Periodico di Matematica (IV) Vol. V (1) marzo 2023, pp. 57-82

Dal pensiero spaziale alla geometria e alla fisica

Alessandro Amabile * , Emilio Balzano*, Pietro Piccialli* , Rodolfo Figari **, Giancarlo Artiano***

* Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini" - Università Federico II di Napoli
Email: alessandro.amabile@unina.it; emilio.balzano@unina.it; pietro.piccialli@gmail.com;
** GSSI, L'Aquila
Email: rodolfo.figari@protonmail.com
*** Dipartimento di Matematica e Fisica - Università degli Studi della Campania Vanvitelli
Email: giancarlo.artiano@unicampania.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.106

Sunto*: La presenza precoce delle capacità spaziali del bambino, che è in grado di analizzare ed elaborare le informazioni spaziali derivanti dall'esplorazione tattile e visiva, può essere inquadrata in una prospettiva evolutiva legata all'importanza del movimento e dell'orientamento. Favorire queste capacità è fondamentale per lo sviluppo del ragionamento spazio-temporale, delle abilità linguistiche e della matematica, in particolare della geometria. In Italia la geometria (in particolare quella dello spazio) è largamente trascurata a scuola. Ciò provoca danni allo sviluppo cognitivo e genera difficoltà nella comprensione dei concetti scientifici. Partendo da alcune riflessioni sui rapporti tra geometria, fisica e realtà si presentano attività che sperimentiamo da anni e che, concentrandosi sulla modellazione geometrica dei fenomeni fisici, consentono di sviluppare competenze sia in fisica sia sugli aspetti formali della geometria. Un'enfasi particolare nelle* *nostre proposte è posta sulle trasformazioni geometriche, sugli invarianti e sulla possibilità di definire geometrie diverse.*

Parole Chiave*: Pensiero spaziale, geometria, fisica*

Abstract*: The early presence of the spatial capabilities in children can be framed in an evolutionary perspective due to the adaptive importance of movement and orientation for living beings. The child's innate ability to analyze and process spatial information deriving from vision must be trained for the development of spatio-temporal reasoning, linguistic and mathematical skills, especially geometry. In Italy geometry (in particular space geometry) is largely neglected in school. This causes damages to cognitive development and generates difficulties in understanding scientific concepts. Starting from some reflections on the relationship between geometry, physics and reality, we present some activities that we have been experimenting for years: focusing on the geometric modeling of physical phenomena, they allow us to develop skills both in physics and on the formal aspects of geometry. A crucial role in our proposals is played by geometric transformations, with a special emphasis on invariants and on the possibility of defining different geometries.*

Keywords*: Spatial thinking, geometry, physics*

1 – Il Pensiero Spaziale e la Geometria

Come nel caso dello sviluppo della conoscenza dei numeri, ricerche recenti hanno dimostrato che, contrariamente al punto di vista di Piaget, i bambini sono in grado molto precocemente di codificare informazioni spaziali su oggetti, forme, distanze, posizioni e relazioni spaziali. Il pensiero spaziale, come il pensiero numerico, sembra quindi essere radicato in abilità innate che si manifestano presto nella vita (Dehaene, 2010). I bambini percepiscono somiglianze tra oggetti tridimensionali e fotografie di questi. Sono in grado di riconoscere aspetti invarianti di una forma mostrata da diverse angolazioni. La rotazione mentale (la capacità di visualizzare e manipolare il movimento di oggetti bidimensionali e tridimensionali) e la visualizzazione spaziale (tenere a mente una forma e trovare forme in figure più complesse, combinare forme o far coincidere orientamenti) sono abilità spaziali fondamentali per la geometria. Ricerche recenti hanno mostrato che bambini in età infantile possono ruotare mentalmente forme nel piano dell'immagine per determinare se un'immagine è uguale a un'altra (NRC, 2009; NAP, 2021, Maquet et al., 2022; Raju et al., 2022; Sciences & Education 1992). Anche se non siamo gli unici essere viventi ad avere abilità visuospaziali, per noi esseri umani tali abilità sono potenziate attraverso l'uso di sistemi simbolici: già in età prescolare abbiamo un linguaggio grafico che ci aiuta a sviluppare diverse rappresentazioni dello spazio come *mappe* e *diagrammi*, e a spostare e trasformare mentalmente gli oggetti nello spazio. Da qui la grande intuizione di Seymour Papert con il linguaggio del LOGO (con o senza computer) (Papert, 1980). Il bambino si immedesima nella tartaruga, simbolo del LOGO, che diventa il suo corpo, e usando un riferimento relativo con pochi movimenti di base può costruire percorsi fantasiosi o mirati alla soluzione di problemi. In questo modo le immagini di movimento si trasformano in figure geometriche che nella loro costruzione dinamica permettono di familiarizzare con le proprietà delle figure piane e con le regole (i comandi) per realizzarle. Un esempio di problema aperto che mira alla ricerca di una regola generale (che può formalizzarsi nella “dimostrazione” di un teorema) è quello della somma degli angoli (interni ed esterni) di poligoni convessi e concavi in funzione del numero dei lati. Il LOGO, utilizzato con successo in tutto il mondo, è stato il precursore di diversi ambienti di programmazione di tipo grafico ispirati alla stessa teoria costruzionista dell'apprendimento. Un esempio è *Scratch,* utilizzato oggi nelle nostre scuole primarie in attività che possono integrare, arte, scienza, matematica e programmazione.

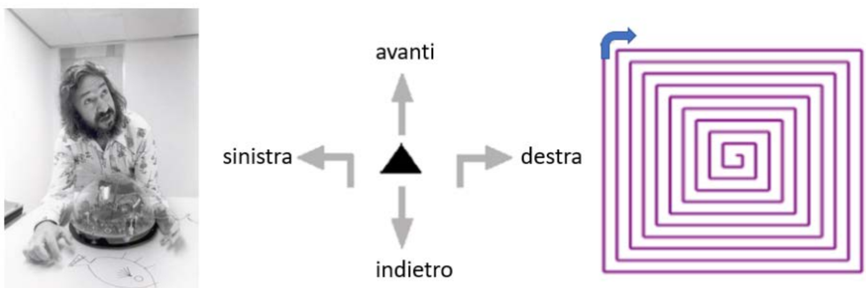


Fig. 1 - Papert allo MIT con la sua tartaruga semovente che può essere telecomandata e lasciare traccia del suo percorso. Nella versione al computer la tartaruga è rappresentata sullo schermo da una freccetta orientata. Il bambino si identifica con la tartaruga e la muove con pochi comandi di base che dà a se stesso. La figura che ottiene può essere di fantasia o legata a un compito aperto di geometria.

2 – L'insegnamento della Geometria

2.1 – La Geometria innata

Sempre più le ricerche in campo educativo e sullo sviluppo cognitivo si intrecciano con quelle delle neuroscienze offrendo nuovi scenari e prospettive nella comprensione dei processi di apprendimento in relazione a quelle che sono oggi identificate come abilità innate. Per quanto riguarda la matematica tali abilità riguardano sia il riconoscimento di numeri piccoli che il controllo della spazialità, con abilità che sembrano fare riferimento alla capacità dei neonati di riconoscere pattern significativi come proprietà di traiettorie, conservazione delle quantità, di distinguere tra numerosità di piccole collezioni di oggetti, tutte che permettono l'esplorazione e l'appropriazione degli ambienti in cui sono immersi. (Dehaene, 2019) Lo studio in questi campi coinvolge non solo neonati e bambini, ma anche adulti di popolazioni non esposte a programmi di insegnamento della matematica.

Il gruppo di ricerca guidato da Pierre Pica e Stanislas Dehaene (Deahene et. al. 2006) ha studiato la tribù amazzonica dei Munducuru per conoscere le loro abilità di geometria. Si tratta di un contesto di grande interesse culturale, perché in totale assenza di una specifica formazione (scolastica) in matematica:

> *La lingua mundurucu contiene solo numeri approssimativi. Non contiene molti termini geometrici come quadrato, triangolo o qualcosa del genere, e non c'è modo di dire che due rette sono parallele... sembra che la lingua non abbia questo concetto (P. Pica).*

La ricerca ha coinvolto ventidue adulti e otto bambini utilizzando una serie di dialoghi e situazioni con domande sulla geometria. Collocandoli davanti a gruppi di sei figure ciascuno, i nativi erano invitati a scegliere quelli che avessero una forma geometrica, come un triangolo rettangolo o figure che avessero all'interno linee parallele o simmetrie. Nonostante non ci fossero termini nella loro lingua che esprimessero il concetto di triangolo o di parallele (o di altri concetti geometrici), i bambini di sei anni erano in grado di riconoscere figure geometriche, con più o meno la stessa percentuale di risposte corrette dei loro coetanei del mondo occidentale. Inoltre, inaspettatamente, i Mundurucu erano più abili degli occidentali quando i test prevedevano l'attività su una superficie sferica (come forma sferica veniva usata una zucca). Su una sfera, rette apparentemente parallele possono intersecarsi, una situazione che il Mundurucu hanno intuito più degli intervistati francesi e americani. Ciò mostra che il modo comune di insegnare la geometria euclidea attraverso regole e proprietà che non tengono conto del suo campo di validità può davvero ingannarci:

> *L'insegnamento della geometria euclidea è così importante che diamo per scontato che si applicherà sempre, anche su superfici sferiche. La nostra educazione ci porta a credere a cose che non sono corrette (P. Pica).*

L'esperienza condotta dal gruppo di ricerca parigina con i Mundurucu indica che le nostre intuizioni sulla geometria di base sono innate e inoltre che "*Non sembra esserci un nesso di causalità: si ha conoscenza della geometria e non è perché si possa esprimere in linguaggio*" (P. Pica) [1].

---

1 https://www.unicog.org/publications/IzardPicaSpelkeDehaene_EuclideanGeometryMunducucu_PNAS2011.pdf

Fig. 2 - Adulti e bambini dei Munducuru alle prese con il concetto di angolo.

Questa e altre ricerche mostrano che gli esseri umani adulti, i bambini e gli animali sono sensibili alle proprietà geometriche dello spazio e utilizzano queste proprietà per riconoscere oggetti e forme o per navigare nell'ambiente. Questi risultati sono supportati dalla sempre più approfondita conoscenza di circuiti neurali e da sistemi di riferimento "mentali" che forniscono un sistema di coordinate approssimativamente piatto per lo spazio.

2.2 – La Geometria Euclidea

A partire dall'osservazione delle regolarità delle forme, dalle simmetrie e dall'organizzazione dello spazio naturale e artificiale, sin dagli *Elementi* di Euclide lo studio della geometria si fonda sul *metodo ipotetico-deduttivo*. Come sottolineato da Lucio Russo, la "novità" degli *Elementi* di Euclide rispetto alla precedente geometria greca consiste nella costruzione di una struttura logica unitaria basata su poche ipotesi iniziali, sulla costruzione progressiva di nuove *figure* e sulla deduzione di *teoremi* che stabiliscono le proprietà di tali figure. In questo modo, molti risultati e catene dimostrative già note (alcune delle quali risalenti probabilmente alla matematica pitagorica) vennero ridotte a conseguenze di un numero ristretto di premesse elementari esplicitamente individuate. Una simile struttura logico-deduttiva si offre evidentemente come una palestra che permette di acquisire metodo di ragionamento e senso critico, abilità estremamente importanti tanto nell'insegnamento scientifico quanto per lo sviluppo di competenze logiche, linguistiche e argomentativo, nel lavorare sul rapporto tra causa ed effetto, nel distinguere tra fatti, inferenze e deduzioni. Purtroppo, però, svuotata del processo che porta alla costruzione del modello e alla *teoria*, la geometria euclidea è ridotta, nel migliore dei casi, a un piacere per pochi "eletti", che per molti altri non è nient'altro che un terrificante insieme di "dimostrazioni" autoreferenziali e completamente scollegate dalla realtà; di qui il luogo comune tra gli insegnanti della secondaria di primo grado secondo cui la geometria non sarebbe capita dagli studenti perché "troppo difficile". Secondo Lucio Russo, un aspetto importante del lavoro di Euclide "risiede nel rapporto chiaro ed esplicito tra la teoria geometrica e la pratica del disegno con riga e compasso… i concetti teorici così generati mantengono naturalmente un chiaro rapporto con gli oggetti concreti da cui sono stati astratti (e questo ne garantisce l'applicabilità della teoria), ma non possono essere confusi con loro" (Russo et al., 2017). Pensiamo che occorrerebbe partire proprio dai processi di costruzione dei modelli (di Euclide per la geometria, di Galilei e di Newton per la dinamica) per coinvolgere gli studenti nell'avvincente gioco della conoscenza matematica e scientifica. Riteniamo anche che una ricostruzione storica dello sviluppo della geometria a partire dalla testimonianza di Erodoto, dai contributi di Talete, Pitagora, Euclide, fino alle riflessioni di Poincaré dovrebbe far parte dei programmi di matematica:

> *È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria sia una scienza sperimentale... La geometria... non si occupa di solidi naturali, ma di figure ideali, assolutamente invariabili. Questi corpi ideali sono costruzioni complete della nostra mente e l'esperienza fornisce solo un'occasione che ci spinge a tirarli fuori. (Henri Poincaré).*

Poincaré e ancor di più Hilbert concepiscono la geometria come una disciplina sempre più astratta in cui contano la correttezza del ragionamento e la coerenza di un sistema formale. A nostro avviso, coinvolgendo gli studenti anche sugli aspetti che riguardano l'evoluzione del pensiero e dei metodi della matematica nel corso dei secoli c'è la possibilità di far riflettere sul rapporto tra *intuizione* (legata all'esperienza e al ragionamento spaziale) e *sistema formale*, ovviamente trattato in modo adeguato in relazione all'età e al contesto di insegnamento. Non è quello che in generale si fa nell'insegnamento della geometria a scuola, ma tale impostazione potrebbe aiutare a creare un ponte tra discipline diverse, con la storia e la filosofia, e d'accordo con il punto di vista di Russo, coinvolgere gli studenti sul rapporto tra teoria-modello e realtà in matematica e in fisica.

2.3 – Modelli di Insegnamento della Geometria

L'insegnamento della geometria è stato fortemente influenzato dalle idee di Piaget e Inhelder (1979), che nel libro

La rappresentazione dello spazio nel bambino distinguono tra lo spazio "percettivo", ovvero quello percepito dal bambino attraverso l'attività sensomotoria, e quello "rappresentativo", riferito allo spazio che il bambino può rappresentare con l'uso del linguaggio. In particolare, si individua una sequenza di tre stadi coinvolgenti relazioni *topologiche*, *proiettive* e infine *euclidee* intorno all'età di dodici anni. Nel 1986 i coniugi van Hiele svilupparono una teoria evoluzionistica nell'apprendimento-insegnamento con una distinzione tra geometria intesa come concettualizzazione dello spazio e geometria come teoria formale. Da qui la necessità di individuare un percorso di apprendimento e di insegnamento della geometria che risulti efficace nel tener conto dello sviluppo progressivo delle competenze dell'allievo. Alla base della proposta didattica di van Hiele c'è la constatazione che l'insegnamento che non mette al centro l'esperienza fallisce (P. van Hiele, 1959):

> *Lo studente impara a memoria ad operare con relazioni [matematiche] che non comprende, e di cui non ha visto l'origine…. Quindi il sistema di relazioni è una costruzione indipendente che non ha alcun rapporto con altre esperienze del bambino. Ciò significa che lo studente conosce solo ciò che gli è stato insegnato e ciò che ne è stato dedotto. Non ha imparato a stabilire connessioni tra il sistema e il mondo sensoriale. Non saprà come applicare ciò che ha imparato in una nuova situazione.*

Nel modello evoluzionistico di van Hiele sono individuati cinque livelli gerarchici:

1. **Visualizzazione,**

2. Analisi,
3. Astrazione,
4. Detrazione,
5. Rigore.

In contrasto con la teoria dello sviluppo cognitivo di Piaget, che è dipendente dall'età, per van Hiele il bambino deve in primo luogo «fare molte esperienze» (in classe o in altri contesti) per passare a un livello successivo. Con esperienze significative, i bambini possono raggiungere il livello 2 nella scuola primaria. Il ruolo delle esperienze nel legare realtà e modelli è fondamentale in tutte le età: in assenza di esperienze ricche e mirate, molti adulti (inclusi gli insegnanti) rimangono al livello 1 per tutta la vita, anche se seguono un corso formale di geometria nella scuola secondaria. Il modello di insegnamento di Van Hiele ha subito diverse integrazioni ed è oggi alla base di diverse proposte sull'insegnamento della matematica in particolare negli Stati Uniti.

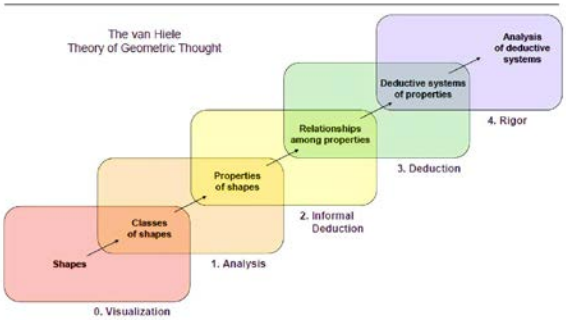


Fig. 3 - I cinque livelli di apprendimento della geometria nel modello evolutivo di van Hiele

2.4 – La Geometria Intuitiva di Emma Castelnuovo

Un contributo fondamentale all'insegnamento della matematica è stato dato da Emma Castelnuovo. Figlia di Guido Castelnuovo (a cui è intitolato il Dipartimento Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma), Emma Castelnuovo faceva parte del prestigioso gruppo di matematici romani a cui afferivano, tra gli altri, Enriques e Severi[2]. La Castelnuovo scelse di insegnare nell'allora scuola media e rivoluzionò in modo radicale l'insegnamento della matematica in generale e della geometria euclidea in particolare, realizzando testi scolastici di grande successo e sviluppando che profonde riflessioni sulla didattica della matematica. A nostro avviso il suo contributo si caratterizza soprattutto per l'ideazione di esperienze e di supporti didattici che permettono di sviluppare l'intuito geometrico necessario alla comprensione graduale del sistema formale della geometria. Particolare attenzione è dedicata nel suo metodo alla realizzazione delle trasformazioni di figure con l'utilizzo di macchine matematiche costruite con materiali di uso comune. Ad esempio, con l'utilizzo di materiale mobile, realizzato con bacchette forate, fili ed elastici, lo studente ha l'opportunità di definire enti geometrici a partire dai corrispondenti oggetti reali e di confrontare casi particolari con casi limite, familiarizzando con la ricerca degli elementi invarianti che sono alla base delle costruzioni delle diverse geometrie (E. Castelnuovo):

> *È, infatti, la mobilità che attira l'attenzione del bambino e lo conduce dal concreto all'astratto, perché non è il*

[2] La storia dell'Istituto Matematico Guido Castelnuovo | Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo (uniroma1.it)

materiale che è l'oggetto della sua attenzione, ma piuttosto la sua trasformazione, un'operazione che, essendo indipendente dal materiale stesso, è astratta. A nostro avviso, il materiale provoca ispirazione [...] per l'allenamento operativo.[3]

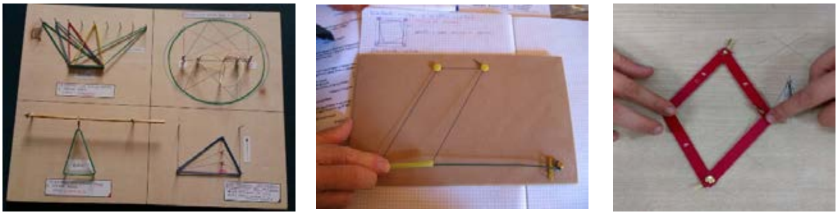


Fig. 4 - La trasformazione di figure geometriche realizzate con materiali di uso comune aiuta a sviluppare intuito e a costruire concetti lavorando anche con situazioni limite

È interessante notare come l'approccio della Castelnuovo possa essere inquadrato in quello sforzo teorico teso alla ricerca della relazione, nei processi di apprendimento, tra il concreto e il modello geometrico, tra la rappresentazione e il concetto, tra un figura disegnata e il modo di utilizzarla per argomentare, verificare e dimostrare. Fischbein ha sviluppato la teoria dei concetti figurativi. Le figure geometriche rappresentano concetti figurali con proprietà spaziali (forma, posizione e grandezza) e concetti legati all'astrazione, alla generalizzazione e a casi ideali (Fischbein, 1993)[4]:

[3]http://www.mce-fimem.it/pubblicazioni/la-biblioteca-di-emma-castelnuovo/

[4] Un approfondimento con ricchi riferimenti bibliografici è disponibile in [Microsoft Word - cap6Sbaragli_Mammarella def.doc (unibo.it)]

Una figura geometrica può essere descritta come dotata di proprietà intrinsecamente concettuali. Tuttavia, una figura geometrica non è un concetto puro. È un'immagine, un'immagine visiva. Ha una proprietà che i concetti usuali non hanno, cioè include la rappresentazione mentale delle proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurative.

E questa simultaneità richiede da parte dello studente uno sforzo di comprensione su ciò che la figura rappresenta nelle diverse configurazioni che può assumere. La fusione e l'integrazione tra percezione sensoriale e concetto è «una situazione ideale, estrema, che vincoli psicologici non permettono di raggiungere completamente sempre» (Fischbein, 1993). Concetti e immagini sono due categorie distinte: i concetti sono rappresentazioni "ideali", le immagini sono rappresentazioni "sensoriali". Nel ragionamento geometrico, tuttavia, queste due entità non sono del tutto indipendenti: in una dimostrazione, ad esempio, alcuni passaggi vengono eseguiti come se gli oggetti fossero reali, anche se vengono utilizzate informazioni concettuali (D'Amore, Duval, 2019):

Di fronte a una figura geometrica, non è sufficiente sapere quale proprietà è data, o avere delle conoscenze su che cosa essa rappresenti, per "vedere" e poterla usare. Bisogna per prima cosa riconoscere visivamente tutte le configurazioni possibili che essa offre allo sguardo dato che, in matematica, riconoscere implica che si possa convertire spontaneamente una rappresentazione da un registro a un altro

3 – Modellizzazione Geometrica in Fisica

Alla base della nostra proposta e delle esperienze che presentiamo come esempio c'è il tentativo di collegare sempre, a tutti i livelli di istruzione, l'esplorazione della fenomenologia e la formalizzazione matematica con linguaggi e strumenti adeguati all'età e al contesto.

3.1 – Le Ombre e le Trasformazioni Geometriche

Il rapporto tra fenomeni luminosi e geometria è stato indagato fin dall'antichità. Lo stesso Euclide sviluppa *nell'Ottica* una teoria ipotetico-deduttiva della visione diretta. La propagazione rettilinea della luce e in particolare la fenomenologia della formazione delle ombre offrono la possibilità di coinvolgere gli studenti nella costruzione e nello studio di modelli geometrici e nell'uso di concetti trasversali tesi a riconoscere proprietà invarianti nelle trasformazioni. Le trasformazioni geometriche sono corrispondenze biunivoche tra i punti di un piano o dello spazio e si possono classificare in base agli invarianti in trasformazioni *topologiche*, *proiettive*, *affini*, *simili* e *isometriche*. È interessante notare che ciascuno dei suddetti insiemi di trasformazioni può essere collegato a vaste aree di fenomenologia fisica, legate ad esempio all'elasticità, all'ottica e al moto di corpi rigidi. Ciascun insieme, con l'operazione di composizione, assume la struttura di *gruppo* e la caratterizzazione del grupp (commutatività, presenza di punti uniti ecc.) ha importanti implicazioni nella costruzione dei modelli matematici e delle teorie che descrivono le fenomenologie fisiche. Seguendo la visione unitaria di Klein, espressa nel celebre *Programma di Erlangen* del 1872, le diverse geometrie, precedentemente presentate in modo indipendente, si possono distinguere sulla base del gruppo di trasformazioni e degli invarianti corrispondenti. In questa visione le proprietà geometriche delle figure non sono determinate dalla forma della figura ma dalle trasformazioni che possono agire su di essa, sicchè la geometria diventa lo studio delle proprietà invarianti rispetto ad un ben definito gruppo di trasformazioni.

Un gruppo di trasformazioni che può essere studiato anche con alcuni aspetti formali fin dalla scuola secondaria di primo grado è quello delle affinità. Le trasformazioni topologiche e le trasformazioni proiettive possono essere analizzate con la ricerca degli invarianti con esperienze (foglio di gomma, ombre con sorgente puntiforme) che ne enfatizzano gli aspetti qualitativi. Per le trasformazioni affini è possibile lavorare con le equazioni di diverse trasformazioni (traslazioni, simmetrie, contrazioni, omotetie, ecc.) che appaiono facilmente comprensibili nella gestione del piano cartesiano, e si possono operare composizioni significative come ad esempio contrazioni/dilatazioni lungo i due assi coordinati. Nel biennio della secondaria di secondo grado l'argomento può essere di grande supporto allo studio di sistemi di equazioni lineari. Come suggerito da *School Mathematics Project*[5] lo studio di corrispondenze studiate

[5] Lo School Mathematics Project (Cambridge University Press, 1965) è un progetto inglese nato nel 1961 sotto la spinta di un gruppo di studiosi di matematica. Gli esempi, le figure, gli esercizi di cui si compongono i testi sono presi dalla vita reale, ogni caratteristica geometrica, topologica, algebrica è costruita sotto forma di modello. La traduzione italiana è stata curata dall'Unione Matematica Italiana. *SCHOOL MATHEMATICS PROJECT* - Zanichelli

geometricamente è poi di aiuto alla comprensione di concetti fondamentali come quello di funzione.

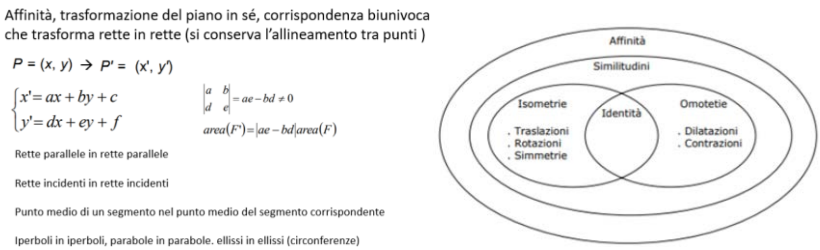


Fig. 5 - Uno schema delle proprietà invarianti delle trasformazioni affini e la struttura in sottogruppi con alcune trasformazioni che si studiano fin dalla scuola primaria

Per le affinità nel piano due equazioni lineari consentono di ottenere molte trasformazioni studiate a scuola e di sviluppare negli anni argomenti interessanti per la fisica e la matematica: geometria affine e calcolo vettoriale, teoria dei gruppi, geometrie non euclidee e relatività. Lo studio della formazione delle ombre alla luce del Sole e in presenza di una sorgente che può essere considerata puntiforme è, come è stato detto, un'attività che sperimentiamo da anni dalla scuola dell'infanzia fino agli ultimi anni della secondaria ed è trattato con cura nella formazione degli insegnanti (sia iniziale che in servizio). Nel solco degli approcci dello *School Mathematics Project*, della Castelnuovo, di Lombardo Radice, di Prodi lo studio delle trasformazioni geometriche può giocare a nostro avviso un ruolo cruciale per coinvolgere gli studenti nella ricerca degli invarianti.

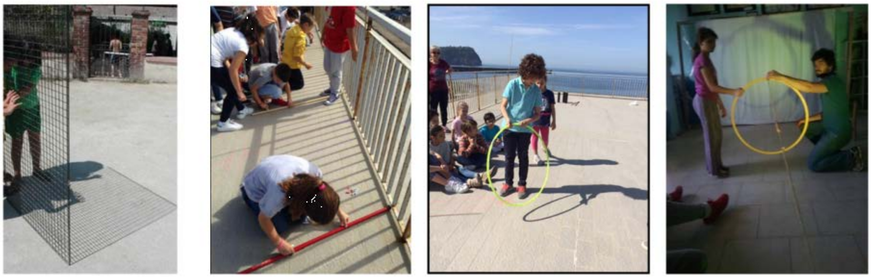


Fig. 6 - Lavoro con le ombre alla luce del Sole e in aula con una torcia

3.2 – Le Mappe e la Geometria della Superficie Sferica

Gli studenti sono coinvolti in attività con mappe geografiche e mappamondi (anche di grandi dimensioni). Il problema delle proiezioni risulta molto intrigante ed è un’occasione per insistere sul significato di modello, sulle sue specifiche caratteristiche e sul modo in cui le rappresentazioni risultino efficaci per gli scopi previsti. Ad esempio si confrontano per una città la mappa della metropolitana e quella geografica. Per la validità della geometria euclidea sulla superficie terrestre si discute la misura fatta da Gauss nel 1820 e si lavora anche con rappresentazioni e misure con Google Maps e con Google Earth.

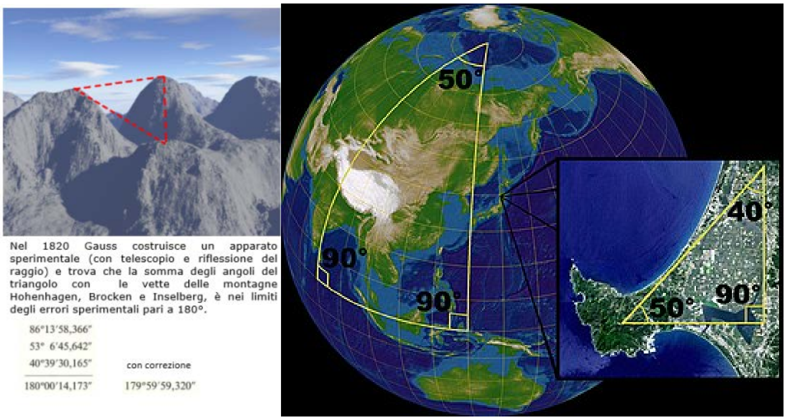


Fig. 7 - La misura di Gauss sulle montagne in Austria (il lato più lungo del triangolo con vertici le vette è 107 km) e misure su mappe con triangoli le cui dimensioni variano in relazione al raggio terrestre permettono di lavorare sulla validità e i limiti della geometria euclidea

Utilizzando un grande mappamondo si ricostruiscono le rotte degli aerei che sono archi di circonferenze massime e si ha l'opportunità di lavorare con la geometria della superficie sferica. In un triangolo sferico la somma degli angoli interni è sempre maggiore di 180° ma l'eccesso non è costante: più il triangolo è piccolo, rispetto al raggio della sfera, più l'eccesso diminuisce e il triangolo tende ad essere piano. E ciò aiuta a cogliere il senso della validità e dei vincoli della geometria euclidea. Quando possibile si lavora anche sul teorema di Eulero sull' area dei triangoli sferici[6]

[6] Geometria della sfera (uniroma2.it)

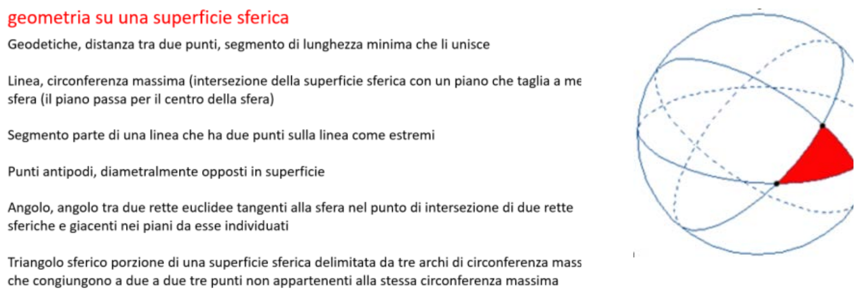


Fig. 8 - Alcune definizioni di enti geometrici sulla superficie sferica e la figura di un triangolo sferico

E' anche interessante coinvolgere gli studenti sulla validità della geometria euclidea nell'Universo. La parallasse di una stella è p = ½ (180° - $\alpha - \beta$), con la "Prova di Schwarzschild", se lo spazio è euclideo $\alpha + \beta < 180°$

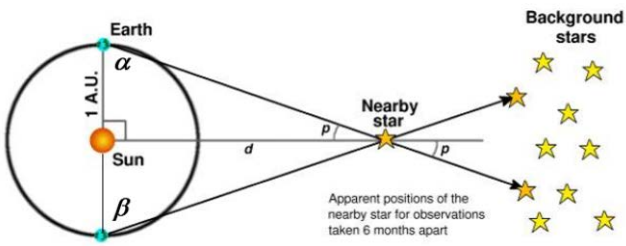
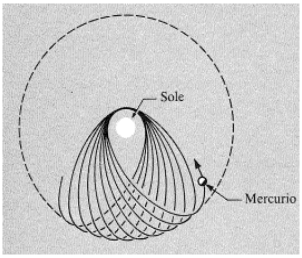


Fig. 9 - Il metodo della parallasse per misurare distanze di stelle mostra la validità della geometria euclidea nell'Universo.

3.3 – La Relatività e la Geometria

La geometria euclidea risulta valida a grandi distanze astronomiche, ma secondo la Relatività Generale (RG) essa non descrive correttamente le proprietà dello spazio fisico in prossimità di grandi masse. Due prove classiche della validità della RG sono la precessione anomala del perielio di

Mercurio e la deviazione della luce. La RG prevede correttamente una lenta rotazione dell'asse maggiore dell'orbita di Mercurio pari a circa 0,00119 gradi per secolo, laddove il valore stimato da Leverrier sulla base della meccanica newtoniana era di 0,00117 gradi per secolo. Nel 1919 Eddington e collaboratori osservarono durante un'eclissi totale del Sole la deflessione della luce di stelle vicine al Sole sulla sfera celeste, il primo grande successo sperimentale per la teoria di Einstein.



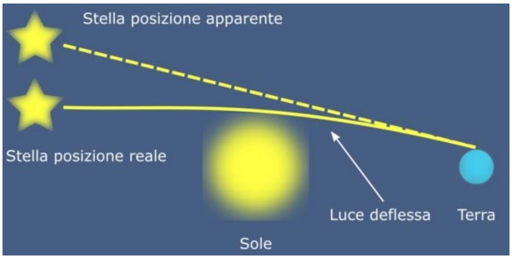


Fig. 10 - Due prove classiche della teoria della relatività generale: la precessione anomala dell'orbita di mercurio e la deflessione della luce.

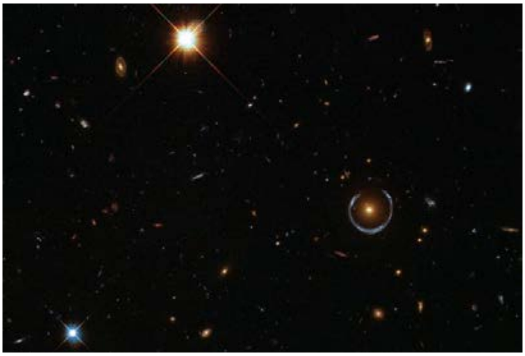


Fig. 11- L'anello in questa immagine è creato dalla lente gravitazionale per la presenza della galassia rossa (al suo centro), che distorce l'immagine di una lontana galassia blu molto più distante (ingrandita perché troppo debole). Credit: ESA/Hubble & NASA

Immagini recenti mostrano in modo spettacolare la presenza di lenti gravitazionali. Questi argomenti più avanzati sono da noi trattati nei corsi di formazione docente e nel corso universitario di *Didattica della Fisica*. Una sperimentazione che abbiamo realizzato con studenti liceali sul rapporto tra geometria e fisica è descritta nel lavoro di tesi del Prof. Ivano Vettigli, disponibile tra le risorse didattiche del sito LES.[7]

La relazione tra geometria e fisica si arricchisce di significato trattando i concetti chiave della relatività con dettagli che tengono conto dello specifico contesto didattico. In ogni caso, pensiamo che nell'insegnamento della fisica moderna nell'ultimo anno della secondaria di secondo grado andrebbero privilegiati pochi ma significativi concetti di meccanica quantistica e relatività, avendo cura di lavorare negli anni precedenti alla costruzione di modelli interpretativi e matematici che promuovano una visione unitaria della fisica. Ritornando agli aspetti storici ed epistemologici ci piace condividere con gli studenti una riflessione di Whittaker del 1949:

Da tempo immemorabile il fisico e il matematico hanno lavorato sulla base del tacito accordo... Il matematico doveva iniziare prima e analizzare le proprietà dello spazio e del tempo costruendo le scienze primarie della geometria e della cinematica (moto puro); poi... il fisico è entrato in scena con i personaggi del dramma -corpi materiali, magneti, cariche elettriche, ecc.- ed è iniziata la rappresentazione. Ma nella concezione rivoluzionaria di Einstein i personaggi creano la scena entrando nel dramma, la geometria non è più un antecedente della fisica ma è indissolubilmente fusa in

[7] Vettigli-Geometry_and_physics__a_didactic_proposal.pdf (unina.it).

un'unica disciplina. Le proprietà dello spazio nella relatività generale dipendono dai corpi materiali e dalle energie presenti.

4 – Discussione

In questo lavoro sono stati presentati in modo molto schematico alcuni esempi di attività discussi nel Convegno di Agerola. Gli esempi sulle traiettorie in campi gravitazionali e le curve generate con macchine e meccanismi non sono qui riportati. Abbiamo preferito dedicare una parte del lavoro alla riflessione sul modo in cui la geometria può essere trattata a scuola. Negli anni si è assistito ad un decadimento della qualità dei libri di testo sia in fisica che in matematica. Negli anni '60 sono stati prodotti significativi testi di Matematica e di Fisica. Per la matematica e in particolare per la geometria sono notevoli i testi dello *School Mathematics Project,* della Castelnuovo, di Lombardo Radice, di Prodi. Per la Fisica è prezioso il materiale prodotto e sperimentato del PSSC[8]. A proposito della matematica è significativo lo sconforto di Giovanni Prodi:

> *La traduzione dello School Mathematics Project in italiano era stata curata da alcuni esperti di grande cultura e prestigio nominati dall'Unione Matematica Italiana. E' stato un grosso danno che questa collana sia stata prematuramente mandata al macero. Questo destino è*

8 Il Corso di Fisica P.S.S.C. è nato nel 1956 e ha coinvolto centinaia di persone (diversi premi Nobel) delle migliori università americane. Il materiale didattico strutturato in testi per gli studenti, guide al laboratorio e per gli insegnanti e video è stato tradotto e adottato in molti paesi. *FISICA A CURA DEL PSSC* - Zanichelli

> *comune a molti esperimenti di testi di Matematica innovativi.*[9]

Ora i libri sono orientati prevalentemente alla risoluzione di problemi a scapito dell'approccio concettuale. Come spiegarsi questo fenomeno? Come contrastarlo?

9 Intervista a Giovanni Prodi | MATEpristem (unibocconi.eu)

Bibliografia

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Mary Montgomery Lindquist, Reston, Va.: National, 1987, 1-16.*

D'Amore, B. , Duval, R., *L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa*, https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2019/05/954-DAmore-DAmore-Duval-L%E2%80%99educazione-dello-sguardo-MD-2019-271.pdf

Dehaene, S. (2010), *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*. Raffaello Cortina Editore.

Dehaene S., Izard V., Pica P., Spelke E. (2006). Core knowledge of geometry in ad Amazonian indigen group. *Science, 311*.

Fischbein E., (1993). *The theory of figural concepts*, Educational Studies in Mathematics.

Maquet, Liam & Dunbar, Ronan & Buckley, Jeffrey & Seery, Niall & Sorby, Sheryl. (2022). A Review of The Literature To Inform the Efficacy of a Spatial Skills Intervention For *Secondary Level STEM Education.*

NAP-National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2021) Science and Engineering in Preschool Through Elementary Grades: *The Brilliance of Children and the Strengths of Educators*; *The* National Academies Press: Washington, DC, USA

National Research Council. (2009). Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity. Committee on Early Childhood Mathematics, Christopher T. Cross, Taniesha A. Woods, and Heidi Schweingruber, Editors. *Center for Education, Division of Behavioral and Social*

Papert, S. (1980) *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, New York: Basic Books.

Raju, Gibin & Sorby, Sheryl & Panther, Grace & Reid, Clodagh & Fisher, Luke. (2022). Using pupil dilation to measure cognitive load during a spatial skills test.

Russo, R., Pirro, G., Salciccia, M. (2017) *Euclide: il I libro degli Elementi*, Carocci Editore.

Sciences and Education. (1992). Washington, DC: The National Academies Press. Clements, D. H., Battista, M. T. Geometry and spatial reasoning. *In D. A. Grouws (a cura di) Handbook of research on mathematics teaching and learning(pp. 420-464). New York, (NY): England: Macmillan Publishing Co.*

Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010). L'apprendimento della geometria. In: Lucangeli D., Mammarella I.C., *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*. Franco Angeli.

Sir Edmund Whittaker, (1949) *Da Euclide a Eddington*, Cambridge University Press.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*, Academic Press: Orlando: Academic Press.