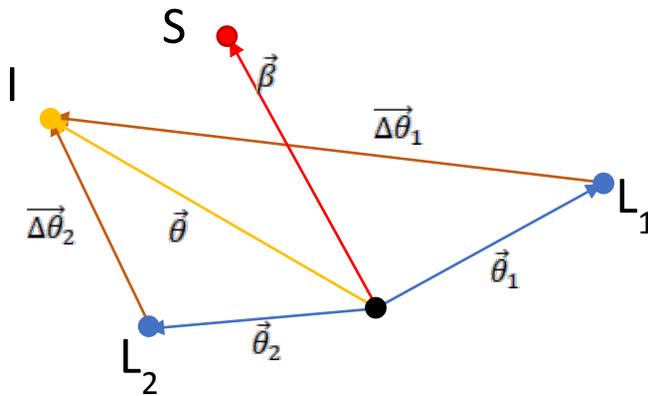


Fig. 6 - Definizione dei vettori che compaiono nell'equazione della lente per lente binaria. Le due lenti L_1 e L_2 deflettono la luce proveniente dalla sorgente S , che appare nella posizione dell'immagine I .

Fissate le distanze D_{OL} , D_{LS} , D_{OS} , le posizioni e le masse delle lenti, data una posizione $\vec{\beta}$ della sorgente, l'osservatore vedrà un'immagine per ogni $\vec{\theta}$ che risolve quest'equazione. In generale, infatti, quest'equazione può ammettere più di una soluzione. Per calcolare l'amplificazione in un evento di microlensing, occorre perciò calcolare le posizioni di tutte le immagini generate dalle lenti e valutarne le singole estensioni

per poi sommare il tutto. Questa procedura va ripetuta per ogni istante durante lo sviluppo dell'evento di microlensing.

La risoluzione dell'equazione della lente è lo scoglio centrale nella descrizione del microlensing. A tal proposito, Witt (1990) trovò che il problema poteva essere formulato in modo molto vantaggioso nel campo complesso. Infatti, sia le immagini che la posizione della sorgente sono identificati da vettori nel cielo dell'osservatore. Quindi, l'equazione della lente può essere letta come un'applicazione dallo spazio delle immagini \mathbb{R}_I^2 allo spazio delle sorgenti \mathbb{R}_S^2 . Identifichiamo questi due spazi con i campi complessi \mathbb{C}_I e \mathbb{C}_S tramite la sostituzione

$$\frac{\vec{\theta}}{\theta_E} \rightarrow z, \quad \frac{\vec{\beta}}{\theta_E} \rightarrow \zeta.$$

L'equazione della lente diventa

$$\zeta = z - \frac{m_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} - \frac{m_2}{\bar{z} - \bar{z}_2}$$

dove $m_i \equiv M_i/M$ sono le frazioni in massa delle lenti sul totale e z_i le loro posizioni; la barra indica la coniugazione complessa. La forma complessa dell'equazione della lente riporta l'equazione vettoriale ad un problema algebrico per il quale possiamo impiegare i metodi consolidati dell'algebra complessa. Come vedremo, questo consente di ottenere una serie di risultati generali che impattano sulla fisica del microlensing e sull'analisi degli eventi planetari.

Partiamo innanzitutto dalla risoluzione dell'equazione della lente. Data una sorgente in ζ e N lenti disposte in z_1, \dots, z_N , con masse normalizzate m_1, \dots, m_N , vogliamo trovare tutte le immagini z create dall'effetto lente gravitazionale.

L'equazione della lente per N lenti si scrive generalizzando l'equazione della lente binaria scritta in precedenza:

$$\zeta = z - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\bar{z} - \bar{z}_i}$$

Possiamo scrivere l'equazione complessa coniugata di questa e ricavare \bar{z} in funzione di $\bar{\zeta}$ e di z . Sostituendo nell'equazione della lente e raccogliendo i termini, otteniamo un polinomio di grado N^2+1 in z

$$(\zeta - z) \prod_i \left\{ (\bar{\zeta} - \bar{z}_i) \prod_j (z - z_j) + \sum_j \left[m_j \prod_{k \neq j} (z - z_k) \right] \right\} +$$

$$[\prod_j (z - z_j) \sum_i [m_i (\prod_{p \neq i} \{ (\bar{\zeta} - \bar{z}_i) \prod_j (z - z_j) + \sum_j [m_j \prod_{k \neq j} (z - z_k) \} \}])] = 0$$

E qui entra in gioco il teorema fondamentale dell'algebra, che ci assicura che esistono N^2+1 soluzioni per questo polinomio. Attenzione, però! Non tutte queste soluzioni risolvono l'equazione originale. Infatti, l'uso della complessa coniugata ha introdotto radici spurie, in modo simile a quanto accade quando si risolvono equazioni irrazionali. Occorre perciò controllare le radici una per una per selezionare quelle che corrispondono a soluzioni dell'equazione originale e che sono quindi immagini genuine a tutti gli effetti. Fisici e matematici si sono chiesti se fosse possibile saturare il numero massimo di radici N^2+1 con immagini fisiche. Fu ben presto evidente che il numero di immagini scala linearmente con N e non quadraticamente come suggerirebbe il grado del polinomio (Rhie 2002). Infine, sofisticati studi matematici hanno dimostrato che il numero di immagini varia da un

minimo di $N+1$ ad un massimo di $5N - 5$ per ogni $N \geq 2$ (Khavinson & Neumann 2004).

L'uso dell'algebra complessa nel microlensing non termina qui. Infatti, se esiste un numero minimo e un numero massimo di immagini, allora il numero preciso di immagini dipende dalla posizione della sorgente. Poiché l'applicazione della lente è continua, ciò può avvenire solamente nei cosiddetti punti critici, definiti dall'annullamento del determinante Jacobiano: $\det J = 0$. In notazione complessa, l'equazione per trovare i punti critici $\det J = 0$ diventa

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 = 0$$

che per il nostro sistema di N lenti è

$$1 - \left| \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \right|^2 = 0$$

Quest'equazione indica che la quantità dentro il modulo deve essere al più un fattore di fase

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z - z_i)^2} = e^{i\varphi}$$

Quest'equazione si può mettere in forma di un polinomio di grado $2N$ in $z(\varphi)$. Al variare di φ tra 0 e 2π , otteniamo $2N$ archi di curve critiche. Questi archi possono essere disconnessi tra loro, oppure possono essere connessi agli estremi per generare un'unica curva critica.

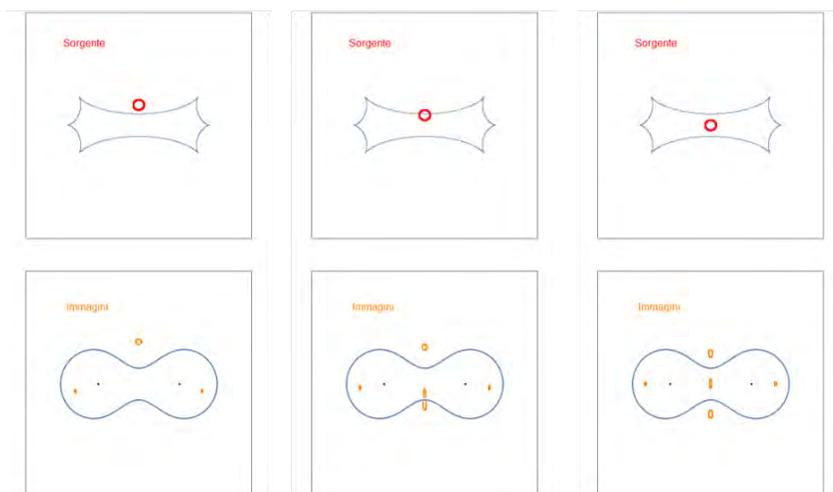


Fig. 7 - In basso abbiamo la curva critica generata da due lenti di uguale massa (indicate dai punti neri). In alto abbiamo la caustica corrispondente. Da sinistra a destra abbiamo tre posizioni diverse della sorgente (cerchio rosso), fuori, a cavallo e dentro la caustica rispettivamente. In basso vediamo le immagini corrispondenti. Quando la sorgente è esterna alla caustica, abbiamo 3 immagini. Quando la sorgente è a cavallo della caustica, vediamo la formazione di due immagini sulla curva critica. Quando la sorgente è dentro la caustica, abbiamo 5 immagini.

Da quanto detto, abbiamo capito che nuove coppie di immagini possono essere generate solo sulle curve critiche. Ovviamente, questo vincola la sorgente ad essere nel punto ζ corrispondente ottenuto tramite l'equazione della lente. Quindi, ad ogni curva critica $z(\varphi)$ corrisponde una caustica $\zeta(z(\varphi))$.

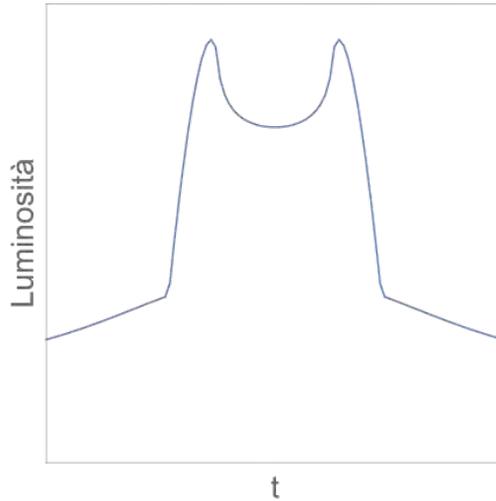


Fig. 8 - Curva di luce di microlensing per una sorgente che attraversa una caustica come in Fig. 7. I picchi si hanno in corrispondenza degli attraversamenti.

La generazione di nuove coppie di immagini si ha quando la sorgente, nel suo movimento relativo alla lente, attraversa una caustica. Le due immagini aggiuntive così create sopravvivranno fino a quando la sorgente non uscirà dalla caustica. A quel punto, le due immagini si distruggeranno nel punto critico corrispondente al punto caustico da cui la sorgente è uscita. Il processo è illustrato in Fig. 7.

Tutto questo processo di creazione e distruzione di immagini si riflette nella curva di luce osservata dai telescopi. Infatti, ciò che osserviamo è l'amplificazione della luce proveniente dalla sorgente. Questa non è altro che il rapporto tra l'estensione totale di tutte le immagini e l'estensione originale della sorgente. La massima estensione si ha proprio in corrispondenza degli attraversamenti delle caustiche. E'

così che ritroviamo nelle curve di luce, come quella in Fig. 8, dei doppi picchi intervallati da una forma ad “U”.

3 - Il microlensing tra la matematica e le prossime missioni spaziali

La matematica descritta finora è alla base dei moderni codici di calcolo delle curve di luce da microlensing, necessari per la corretta modellazione e interpretazione dei dati sperimentali. Naturalmente, i codici di calcolo più avanzati, come VBBinaryLensing⁷, il codice sviluppato all'Università di Salerno, introducono una serie di ottimizzazioni che rendono il codice robusto ed efficiente in tutte le situazioni (Bozza 2000, Bozza et al. 2018, Bozza, Khalouei & Bachelet 2021). Ad esempio, l'area delle immagini viene ottenuta tramite un'integrazione sul bordo sfruttando il teorema di Green. La precisione dell'integrazione viene migliorata introducendo una correzione parabolica sugli archi campionati con un numero finito di punti. In questo modo, i residui diventano di ordine superiore. La stima dei residui è alla base del controllo degli errori, che è essenziale per capire se la precisione desiderata è stata raggiunta o no. Inoltre, stimando l'errore per ciascun arco sul bordo dell'immagine, è possibile intensificare il campionamento sugli archi con gli errori più grandi, ottenendo un campionamento ottimizzato.

VBBinaryLensing è ormai diventato il codice di riferimento nel campo del calcolo del microlensing da lenti binarie. E' open source e disponibile su Github. E' scritto in linguaggio

⁷ <https://www.fisica.unisa.it/GravitationAstrophysics/VBBinaryLensing.htm>

C++, ma importabile in Python, che è diventato ormai il linguaggio più diffuso in ambito astrofisico. Di fatto, VBinaryLensing è diventato il nucleo di tutte le piattaforme di modellazione di microlensing che si rivolgono all'utente medio (RTModel⁸, pyLIMA⁹, MulensModel¹⁰, muLAn¹¹).

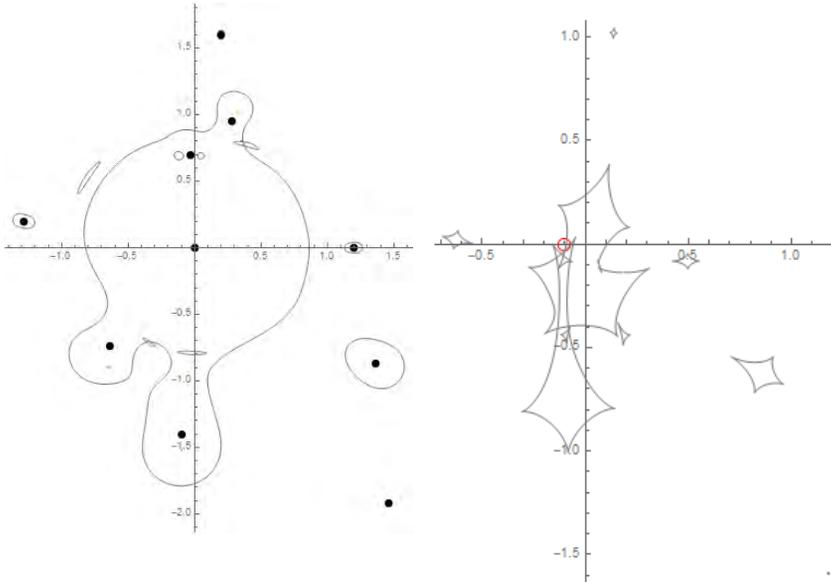


Fig. 9 - A sinistra curve critiche e immagini generate da 10 lenti corrispondenti ad una sorgente tra le caustiche mostrate a destra.

La prossima frontiera è un codice robusto ed efficiente per le lenti multiple (Fig. 9). Qui sussistono problemi numerici proprio nel caso più interessante di una lente massiva (una stella) circondata da un certo numero di piccoli pianeti. Sarà

⁸ <https://www.fisica.unisa.it/GravitationAstrophysics/RTModel.htm>

⁹ <https://github.com/ebachelet/pyLIMA>

¹⁰ <https://github.com/rpoleski/MulensModel>

¹¹ <https://github.com/muLAn-project/muLAn>

necessario inventarsi nuovi algoritmi sempre tenendo come riferimento la guida offerta dall'algebra complessa.

Lo sviluppo di codici efficienti e precisi nel microlensing diventa quanto mai importante in vista del lancio della missione Roman (ex WFIRST), da parte della NASA, previsto per il 2025-2026. Questa missione sarà rivolta allo studio della Dark Energy¹² e degli esopianeti tramite il metodo del microlensing (Fig. 10).

Monitorando il centro Galattico con una cadenza e una precisione fotometrica senza precedenti, ci si aspetta di scoprire almeno 1500 pianeti, raggiungendo anche pianeti nella parte esterna della fascia di abitabilità (Penny et al. 2019). Come detto in precedenza, il microlensing è particolarmente sensibile ai pianeti oltre 1 Unità Astronomiche e, quindi, Roman sarà in grado di trovare pianeti analoghi a quelli del Sistema Solare con l'eccezione di Mercurio (Fig. 11). In più sarebbe sensibile addirittura a satelliti dei pianeti giganti con massa simile a quella di Ganimede o Titano, pari a due volte la massa della Luna (Fig. 12).

Oltre ad avere una sensibilità eccezionale, Roman costruirà una statistica sufficientemente ampia da permettere di studiare la distribuzione dei pianeti all'interno della nostra Galassia e il numero di pianeti "vaganti", che non orbitano intorno ad alcuna stella (Johnson et al. 2020).

¹² La Dark Energy è stata introdotta per spiegare l'accelerazione osservata nell'espansione dell'Universo. Dovrebbe costituire circa il 70% dell'energia nel nostro Universo, ma la sua natura è del tutto sconosciuta.



Fig. 10 - Un'immagine del satellite Roman (NASA).

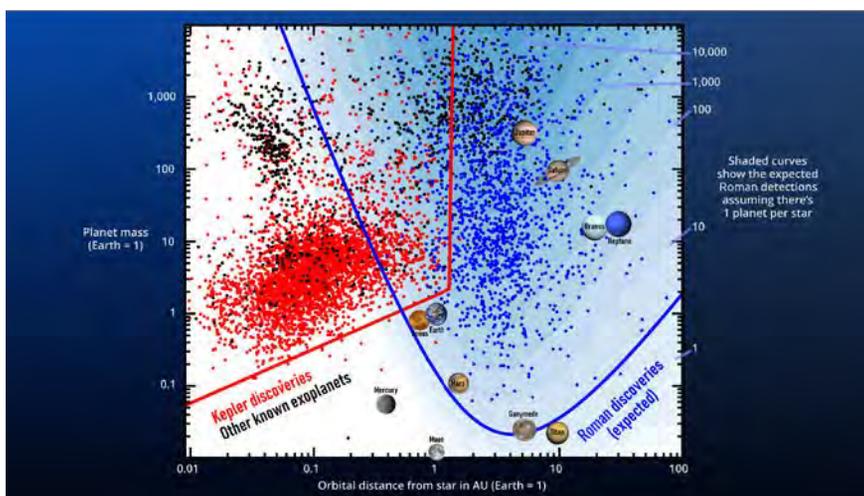


Fig. 11 - Il piano (semiasse maggiore, massa) con la curva di sensibilità di Roman. Da notare la capacità di rivelare praticamente pianeti analoghi a quelli del Sistema Solare e la potenzialità di scoprire pianeti con la massa di Ganimede.

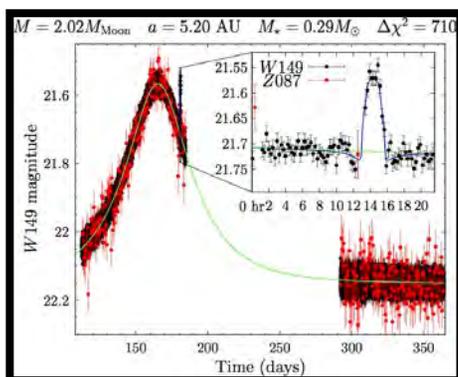


Fig. 12 - Una curva di luce simulata con un pianeta di massa pari a due volte la massa della Luna.

Questi pianeti vaganti, recentemente scoperti grazie al microlensing, potrebbero essere il risultato della formazione stellare a piccole masse, oppure pianeti formati in normali sistemi planetari e poi espulsi in conseguenza di instabilità dinamiche. Roman aiuterà a comprendere questo nuovo mistero, anche grazie al codice VBBinaryLensing, che è stato adottato nel protocollo ufficiale di analisi dati.

In conclusione, il microlensing rappresenta un caso emblematico di come le basi matematiche siano fondamentali per affrontare problemi fisici complessi e costruire strumenti in grado di far fronte alla mole crescente di dati provenienti da osservazioni sempre più precise e sofisticate nel modo più efficiente possibile. Viceversa, la fisica continua ancora oggi a stimolare la matematica proponendo problemi sempre nuovi e avvincenti da affrontare in modo rigoroso e generale.

Bibliografia

BOZZA V. (2010). Microlensing with an advanced contour integration algorithm: Green's theorem to third order, error control, optimal sampling and limb darkening. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 408, pp. 2188-2200.

BOZZA V. et al. (2018). Vbbinarylensing: a public package for microlensing light-curve computation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 479, p.5157-5167.

BOZZA V., KHALOUEI E. & BACHELET E. (2021). A public code for astrometric microlensing with contour integration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 505, pp.126-135.

GAUDI B.S. (2012). Microlensing Surveys for Exoplanets. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 50, p. 411-453.

JOHNSON S. et al. (2020). Predictions of the Nancy Grace Roman Space Telescope Galactic Exoplanet Survey. II. Free-floating Planet Detection Rates. *The Astrophysical Journal* 160, 123.

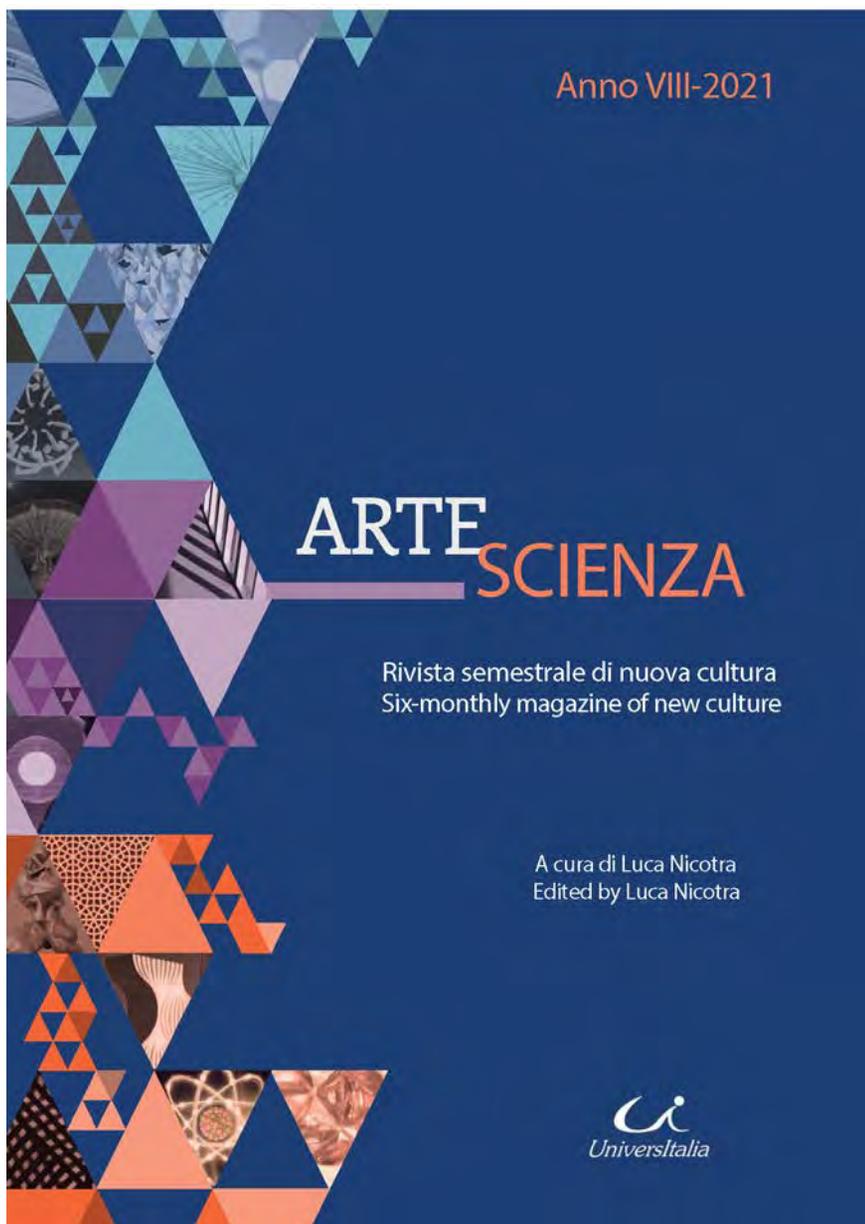
KHAVINSON D. & NEUMANN G. (2004). On the number of zeros of certain rational harmonic functions. *arXiv: math/0401188*.

MAYOR M. & QUELOZ D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 378, pp. 355-359.

PENNY M. et al. (2019). Predictions of the WFIRST Microlensing Survey. I. Bound Planet Detection Rates. *The Astrophysical Journal Supplement Series* 241, 3.

RHIE S.H. (2002). n-point Gravitational Lenses with $5(n-1)$ Images. *arXiv:astro-ph/0305166*.

WITT H.J. (1990). Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars. *Astronomy and Astrophysics* 236, p. 311.



Anno VIII-2021

ARTE SCIENZA

Rivista semestrale di nuova cultura
Six-monthly magazine of new culture

A cura di Luca Nicotra
Edited by Luca Nicotra


UniversItalia

Profili biografici degli autori

Valerio Bozza - vbozza@unisa.it

Professore Associato, SSD FIS/05 - Astronomia e Astrofisica. Laureato a Salerno nel 1998, ha terminato il dottorato di ricerca a Salerno nel 2002. E' vincitore del premio di Operosità Scientifica della SIF nel 2002. Ha vinto un grant del Centro Enrico Fermi (diretto da Zichichi) per svolgere tre anni di ricerche al CERN di Ginevra, nel gruppo di Gabriele Veneziano, padre della teoria delle stringhe. E' Autore di 177 pubblicazioni su riviste scientifiche internazionali, ed è stato relatore in 38 conferenze, anche su invito. È responsabile dell'Osservatorio Astronomico del Dipartimento di Fisica dell'Università di Salerno, dove organizza serate aperte al pubblico. Ha realizzato il primo codice pubblico per il microlensing da sistemi binari e planetari e la più veloce piattaforma di calcolo al mondo per l'interpretazione di eventi di microlensing binario. È membro del Microlensing Science Investigation Team del satellite Roman della NASA, che sarà lanciato nel 2025 e delle collaborazioni MiNDSTeP e OMEGA. Coordina la validazione di pianeti transitanti con l'Osservatorio Astronomico UNISA per la rete KELT e per il satellite TESS della NASA. Ha introdotto un metodo analitico per descrivere il gravitational lensing da buchi neri in qualsiasi teoria della gravitazione, scrivendo diverse review su invito. Referee per Nature, Physical Review Letters, Astrophysical Journal, Journal of Cosmology and Astroparticles. I temi dell'attività di Ricerca sono i Pianeti extrasolari, le Lenti gravitazionali, i Buchi neri e la Cosmologia. È Coordinatore didattico del CdS in Fisica, e Responsabile per i test di accesso dei CdS in Fisica, Scienze e Nanotecnologie per la Sostenibilità.

Giuseppe De Riso (Salerno)- g.deriso4@studenti.unisa.it

Studente del Corso di Laurea Magistrale in Fisica presso l'Università degli Studi di Salerno, ha conseguito la Laurea Triennale discutendo la tesi dal titolo *Protocolli per la Distribuzione Quantistica delle Chiavi*; attualmente lavora al progetto di tesi magistrale incentrato sul *Quantum Computing* applicato allo studio del modello di Anderson periodico. È coautore dell'articolo *A unified description of cryptosystems: from classical to quantum protocols*, in corso di stampa in «Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography».

Francesco di Paola Bruno - effe.bruno@virgilio.it

Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "F. Severi" di Castellammare di Stabia (NA). Nel 2001 ha frequentato il Corso Annuale di Perfezionamento post-laurea "Modelli e Metodi Matematici Applicati ai Problemi dell'Ambiente". Negli anni '80 ha lavorato in azienda come programmatore di computer e poi come insegnante di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di 1° grado. Da oltre trenta anni insegna Matematica e Fisica al liceo scientifico. Negli ultimi venti anni ha svolto attività di formazione per docenti, ha partecipato come relatore in numerosi convegni sulla didattica della Matematica e pubblicato vari articoli, presentando sempre originali problemi e spunti didattici per l'insegnamento della Matematica spesso supportato dalle tecnologie informatiche, indispensabili per affrontare particolari tematiche. Nell'ultimo quinquennio i suoi interessi sono orientati alla ricerca di percorsi originali per l'insegnamento della Matematica e della Fisica nel liceo musicale, sfruttando analogie e collegamenti tra Matematica, Fisica e Musica.

Rosa Buonanno - rosa.buonanno@alice.it patry

Docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado. Ha conseguito il diploma di Perfezionamento in "Didattica della Matematica" presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli "Federico II" e tre Master, rispettivamente, in "Teoria generale delle Scienze Matematiche", "Dai Fondamenti di geometria alle Geometrie non Euclidee" e "Teoria e Metodologia della valutazione nella scuola". E' autrice di una pubblicazione sul "Teorema di Napoleone" (Periodico di Matematiche n.1-2004) ed una pubblicazione, con altri, su "l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola secondaria", agli atti della Scuola Estiva Mathesis tenutasi a Terni nel mese di luglio 2011. È Socia da circa venti anni della sezione di Napoli dell'A.I.F. (Associazione per l'insegnamento della Fisica) e dell'Associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", dove dal 2020 ricopre la carica di Consigliere all'interno del Consiglio Direttivo. I suoi interessi sono rivolti principalmente alla didattica della matematica, nel cui ambito ha partecipato a numerosi convegni e seminari, anche in qualità di relatrice.

Daniela Buono - danielabuono79@gmail.com

Docente a tempo indeterminato di matematica e fisica al liceo Scientifico "Cartesio" di Giugliano in Campania (Na). Ha conseguito, presso la facoltà di Scienze dell'Università di Napoli "Federico II", un Master in "Comunicazione e Valutazione nel processo Didattico/Educativo", un Diploma di Perfezionamento in "Didattica della matematica" e un Diploma di Perfezionamento in "Didattica della Fisica". È autrice di una pubblicazione, con altri, su "l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola secondaria", agli atti della Scuola Estiva Mathesis tenutasi a Terni nel mese di luglio 2011. È Socia, da oltre un decennio, dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" e Vice segretario della sezione AIF

di Napoli. È Formatore per la preparazione al concorso STEM, in collaborazione con l'ANBIR, e Formatore per l'archiviazione dei dati digitali per dipendenti di cooperative sociali. Esperto progetti PON. Referente INVALSI. Relativamente al rapporto con lo sport, è stata per alcuni anni Ufficiale di Campo nazionale di Basket presso FIP.

Angela Donatiello - adonatiello@unisa.it

Laureata in Matematica con lode nel 2003, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "C. Pisacane" di Padula. Attualmente è dottoranda in Matematica presso l'Università degli Studi di Salerno, occupandosi di Didattica della Matematica. Dal 2012 al 2015 è stata docente a contratto in "Matematica e Basi di Informatica e Statistica" per il Corso di laurea in Scienze e Tecnologie Biologiche presso l'Università degli Studi dell'Insubria. Collabora con la Fondazione "I Lincei per la scuola" in qualità di tutor per corsi di formazione per docenti. Nel 2018 è stata docente esperto per il progetto "Liceo Matematico" presso il Liceo "Gatto" di Agropoli. Socia UMI, socia AIRDM e membro del Consiglio Direttivo dell'Associazione "Math&Phis" di Salerno, di cui attualmente ricopre la carica di segretaria.

Marco Lo Schiavo (Salerno) - mloschiavo@unisa.it.

Studente di Dottorato in Fisica presso il Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiello" dell'Università degli Studi di Salerno, ha conseguito la laurea triennale discutendo una tesi riguardante l'estensione autoaggiunta degli operatori in meccanica quantistica e la laurea magistrale discutendo una tesi inerente al trasporto di carica e spin in strutture artificiali ferromagnete- superconduttore-ferromagnete. Attualmente, la sua attività di ricerca è dedicata allo studio delle proprietà di opportune misure di *entanglement* in sistemi elettronici fortemente correlati.

Canio Noce - canioATsa.infn.it

Professore Associato (S.S.D. FIS/03-Fisica della Materia) presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Salerno, dove è stato Direttore vicario del Dipartimento di Fisica "E R Caianiello", per due mandati (2006-2008 e 2016-2018). Abilitato per le funzioni di professore di prima fascia nel settore concorsuale 02/B2 (Fisica Teorica della Materia), è stato Coordinatore didattico di tre cicli di Dottorato di Ricerca in Fisica. È responsabile del progetto FIRB "Proprietà di trasporto in materiali ruteno-cuprati" e del progetto di formazione DISP del PON NAFASSY. Nel 2002 ha ricevuto il Premio per le Scienze Fisiche attribuito dalla Società delle Lettere, Scienze ed Arti di Napoli (1991). Referee di numerose riviste internazionali tra cui 'Physical Review Letters', 'Physical Review B e New Journal of Physics'. È Membro del comitato tecnico del CQA (Centro di Ateneo per la Certificazione di Qualità) UNISA e del PQA (Presidio Qualità d'Ateneo) UNISA.

Bonaventura Paolillo - bonaventura.paolillo@gmail.com

Si è laureato in Matematica e Scienze dell'informazione a Salerno. Ha conseguito poi il Phd in Matematica sotto la supervisione del prof. Gerla, occupandosi di Geometria senza Punti. È stato Tutor/Formatore TFA nel 2015 per la classe di concorso A047. Insegna Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Severi" di Salerno. Si occupa di temi legati alla divulgazione della matematica, come la Probabilità e le sue applicazioni, Irrazionalità di numeri notevoli, la Geometria,... Ha pubblicato una quindicina di articoli di tali temi su riviste nazionali e internazionali.

Matteo Tanferna - matteotnf@tiscali.it

Laureato in Fisica, indirizzo Nucleare (Sapienza Università di Roma 1985), Software engineering presso Datamat S.p.A. (1987-1989), Ricercatore presso la Fondazione Ugo Bordoni (1990), Progettista Software presso Dataspaio S.p.A. (1991-1993), Docente

di Matematica e Fisica presso MPI (1993-....), Specializzazione in Fisica Sanitaria (Sapienza Università di Roma 2001), Docente al Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica (Università D'Annunzio di Chieti-Pescara 2001), Studente part-time al Corso di Studi di Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni (150 ore diritto allo studio, Sapienza Università di Roma 2017-2019)

Luigi Tomasi - luigi.tomasi@unife.it

Laureato in Matematica. Ha superato i concorsi ordinari a cattedre ed è abilitato per l'insegnamento (nella scuola secondaria di I e II grado) di Matematica e Fisica, Matematica, Scienze matematiche applicate e Matematica e Scienze. Ha insegnato Matematica e Fisica nei Licei scientifici di Adria e di Rovigo, nei quali ha anche svolto svariati incarichi di supporto all'organizzazione scolastica. Dall'anno accademico 2000/2001 al 2008/2009: è stato supervisore di tirocinio nella S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università di Ferrara. Attualmente è professore a contratto presso l'Università di Ferrara e presso l'Università di Padova nel corso di laurea in matematica. Si è sempre interessato ai problemi della scuola, della didattica della matematica e all'uso delle tecnologie nel suo insegnamento. Su questi temi ha scritto diversi articoli, contributi a Periodico di Matematica (IV) Vol. III (3-4) dicembre 2021, ISSN: 2612-6745 308 libri e tenuto molti corsi di formazione e aggiornamento per docenti oltre che comunicazioni/relazioni a convegni, seminari e congressi. Ha fatto parte della Commissione nominata dall'UMI che ha elaborato la proposta di curriculum contenuta in Matematica 2003 e Matematica 2004, "La matematica per il cittadino". Fa parte del Consiglio di Presidenza del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" e della Redazione di "Progetto Alice, rivista di matematica e didattica". Collabora con l'INVALSI, come esperto per le prove di Matematica per la Scuola secondaria di II grado.

Lidia Truda (Salerno) - l.truda@studenti.unisa.it

Studentessa del Corso di Laurea Magistrale in Fisica presso l'Università degli Studi di Salerno, ha conseguito la Laurea Triennale discutendo una tesi dal titolo *Sulla dualità quantistica: un nuovo punto di vista*. I risultati ottenuti sono stato oggetto del lavoro "Can the entanglement be considered a basic concept of quantum mechanics?" pubblicato su «Science & Philosophy» nel giugno 2022. Attualmente lavora a un progetto di tesi magistrale nell'ambito della nanoscienza.

