Periodico di Matematica (IV) Vol. V (1) marzo 2023, pp. 29-42

Un confronto tra i teoremi del valor medio

Cesare Palmisani*

*Liceo Classico "Pietro Giannone" Caserta; Dipartimento di Scienze Politiche Università "Federico II" di Napoli;
cesarepalmisani59@gmail.com; cpalmisani@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.104

Sunto: *Si usano alcune funzioni elementari per confrontare i punti che soddisfano il teorema del valor medio per le derivate e il teorema del valor medio per gli integrali definiti.*

Parole Chiave: *teoremi del valor medio, medie*

Abstract: *Using elementary functions we compare the solutions of the mean value theorem for derivatives and the mean value theorem for definite integrals.*

Keywords: *mean value theorems, means*

1 - Introduzione

Siano a e b due numeri reali fissati, con $a < b$. Se la funzione f è continua in [a;b] e derivabile in]a;b[, allora il

Teorema del valor medio per le derivate stabilisce che esiste almeno uno $\xi \in \,]a; b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Se invece f è continua in [a; b] il Teorema del valor medio per gli integrali definiti asserisce che esiste almeno $\xi_* \in [a; b]$ tale che

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi_*)$$

Osserviamo che se consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ allora il Teorema del valor medio per le derivate e il Teorema del valor medio per gli integrali definiti sono soddisfatti entrambi dal punto

$$\xi = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b - a}\right)$$

Infatti, dalla relazione

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\xi}$$

si ottiene

$$\xi = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b - a}\right)$$

mentre dalla uguaglianza

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b e^x\, dx = e^{\xi_*}$$

seguono le precedenti relazioni, e cioè

$$\frac{1}{b-a} \cdot (e^b - e^a) = e^{\xi_*}; \xi_* = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b-a}\right).$$

Scopo di questo lavoro è di fornire semplici controesempi di funzioni per le quali non è vero che $\xi = \xi_*$, con $\xi, \xi_* \in \,]a; b[$.

2 - Controesempi

Applichiamo ad alcuni casi semplici i due teoremi del valor medio.

2.1 – Applicazione del teorema valor medio per le derivate

Applicazioni al Teorema della media per le derivate di funzioni a funzioni del tipo f(x) = Ax + B:

$$f(x) = Ax + B;\ f'(x) = A;\ f'(\xi) = A$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = A;\ \frac{A(b - a)}{b - a} = A;\ A = A\ (\forall\ \xi \in\ ]a; b[)$$

Il Teorema è soddisfatto dagli infiniti punti interni all'intervallo [a; b], e l'insieme dei punti che lo soddisfano si può considerare "indeterminato".

Applicazione del Teorema della media per le derivate a funzioni del tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, dove A, B, C sono numeri reali ed A è diverso da 0.

Caso : B = C = 0

$$f(x) = Ax^2;\ f'(x) = 2Ax;\ f'(\xi) = 2A\xi$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2A\xi;\ \frac{A(b^2 - a^2)}{b - a} = 2A\xi;\ \xi = \frac{a + b}{2}$$

Caso : B = 0

$$f(x) = Ax^2 + C;\ f'(x) = 2Ax;\ f'(\xi) = 2A\xi$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2A\xi;\ \frac{(Ab^2+C)-(Aa^2+C)}{b-a} = 2A\xi;\ \frac{A(b^2-a^2)}{b-a} = 2A\xi;\ \xi = \frac{a+b}{2}$$

Caso : C = 0

$$f(x) = Ax^2 + Bx;\ f'(x) = 2Ax + B;\ f'(\xi) = 2A\xi + B$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2A\xi + B;\ \frac{A(b^2-a^2)+B(b-a)}{b-a} = 2A\xi + B\ ;\xi = \frac{a+b}{2}$$

Caso : B e C sono non nulli

Si riconduce facilmente al caso precedente.

La funzione cubica

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C;\ f'(\xi) = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$\frac{A(b^3-a^3)+B(b^2-a^2)+C(b-a)}{b-a} = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$A(b^2+ba+a^2) + B(b+a) + C = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$3A\xi^2 + 2B\xi = A(b^2+ba+a^2) + B(b+a)$$

Detto E il termine a destra dell'uguaglianza, siccome il Teorema della media per le derivate assicura l'esistenza di almeno uno ξ che soddisfi l'equazione, allora il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado

$$3A\xi^2 + 2B\xi - E = 0$$

è non negativo e le soluzioni si possono cercare attraverso la formula

$$\xi = -\frac{-2B}{6A} = -\frac{B}{3A}$$

nel caso in cui $\Delta = 0$, oppure mediante la formula

$$\xi = -\frac{-2B \pm \sqrt{\Delta}}{6A}$$

se $\Delta > 0$.

Nel caso particolare in cui B = C = D = 0 allora

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

Quest'ultimo risultato lo ritroveremo nell'applicazione del Teorema del valor medio per gli integrale relativamente alle funzioni quadratiche $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \quad (a \geq 0; b > a)$$

$$\sqrt{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

$$\xi = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4}$$

Nel caso in cui $a \geq 0; b > a$ non è complicato provare che $a < \xi < b$. Si ha

$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{\xi} > \sqrt{a} \rightarrow \xi > a$$
$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \frac{\sqrt{b}+\sqrt{b}}{2} = \sqrt{b} \rightarrow \sqrt{\xi} < \sqrt{b} \rightarrow \xi < b$$

Nel caso particolare in cui a = 0 allora

$$0 < \xi = \frac{b}{4} < b$$

che è accettabile perché interno all'intervallo [a; b].

2.2 – Applicazione del teorema valor medio per gli integrali

Applicazione del Teorema della media per gli integrali definiti relativo a funzioni del tipo f(x) = Ax + B

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax+b)\,dx = A\xi_* + B$$
$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{Ax^2}{2} + Bx\right]_a^b = A\xi_* + B$$
$$\frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{A(b^2-a^2)}{2} + B(b-a)\right] = A\xi_* + B$$
$$\frac{A(b+a)}{2} + B = A\xi_* + B$$
$$\xi_* = \frac{a+b}{2}$$

Applicazione del Teorema della Media per gli integrali definiti relativo a funzioni del tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, dove A, B e C sono numeri reali e A è diverso da 0.

Consideriamo i seguenti casi:

Caso : B = C = 0

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax^2)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}(b^3-a^3)\right] =$$
$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{A}{3}\cdot(b-a)(b^2+ba+a^2) = \frac{A}{3}\cdot(b^2+ba+a^2)$$
$$f(\xi) = A\xi^2$$
$$A\xi^2 = \frac{A}{3}\cdot(b^2+ab+a^2)$$
$$\xi_* = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

N.B. Il radicando ha sempre significato per ogni a e b reale. E' facile mostrare che la funzione

$$\varphi(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

ammette minimo assoluto nel punto (0;0), e quindi $\varphi(x,y) = x^2 + xy + y^2 \geq \varphi(0,0) = 0$ per ogni x e y reali. Determiniamo gli eventuali zeri delle derivate parziali prime di $\varphi(x,y)$:

$$\begin{cases}\varphi_x = 2x + y\\ \varphi_y = x + 2y\end{cases};\quad \varphi_x(0,0) = \varphi_y(0,0) = 0$$

L'unico zero delle derivate parziali prime è O(0,0).
Calcoliamo l'Hessiano della funzione $\varphi(x,y)$:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix}\varphi_{xx} & \varphi_{xy}\\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 3 > 0$$

Essendo $H(0,0) = 3 > 0$; $\varphi_{xx}(0;0) = 2 > 0$, allora O(0,0) è il minimo assoluto di $\varphi(x,y)$.

Si pone il problema di verificare se $\xi \in\,]a;b[$. Nel caso in cui $a \geq 0,\ b > a$, il punto ξ è sicuramente interno ad [a; b]. Infatti

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} > \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \sqrt{3}\,|a| = \sqrt{3}\,a > a;$$

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} < \sqrt{\frac{3b^2}{3}} = |b| = b.$$

Nel caso particolare in cui a = 0 (e quindi b > 0) allora $\xi = \frac{b}{\sqrt{3}} < b$, soluzione accettabile perché interna ad [0; b] . Più complicato analizzare il caso in cui a < 0 < b. Ad esempio sia $[a; b] = [-a; a]$, con a > 0. Otteniamo

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2-a^2+a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot|a|}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{3} < a$$

e quindi la soluzione ξ è esterna ad $[a; b]$.

Osserviamo che, per ogni a e b reali positivi, a < b, vale la disuguaglianza

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

Infatti, la precedente disuguaglianza è equivalente alle seguenti

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} < \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$3a^2+6ab+3b^2 < 4a^2+4ab+4b^2$$

$$0 < 2ab < a^2+b^2$$

$$0 < (a-b)^2$$

Definizione: Una funzione continua M: $R_+^2 \rightarrow R$ si dice che è una media di due numeri a e b se e solo se

M1) $min\{a,b\} \leq M(a,b) \leq max\{a,b\}$
M2) $M(a,b) = M(b,a)$
M3) $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$
per ogni $a, b, \ \lambda \in R_+$.
Osserviamo che le funzioni

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, M(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

soddisfano le condizioni M1, M2, M3, con $A(a,b) < M(a,b)$.

Caso : B = 0

$$f(x) = Ax^2 + C$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax^2 + C)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}x^3 + Cx\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}(b^3 - a^3) + C(b-a)\right] =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) + C(b-a)\right]$$

$$= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + C$$

$$f(\xi) = A\xi^2 + C$$

$$A\xi^2 + C = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2) + C$$

$$\xi_* = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

Caso : C = 0

$$f(x) = Ax^2 + Bx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax^2 + Bx)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b-a)(b+a)\right]$$

$$= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a)$$
$$f(\xi) = A\xi^2 + B\xi$$
$$A\xi^2 + B\xi = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a)$$

Posto $D = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a)$, l'equazione in ξ diventa $A\xi^2 + B\xi - D = 0$. Poiché per il Teorema della media per gli integrali è assicurata l'esistenza di almeno uno ξ che sia soluzione dell'equazione allora il discriminante $\Delta = B^2 - 4A(-D) = B^2 + 4AD \geq 0$. Le soluzioni saranno, nel caso in cui $\Delta = 0$, due radici reali e coincidenti, date da $\xi_* = -\frac{B}{2A}$, e nel caso in cui $\Delta > 0$, saranno fornite dalla formula $\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$.

N.B. Qualora fosse $[a; b] = [-a; a]$ avremmo $D = \frac{Aa^2}{3}$, da cui $\Delta = B^2 + 4AD = B^2 + \frac{4A^2a^2}{3} > 0$, e si ottengono sicuramente due radici reali e distinte.

Caso : B e C sono non nulli

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a)\right]$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b - a)(b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b - a)(b + a) + C(b - a)\right]$$
$$= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a) + C$$

$$f(\xi) = A\xi^2 + B\xi + C$$
$$A\xi^2 + B\xi + C = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a) + C$$
$$A\xi^2 + B\xi = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a)$$

Si procede allora come nel caso precedente (C = 0).

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,dx = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D$$
$$\frac{1}{b-a}\left[\frac{A}{4}(b^4 - a^4) + \frac{B}{3}(b^3 - a^3) + \frac{C}{2}(b^2 - a^2) + D(b-a)\right]$$
$$= A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D$$
$$\frac{A}{4}(b+a)(b^2+a^2) + \frac{B}{3}(b^2 + ba + a^2) + \frac{C}{2}(b+a) + D$$
$$= A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D$$

Posto

$E = \frac{A}{4}(b+a)(b^2+a^2) + \frac{B}{3}(b^2 + ba + a^2) + \frac{C}{2}(b+a)$,

occorre risolvere l'equazione

$$A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D - E = 0$$

le cui possibili soluzioni reali possono essere anche tre.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0;\ a \geq 0; b > a)$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{x}\ dx = \sqrt{\xi}\,(a \geq 0; b > a)$$
$$\frac{1}{b-a} \cdot \left[x^{3/2}\right]_a^b = \sqrt{\xi}$$
$$\frac{1}{b-a} \cdot \left(b^{3/2} - a^{3/2}\right) = \sqrt{\xi}$$
$$\xi_* = \left(\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b-a}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b-a}\right)^2$$

Nel caso particolare in cui a = 0 allora $\xi_* = b$, che è da scartare perché la soluzione coincide con l'estremo destro del dominio della funzione. Pertanto, ai fini dell'esistenza di ξ, occorre supporre a > 0.

2.3 - Confronto tra i due teoremi

Eseguiamo un confronto tra le soluzioni trovate applicando i due teoremi.

Funzione	Soluzioni mediante il Teorema valor medio per le derivate	Soluzioni mediante il Teorema valor medio per gli integrali definiti
$f(x) = e^x$	$\xi = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b-a}\right)$	$\xi_* = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b-a}\right)$
$f(x) = Ax + B$	$\forall\ \xi \in]a;b[$	$\xi_* = \frac{a+b}{2}$
$f(x) = Ax^2$	$\xi = \frac{a+b}{2}$	$\xi_* = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$
$f(x) = Ax^2 + C$	$\xi = \frac{a+b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^2 + Bx$	$\xi = \frac{a+b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^2 + Bx + C$	$\xi = \frac{a+b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	$3A\xi^2 + 2B\xi - E = 0$	$A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D - E = 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\xi = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$	$\xi_* = \left(\frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b-a}\right)^2$

3- Conclusioni

Abbiamo visto che nel presentare alcuni controesempi accadono cose molte curiose anche in semplici funzioni quali $f(x) = Ax^2$

e cioè che applicando il Teorema del valor medio per le derivate esiste un unico punto che lo soddisfa ed è dato dalla media aritmetica $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ degli estremi dell'intervallo [a;b] dove è definita la funzione; invece, applicando il Teorema della media per gli integrali definiti, una sconosciuta media $M(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$ degli estremi dell'intervallo [a;b] è soluzione, con A(a,b) < M(a,b) e così via...

Tra i due teoremi intercorre una proprietà più profonda. E' stato dimostrato (Kung Kuen Tse, 1921) che se a < b ed f è una funzione analitica, e se esiste un punto ξ che soddisfa contemporaneamente i due teoremi allora f deve essere una funzione lineare oppure una funzione esponenziale.

Bibliografia

Kung Kuen Tse (1921). A Note on the Mean Value Theorems. *Advances in Pure Mathematics, Scientific Research Publishing,* Vol. 11, No. 5, *pp.* 395-399 .


ARTE SCIENZA
magazine
Alberto Macchi, Alessandra Spalletta, Anna Dell'Agata,
Antonio Castellani, Armando Adolgiso, Attilio Sommella, Claudia Mignone,
Fulvio Guerrieri, Giorgio Parisi, Isabella de Paz, Luca Nicotra,
Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Patrizia Audino,
Piergiorgio Paterlini, Pierluigi Assogna, Sergio Pennisi, Stefano Torossi,
Susanna Schimperna, Ugo Locatelli, Viola Spicuglia
PENSIERO CREATIVO: ARTE O SCIENZA?
ANIMA MUNDI E FUSIONE NUCLEARE
LE CASE DEGLI ASSASSINII
IL LATO UMANO DEI NUMERI PRIMI
LA SETE SA COS'È L'ACQUA
SCATENATORI DI PACE
ECOLOGIA: SIAMO ANCORA IN TEMPO
Anno III - N. 4 2022 - Supplemento di ArteScienza
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'A. P.S. "Arte e Scienza"