Periodico di Matematica (IV) Vol. V (1) marzo 2023, pp. 43-56

Dalla duplicazione del quadrato all'n-plicazione del d-politopo

Manuela Condelli* Fabrizio Mancinelli**

* Docente nel Liceo Scientifico "Amedeo di Savoia", Pistoia;
manuela.condelli@posta.istruzione.it
** Docente nel Liceo Statale "Niccolò Forteguerri", Pistoia;
fabrizio.mancinelli@posta.istruzione.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.105

Sunto: *Il problema classico della duplicazione del quadrato, citato da Platone nel suo dialogo Menone, ha sempre rappresentato un esempio di come un ragionamento guidato, partendo dall'intuizione, possa condurre ad una dimostrazione formale di una proposizione o una proprietà. In questo lavoro viene proposta una generalizzazione del problema classico che, attraverso esperienze didattiche guidate, conduce alla relazione tra il d-spigolo di una figura a d dimensioni e quello di una figura, nello stesso d-spazio, avente un d-volume che è n volte quello di partenza.*

Parole Chiave: *Solidi platonici, iperspazio.*

Abstract: *The classical problem of the square duplication, cited even by Plato in his dialogue Meno, has always resembled an example of how a guided reasoning, starting from intuition, may lead to a formal demonstration of a proposition or a property. In the present work, through guided activities, a generalisation of the* *classical problem is proposed, which leads to a relationship between the d-edge of a d-dimensional figure and the one having n-times the d-volume, in the same d-space.*

Keywords: *Platonic solid, hyperspace.*

1 - Introduzione

La prima notizia che abbiamo del problema della duplicazione del quadrato è presente nel dialogo *Menone* di Platone, la cui stesura risale al periodo cosiddetto "giovanile" del filosofo, intorno all'inizio del IV secolo a.C. In esso il protagonista Socrate faceva utilizzo del suo metodo maieutico per far nascere dalla mente stessa di un servitore, completamente ignorante in geometria, la soluzione del problema della duplicazione dell'area di un quadrato di lato assegnato. Il metodo socratico, favorito dalla visualizzazione delle figure, si alterna con quello euristico-dinamico: il servitore, investito del ruolo di scopritore, analizza la figura, procedendo per gradi e, mediante successive intuizioni, tentativi e verifiche, arriva alla conquista del concetto.

Nell'ambito delle scienze matematiche, la geometria è quella che meglio si presta ad un approccio "estensivo", ovvero che metta in rilievo i collegamenti mirando a un approfondimento concettuale, prima che tecnico, delle conoscenze matematiche. [De Marchis et al.]. Nell'insegnamento estensivo della matematica si propone di dare più spazio ad attività che permettano di sperimentare la logica della scoperta, riducendo quello dedicato all'esposizione assiomatica della teoria [Brigaglia et al.].

Il percorso didattico da noi proposto prende per l'appunto le mosse dal medesimo problema della duplicazione del quadrato e, favorendo la produzione di congetture e la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni, prosegue verso successive generalizzazioni. Attraverso la manipolazione di figure geometriche si arriva a comprendere il significato di segni ed operazioni algebriche; passando attraverso un percorso di "scoperta" e costruzione si arriva a dimostrazioni formali.

Un riferimento importante, soprattutto riguardo l'aspetto della generalizzazione, ci è stato fornito da un intervento della prof.ssa Tonia Olivello, recentemente scomparsa, sul teorema di Pitagora nell'ambito della Scuola Interuniversitaria Campana di Specializzazione all'Insegnamento, VIII Ciclo: è a lei che dedichiamo questo lavoro.

Il percorso può essere rivolto a studenti di scuola superiore frequentanti il primo biennio, che abbiano già conoscenza dei numeri naturali e razionali, e abbiano dimestichezza nella manipolazione di espressioni algebriche; devono inoltre conoscere il teorema di Pitagora e le proprietà dei poligoni regolari; si suppone infine che già conoscano l'operazione dell'estrazione di radice.

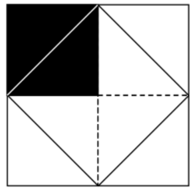
2 - La n-plicazione del quadrato

2.1 – Duplicazione del quadrato

SOCRATE: Dunque avrà una conoscenza senza che nessuno gli abbia insegnato, ma grazie a delle semplici domande, avendo recuperato lui da se stesso la conoscenza? (Platone, "Menone")

Il percorso non può che iniziare con la lettura in classe di passi scelti del dialogo platonico in cui viene presentato il problema della duplicazione del quadrato. Senza arrivare alla conclusione, si stimola subito l'intuizione degli allievi seguendo i ragionamenti di Socrate su carta quadrettata: si costruisce un quadrato avente lato pari, ad esempio, a 10 quadratini. Ovviamente l'area del quadrato sarà pari a 100 quadratini; pertanto, un quadrato di area doppia dovrà contenere 200 quadratini. Come lo schiavo del racconto platonico, gli allievi verificheranno rapidamente che raddoppiando il lato del quadrato iniziale, e portandolo quindi a 20 quadratini, si otterrà un quadrato di area 400 quadratini, ovvero quattro volte quella iniziale. Una conseguenza immediata di questo ragionamento intuitivo è che ci si aspetta che il lato del quadrato cercato abbia il lato compreso tra 10 e 20 quadratini: invitando ad effettuare altri tentativi si verifica che non esiste un numero intero di quadratini in quell'intervallo che soddisfi la condizione, poiché un lato di 14 quadratini è "troppo corto" ed uno di 15 quadratini "troppo lungo". Da qui la congettura che, per raddoppiare l'area di un quadrato di lato assegnato non si può ragionare sulla lunghezza dei lati; bisogna riflettere sull'area stessa.

Un quadrato di lato doppio fornisce area quadrupla: quindi metà dell'area del quadrato iniziale, moltiplicata per quattro, fornirà il doppio dell'area di partenza, che è ciò che vogliamo ottenere. Un modo per dividere esattamente a metà un quadrato è lungo la sua diagonale; sovrapponendo il quadrato iniziale a quello di lato doppio come indicato in figura e tracciando le diagonali, con semplici considerazioni



geometriche si può congetturare la soluzione del problema, ovvero che *il quadrato di area doppia ha come lato la diagonale del quadrato di partenza.*

Con semplici passaggi algebrici si può anche fornire una dimostrazione formale della congettura; chiamiamo l il lato e A l'area del quadrato di partenza, l' il lato e A' l'area del quadrato di area doppia. Si ha infatti:

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = 2A \Rightarrow (l')^2 = 2l^2 \Rightarrow l' = \sqrt{2}\, l,$$

ricordando che la diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}$ volte il lato.

2.2 – n-plicazione del quadrato

La semplice formalizzazione mostrata è indipendente dalle considerazioni geometriche intuitive con le quali è iniziato il ragionamento, e forniscono anche la base per una prima generalizzazione del risultato. Se infatti ci si pone la domanda "*dato un quadrato di una certa area, quanto è lungo il lato del quadrato che possiede area tripla?*", si può dedurre la risposta direttamente con una dimostrazione formale senza ricorrere a ragionamenti intuitivi. Seguendo il ragionamento precedente:

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = 3A \Rightarrow (l')^2 = 3l^2 \Rightarrow l' = \sqrt{3}\, l$$

Estendendo il procedimento ad un qualsiasi multiplo dell'area di partenza, si deduce facilmente la relazione che risponde alla domanda "*dato un quadrato di una certa area, quanto è lungo il lato del quadrato che possiede un'area n volte quella di partenza?*":

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = nA \Rightarrow (l')^2 = nl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{n}\, l$$

2.3 – Duplicazione del poligono regolare

Osservando che il quadrato è un poligono regolare di quattro lati, un livello successivo di generalizzazione può essere ottenuto ponendosi un quesito simile relativo ad un altro poligono regolare: "*dato un poligono regolare di lato assegnato, trovare il lato del poligono simile avente area doppia*". Come prima, partiamo da un ragionamento di tipo intuitivo scegliendo dei poligoni regolari specifici. In un triangolo equilatero, ad esempio, ricordando che l'altezza è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ volte il lato, l'area sarà $A = \frac{l \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, mentre per il triangolo di area doppia (utilizzando la precedente convenzione degli apici) si potrà scrivere:

$$A' = \frac{l' \cdot l' \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = (l')^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 2A = 2l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

da cui si ha immediatamente $l' = \sqrt{2}\, l$, ritrovando la stessa relazione tra i lati che c'è per il quadrato.

Anche per l'esagono, ricordando dalla geometria elementare che l'area si ottiene moltiplicando il perimetro per l'apotema (che nel caso dell'esagono è l'altezza di uno dei 6 triangoli equilateri in cui può essere suddiviso, ciascuno con il lato uguale a quello dell'esagono stesso) diviso 2, si ritrova lo stesso risultato: $A = \frac{6l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = l^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}$; mentre per l'esagono di area doppia:

$$A' = \frac{6l' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l'}{2} = (l')^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2A = 2l^2 \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

da cui di nuovo $l' = \sqrt{2}\, l$. Sembra quindi che la relazione tra il lato di un poligono regolare e quello simile di area doppia sia sempre la stessa. Di questa congettura si può ricavare una dimostrazione osservando che l'area di qualunque poligono regolare si può calcolare moltiplicando il quadrato del lato per un "fattore di forma" k caratteristico di ciascun poligono ($k = \frac{\sqrt{3}}{4}$ per il triangolo equilatero, $k = 1$ per il quadrato e così via).

Allora si ha:

$$A = kl^2; A' = k(l')^2 = 2A = 2kl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{2}\, l,$$

per cui possiamo affermare che, in generale, *il lato del poligono regolare di area doppia di quella del poligono simile di lato assegnato è $\sqrt{2}$ volte il lato assegnato.*

2.4 – n-plicazione del poligono regolare

Arrivati a questo punto viene spontaneo chiedersi se la relazione di n-plicazione del quadrato trovata in precedenza valga anche per i poligoni regolari. La risposta è ovviamente positiva:

$$A = kl^2; A' = k(l')^2 = nA = nkl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{n} \cdot l.$$

3 - La n-plicazione del cubo

3.1 – Duplicazione del cubo

> *[Un oracolo] aveva imposto agli abitanti di Delo di raddoppiare l'altare di forma cubica, dedicato al dio. Il quesito aveva generato aporia negli "architetti", che ne avevano cercata la soluzione, sicché i Deli avevano cercato consiglio presso Platone, che aveva interpretato l'oracolo come un rimprovero del dio agli Elleni di trascurare la geometria e un invito a occuparsene, non tanto come un'espressione del desiderio del dio di avere un altare doppio. (Eratostene, "Platonico")*

Il problema della duplicazione del cubo è uno dei tre problemi classici dell'antichità, che è stato dimostrato essere irrisolvibile con riga e compasso: la proposta per il prosieguo dell'attività è di affrontarlo con lo stesso schema seguito in precedenza, ovvero partendo da considerazioni intuitive con supporto laboratoriale per poi giungere alla formalizzazione.

In questo caso, si farà uso di pasta per modellare, che presenta il vantaggio di essere sostanzialmente incomprimibile e quindi di conservare il volume. Seguendo il racconto di Eratostene, si verifica se raddoppiando lo spigolo del cubo, raddoppi anche il suo volume. Si modellano quindi con la pasta due cubi con lo stesso spigolo, ed uno del doppio dello spigolo assegnato. Fondendo insieme i due cubi uguali a formarne un terzo, questo avrà un volume uguale al doppio di quello del singolo cubo; se la congettura è giusta, il cubo risultante dalla fusione dev'essere uguale a quello di spigolo doppio. Con una misura anche grossolana si riscontra subito che il i due cubi non hanno lo stesso volume e quindi la congettura è errata, e può anche essere dimostrato facilmente:

$$V = l^3; V' = (l')^3 = (2l)^3 = 8l^3 = 8V \neq 2V$$

Dall'osservazione dei solidi, si può supporre che lo spigolo del cubo di volume doppio di quello del cubo di spigolo dato sia compreso tra lo spigolo dato ed il suo doppio. Si potrebbero avanzare ulteriori congetture, magari immaginando che sia coinvolto il fattore $\sqrt{2}$ come nel piano, ma a questo punto il più solido schema dimostrativo dovrebbe essere chiaro:

$$V = l^3, V' = (l')^3, V' = 2V \Rightarrow (l')^3 = 2l^3 \Rightarrow l' = \sqrt[3]{2}\, l,$$

che risolve il problema della duplicazione del cubo; si osserva anche che, come congetturato, il rapporto tra lo spigolo del cubo di volume doppio e quello dato è un numero compreso tra 1 e 2 (la cosiddetta *costante delica*, in ricordo della leggenda).

3.2 – n-plicazione del poliedro regolare

Così come nel caso del quadrato si è estesa l'operazione di duplicazione dell'area anche ad altri poligoni regolari, ci si chiede adesso se sia possibile trovare un'analoga relazione generale sulla duplicazione (e, in generale, sull'n-plicazione) dei poliedri regolari. Occorre tener presente che mentre i poligoni regolari sono in numero infinito, i poliedri regolari sono solo i cinque cosiddetti "solidi platonici", ovvero tetraedro, cubo o esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Analogamente ai poligoni, per ciascuno di essi è possibile ricavare una relazione per il calcolo del volume in cui esso è espresso come il cubo dello spigolo per un fattore di forma caratteristico del poliedro in questione:

$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3$ (tetraedro)

$V_E = s^3$ (cubo o esaedro)

$V_O = \frac{\sqrt{2}}{3} s^3$ (ottaedro)

$V_D = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} s^3$ (dodecaedro)

$V_I = \frac{5(3+\sqrt{5})}{4} s^3$ (icosaedro)

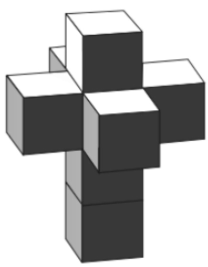
ovvero, in generale $V = Ks^3$. Questa considerazione conduce rapidamente alla relazione tra lo spigolo di un poliedro regolare il cui volume sia *n* volte quello del poliedro simile di spigolo dato:

$$V = Ks^3; V' = K(s')^3 = nV = nKs^3 \Rightarrow s' = \sqrt[3]{n} \cdot s$$

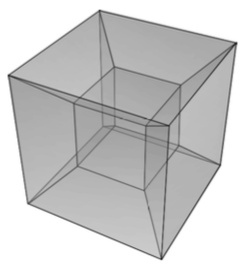
4 - Generalizzazione iperdimensionale

4.1 – Quattro dimensioni: il tesseratto

La generalizzazione ulteriore del problema può essere immaginata considerando le figure analoghe al quadrato e al cubo di dimensioni maggiori alla terza: tali figure prendono il nome di *n-cubi* (in quest'accezione, un quadrato è un *2-cubo* e l'esaedro un *3-cubo*); ovviamente tali figure non possono essere rappresentate ma solo vagamente immaginate, potendo l'essere umano percepire solo lo spazio tridimensionale. Cominciamo col considerare il 4-cubo: per dare un'idea di tale figura, detta *tesseratto*, si è soliti visualizzarne lo svolgimento



Svolgimento tridimensionale del tesseratto



Proiezione bidimensionale del tesseratto

tridimensionale oppure una proiezione bidimensionale.

Di questo si può definire l'ipervolume, ovvero il prodotto della lunghezza delle sue 4 dimensioni, come $I = i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4$, dove i ovviamente è l'iperspigolo. Ci si chiede quindi quanto vale l'iperspigolo di un tesseratto di ipervolume n volte quello del tesseratto di iperspigolo dato:

$$I = i^4, I' = (i')^4, I' = nI \Rightarrow (i')^4 = ni^4 \Rightarrow i' = \sqrt[4]{n}\, i$$

Viene naturale chiedersi la relazione analoga tra gli spigoli degli equivalenti quadridimensionali dei poliedri regolari, che sono chiamati 4-politopi e sono in numero di sei [Coxeter]. Con considerazioni sul loro ipervolume del tutto analoghe a quelle effettuate per i 2-politopi (i poligoni regolari) e i 3-politopi (i poliedri regolari), si giunge alla stessa relazione che si è trovata per l'n-plicazione del tesseratto.

5.2 – n-plicazione del d-politopo

Per quanto sia necessario uno sforzo immaginativo davvero imponente per visualizzare una figura ad *n* dimensioni, è matematicamente possibile spingere all'estremo il livello di generalizzazione del problema di cui si è discusso finora; il che conduce anche al massimo livello di astrazione che può essere affrontato solo dal punto di vista formale.

Si definisce dunque un *d-politopo*[1], ovvero un poliedro regolare in d dimensioni, ed il relativo *d-spigolo* i_d; il suo *d-volume* I_d sarà definito come $I_d = \kappa(i_d)^d$, con κ fattore di forma. Iterando i semplici procedimenti algebrici mostrati nei casi precedenti si può trovare la relazione che risponde alla domanda: "*quanto vale il d-spigolo del d-politopo il cui d-volume è n volte quello del d-politopo simile di spigolo dato?*":

$$i'_d = \sqrt[d]{n}\, i_d$$

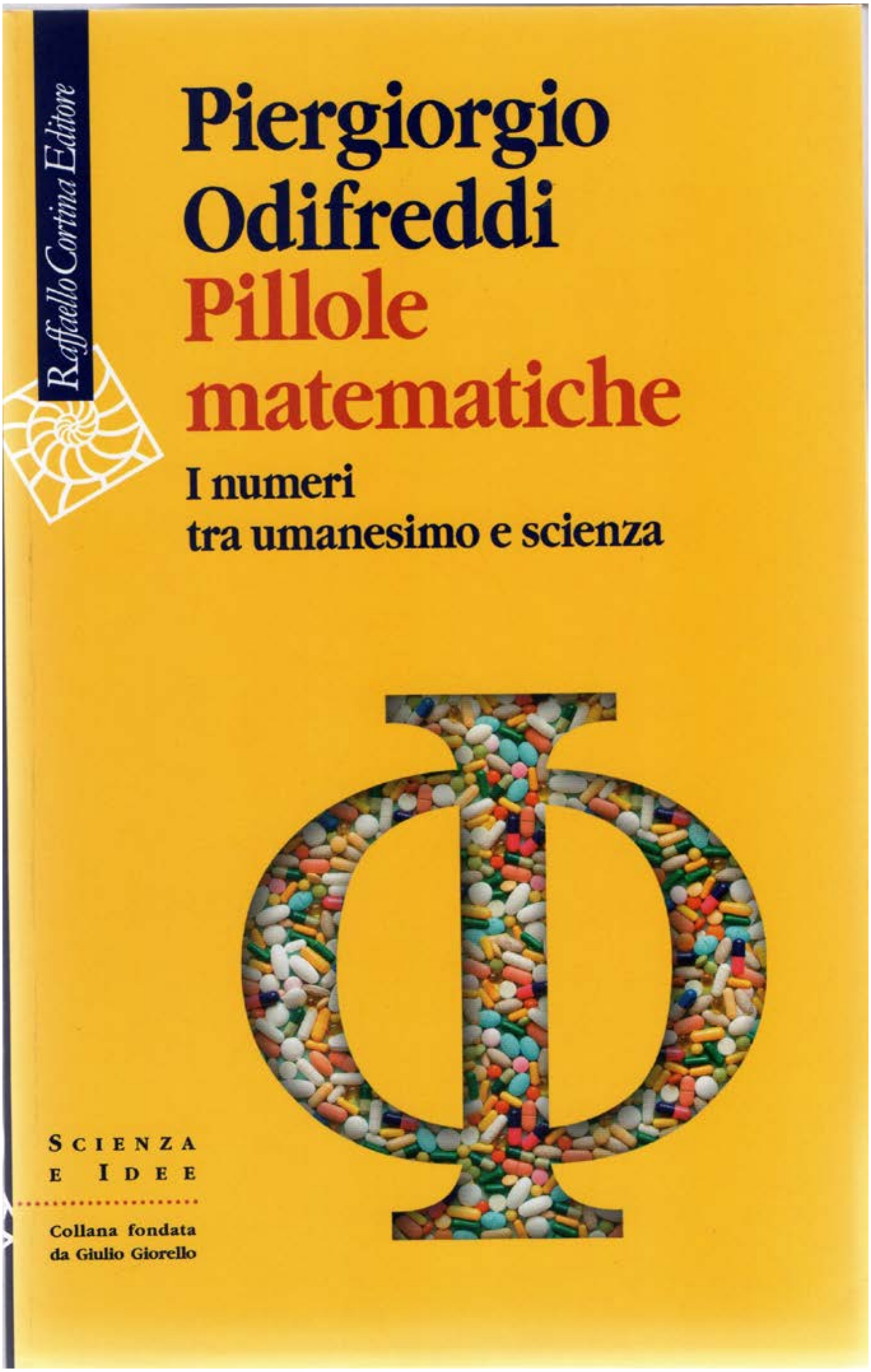
[1] per $d \geq 5$ i d-politopi sono sempre in numero di tre [Coxeter]

Bibliografia

De Marchis M., Menghini M., Rogora E. (2020). The importance of "Extensive teaching" in the education of prospective teachers of Mathematics. *Proceedings of 19th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2020. Bratislava : Slovak University of Technology. pp. 344-353*.

Brigaglia A., Raspanti M.A., Rogora E. (2020). Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *arXiv:2012.05881*.

Coxeter H.S.M. (1973). *Regular Polytopes*. Mineola (NY): Dover Publications.


Raffaello Cortina Editore
Piergiorgio
Odifreddi
Pillole
matematiche
I numeri
tra umanesimo e scienza
Φ
SCIENZA
E IDEE
Collana fondata
da Giulio Giorello