

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVIII - Serie IV – volume V(1)
marzo 2023**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

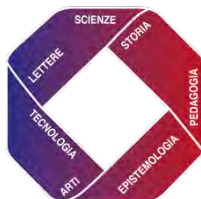
PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

**Anno XXXVIII - Serie IV – Volume V (1)
Marzo 2023**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-677-3

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di marzo 2023 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra <i>Elogio della matematica</i>	7
Ferdinando Casolaro, Giovanna Della Vecchia <i>Le rappresentazioni grafiche nella risoluzione dei problemi</i>	11
Cesare Palmisani <i>Un confronto tra i teoremi del valor medio</i>	29
Manuela Condelli, Fabrizio Mancinelli <i>Dalla duplicazione del quadrato all'n-plicazione del d-politopo</i>	43
Alessandro Amabile, Emilio Balzano, Pietro Piccialli, Rodolfo Figari, Giancarlo Artiano <i>Dal pensiero spaziale alla geometria e alla fisica</i>	57
Angela Donatiello, Francesco Laudano <i>Il Teorema di Pitagora "senza parole"</i>	83
Giuseppe Mangione <i>Marx tra Matematica e Dialettica</i>	99
Giuseppe D'angelo <i>Se le calotte polari si sciolgono...</i>	119
<i>Profili biografici degli autori</i>	151

Elogio della Matematica

Luca Nicotra*

*Ingegnere. Direttore Responsabile del «Periodico di Matematica»;
luca.nicotra1949@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.102



Sunto: *Elogio della Matematica*

Parole Chiave: *Matematica, elogio della matematica, Alessandro Padoa, verità.*

Abstract: *In praise of mathematics.*

Keywords: *Mathematics, praise of mathematics, Alessandro Padoa, truth.*

La Matematica, se potesse essere materializzata in un essere umano, così la immagino.

Una bella donna di età indefinita, perché la vera bellezza non conosce il tempo, di aspetto regale ma non altera, vestita con abito elegante ma sobrio, com'è la sua natura. Un abito che è plasmato soltanto dall'essenzialità della sua forma, perchè lei ama la schiettezza, aborrisce la retorica di merletti e ornamenti inutili.

Il suo linguaggio stesso è come il suo abito, essenziale, privo di sprechi di parole dette soltanto per apparire più di

quello che è, per salire su sgabelli onorifici di cui lei non ha bisogno, perché è già sul più alto di essi.

Non le piacerebbero stucchevoli elogi retorici, perché odia la retorica che è l'ancella della menzogna.

Il suo parlare è tanto schietto da abituare, chi la segue con attenzione, ad «esser cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare, chi ne è dotato, molto al disopra della maggioranza degli uomini», come acutamente e grande amore osservava un suo illustre discepolo, Alessandro Padoa.¹

Il suo parlare è tanto schietto da non pretendere di possedere un'unica verità, ma molteplici, forse infinite. Ma è tanto onesto, nello stesso tempo, da non concedere spazio a capziose discussioni all'interno di ciascuna di esse. Lascia liberi di scegliere, ma una volta fatta una scelta è inflessibile giudice del rispetto delle sue regole. Di lei ci si può fidare.

È una donna indipendente al massimo grado. Non le servono altre discipline, non le servono laboratori costosi dove poter progredire nella sua crescita con sofisticati esperimenti, non le serve neppure la memoria di date, nomi e nemmeno, in linea di principio, delle sue stesse formule, perché tutto è in grado di ricreare con un solo strumento: la ragione. Di null'altro ha bisogno se non di questa, di un foglio di carta e una penna.

L'economia è la sua qualità prima. Economia in tutto: strumenti materiali di comunicazione, parole, segni. Economia

¹ Alessandro Padoa, *Discorso pronunciato in occasione della distribuzione dei premi agli alunni delle scuole regie e civiche di Pinerolo*, 28 marzo 1908. Pinerolo. Tipografia Chiantone - Mascarelli, 1898, pagg. 16-18.

nei calcoli stessi, perché predilige le vie brevi. Un'economia che non è povertà ma, al contrario, ricchezza di contenuti, di idee, che possono essere apprezzati soltanto comprendendo a fondo il significato delle singole parole che profferisce, spoglie di inutili e fuorvianti arPELLI.

Come fare a non amare una donna così?



Le rappresentazioni grafiche nella risoluzione dei problemi

Ferdinando Casolaro* Giovanna Della Vecchia**

*Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»; ferdinando.casolaro@unina.it

** DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.103

Sunto: *Il presente lavoro intende rimarcare l'importanza delle rappresentazioni grafiche nell'insegnamento della Matematica e nell'interpretazione, in generale, dei problemi di Scienze applicate. Si farà una riflessione sul significato fisico delle costanti arbitrarie - relativamente all'integrazione indefinita - nei problemi di Meccanica classica e nella risoluzione del problema di Cauchy nel caso in cui la curva integrale sia rappresentata da una funzione non esprimibile elementarmente. Si faranno altresì alcune interessanti osservazioni, sempre di carattere grafico, sul confronto tra le aree di opportuni rettangoloidi calcolate con i metodi classici ed i risultati ottenuti con i noti metodi di integrazione.*

Parole Chiave: *Rappresentazioni grafiche; problemi di Scienze applicate.*

Abstract: *In this article we are suggesting a few observations about the importance of the graphic visual in order to teaching Mathematics and interpret some applied sciences problems; we are particularly dwelling on the physical meaning of the arbitrary constants - regarding indefinite integration - in the classical mechanics problems and on the resolution of a Cauchy problem, in the case the integral curve of the differential equation in the problem is not expressible elementarily. Some interesting observations will be made of graphic kind about the comparison*

between the areas of specific rectangles calculated by classical methods and the results obtained by the know integration methods.

Keywords: *Graphical representations; applied science problems.*

1 - Introduzione

Il presente lavoro intende dimostrare l'importanza e la funzione pedagogica dell'utilizzo dei grafici nell'insegnamento della Matematica quale metodologia didattica privilegiata, indispensabile anche al fine di interpretare correttamente i dati di un problema assegnato e trovare soluzioni in maniera più agevole verificando concretamente la correttezza delle argomentazioni addotte. L'utilizzo delle rappresentazioni grafiche deve costituire, a nostro avviso, ordinaria prassi didattica, anche per evitare che gli studenti possano vedere nella matematica una sterile applicazione di regole e formule preconfezionate: ciò li allontanerebbe dallo studio di questa disciplina straordinaria ma avvertita troppo spesso come arida, difficile e noiosa.

Si propongono alcuni esempi significativi utilizzabili alcuni in una scuola secondaria di secondo grado, altri in un corso universitario di Analisi Matematica.

2 - Dall'integrazione indefinita al problema di Cauchy nelle questioni di Fisica classica

Nello studio della Meccanica Classica, riferita a sistemi continui, si passa spesso da una grandezza ad un'altra, per deri-

vazione e integrazione della funzione che gestisce il fenomeno.

Già nello studio del moto si rileva che in ogni punto della traiettoria di una particella che, soggetta ad una forza F , subisce uno spostamento Δs in un intervallo di tempo Δt , la velocità si ottiene derivando la grandezza spazio rispetto alla variabile tempo; analogamente, l'accelerazione che la particella subisce per una qualsiasi variazione di velocità Δv , nel tempo Δt , si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo.

Viceversa, il passaggio dall'accelerazione alla velocità (che, nei limiti in cui si può considerare costante la massa, è equivalente al passaggio dalla forza alla variazione della quantità di moto) e dalla velocità allo spostamento, si ottengono, rispettivamente, per integrazione dell'accelerazione (o della forza) e della velocità rispetto al tempo.

In tal caso, nel calcolo delle primitive, *l'integrazione indefinita determina una classe di infinite funzioni che differiscono per una costante*. I grafici di tali funzioni si ottengono uno dall'altro per traslazione, cioè:

se $y = F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, un'altra primitiva $Y = G(x)$ si ottiene da $y = F(x)$ mediante la seguente traslazione:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \quad (2.1)$$

da cui si deduce che un problema di Fisica classica non è univocamente determinato da tali operazioni.

Ciò non crea problemi dal punto di vista fisico, perché sappiamo che *le leggi della Meccanica Classica sono invarianti per traslazione*, per cui lo studio del particolare fenomeno che ci inte-

ressa è legato ad altri aspetti, primo fra tutti *il problema delle condizioni iniziali di Cauchy*.

Analizziamo, ad esempio, il seguente problema relativo al secondo principio della dinamica:

Studiare il moto di un punto materiale P di massa m che si muove su una retta (asse x) sotto l'azione di una forza f dipendente dal tempo t , dalla posizione di P [ascissa $x(t)$ di P] e dalla velocità di P [coefficiente angolare $x'(t)$ della retta tangente alla traiettoria di P].

Tale problema, nei limiti in cui si può considerare costante la massa m , si traduce, nel seguente (Casolaro, 1995) :

$$f = ma \Leftrightarrow f[t, x(t), x'(t)] = mx''(t)$$

cioè:

$$x''(t) = \frac{1}{m} f[t, x(t), x'(t)] \quad (2.2)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine che ha per soluzioni una famiglia di curve, dipendenti da due parametri, c_1 e c_2 , che rigano l'intero piano.

È evidente che, nell'analisi di tale problema, non interessa la determinazione di tutti i possibili moti del punto P sotto l'azione della forza $f[t, x(t), x'(t)]$, ma è significativo lo studio di quel particolare moto nel quale il punto P parte, nell'istante t_0 , da un'assegnata posizione iniziale x_0 , con una data velocità iniziale v_0 ; ciò si traduce nella risoluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{1}{m} f[t, x(t), x'(t)] \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Geometricamente, le (2.3) richiedono di determinare una curva integrale che passi per il punto $P_0(x_0, y_0)$ e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare uguale a v_0 .

Tali condizioni ci permettono di determinare univocamente le costanti c_1 e c_2 , dette 'arbitrarie' ma impropriamente, perché nelle applicazioni esse dipendono esclusivamente dalle condizioni iniziali richieste: sono quindi strettamente legate al problema di Cauchy.

Pertanto, nell'introdurre il calcolo delle primitive, è opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta delle condizioni iniziali.

Ancora relativamente al problema di Cauchy, si può verificare che la risoluzione dell'equazione differenziale preveda il calcolo di un integrale che non sia esprimibile elementarmemente. In tal caso un grafico approssimativo della curva integrale richiesta può essere realizzato per altra via.

Si consideri, ad esempio, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

in cui l'integrale generale dell'equazione è espresso dalla formula:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left[\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \right] \quad (2.5)$$

e l'integrale presente non è calcolabile elementarmente (Casolaro 2021).

Si dovrà operare con i noti teoremi di integrazione per serie (sicuramente la scelta migliore per analizzare l'andamento locale della primitiva) dopo aver sviluppato in serie di potenze la funzione

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dal punto di vista didattico, riteniamo invece che, sempre nell'ottica di fornire competenze matematiche che consentano di visualizzare geometricamente le questioni analitiche, sia interessante fare alcune osservazioni che mettano in evidenza il legame tra le derivate del primo e del secondo ordine della funzione rappresentata dalla curva integrale da determinare e la funzione integranda, e analizzare i risultati graficamente. Ciò permette, tenendo conto della condizione iniziale di Cauchy, di avere un andamento approssimato della curva integrale richiesta dal problema.

Per comprendere la questione nella sua generalizzazione, sia

$$y' = f(x, y)$$

un'equazione differenziale del primo ordine, con $f(x, y)$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

L'equazione

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \quad [y' \\ = 0] \end{aligned} \quad (2.6)$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, eventuali punti estremanti o punti di flesso orizzontale delle curve integrali.

Nel caso dell'equazione

$$y' = 1 + xy$$

da:

$$y' = 0$$

si ha:

$$y = -\frac{1}{x} \quad (2.7)$$

che è il luogo dei punti a tangente orizzontale; nella regione di piano compresa tra i due rami di iperbole (fig. 2.1) ci saranno i tratti di curve integrali crescenti, nelle due regioni esterne all'iperbole i rami delle curve decrescenti.

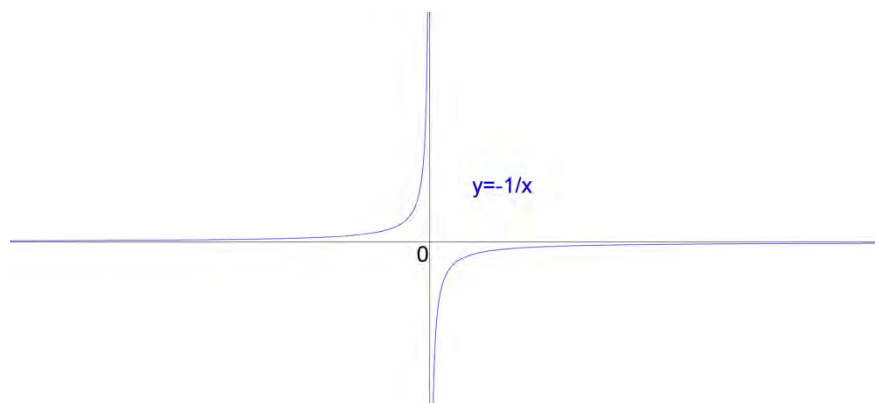


fig. 2.1

L'equazione:

$$y'' = 0 \quad (2.8)$$

con $y' \neq 0$, rappresenta il luogo dei punti di flesso non verticali.

Nel caso dell'equazione

$$y' = 1 + xy$$

da:

$$y'' = 0$$

si ha:

$$y + x + x^2y = 0$$

$$y = -\frac{x}{1+x^2} \quad (2.9)$$

Se sono verificate opportune condizioni si osserva che- il grafico della (2.9) divide il piano in due regioni: nella regione di piano (fig. 2.2) al di sopra del grafico sono situati i rami di curve integrali che volgono la concavità verso l'alto, nella regione al di sotto del grafico sono situati i rami che volgono la concavità verso il basso.

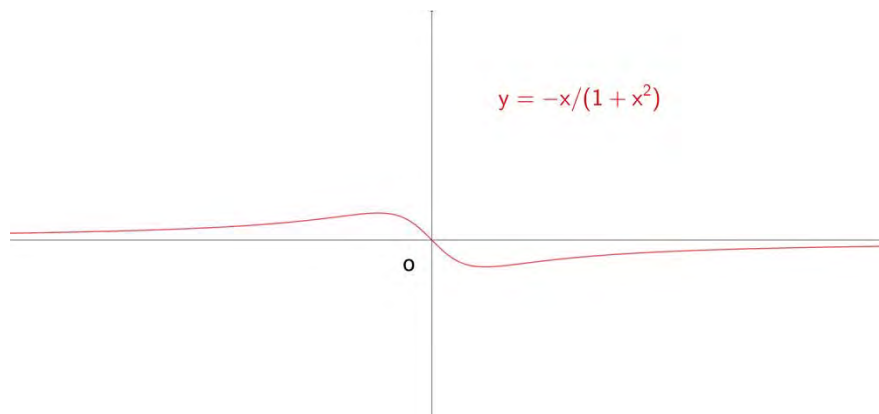


fig. 2.2

È evidente, allora, che la curva integrale che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (2.4) è localmente indivi-

duata, in un opportuno intorno di 0, analizzando i dati determinati (fig. 2.3).

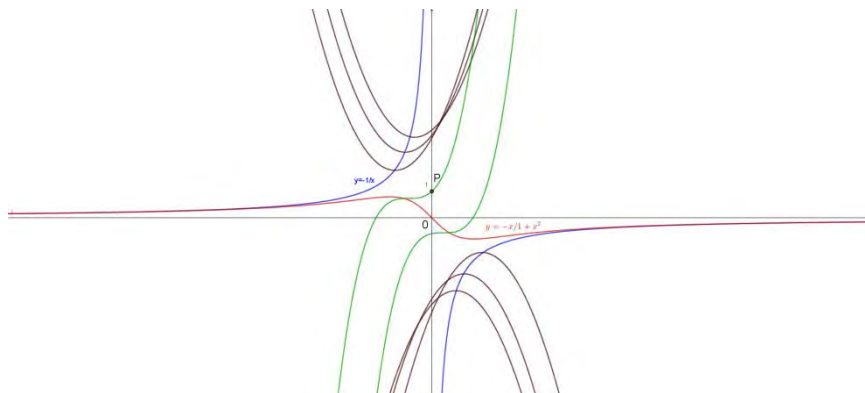


fig. 2.3

3 - La misura e i metodi di integrazione

Non sempre il calcolo dell'integrale di una funzione assegnata è immediato per cui nella risoluzione degli esercizi si ricorre spesso a trasformazioni anche troppo ricercate della funzione integranda o alle usuali regole di integrazione. In qualche caso può risultare utile ricorrere a semplici rappresentazioni grafiche.

3.1 - Integrazione per sostituzione

Nell'esempio che segue si intende proporre agli studenti la ricerca di un integrale indefinito, notoriamente svolta per sostituzione o per parti, con il solo ausilio di una appropriata rappresentazione grafica. Si consideri il seguente integrale:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

una primitiva della funzione integranda, che si determina usualmente per sostituzione, per $r = 1$ (condizione che non lede la generalità del problema) è:

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsen x$$

Ovviamente, operando per parti, con $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $df(x) = dx$, si perviene allo stesso risultato.

È interessante osservare che tale risultato può essere dedotto geometricamente osservando la figura 3.1 in cui è:

$$\varphi = \widehat{AB} = \arcsen x$$

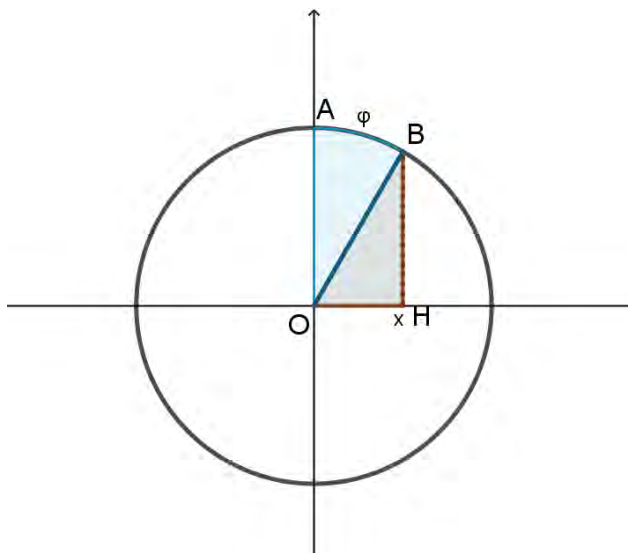


fig. 3.1

ed essendo $\overline{OB} = 1$:

$$Area AOB = \frac{1}{2} \arcsen x$$

$$Area OHB = \frac{1}{2} \overline{OH} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

Dalla figura, integrando tra 0 e x , risulta:

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

3.2 - Integrazione per parti

Relativamente al problema dell'integrazione per parti, si ritiene ancora una volta che il ricorso ad una rappresentazione grafica possa costituire una valida giustificazione della nota formula di risoluzione.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni di classe C^1 definite in un intervallo reale $[a, b]$ in modo che il luogo geometrico dei punti del piano di coordinate $[f(x), g(x)]$ individui una curva regolare Γ del piano nel riferimento Ouv , con $u = f(x)$ e $v = g(x)$.

Supponiamo inoltre che $f(x)$ e $g(x)$ siano entrambe strettamente monotone in $[a, b]$.

La variabile v può essere espressa in funzione di u e la curva Γ è il grafico di tale funzione, che risulta essere strettamente monotona. Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $f(x)$ e $g(x)$ siano strettamente crescenti e quindi v strettamente crescente rispetto ad u (fig. 3.2).

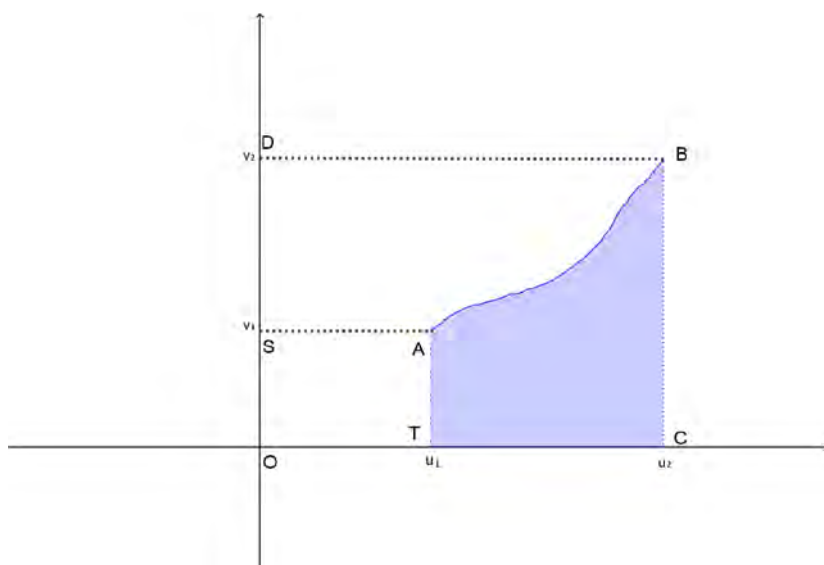


fig. 3.2

posto:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1) & v_1 &= v(x_1) \\ u_2 &= u(x_2) & v_2 &= v(x_2) \end{aligned}$$

si può osservare che:

$$Area(OCBD) = u_2 v_2 \quad Area(OTAS) = u_1 v_1$$

$$Area(TCBA) = \int_{u_1}^{u_2} v \, du \quad Area(SABD) = \int_{v_1}^{v_2} u \, dv$$

ed essendo:

$$Area(TCBA) = Area(OCBD) - Area(OTAS) - Area(SABD)$$

si ha:

$$\int_{u_1}^{u_2} v \, du = u_2 v_2 - u_1 v_1 - \int_{v_1}^{v_2} u \, dv$$

cioè:

$$\int_{u_1}^{u_2} v \, du = [u v]_{u_1 v_1}^{u_2 v_2} - \int_{v_1}^{v_2} u \, dv$$

che, col significato attribuito alle variabili u e v , esprime la nota formula di integrazione per parti:

$$\int_{x_1}^{x_2} g \, df(x) = [f(x) \cdot g(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dg(x)$$

Lo studio della teoria integrale da buona parte dei docenti della scuola secondaria di secondo grado è spesso finalizzato al solo calcolo delle primitive di una funzione, operazione che, con le tecniche informatiche attuali, si potrebbe ridurre all'utilizzo di opportune applicazioni.

Noi riteniamo, invece, che il compito del docente sia proprio quello di fare acquisire agli studenti quelle competenze matematiche che consentano di risolvere i problemi non attraverso una sterile applicazione di formule ma cogliendone tutti gli aspetti algebrici e grafici, formulando congetture personali e identificando tutte le possibili inferenze logiche.

4 - Una notevole relazione tra la lunghezza di una curva chiusa e l'area della parte di piano da essa limitata

Un'altra questione particolarmente interessante, al fine di potenziare la capacità di operare deduzioni e risolvere problemi, è stata attinta dalla proposta del secondo quesito della prova suppletiva di Matematica assegnata agli esami di Stato 1999/2000, per l'indirizzo scientifico tradizionale.

Considerate le formule:

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad S = \pi x^2$$

che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x , se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x .

Si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 &\Rightarrow V' = 4\pi x^2 && \text{(area della superficie sferi-} \\ &&& \text{ca di raggio } x) \\ S(x) = \pi x^2 &\Rightarrow S'(x) = 2\pi x && \text{(lunghezza della circonfe-} \\ &&& \text{renza di raggio } x) \end{aligned}$$

A parte l'importanza delle due relazioni e tutte le disquisizioni teoriche (anche di carattere storico) che si possono discutere con gli studenti, prendendo spunto dal citato problema vogliamo porre l'accento su una relazione che intercorre tra l'area di un dominio piano limitato e la lunghezza della curva chiusa che lo delimita.

Sia γ una curva piana regolare, semplice e chiusa e siano p e q le due rette tangenti alla curva nei punti A e B estremi della curva (fig. 4).

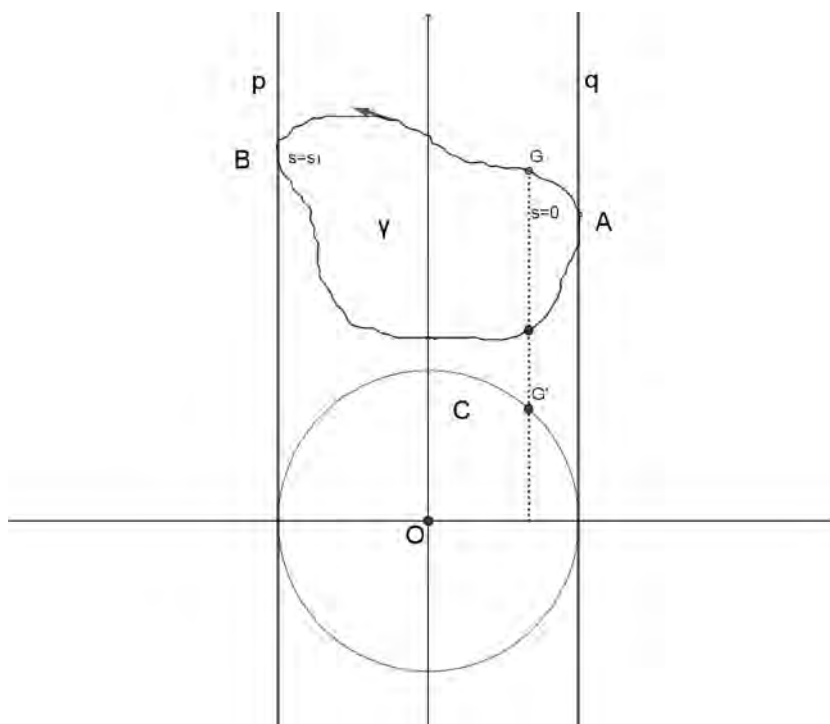


fig. 4

Posto $d(p, q) = 2r$, scegliamo opportunamente un sistema di riferimento in modo che la circonferenza C abbia centro nell'origine di tale riferimento e raggio r ; in tal caso γ e C sono contenute nella stessa striscia di piano limitata dalle rette p e q .

Consideriamo una rappresentazione parametrica per le due curve C e γ mediante l'ascissa curvilinea s dell'arco di curva γ

$$C \begin{cases} X = X(s) \\ Y = Y(s) \end{cases} \quad \gamma \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

in modo che esse siano positivamente orientate e nei punti A e B di tangenza con p e q si abbia rispettivamente $s_A = 0, s_B = s_1$.

Essendo $X(s)=x(s)$, si ha:

$$Area C = \pi r^2 = - \int_0^l Y(s)x'(s)ds$$

$$Area \gamma = \int_0^l x(s)y'(s)ds$$

da cui:

$$Area \gamma + Area C =$$

$$= \int_0^l [x(s)y'(s) - Y(s)x'(s)]ds \leq$$

(
4.1)

$$\leq \int_0^l \sqrt{[x(s)y'(s) - Y(s)x'(s)]^2}ds$$

Ma, nell'espressione sotto radice all'ultimo membro, risulta:

$$[xy' - Yx']^2 = (xy')^2 + (Yx')^2 - 2(xx')(Yy')$$

dove, dalla nota relazione tra media aritmetica e media geometrica, è

$$(xx')(Yy') \leq \frac{(xx')^2 + (Yy')^2}{2}$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}
 [xy' - Yx']^2 &\leq (xy')^2 + (Yx')^2 + (xx')^2 + (yy')^2 = \\
 &= (x^2 + Y^2)(x'^2 + y'^2)
 \end{aligned}$$

Dunque, risulta:

$$[xy' - Yx']^2 \leq (x^2 + Y^2)(x'^2 + y'^2)$$

La (4.1) diventa:

$$\begin{aligned}
 \text{Area } \gamma + \text{Area } C &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + Y^2)(x'^2 + y'^2)} ds \\
 &= \int_0^l \sqrt{(x^2 + Y^2)} ds
 \end{aligned}$$

$$\text{Area } \gamma + \text{Area } C \leq \int_0^l r ds = r \cdot l$$

Posto: $\text{Area } \gamma = A_\gamma$ si ha:

$$A_\gamma + \pi r^2 \leq r \cdot l$$

ed essendo:

$$A_\gamma + \pi r^2 \geq 2\sqrt{A_\gamma \cdot \pi r^2}$$

segue:

$$r \cdot l \geq 2\sqrt{A_\gamma \cdot \pi r^2}$$

da cui:

$$l^2 \geq 4\pi A_\gamma$$

dove l'uguaglianza è verificata solo nel caso in cui la curva γ sia una circonferenza. In tal caso risulta infatti:

$$(2\pi r)^2 = 4\pi(\pi r^2).$$

Bibliografia

Casolaro F. (1995). La Matematica nell'insegnamento della Fisica, Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Una presenza nella cultura e nell'insegnamento", Roma 1995, pag. 363-368.

Casolaro F., Prosperi R. (2001). La Matematica nelle Scienze applicate: equazioni algebriche ed equazioni differenziali nei programmi degli istituti tecnici, *Atti del Congresso nazionale Mathesis Mantova 2001*, pagg. 173-186.

Casolaro F. (2001/2002). L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore, *Appunti del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica - Università di Napoli*.

Casolaro F. (2002). Aspetti qualitativi delle equazioni differenziali nei temi degli esami di Stato degli Istituti tecnici, Atti del Convegno Nazionale "La Matematica agli esami di Stato ed il suo ruolo nell'insegnamento", Agerola 2002, pag. 175-188.

Casolaro F. (2021). Decisione per integrali indefiniti. Periodico di Matematica n. 2- 10 giugno 2021, pagg. 125-134

Fiorenza R., Greco D. (1986). *Lezioni di Analisi Matematica II*, Napoli: Liguori Editore.

Un confronto tra i teoremi del valor medio

Cesare Palmisani*

*Liceo Classico "Pietro Giannone" Caserta; Dipartimento di Scienze
Politiche Università "Federico II" di Napoli;
cesarepalmisani59@gmail.com; cpalmisani@unina.it



DOI : 10.53159 / PdM(IV).v5n1.104

Sunto: Si usano alcune funzioni elementari per confrontare i punti che soddisfano il teorema del valor medio per le derivate e il teorema del valor medio per gli integrali definiti.

Parole Chiave: teoremi del valor medio, medie

Abstract: Using elementary functions we compare the solutions of the mean value theorem for derivatives and the mean value theorem for definite integrals.

Keywords: mean value theorems, means

1 - Introduzione

Siano a e b due numeri reali fissati, con $a < b$. Se la funzione f è continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$, allora il

Teorema del valor medio per le derivate stabilisce che esiste almeno uno $\xi \in]a; b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Se invece f è continua in $[a; b]$ il Teorema del valor medio per gli integrali definiti asserisce che esiste almeno $\xi_* \in [a; b]$ tale che

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi_*)$$

Osserviamo che se consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ allora il Teorema del valor medio per le derivate e il Teorema del valor medio per gli integrali definiti sono soddisfatti entrambi dal punto

$$\xi = \ln \left(\frac{e^b - e^a}{b - a} \right)$$

Infatti, dalla relazione

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\xi$$

si ottiene

$$\xi = \ln \left(\frac{e^b - e^a}{b - a} \right)$$

mentre dalla uguaglianza

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b e^x \, dx = e^{\xi_*}$$

seguono le precedenti relazioni, e cioè

$$\frac{1}{b - a} \cdot (e^b - e^a) = e^{\xi_*}; \xi_* = \ln \left(\frac{e^b - e^a}{b - a} \right).$$

Scopo di questo lavoro è di fornire semplici controesempi di funzioni per le quali non è vero che $\xi = \xi_*$, con $\xi, \xi_* \in]a; b[$.

2 - Controesempi

Applichiamo ad alcuni casi semplici i due teoremi del valor medio.

2.1 - Applicazione del teorema valor medio per le derivate

Applicazioni al Teorema della media per le derivate di funzioni a funzioni del tipo $f(x) = Ax + B$:

$$f(x) = Ax + B; f'(x) = A; f'(\xi) = A$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = A; \frac{A(b - a)}{b - a} = A; A = A (\forall \xi \in]a; b[)$$

Il Teorema è soddisfatto dagli infiniti punti interni all'intervallo $[a; b]$, e l'insieme dei punti che lo soddisfano si può considerare "indeterminato".

Applicazione del Teorema della media per le derivate a funzioni del tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, dove A, B, C sono numeri reali ed A è diverso da 0.

Caso : $B = C = 0$

$$f(x) = Ax^2; f'(x) = 2Ax; f'(\xi) = 2A\xi$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2A\xi; \frac{A(b^2 - a^2)}{b - a} = 2A\xi; \xi = \frac{a + b}{2}$$

Caso : $B = 0$

$$f(x) = Ax^2 + C; f'(x) = 2Ax; f'(\xi) = 2A\xi$$

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 2A\xi; \frac{(Ab^2 + C) - (Aa^2 + C)}{b - a} \\ &= 2A\xi; \frac{A(b^2 - a^2)}{b - a} = 2A\xi; \xi = \frac{a + b}{2}\end{aligned}$$

Caso : $C = 0$

$$f(x) = Ax^2 + Bx; f'(x) = 2Ax + B; f'(\xi) = 2A\xi + B$$

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 2A\xi + B; \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a} = 2A\xi + B; \xi \\ &= \frac{a + b}{2}\end{aligned}$$

Caso : B e C sono non nulli

Si riconduce facilmente al caso precedente.

La funzione cubica

$$\begin{aligned}f(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C; f'(\xi) \\ &= 3A\xi^2 + 2B\xi + C\end{aligned}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$\frac{A(b^3 - a^3) + B(b^2 - a^2) + C(b - a)}{b - a} = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$A(b^2 + ba + a^2) + B(b + a) + C = 3A\xi^2 + 2B\xi + C$$

$$3A\xi^2 + 2B\xi = A(b^2 + ba + a^2) + B(b + a)$$

Detto E il termine a destra dell'uguaglianza, siccome il Teorema della media per le derivate assicura l'esistenza di

almeno uno ξ che soddisfi l'equazione, allora il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado

$$3A\xi^2 + 2B\xi - E = 0$$

è non negativo e le soluzioni si possono cercare attraverso la formula

$$\xi = -\frac{-2B}{6A} = -\frac{B}{3A}$$

nel caso in cui $\Delta = 0$, oppure mediante la formula

$$\xi = -\frac{-2B \pm \sqrt{\Delta}}{6A}$$

se $\Delta > 0$.

Nel caso particolare in cui $B = C = D = 0$ allora

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

Quest'ultimo risultato lo ritroveremo nell'applicazione del Teorema del valor medio per gli integrale relativamente alle funzioni quadratiche $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \quad (a \geq 0; b > a)$$

$$\sqrt{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

$$\xi = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4}$$

Nel caso in cui $a \geq 0; b > a$ non è complicato provare che $a < \xi < b$. Si ha

$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} > \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2} = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{\xi} > \sqrt{a} \rightarrow \xi > a$$

$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} < \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b}}{2} = \sqrt{b} \rightarrow \sqrt{\xi} < \sqrt{b} \rightarrow \xi < b$$

Nel caso particolare in cui $a = 0$ allora

$$0 < \xi = \frac{b}{4} < b$$

che è accettabile perché interno all'intervallo $[a; b]$.

2.2 - Applicazione del teorema valor medio per gli integrali

Applicazione del Teorema della media per gli integrali definiti relativo a funzioni del tipo $f(x) = Ax + B$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax + B) dx = A\xi_* + B$$

$$\frac{1}{b-a} \left[\frac{Ax^2}{2} + Bx \right]_a^b = A\xi_* + B$$

$$\frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A(b^2 - a^2)}{2} + B(b-a) \right] = A\xi_* + B$$

$$\frac{A(b+a)}{2} + B = A\xi_* + B$$

$$\xi_* = \frac{a+b}{2}$$

Applicazione del Teorema della Media per gli integrali definiti relativo a funzioni del tipo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, dove A, B e C sono numeri reali e A è diverso da 0.

Consideriamo i seguenti casi:

Caso : $B = C = 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax^2) dx &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} (b^3 - a^3) \right] = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) \\ f(\xi) &= A\xi^2 \\ A\xi^2 &= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2) \\ \xi_* &= \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}\end{aligned}$$

N.B. Il radicando ha sempre significato per ogni a e b reale.
E' facile mostrare che la funzione

$$\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

ammette minimo assoluto nel punto $(0;0)$, e quindi $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2 \geq \varphi(0,0) = 0$ per ogni x e y reali.
Determiniamo gli eventuali zeri delle derivate parziali prime di $\varphi(x, y)$:

$$\begin{cases} \varphi_x = 2x + y \\ \varphi_y = x + 2y \end{cases} ; \quad \varphi_x(0,0) = \varphi_y(0,0) = 0$$

L'unico zero delle derivate parziali prime è $O(0,0)$.

Calcoliamo l'Hessiano della funzione $\varphi(x, y)$:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Essendo $H(0,0) = 3 > 0$; $\varphi_{xx}(0;0) = 2 > 0$, allora $O(0,0)$ è il minimo assoluto di $\varphi(x, y)$.

Si pone il problema di verificare se $\xi \in]a; b[$. Nel caso in cui $a \geq 0$, $b > a$, il punto ξ è sicuramente interno ad $[a; b]$.
Infatti

$$\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} > \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \sqrt{3} |a| = \sqrt{3} a > a;$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} < \sqrt{\frac{3b^2}{3}} = |b| = b.$$

Nel caso particolare in cui $a = 0$ (e quindi $b > 0$) allora $\xi = \frac{b}{\sqrt{3}} < b$, soluzione accettabile perché interna ad $[0; b]$. Più complicato analizzare il caso in cui $a < 0 < b$. Ad esempio sia $[a; b] = [-a; a]$, con $a > 0$. Otteniamo

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 + a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot |a|}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{3} < a$$

e quindi la soluzione ξ è esterna ad $[a; b]$.

Osserviamo che, per ogni a e b reali positivi, $a < b$, vale la disuguaglianza

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

Infatti, la precedente disuguaglianza è equivalente alle seguenti

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} < \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$3a^2 + 6ab + 3b^2 < 4a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$0 < 2ab < a^2 + b^2$$

$$0 < (a-b)^2$$

Definizione: Una funzione continua $M: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che è una media di due numeri a e b se e solo se

$$M1) \min\{a, b\} \leq M(a, b) \leq \max\{a, b\}$$

$$M2) M(a, b) = M(b, a)$$

$$M3) M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$$

per ogni $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

Osserviamo che le funzioni

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad M(a, b) = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

soddisfano le condizioni M1, M2, M3, con $A(a, b) < M(a, b)$.

Caso : $B = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax^2 + C \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax^2 + C) dx &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} x^3 + Cx \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} (b^3 - a^3) + C(b-a) \right] = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) + C(b-a) \right] \\ &= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + C \\ f(\xi) &= A\xi^2 + C \\ A\xi^2 + C &= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ab + a^2) + C \\ \xi &= \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} \end{aligned}$$

Caso : $C = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax^2 + Bx \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax^2 + Bx) dx &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{2} x^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} (b^3 - a^3) + \frac{B}{2} (b^2 - a^2) \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b-a)(b+a) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b + a)$$

$$f(\xi) = A\xi^2 + B\xi$$

$$A\xi^2 + B\xi = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b + a)$$

Posto $D = \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b + a)$, l'equazione in ξ diventa $A\xi^2 + B\xi - D = 0$. Poiché per il Teorema della media per gli integrali è assicurata l'esistenza di almeno uno ξ che sia soluzione dell'equazione allora il discriminante $\Delta = B^2 - 4A(-D) = B^2 + 4AD \geq 0$. Le soluzioni saranno, nel caso in cui $\Delta = 0$, due radici reali e coincidenti, date da $\xi_* = -\frac{B}{2A}$, e nel caso in cui $\Delta > 0$, saranno fornite dalla formula $\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$.

N.B. Qualora fosse $[a; b] = [-a; a]$ avremmo $D = \frac{Aa^2}{3}$, da cui $\Delta = B^2 + 4AD = B^2 + \frac{4A^2 a^2}{3} > 0$, e si ottengono sicuramente due radici reali e distinte.

Caso : B e C sono non nulli

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{3} (b^3 - a^3) + \frac{B}{2} (b^2 - a^2) + C(b - a) \right]$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{A}{3} \cdot (b-a)(b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b-a)(b+a) + C(b-a) \right]$$

$$= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2} (b+a) + C$$

$$\begin{aligned}
 f(\xi) &= A\xi^2 + B\xi + C \\
 A\xi^2 + B\xi + C &= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a) + C \\
 A\xi^2 + B\xi &= \frac{A}{3} \cdot (b^2 + ba + a^2) + \frac{B}{2}(b + a)
 \end{aligned}$$

Si procede allora come nel caso precedente ($C = 0$).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\
 \frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) dx &= A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D \\
 \frac{1}{b-a} \left[\frac{A}{4}(b^4 - a^4) + \frac{B}{3}(b^3 - a^3) + \frac{C}{2}(b^2 - a^2) + D(b-a) \right] \\
 &= A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D \\
 \frac{A}{4}(b+a)(b^2 + a^2) + \frac{B}{3}(b^2 + ba + a^2) + \frac{C}{2}(b+a) + D \\
 &= A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D
 \end{aligned}$$

Posto

$$E = \frac{A}{4}(b+a)(b^2 + a^2) + \frac{B}{3}(b^2 + ba + a^2) + \frac{C}{2}(b+a),$$

occorre risolvere l'equazione

$$A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D - E = 0$$

le cui possibili soluzioni reali possono essere anche tre.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$; $a \geq 0$; $b > a$)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{x} dx &= \sqrt{\xi} \quad (a \geq 0; b > a) \\
 \frac{1}{b-a} \cdot [x^{3/2}]_a^b &= \sqrt{\xi} \\
 \frac{1}{b-a} \cdot (b^{3/2} - a^{3/2}) &= \sqrt{\xi} \\
 \xi_* &= \left(\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b-a} \right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b-a} \right)^2
 \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $a = 0$ allora $\xi_* = b$, che è da scartare perché la soluzione coincide con l'estremo destro del dominio della funzione. Pertanto, ai fini dell'esistenza di ξ , occorre supporre $a > 0$.

2.3 - Confronto tra i due teoremi

Eseguiamo un confronto tra le soluzioni trovate applicando i due teoremi.

Funzione	Soluzioni mediante il Teorema valor medio per le derivate	Soluzioni mediante il Teorema valor medio per gli integrali definiti
$f(x) = e^x$	$\xi = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b - a}\right)$	$\xi_* = \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b - a}\right)$
$f(x) = Ax + B$	$\forall \xi \in]a; b[$	$\xi_* = \frac{a + b}{2}$
$f(x) = Ax^2$	$\xi = \frac{a + b}{2}$	$\xi_* = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$
$f(x) = Ax^2 + C$	$\xi = \frac{a + b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^2 + Bx$	$\xi = \frac{a + b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^2 + Bx + C$	$\xi = \frac{a + b}{2}$	$\xi_* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	$3A\xi^2 + 2B\xi - E = 0$	$A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D - E = 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\xi = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4}$	$\xi_* = \left(\frac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b - a}\right)^2$

3- Conclusioni

Abbiamo visto che nel presentare alcuni controesempi accadono cose molto curiose anche in semplici funzioni quali $f(x) = Ax^2$

e cioè che applicando il Teorema del valor medio per le derivate esiste un unico punto che lo soddisfa ed è dato dalla

media aritmetica $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ degli estremi dell'intervallo $[a; b]$ dove è definita la funzione; invece, applicando il Teorema della media per gli integrali definiti, una sconosciuta media $M(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$ degli estremi dell'intervallo $[a; b]$ è soluzione, con $A(a, b) < M(a, b)$ e così via...

Tra i due teoremi intercorre una proprietà più profonda. E' stato dimostrato (Kung Kuen Tse, 1921) che se $a < b$ ed f è una funzione analitica, e se esiste un punto ξ che soddisfa contemporaneamente i due teoremi allora f deve essere una funzione lineare oppure una funzione esponenziale.

Bibliografia

Kung Kuen Tse (1921). A Note on the Mean Value Theorems. *Advances in Pure Mathematics, Scientific Research Publishing*, Vol. 11, No. 5, pp. 395-399 .



ARTE SCIENZA magazine

Alberto Macchi, Alessandra Spalletta, Anna Dell'Agata,
Antonio Castellani, Armando Adolgho, Attilio Sommella, Claudia Mignone,
Fulvio Guerrieri, Giorgio Parisi, Isabella de Paz, Luca Nicotra,
Luigi Campanella, Paola Dallavalle, Patrizia Audino,
Piergiorgio Paterlini, Pierluigi Assogna, Sergio Pennisi, Stefano Torossi,
Susanna Schimperia, Ugo Locatelli, Viola Spicuglia

PENSIERO CREATIVO: ARTE O SCIENZA?	ANIMA MUNDI E FUSIONE NUCLEARE	LE CASE DEGLI ASSASSINI	IL LATO UMANO DEI NUMERI PRIMI	LA SETE SA COS'È L'ACQUA	SCATENATORI DI PACE	ECOLOGIA: SIAMO ANCORA IN TEMPO
--	--------------------------------------	-------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------	---------------------------	---------------------------------------

Anno III - N. 4 - 2022 - Supplemento di *ArteScienza*
<http://www.assoculturaarte-scienza.it>
Direttore Responsabile: Luisa Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 22 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSNOnline 2285-1963 - Proprietà dell'A. P.S. "Arte e Scienza"

Dalla duplicazione del quadrato all' n -plicazione del d -politopo

Manuela Condelli* Fabrizio Mancinelli**

* Docente nel Liceo Scientifico "Amedeo di Savoia", Pistoia;

manuela.condelli@posta.istruzione.it

** Docente nel Liceo Statale "Niccolò Forteguerri", Pistoia;

fabrizio.mancinelli@posta.istruzione.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.105

Sunto: *Il problema classico della duplicazione del quadrato, citato da Platone nel suo dialogo Menone, ha sempre rappresentato un esempio di come un ragionamento guidato, partendo dall'intuizione, possa condurre ad una dimostrazione formale di una proposizione o una proprietà. In questo lavoro viene proposta una generalizzazione del problema classico che, attraverso esperienze didattiche guidate, conduce alla relazione tra il d -spigolo di una figura a d dimensioni e quello di una figura, nello stesso d -spazio, avente un d -volume che è n volte quello di partenza.*

Parole Chiave: *Solidi platonici, iperspazio.*

Abstract: *The classical problem of the square duplication, cited even by Plato in his dialogue Meno, has always resembled an example of how a guided reasoning, starting from intuition, may lead to a formal demonstration of a proposition or a property. In the present work, through guided activities, a generalisation of the*

classical problem is proposed, which leads to a relationship between the d -edge of a d -dimensional figure and the one having n -times the d -volume, in the same d -space.

Keywords: *Platonic solid, hyperspace.*

1 - Introduzione

La prima notizia che abbiamo del problema della duplicazione del quadrato è presente nel dialogo *Menone* di Platone, la cui stesura risale al periodo cosiddetto “giovane” del filosofo, intorno all’inizio del IV secolo a.C. In esso il protagonista Socrate faceva utilizzo del suo metodo maieutico per far nascere dalla mente stessa di un servitore, completamente ignorante in geometria, la soluzione del problema della duplicazione dell’area di un quadrato di lato assegnato. Il metodo socratico, favorito dalla visualizzazione delle figure, si alterna con quello euristico-dinamico: il servitore, investito del ruolo di scopritore, analizza la figura, procedendo per gradi e, mediante successive intuizioni, tentativi e verifiche, arriva alla conquista del concetto.

Nell’ambito delle scienze matematiche, la geometria è quella che meglio si presta ad un approccio “estensivo”, ovvero che metta in rilievo i collegamenti mirando a un approfondimento concettuale, prima che tecnico, delle conoscenze matematiche. [De Marchis et al.]. Nell’insegnamento estensivo della matematica si propone di dare più spazio ad attività che permettano di sperimentare la logica della scoperta, riducendo quello dedicato all’esposizione assiomatica della teoria [Brigaglia et al.].

Il percorso didattico da noi proposto prende per l'appunto le mosse dal medesimo problema della duplicazione del quadrato e, favorendo la produzione di congetture e la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni, prosegue verso successive generalizzazioni. Attraverso la manipolazione di figure geometriche si arriva a comprendere il significato di segni ed operazioni algebriche; passando attraverso un percorso di "scoperta" e costruzione si arriva a dimostrazioni formali.

Un riferimento importante, soprattutto riguardo l'aspetto della generalizzazione, ci è stato fornito da un intervento della prof.ssa Tonia Olivello, recentemente scomparsa, sul teorema di Pitagora nell'ambito della Scuola Interuniversitaria Campana di Specializzazione all'Insegnamento, VIII Ciclo: è a lei che dedichiamo questo lavoro.

Il percorso può essere rivolto a studenti di scuola superiore frequentanti il primo biennio, che abbiano già conoscenza dei numeri naturali e razionali, e abbiano dimestichezza nella manipolazione di espressioni algebriche; devono inoltre conoscere il teorema di Pitagora e le proprietà dei poligoni regolari; si suppone infine che già conoscano l'operazione dell'estrazione di radice.

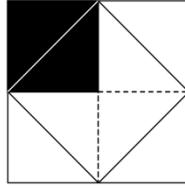
2 - La *n*-plicazione del quadrato

2.1 - Duplicazione del quadrato

SOCRATE: Dunque avrà una conoscenza senza che nessuno gli abbia insegnato, ma grazie a delle semplici domande, avendo recuperato lui da se stesso la conoscenza?
(Platone, "Menone")

Il percorso non può che iniziare con la lettura in classe di passi scelti del dialogo platonico in cui viene presentato il problema della duplicazione del quadrato. Senza arrivare alla conclusione, si stimola subito l'intuizione degli allievi seguendo i ragionamenti di Socrate su carta quadrettata: si costruisce un quadrato avente lato pari, ad esempio, a 10 quadratini. Ovviamente l'area del quadrato sarà pari a 100 quadratini; pertanto, un quadrato di area doppia dovrà contenere 200 quadratini. Come lo schiavo del racconto platonico, gli allievi verificheranno rapidamente che raddoppiando il lato del quadrato iniziale, e portandolo quindi a 20 quadratini, si otterrà un quadrato di area 400 quadratini, ovvero quattro volte quella iniziale. Una conseguenza immediata di questo ragionamento intuitivo è che ci si aspetta che il lato del quadrato cercato abbia il lato compreso tra 10 e 20 quadratini: invitando ad effettuare altri tentativi si verifica che non esiste un numero intero di quadratini in quell'intervallo che soddisfi la condizione, poiché un lato di 14 quadratini è "troppo corto" ed uno di 15 quadratini "troppo lungo". Da qui la congettura che, per raddoppiare l'area di un quadrato di lato assegnato non si può ragionare sulla lunghezza dei lati; bisogna riflettere sull'area stessa.

Un quadrato di lato doppio fornisce area quadrupla: quindi metà dell'area del quadrato iniziale, moltiplicata per quattro, fornirà il doppio dell'area di partenza, che è ciò che vogliamo ottenere. Un modo per dividere esattamente a metà un quadrato è lungo la sua diagonale; sovrapponendo il quadrato iniziale a quello di lato doppio come indicato in figura e tracciando le diagonali, con semplici considerazioni



geometriche si può congetturare la soluzione del problema, ovvero che *il quadrato di area doppia ha come lato la diagonale del quadrato di partenza*.

Con semplici passaggi algebrici si può anche fornire una dimostrazione formale della congettura; chiamiamo l il lato e A l'area del quadrato di partenza, l' il lato e A' l'area del quadrato di area doppia. Si ha infatti:

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = 2A \Rightarrow (l')^2 = 2l^2 \Rightarrow l' = \sqrt{2} l,$$

ricordando che la diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}$ volte il lato.

2.2 - *n*-plicazione del quadrato

La semplice formalizzazione mostrata è indipendente dalle considerazioni geometriche intuitive con le quali è iniziato il ragionamento, e forniscono anche la base per una prima generalizzazione del risultato. Se infatti ci si pone la domanda *“dato un quadrato di una certa area, quanto è lungo il lato del quadrato che possiede area tripla?”*, si può dedurre la risposta direttamente con una dimostrazione formale senza ricorrere a ragionamenti intuitivi. Seguendo il ragionamento precedente:

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = 3A \Rightarrow (l')^2 = 3l^2 \Rightarrow l' = \sqrt{3} l$$

Estendendo il procedimento ad un qualsiasi multiplo dell'area di partenza, si deduce facilmente la relazione che risponde alla domanda *“dato un quadrato di una certa area, quanto è lungo il lato del quadrato che possiede un'area n volte quella di partenza?”*:

$$A = l^2, A' = (l')^2, A' = nA \Rightarrow (l')^2 = nl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{n} l$$

2.3 - Duplicazione del poligono regolare

Osservando che il quadrato è un poligono regolare di quattro lati, un livello successivo di generalizzazione può essere ottenuto ponendosi un quesito simile relativo ad un altro poligono regolare: *“dato un poligono regolare di lato assegnato, trovare il lato del poligono simile avente area doppia”*. Come prima, partiamo da un ragionamento di tipo intuitivo scegliendo dei poligoni regolari specifici. In un triangolo equilatero, ad esempio, ricordando che l'altezza è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ volte il lato, l'area sarà $A = \frac{l \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, mentre per il triangolo di area doppia (utilizzando la precedente convenzione degli apici) si potrà scrivere:

$$A' = \frac{l' \cdot l' \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = (l')^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 2A = 2l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

da cui si ha immediatamente $l' = \sqrt{2} l$, ritrovando la stessa relazione tra i lati che c'è per il quadrato.

Anche per l'esagono, ricordando dalla geometria elementare che l'area si ottiene moltiplicando il perimetro per l'apotema (che nel caso dell'esagono è l'altezza di uno dei 6 triangoli equilateri in cui può essere suddiviso, ciascuno con il lato uguale a quello dell'esagono stesso) diviso 2, si ritrova lo stesso risultato: $A = \frac{6l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = l^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}$; mentre per l'esagono di area doppia:

$$A' = \frac{6l' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l'}{2} = (l')^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2A = 2l^2 \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

da cui di nuovo $l' = \sqrt{2}l$. Sembra quindi che la relazione tra il lato di un poligono regolare e quello simile di area doppia sia sempre la stessa. Di questa congettura si può ricavare una dimostrazione osservando che l'area di qualunque poligono regolare si può calcolare moltiplicando il quadrato del lato per un "fattore di forma" k caratteristico di ciascun poligono ($k = \frac{\sqrt{3}}{4}$ per il triangolo equilatero, $k = 1$ per il quadrato e così via).

Allora si ha:

$$A = kl^2; A' = k(l')^2 = 2A = 2kl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{2}l,$$

per cui possiamo affermare che, in generale, *il lato del poligono regolare di area doppia di quella del poligono simile di lato assegnato è $\sqrt{2}$ volte il lato assegnato.*

2.4 - n-plicazione del poligono regolare

Arrivati a questo punto viene spontaneo chiedersi se la relazione di n-plicazione del quadrato trovata in precedenza valga anche per i poligoni regolari. La risposta è ovviamente positiva:

$$A = kl^2; A' = k(l')^2 = nA = nkl^2 \Rightarrow l' = \sqrt{n} \cdot l.$$

3 - La n-plicazione del cubo

3.1 - Duplicazione del cubo

[Un oracolo] aveva imposto agli abitanti di Delo di raddoppiare l'altare di forma cubica, dedicato al dio. Il quesito aveva generato aporia negli "architetti", che ne avevano cercata la soluzione, sicché i Deli avevano cercato consiglio presso Platone, che aveva interpretato l'oracolo come un rimprovero del dio agli Elleni di trascurare la geometria e un invito a occuparsene, non tanto come un'espressione del desiderio del dio di avere un altare doppio. (Eratostene, "Platonico")

Il problema della duplicazione del cubo è uno dei tre problemi classici dell'antichità, che è stato dimostrato essere irrisolvibile con riga e compasso: la proposta per il prosieguo dell'attività è di affrontarlo con lo stesso schema seguito in precedenza, ovvero partendo da considerazioni intuitive con supporto laboratoriale per poi giungere alla formalizzazione.

In questo caso, si farà uso di pasta per modellare, che presenta il vantaggio di essere sostanzialmente incompressibile e quindi di conservare il volume. Seguendo il racconto di Eratostene, si verifica se raddoppiando lo spigolo del cubo, raddoppi anche il suo volume. Si modellano quindi con la pasta due cubi con lo stesso spigolo, ed uno del doppio

dello spigolo assegnato. Fondendo insieme i due cubi uguali a formarne un terzo, questo avrà un volume uguale al doppio di quello del singolo cubo; se la congettura è giusta, il cubo risultante dalla fusione dev'essere uguale a quello di spigolo doppio. Con una misura anche grossolana si riscontra subito che i due cubi non hanno lo stesso volume e quindi la congettura è errata, e può anche essere dimostrato facilmente:

$$V = l^3; V' = (l')^3 = (2l)^3 = 8l^3 = 8V \neq 2V$$

Dall'osservazione dei solidi, si può supporre che lo spigolo del cubo di volume doppio di quello del cubo di spigolo dato sia compreso tra lo spigolo dato ed il suo doppio. Si potrebbero avanzare ulteriori congetture, magari immaginando che sia coinvolto il fattore $\sqrt{2}$ come nel piano, ma a questo punto il più solido schema dimostrativo dovrebbe essere chiaro:

$$V = l^3, V' = (l')^3, V' = 2V \Rightarrow (l')^3 = 2l^3 \Rightarrow l' = \sqrt[3]{2} l,$$

che risolve il problema della duplicazione del cubo; si osserva anche che, come congetturato, il rapporto tra lo spigolo del cubo di volume doppio e quello dato è un numero compreso tra 1 e 2 (la cosiddetta *costante delica*, in ricordo della leggenda).

3.2 - n-plicazione del poliedro regolare

Così come nel caso del quadrato si è estesa l'operazione di duplicazione dell'area anche ad altri poligoni regolari, ci si

chiede adesso se sia possibile trovare un'analogia relazione generale sulla duplicazione (e, in generale, sull'n-plicazione) dei poliedri regolari. Occorre tener presente che mentre i poligoni regolari sono in numero infinito, i poliedri regolari sono solo i cinque cosiddetti "solidi platonici", ovvero tetraedro, cubo o esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. Analogamente ai poligoni, per ciascuno di essi è possibile ricavare una relazione per il calcolo del volume in cui esso è espresso come il cubo dello spigolo per un fattore di forma caratteristico del poliedro in questione:

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 && (\text{tetraedro}) \\ V_E &= s^3 && (\text{cubo o esaedro}) \\ V_O &= \frac{\sqrt{2}}{3} s^3 && (\text{ottaedro}) \\ V_D &= \frac{15+7\sqrt{5}}{4} s^3 && (\text{dodecaedro}) \\ V_I &= \frac{5(3+\sqrt{5})}{4} s^3 && (\text{icosaedro}) \end{aligned}$$

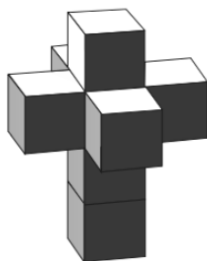
ovvero, in generale $V = Ks^3$. Questa considerazione conduce rapidamente alla relazione tra lo spigolo di un poliedro regolare il cui volume sia n volte quello del poliedro simile di spigolo dato:

$$V = Ks^3; V' = K(s')^3 = nV = nKs^3 \Rightarrow s' = \sqrt[3]{n} \cdot s$$

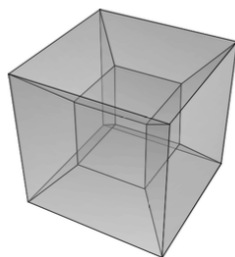
4 - Generalizzazione iperdimensionale

4.1 - Quattro dimensioni: il tesseracto

La generalizzazione ulteriore del problema può essere immaginata considerando le figure analoghe al quadrato e al cubo di dimensioni maggiori alla terza: tali figure prendono il nome di *n-cubi* (in quest'accezione, un quadrato è un *2-cubo* e l'esaedro un *3-cubo*); ovviamente tali figure non possono essere rappresentate ma solo vagamente immaginate, potendo l'essere umano percepire solo lo spazio tridimensionale. Cominciamo col considerare il 4-cubo: per dare un'idea di tale figura, detta *tesseracto*, si è soliti visualizzarne lo svolgimento



**Svolgimento tridimensionale
del tesseracto**



**Proiezione bidimensionale del
tesseracto**

tridimensionale oppure una proiezione bidimensionale.

Di questo si può definire l'ipervolume, ovvero il prodotto della lunghezza delle sue 4 dimensioni, come $I = i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4$, dove i ovviamente è l'iperspigo. Ci si chiede quindi quanto vale l'iperspigo di un tesseracto di ipervolume n volte quello del tesseracto di iperspigo dato:

$$I = i^4, I' = (i')^4, I' = nI \Rightarrow (i')^4 = ni^4 \Rightarrow i' = \sqrt[4]{n} i$$

Viene naturale chiedersi la relazione analoga tra gli spigoli degli equivalenti quadridimensionali dei poliedri regolari, che sono chiamati 4-politopi e sono in numero di sei [Coxeter]. Con considerazioni sul loro ipervolume del tutto analoghe a quelle effettuate per i 2-politopi (i poligoni regolari) e i 3-politopi (i poliedri regolari), si giunge alla stessa relazione che si è trovata per l' n -plicazione del tesseracto.

5.2 - n -plicazione del d -politopo

Per quanto sia necessario uno sforzo immaginativo davvero imponente per visualizzare una figura ad n dimensioni, è matematicamente possibile spingere all'estremo il livello di generalizzazione del problema di cui si è discusso finora; il che conduce anche al massimo livello di astrazione che può essere affrontato solo dal punto di vista formale.

Si definisce dunque un d -politopo¹, ovvero un poliedro regolare in d dimensioni, ed il relativo d -spigolo i_d ; il suo d -volume I_d sarà definito come $I_d = \kappa(i_d)^d$, con κ fattore di forma. Iterando i semplici procedimenti algebrici mostrati nei casi precedenti si può trovare la relazione che risponde alla domanda: “quanto vale il d -spigolo del d -politopo il cui d -volume è n volte quello del d -politopo simile di spigolo dato?”:

$$i'_d = \sqrt[n]{n} i_d$$

¹ per $d \geq 5$ i d -politopi sono sempre in numero di tre [Coxeter]

Bibliografia

De Marchis M., Menghini M., Rogora E. (2020). The importance of “Extensive teaching” in the education of prospective teachers of Mathematics. *Proceedings of 19th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2020. Bratislava : Slovak University of Technology. pp. 344-353.*

Brigaglia A., Raspanti M.A., Rogora E. (2020). Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *arXiv:2012.05881.*

Coxeter H.S.M. (1973). *Regular Polytopes*. Mineola (NY): Dover Publications.



Dal pensiero spaziale alla geometria e alla fisica

Alessandro Amabile *, Emilio Balzano*, Pietro Piccialli*, Rodolfo Figari **, Giancarlo Artiano***

* Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini" - Università Federico II di Napoli

Email: alessandro.amabile@unina.it; emilio.balzano@unina.it;

pietro.piccialli@gmail.com;

** GSSI, L'Aquila

Email: rodolfo.figari@protonmail.com

*** Dipartimento di Matematica e Fisica - Università degli Studi della Campania Vanvitelli

Email: giancarlo.artiano@unicampania.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.106

Sunto: *La presenza precoce delle capacità spaziali del bambino, che è in grado di analizzare ed elaborare le informazioni spaziali derivanti dall'esplorazione tattile e visiva, può essere inquadrata in una prospettiva evolutiva legata all'importanza del movimento e dell'orientamento. Favorire queste capacità è fondamentale per lo sviluppo del ragionamento spazio-temporale, delle abilità linguistiche e della matematica, in particolare della geometria. In Italia la geometria (in particolare quella dello spazio) è largamente trascurata a scuola. Ciò provoca danni allo sviluppo cognitivo e genera difficoltà nella comprensione dei concetti scientifici. Partendo da alcune riflessioni sui rapporti tra geometria, fisica e realtà si presentano attività che sperimentiamo da anni e che, concentrandosi sulla modellazione geometrica dei fenomeni fisici, consentono di sviluppare competenze sia in fisica sia sugli aspetti formali della geometria. Un'enfasi particolare nelle*

nostre proposte è posta sulle trasformazioni geometriche, sugli invarianti e sulla possibilità di definire geometrie diverse.

Parole Chiave: *Pensiero spaziale, geometria, fisica*

Abstract: *The early presence of the spatial capabilities in children can be framed in an evolutionary perspective due to the adaptive importance of movement and orientation for living beings. The child's innate ability to analyze and process spatial information deriving from vision must be trained for the development of spatio-temporal reasoning, linguistic and mathematical skills, especially geometry. In Italy geometry (in particular space geometry) is largely neglected in school. This causes damages to cognitive development and generates difficulties in understanding scientific concepts. Starting from some reflections on the relationship between geometry, physics and reality, we present some activities that we have been experimenting for years: focusing on the geometric modeling of physical phenomena, they allow us to develop skills both in physics and on the formal aspects of geometry. A crucial role in our proposals is played by geometric transformations, with a special emphasis on invariants and on the possibility of defining different geometries.*

Keywords: *Spatial thinking, geometry, physics*

1 – Il Pensiero Spaziale e la Geometria

Come nel caso dello sviluppo della conoscenza dei numeri, ricerche recenti hanno dimostrato che, contrariamente al punto di vista di Piaget, i bambini sono in grado molto precocemente di codificare informazioni spaziali su oggetti, forme, distanze, posizioni e relazioni spaziali. Il pensiero spaziale, come il pensiero numerico, sembra quindi essere radicato in abilità innate che si manifestano presto nella vita (Dehaene, 2010). I bambini percepiscono somiglianze tra oggetti tridimensionali e fotografie di questi. Sono in grado di

riconoscere aspetti invarianti di una forma mostrata da diverse angolazioni. La rotazione mentale (la capacità di visualizzare e manipolare il movimento di oggetti bidimensionali e tridimensionali) e la visualizzazione spaziale (tenere a mente una forma e trovare forme in figure più complesse, combinare forme o far coincidere orientamenti) sono abilità spaziali fondamentali per la geometria. Ricerche recenti hanno mostrato che bambini in età infantile possono ruotare mentalmente forme nel piano dell'immagine per determinare se un'immagine è uguale a un'altra (NRC, 2009; NAP, 2021, Maquet et al., 2022; Raju et al., 2022; Sciences & Education 1992). Anche se non siamo gli unici essere viventi ad avere abilità visuospatiali, per noi esseri umani tali abilità sono potenziate attraverso l'uso di sistemi simbolici: già in età prescolare abbiamo un linguaggio grafico che ci aiuta a sviluppare diverse rappresentazioni dello spazio come *mappe* e *diagrammi*, e a spostare e trasformare mentalmente gli oggetti nello spazio. Da qui la grande intuizione di Seymour Papert con il linguaggio del LOGO (con o senza computer) (Papert, 1980). Il bambino si immedesima nella tartaruga, simbolo del LOGO, che diventa il suo corpo, e usando un riferimento relativo con pochi movimenti di base può costruire percorsi fantasiosi o mirati alla soluzione di problemi. In questo modo le immagini di movimento si trasformano in figure geometriche che nella loro costruzione dinamica permettono di familiarizzare con le proprietà delle figure piane e con le regole (i comandi) per realizzarle. Un esempio di problema aperto che mira alla ricerca di una regola generale (che può formalizzarsi nella “dimostrazione” di un teorema) è quello della somma degli angoli (interni ed

esterni) di poligoni convessi e concavi in funzione del numero dei lati. Il LOGO, utilizzato con successo in tutto il mondo, è stato il precursore di diversi ambienti di programmazione di tipo grafico ispirati alla stessa teoria costruzionista dell'apprendimento. Un esempio è *Scratch*, utilizzato oggi nelle nostre scuole primarie in attività che possono integrare, arte, scienza, matematica e programmazione.

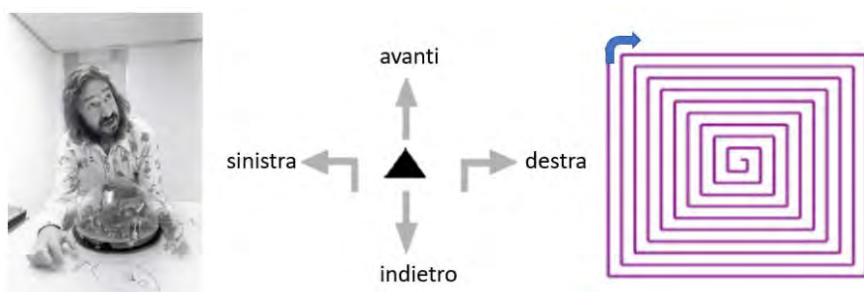


Fig. 1 - Papert allo MIT con la sua tartaruga semovente che può essere telecomandata e lasciare traccia del suo percorso. Nella versione al computer la tartaruga è rappresentata sullo schermo da una freccetta orientata. Il bambino si identifica con la tartaruga e la muove con pochi comandi di base che dà a se stesso. La figura che ottiene può essere di fantasia o legata a un compito aperto di geometria.

2 - L'insegnamento della Geometria

2.1 - La Geometria innata

Sempre più le ricerche in campo educativo e sullo sviluppo cognitivo si intrecciano con quelle delle neuroscienze offrendo nuovi scenari e prospettive nella comprensione dei processi di apprendimento in relazione a quelle che sono oggi identificate

come abilità innate. Per quanto riguarda la matematica tali abilità riguardano sia il riconoscimento di numeri piccoli che il controllo della spazialità, con abilità che sembrano fare riferimento alla capacità dei neonati di riconoscere pattern significativi come proprietà di traiettorie, conservazione delle quantità, di distinguere tra numerosità di piccole collezioni di oggetti, tutte che permettono l'esplorazione e l'appropriazione degli ambienti in cui sono immersi. (Dehaene, 2019) Lo studio in questi campi coinvolge non solo neonati e bambini, ma anche adulti di popolazioni non esposte a programmi di insegnamento della matematica.

Il gruppo di ricerca guidato da Pierre Pica e Stanislas Dehaene (Dehaene et. al. 2006) ha studiato la tribù amazzonica dei Mundurucu per conoscere le loro abilità di geometria. Si tratta di un contesto di grande interesse culturale, perché in totale assenza di una specifica formazione (scolastica) in matematica:

La lingua mundurucu contiene solo numeri approssimativi. Non contiene molti termini geometrici come quadrato, triangolo o qualcosa del genere, e non c'è modo di dire che due rette sono parallele... sembra che la lingua non abbia questo concetto (P. Pica).

La ricerca ha coinvolto ventidue adulti e otto bambini utilizzando una serie di dialoghi e situazioni con domande sulla geometria. Collocandoli davanti a gruppi di sei figure ciascuno, i nativi erano invitati a scegliere quelli che avessero una forma geometrica, come un triangolo rettangolo o figure che avessero all'interno linee parallele o simmetrie. Nonostante non ci fossero termini nella loro lingua che

esprimessero il concetto di triangolo o di parallele (o di altri concetti geometrici), i bambini di sei anni erano in grado di riconoscere figure geometriche, con più o meno la stessa percentuale di risposte corrette dei loro coetanei del mondo occidentale. Inoltre, inaspettatamente, i Mundurucu erano più abili degli occidentali quando i test prevedevano l'attività su una superficie sferica (come forma sferica veniva usata una zucca). Su una sfera, rette apparentemente parallele possono intersecarsi, una situazione che il Mundurucu hanno intuito più degli intervistati francesi e americani. Ciò mostra che il modo comune di insegnare la geometria euclidea attraverso regole e proprietà che non tengono conto del suo campo di validità può davvero ingannarci:

L'insegnamento della geometria euclidea è così importante che diamo per scontato che si applicherà sempre, anche su superfici sferiche. La nostra educazione ci porta a credere a cose che non sono corrette (P. Pica).

L'esperienza condotta dal gruppo di ricerca parigina con i Mundurucu indica che le nostre intuizioni sulla geometria di base sono innate e inoltre che “Non sembra esserci un nesso di causalità: si ha conoscenza della geometria e non è perché si possa esprimere in linguaggio” (P. Pica) ¹.

1

https://www.unicog.org/publications/IzardPicaSpelkeDehaene_EuclideanGeometryMundurucu_PNAS2011.pdf



Fig. 2 - Adulti e bambini dei Mundurucu alle prese con il concetto di angolo.

Questa e altre ricerche mostrano che gli esseri umani adulti, i bambini e gli animali sono sensibili alle proprietà geometriche dello spazio e utilizzano queste proprietà per riconoscere oggetti e forme o per navigare nell'ambiente. Questi risultati sono supportati dalla sempre più approfondita conoscenza di circuiti neurali e da sistemi di riferimento “mentali” che forniscono un sistema di coordinate approssimativamente piatto per lo spazio.

2.2 - La Geometria Euclidea

A partire dall’osservazione delle regolarità delle forme, dalle simmetrie e dall’organizzazione dello spazio naturale e artificiale, sin dagli *Elementi* di Euclide lo studio della geometria si fonda sul *metodo ipotetico-deduttivo*. Come sottolineato da Lucio Russo, la “novità” degli *Elementi* di Euclide rispetto alla precedente geometria greca consiste nella costruzione di una struttura logica unitaria basata su poche ipotesi iniziali, sulla costruzione progressiva di nuove *figure* e sulla deduzione di *teoremi* che stabiliscono le proprietà di tali figure. In questo modo, molti risultati e catene dimostrative già note (alcune delle quali risalenti probabilmente alla

matematica pitagorica) vennero ridotte a conseguenze di un numero ristretto di premesse elementari esplicitamente individuate. Una simile struttura logico-deduttiva si offre evidentemente come una palestra che permette di acquisire metodo di ragionamento e senso critico, abilità estremamente importanti tanto nell'insegnamento scientifico quanto per lo sviluppo di competenze logiche, linguistiche e argomentativo, nel lavorare sul rapporto tra causa ed effetto, nel distinguere tra fatti, inferenze e deduzioni. Purtroppo, però, svuotata del processo che porta alla costruzione del modello e alla *teoria*, la geometria euclidea è ridotta, nel migliore dei casi, a un piacere per pochi "eletti", che per molti altri non è nient'altro che un terrificante insieme di "dimostrazioni" autoreferenziali e completamente scollegate dalla realtà; di qui il luogo comune tra gli insegnanti della secondaria di primo grado secondo cui la geometria non sarebbe capita dagli studenti perché "troppo difficile". Secondo Lucio Russo, un aspetto importante del lavoro di Euclide "risiede nel rapporto chiaro ed esplicito tra la teoria geometrica e la pratica del disegno con riga e compasso... i concetti teorici così generati mantengono naturalmente un chiaro rapporto con gli oggetti concreti da cui sono stati astratti (e questo ne garantisce l'applicabilità della teoria), ma non possono essere confusi con loro" (Russo et al., 2017). Pensiamo che occorrerebbe partire proprio dai processi di costruzione dei modelli (di Euclide per la geometria, di Galilei e di Newton per la dinamica) per coinvolgere gli studenti nell'avvincente gioco della conoscenza matematica e scientifica. Riteniamo anche che una ricostruzione storica dello sviluppo della geometria a partire dalla testimonianza di Erodoto, dai contributi di Talete,

Pitagora, Euclide, fino alle riflessioni di Poincaré dovrebbe far parte dei programmi di matematica:

È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria sia una scienza sperimentale... La geometria... non si occupa di solidi naturali, ma di figure ideali, assolutamente invariabili. Questi corpi ideali sono costruzioni complete della nostra mente e l'esperienza fornisce solo un'occasione che ci spinge a tirarli fuori. (Henri Poincaré).

Poincaré e ancor di più Hilbert concepiscono la geometria come una disciplina sempre più astratta in cui contano la correttezza del ragionamento e la coerenza di un sistema formale. A nostro avviso, coinvolgendo gli studenti anche sugli aspetti che riguardano l'evoluzione del pensiero e dei metodi della matematica nel corso dei secoli c'è la possibilità di far riflettere sul rapporto tra *intuizione* (legata all'esperienza e al ragionamento spaziale) e *sistema formale*, ovviamente trattato in modo adeguato in relazione all'età e al contesto di insegnamento. Non è quello che in generale si fa nell'insegnamento della geometria a scuola, ma tale impostazione potrebbe aiutare a creare un ponte tra discipline diverse, con la storia e la filosofia, e d'accordo con il punto di vista di Russo, coinvolgere gli studenti sul rapporto tra teoria-modello e realtà in matematica e in fisica.

2.3 – Modelli di Insegnamento della Geometria

L'insegnamento della geometria è stato fortemente influenzato dalle idee di Piaget e Inhelder (1979), che nel libro

La rappresentazione dello spazio nel bambino distinguono tra lo spazio “percettivo”, ovvero quello percepito dal bambino attraverso l'attività sensomotoria, e quello “rappresentativo”, riferito allo spazio che il bambino può rappresentare con l'uso del linguaggio. In particolare, si individua una sequenza di tre stadi coinvolgenti relazioni *topologiche*, *proiettive* e infine *euclidee* intorno all'età di dodici anni. Nel 1986 i coniugi van Hiele svilupparono una teoria evoluzionistica nell'apprendimento-insegnamento con una distinzione tra geometria intesa come concettualizzazione dello spazio e geometria come teoria formale. Da qui la necessità di individuare un percorso di apprendimento e di insegnamento della geometria che risulti efficace nel tener conto dello sviluppo progressivo delle competenze dell'allievo. Alla base della proposta didattica di van Hiele c'è la constatazione che l'insegnamento che non mette al centro l'esperienza fallisce (P. van Hiele, 1959):

Lo studente impara a memoria ad operare con relazioni [matematiche] che non comprende, e di cui non ha visto l'origine.... Quindi il sistema di relazioni è una costruzione indipendente che non ha alcun rapporto con altre esperienze del bambino. Ciò significa che lo studente conosce solo ciò che gli è stato insegnato e ciò che ne è stato dedotto. Non ha imparato a stabilire connessioni tra il sistema e il mondo sensoriale. Non saprà come applicare ciò che ha imparato in una nuova situazione.

Nel modello evoluzionistico di van Hiele sono individuati cinque livelli gerarchici:

1. Visualizzazione,

2. Analisi,
3. Astrazione,
4. Detrazione,
5. Rigore.

In contrasto con la teoria dello sviluppo cognitivo di Piaget, che è dipendente dall'età, per van Hiele il bambino deve in primo luogo «fare molte esperienze» (in classe o in altri contesti) per passare a un livello successivo. Con esperienze significative, i bambini possono raggiungere il livello 2 nella scuola primaria. Il ruolo delle esperienze nel legare realtà e modelli è fondamentale in tutte le età: in assenza di esperienze ricche e mirate, molti adulti (inclusi gli insegnanti) rimangono al livello 1 per tutta la vita, anche se seguono un corso formale di geometria nella scuola secondaria. Il modello di insegnamento di Van Hiele ha subito diverse integrazioni ed è oggi alla base di diverse proposte sull'insegnamento della matematica in particolare negli Stati Uniti.

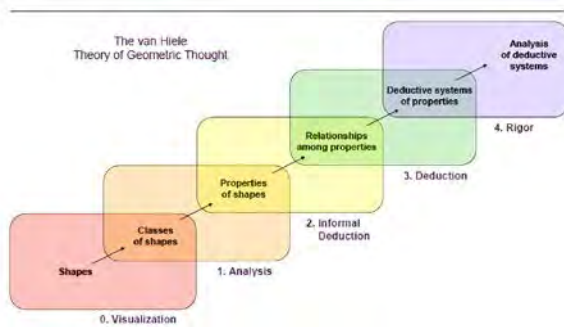


Fig. 3 - I cinque livelli di apprendimento della geometria nel modello evolutivo di van Hiele

2.4 - La Geometria Intuitiva di Emma Castelnuovo

Un contributo fondamentale all'insegnamento della matematica è stato dato da Emma Castelnuovo. Figlia di Guido Castelnuovo (a cui è intitolato il Dipartimento Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma), Emma Castelnuovo faceva parte del prestigioso gruppo di matematici romani a cui afferivano, tra gli altri, Enriques e Severi². La Castelnuovo scelse di insegnare nell'allora scuola media e rivoluzionò in modo radicale l'insegnamento della matematica in generale e della geometria euclidea in particolare, realizzando testi scolastici di grande successo e sviluppando che profonde riflessioni sulla didattica della matematica. A nostro avviso il suo contributo si caratterizza soprattutto per l'ideazione di esperienze e di supporti didattici che permettono di sviluppare l'intuito geometrico necessario alla comprensione graduale del sistema formale della geometria. Particolare attenzione è dedicata nel suo metodo alla realizzazione delle trasformazioni di figure con l'utilizzo di macchine matematiche costruite con materiali di uso comune. Ad esempio, con l'utilizzo di materiale mobile, realizzato con bacchette forate, fili ed elastici, lo studente ha l'opportunità di definire enti geometrici a partire dai corrispondenti oggetti reali e di confrontare casi particolari con casi limite, familiarizzando con la ricerca degli elementi invarianti che sono alla base delle costruzioni delle diverse geometrie (E. Castelnuovo):

*È, infatti, la mobilità che attira l'attenzione del bambino
e lo conduce dal concreto all'astratto, perché non è il*

² La storia dell'Istituto Matematico Guido Castelnuovo | Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo (uniroma1.it)

*materiale che è l'oggetto della sua attenzione, ma piuttosto la sua trasformazione, un'operazione che, essendo indipendente dal materiale stesso, è astratta. A nostro avviso, il materiale provoca ispirazione [...] per l'allenamento operativo.*³



Fig. 4 - La trasformazione di figure geometriche realizzate con materiali di uso comune aiuta a sviluppare intuito e a costruire concetti lavorando anche con situazioni limite

È interessante notare come l'approccio della Castelnuevo possa essere inquadrato in quello sforzo teorico teso alla ricerca della relazione, nei processi di apprendimento, tra il concreto e il modello geometrico, tra la rappresentazione e il concetto, tra una figura disegnata e il modo di utilizzarla per argomentare, verificare e dimostrare. Fischbein ha sviluppato la teoria dei concetti figurativi. Le figure geometriche rappresentano concetti figurativi con proprietà spaziali (forma, posizione e grandezza) e concetti legati all'astrazione, alla generalizzazione e a casi ideali (Fischbein, 1993)⁴:

³<http://www.mce-fimem.it/pubblicazioni/la-biblioteca-di-emma-castelnuevo/>

⁴ Un approfondimento con ricchi riferimenti bibliografici è disponibile in [Microsoft Word - cap6Sbaragli Mammarella def.doc \(unibo.it\)](#)

Una figura geometrica può essere descritta come dotata di proprietà intrinsecamente concettuali. Tuttavia, una figura geometrica non è un concetto puro. È un'immagine, un'immagine visiva. Ha una proprietà che i concetti usuali non hanno, cioè include la rappresentazione mentale delle proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurative.

E questa simultaneità richiede da parte dello studente uno sforzo di comprensione su ciò che la figura rappresenta nelle diverse configurazioni che può assumere. La fusione e l'integrazione tra percezione sensoriale e concetto è «una situazione ideale, estrema, che vincoli psicologici non permettono di raggiungere completamente sempre» (Fischbein, 1993). Concetti e immagini sono due categorie distinte: i concetti sono rappresentazioni “ideali”, le immagini sono rappresentazioni “sensoriali”. Nel ragionamento geometrico, tuttavia, queste due entità non sono del tutto indipendenti: in una dimostrazione, ad esempio, alcuni passaggi vengono eseguiti come se gli oggetti fossero reali, anche se vengono utilizzate informazioni concettuali (D'Amore, Duval, 2019):

Di fronte a una figura geometrica, non è sufficiente sapere quale proprietà è data, o avere delle conoscenze su che cosa essa rappresenti, per “vedere” e poterla usare. Bisogna per prima cosa riconoscere visivamente tutte le configurazioni possibili che essa offre allo sguardo dato che, in matematica, riconoscere implica che si possa convertire spontaneamente una rappresentazione da un registro a un altro

3 – Modellizzazione Geometrica in Fisica

Alla base della nostra proposta e delle esperienze che presentiamo come esempio c'è il tentativo di collegare sempre, a tutti i livelli di istruzione, l'esplorazione della fenomenologia e la formalizzazione matematica con linguaggi e strumenti adeguati all'età e al contesto.

3.1 – Le Ombre e le Trasformazioni Geometriche

Il rapporto tra fenomeni luminosi e geometria è stato indagato fin dall'antichità. Lo stesso Euclide sviluppa *nell'Ottica* una teoria ipotetico-deduttiva della visione diretta. La propagazione rettilinea della luce e in particolare la fenomenologia della formazione delle ombre offrono la possibilità di coinvolgere gli studenti nella costruzione e nello studio di modelli geometrici e nell'uso di concetti trasversali tesi a riconoscere proprietà invarianti nelle trasformazioni. Le trasformazioni geometriche sono corrispondenze biunivoche tra i punti di un piano o dello spazio e si possono classificare in base agli invarianti in trasformazioni *topologiche, proiettive, affini, simili e isometriche*. È interessante notare che ciascuno dei suddetti insiemi di trasformazioni può essere collegato a vaste aree di fenomenologia fisica, legate ad esempio all'elasticità, all'ottica e al moto di corpi rigidi. Ciascun insieme, con l'operazione di composizione, assume la struttura di *gruppo* e la caratterizzazione del gruppo (commutatività, presenza di punti uniti ecc.) ha importanti implicazioni nella costruzione dei modelli matematici e delle teorie che descrivono le fenomenologie fisiche. Seguendo la visione unitaria di Klein, espressa nel celebre *Programma di Erlangen* del 1872, le diverse geometrie, precedentemente presentate in modo indipendente, si possono distinguere sulla base del gruppo di

trasformazioni e degli invarianti corrispondenti. In questa visione le proprietà geometriche delle figure non sono determinate dalla forma della figura ma dalle trasformazioni che possono agire su di essa, sicchè la geometria diventa lo studio delle proprietà invarianti rispetto ad un ben definito gruppo di trasformazioni.

Un gruppo di trasformazioni che può essere studiato anche con alcuni aspetti formali fin dalla scuola secondaria di primo grado è quello delle affinità. Le trasformazioni topologiche e le trasformazioni proiettive possono essere analizzate con la ricerca degli invarianti con esperienze (foglio di gomma, ombre con sorgente puntiforme) che ne enfatizzano gli aspetti qualitativi. Per le trasformazioni affini è possibile lavorare con le equazioni di diverse trasformazioni (traslazioni, simmetrie, contrazioni, omotetie, ecc.) che appaiono facilmente comprensibili nella gestione del piano cartesiano, e si possono operare composizioni significative come ad esempio contrazioni/dilatazioni lungo i due assi coordinati. Nel biennio della secondaria di secondo grado l'argomento può essere di grande supporto allo studio di sistemi di equazioni lineari. Come suggerito da *School Mathematics Project*⁵ lo studio di corrispondenze studiate

⁵ Lo School Mathematics Project (Cambridge University Press, 1965) è un progetto inglese nato nel 1961 sotto la spinta di un gruppo di studiosi di matematica. Gli esempi, le figure, gli esercizi di cui si compongono i testi sono presi dalla vita reale, ogni caratteristica geometrica, topologica, algebrica è costruita sotto forma di modello. La traduzione italiana è stata curata dall'Unione Matematica Italiana. *SCHOOL MATHEMATICS PROJECT* - Zanichelli

geometricamente è poi di aiuto alla comprensione di concetti fondamentali come quello di funzione.

Affinità, trasformazione del piano in sé, corrispondenza biunivoca che trasforma rette in rette (si conserva l'allineamento tra punti)

$$P = (x, y) \rightarrow P' = (x', y')$$

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$

$$area(F') = |ae - bd| area(F)$$

Rette parallele in rette parallele

Rette incidenti in rette incidenti

Punto medio di un segmento nel punto medio del segmento corrispondente

Iperboli in iperboli, parabole in parabole, ellissi in ellissi (circonferenze)



Fig. 5 - Uno schema delle proprietà invarianti delle trasformazioni affini e la struttura in sottogruppi con alcune trasformazioni che si studiano fin dalla scuola primaria

Per le affinità nel piano due equazioni lineari consentono di ottenere molte trasformazioni studiate a scuola e di sviluppare negli anni argomenti interessanti per la fisica e la matematica: geometria affine e calcolo vettoriale, teoria dei gruppi, geometrie non euclidee e relatività. Lo studio della formazione delle ombre alla luce del Sole e in presenza di una sorgente che può essere considerata puntiforme è, come è stato detto, un'attività che sperimentiamo da anni dalla scuola dell'infanzia fino agli ultimi anni della secondaria ed è trattato con cura nella formazione degli insegnanti (sia iniziale che in servizio). Nel solco degli approcci dello *School Mathematics Project*, della Castelnuevo, di Lombardo Radice, di Prodi lo studio delle trasformazioni geometriche può giocare a nostro avviso un ruolo cruciale per coinvolgere gli studenti nella ricerca degli invarianti.



Fig. 6 - Lavoro con le ombre alla luce del Sole e in aula con una torcia

3.2 – Le Mappe e la Geometria della Superficie Sferica

Gli studenti sono coinvolti in attività con mappe geografiche e mappamondi (anche di grandi dimensioni). Il problema delle proiezioni risulta molto intrigante ed è un'occasione per insistere sul significato di modello, sulle sue specifiche caratteristiche e sul modo in cui le rappresentazioni risultino efficaci per gli scopi previsti. Ad esempio si confrontano per una città la mappa della metropolitana e quella geografica. Per la validità della geometria euclidea sulla superficie terrestre si discute la misura fatta da Gauss nel 1820 e si lavora anche con rappresentazioni e misure con Google Maps e con Google Earth.

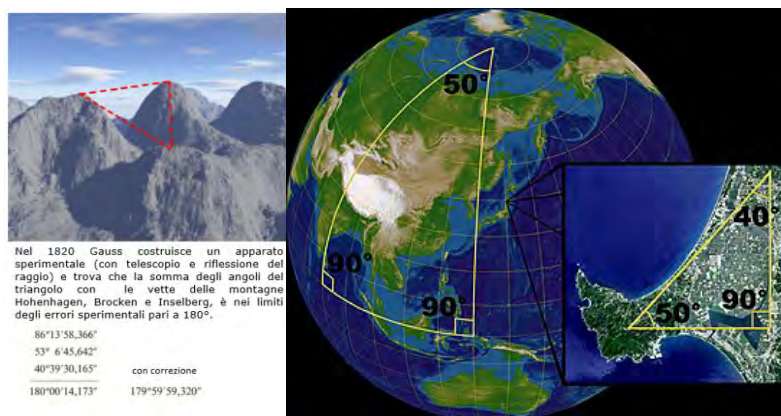


Fig. 7 - La misura di Gauss sulle montagne in Austria (il lato più lungo del triangolo con vertici le vette è 107 km) e misure su mappe con triangoli le cui dimensioni variano in relazione al raggio terrestre permettono di lavorare sulla validità e i limiti della geometria euclidea

Utilizzando un grande mappamondo si ricostruiscono le rotte degli aerei che sono archi di circonferenze massime e si ha l'opportunità di lavorare con la geometria della superficie sferica. In un triangolo sferico la somma degli angoli interni è sempre maggiore di 180° ma l'eccesso non è costante: più il triangolo è piccolo, rispetto al raggio della sfera, più l'eccesso diminuisce e il triangolo tende ad essere piano. E ciò aiuta a cogliere il senso della validità e dei vincoli della geometria euclidea. Quando possibile si lavora anche sul teorema di Eulero sull' area dei triangoli sferici⁶

⁶ [Geometria della sfera \(uniroma2.it\)](http://uniroma2.it)

geometria su una superficie sferica

Geodetiche, distanza tra due punti, segmento di lunghezza minima che li unisce

Linea, circonferenza massima (intersezione della superficie sferica con un piano che taglia a metà la sfera (il piano passa per il centro della sfera))

Segmento parte di una linea che ha due punti sulla linea come estremi

Punti antipodi, diametralmente opposti in superficie

Angolo, angolo tra due rette euclidee tangenti alla sfera nel punto di intersezione di due rette sferiche e giacenti nei piani da esse individuati

Triangolo sferico porzione di una superficie sferica delimitata da tre archi di circonferenza massima che congiungono a due a due tre punti non appartenenti alla stessa circonferenza massima

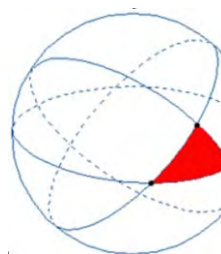


Fig. 8 - Alcune definizioni di enti geometrici sulla superficie sferica e la figura di un triangolo sferico

E' anche interessante coinvolgere gli studenti sulla validità della geometria euclidea nell'Universo. La parallasse di una stella è $p = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha - \beta)$, con la "Prova di Schwarzschild", se lo spazio è euclideo $\alpha + \beta < 180^\circ$

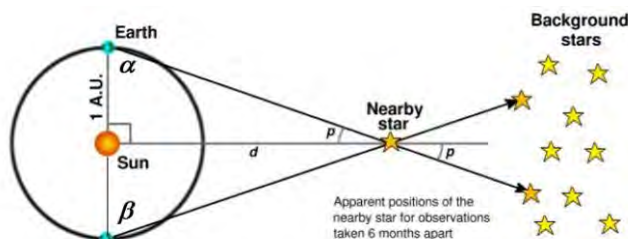


Fig. 9 - Il metodo della parallasse per misurare distanze di stelle mostra la validità della geometria euclidea nell'Universo.

3.3 - La Relatività e la Geometria

La geometria euclidea risulta valida a grandi distanze astronomiche, ma secondo la Relatività Generale (RG) essa non descrive correttamente le proprietà dello spazio fisico in prossimità di grandi masse. Due prove classiche della validità della RG sono la precessione anomala del perielio di

Mercurio e la deviazione della luce. La RG prevede correttamente una lenta rotazione dell'asse maggiore dell'orbita di Mercurio pari a circa 0,00119 gradi per secolo, laddove il valore stimato da Leverrier sulla base della meccanica newtoniana era di 0,00117 gradi per secolo. Nel 1919 Eddington e collaboratori osservarono durante un'eclissi totale del Sole la deflessione della luce di stelle vicine al Sole sulla sfera celeste, il primo grande successo sperimentale per la teoria di Einstein.

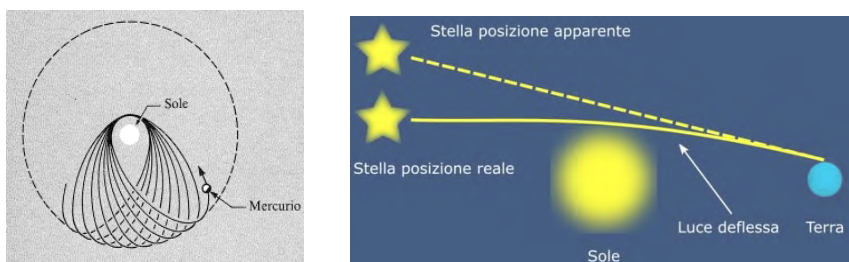


Fig. 10 - Due prove classiche della teoria della relatività generale: la precessione anomala dell'orbita di mercurio e la deflessione della luce.

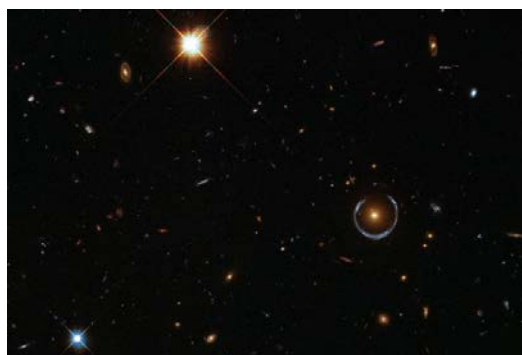


Fig. 11- L'anello in questa immagine è creato dalla lente gravitazionale per la presenza della galassia rossa (al suo centro), che distorce l'immagine di una lontana galassia blu molto più distante (ingrandita perché troppo debole). Credit: ESA/Hubble & NASA

Immagini recenti mostrano in modo spettacolare la presenza di lenti gravitazionali. Questi argomenti più avanzati sono da noi trattati nei corsi di formazione docente e nel corso universitario di *Didattica della Fisica*. Una sperimentazione che abbiamo realizzato con studenti liceali sul rapporto tra geometria e fisica è descritta nel lavoro di tesi del Prof. Ivano Vettigli, disponibile tra le risorse didattiche del sito LES.⁷

La relazione tra geometria e fisica si arricchisce di significato trattando i concetti chiave della relatività con dettagli che tengono conto dello specifico contesto didattico. In ogni caso, pensiamo che nell'insegnamento della fisica moderna nell'ultimo anno della secondaria di secondo grado andrebbero privilegiati pochi ma significativi concetti di meccanica quantistica e relatività, avendo cura di lavorare negli anni precedenti alla costruzione di modelli interpretativi e matematici che promuovano una visione unitaria della fisica. Ritornando agli aspetti storici ed epistemologici ci piace condividere con gli studenti una riflessione di Whittaker del 1949:

Da tempo immemorabile il fisico e il matematico hanno lavorato sulla base del tacito accordo... Il matematico doveva iniziare prima e analizzare le proprietà dello spazio e del tempo costruendo le scienze primarie della geometria e della cinematica (moto puro); poi... il fisico è entrato in scena con i personaggi del dramma -corpi materiali, magneti, cariche elettriche, ecc.- ed è iniziata la rappresentazione. Ma nella concezione rivoluzionaria di Einstein i personaggi creano la scena entrando nel dramma, la geometria non è più un antecedente della fisica ma è indissolubilmente fusa in

⁷ Vettigli-Geometry_and_physics__a_didactic_proposal.pdf (unina.it).

un'unica disciplina. Le proprietà dello spazio nella relatività generale dipendono dai corpi materiali e dalle energie presenti.

4 – Discussione

In questo lavoro sono stati presentati in modo molto schematico alcuni esempi di attività discussi nel Convegno di Agerola. Gli esempi sulle traiettorie in campi gravitazionali e le curve generate con macchine e meccanismi non sono qui riportati. Abbiamo preferito dedicare una parte del lavoro alla riflessione sul modo in cui la geometria può essere trattata a scuola. Negli anni si è assistito ad un decadimento della qualità dei libri di testo sia in fisica che in matematica. Negli anni '60 sono stati prodotti significativi testi di Matematica e di Fisica. Per la matematica e in particolare per la geometria sono notevoli i testi dello *School Mathematics Project*, della Castelnuovo, di Lombardo Radice, di Prodi. Per la Fisica è prezioso il materiale prodotto e sperimentato del PSSC⁸. A proposito della matematica è significativo lo scontro di Giovanni Prodi:

La traduzione dello School Mathematics Project in italiano era stata curata da alcuni esperti di grande cultura e prestigio nominati dall'Unione Matematica Italiana. E' stato un grosso danno che questa collana sia stata prematuramente mandata al macero. Questo destino è

⁸ Il Corso di Fisica P.S.S.C. è nato nel 1956 e ha coinvolto centinaia di persone (diversi premi Nobel) delle migliori università americane. Il materiale didattico strutturato in testi per gli studenti, guide al laboratorio e per gli insegnanti e video è stato tradotto e adottato in molti paesi.
FISICA A CURA DEL PSSC - Zanichelli

*comune a molti esperimenti di test di Matematica innovativi.*⁹

Ora i libri sono orientati prevalentemente alla risoluzione di problemi a scapito dell'approccio concettuale. Come spiegarsi questo fenomeno? Come contrastarlo?

⁹ Intervista a Giovanni Prodi | MATEpristem (unibocconi.eu)

Bibliografia

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In *Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Mary Montgomery Lindquist, Reston, Va.: National, 1987, 1-16.*

D'Amore, B. , Duval, R., *L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa*, <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2019/05/954-DAmore-DAmore-Duval-L%E2%80%99educazione-dello-sguardo-MD-2019-271.pdf>

Dehaene, S. (2010), *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*. Raffaello Cortina Editore.

Dehaene S., Izard V., Pica P., Spelke E. (2006). Core knowledge of geometry in ad Amazonian indigen group. *Science*, 311.

Fischbein E., (1993). *The theory of figural concepts*, Educational Studies in Mathematics.

Maquet, Liam & Dunbar, Ronan & Buckley, Jeffrey & Seery, Niall & Sorby, Sheryl. (2022). A Review of The Literature To Inform the Efficacy of a Spatial Skills Intervention For *Secondary Level STEM Education*.

NAP-National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2021) *Science and Engineering in Preschool Through Elementary Grades: The Brilliance of Children and the Strengths of Educators*; The National Academies Press: Washington, DC, USA

National Research Council. (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*. Committee on Early Childhood Mathematics, Christopher T. Cross, Taniesha A. Woods, and Heidi Schweingruber, Editors. *Center for Education, Division of Behavioral and Social*

Papert, S. (1980) *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, New York: Basic Books.

Raju, Gibin & Sorby, Sheryl & Panther, Grace & Reid, Clodagh & Fisher, Luke. (2022). Using pupil dilation to measure cognitive load during a spatial skills test.

Russo, R., Pirro, G., Salciccia, M. (2017) *Euclide: il I libro degli Elementi*, Carocci Editore.

Sciences and Education. (1992). Washington, DC: The National Academies Press. Clements, D. H., Battista, M. T. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (a cura di) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 420-464). New York, (NY): England: Macmillan Publishing Co.

Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010). L'apprendimento della geometria. In: Lucangeli D., Mammarella I.C., *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*. Franco Angeli.

Sir Edmund Whittaker, (1949) *Da Euclide a Eddington*, Cambridge University Press.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*, Academic Press: Orlando: Academic Press.

Il Teorema di Pitagora “senza parole”

Angela Donatiello* Francesco Laudano**

* Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Salerno;
adonatiello@unisa.it

** Liceo M. Pagano di Campobasso; francesco.laudano@unimol.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.107

Sunto: *In questo lavoro mostriamo che è possibile insegnare e apprendere la geometria mediante un percorso che, partendo da un'esplorazione storica, si sviluppa attraverso l'analisi di dimostrazioni “senza parole”. Riteniamo che questo approccio possa promuovere lo sviluppo di competenze matematiche poiché coinvolge gli studenti, anche mediante l'uso della geometria dinamica, nella ricerca di nuove semplici estensioni del teorema di Pitagora. Gli argomenti proposti possono essere uno spunto per la costruzione di attività in classe.*

Parole Chiave: *Teorema di Pitagora; prova senza parole; geometria dinamica; ceviana.*

Abstract: *In this paper we show that it is possible to teach and learn geometry through a pathway that, starting with a historical exploration, develops by means of the analysis of “without word” demonstrations. We believe that this approach can promote the development of mathematical skills as it engages students, including the use of dynamic geometry, in finding new simple extensions of the Pythagorean theorem. The proposed topics can be a starting point for constructing classroom activities.*

Keywords: *Pythagorean theorem; proof without words; dynamic geometry; cevian.*

1 – Introduzione

Ad almeno 2500 anni dalla sua scoperta, il teorema di Pitagora è ancora una fonte inesauribile di spunti di riflessione, un tesoro in grado di rivelare molte sorprese e di attrarre gli studenti verso la matematica. L'indiscutibile fascino del "Teorema" è dovuto alla sua doppia natura algebrico-geometrica ed alla possibilità di dimostrarlo ed estenderlo in molti modi, alcuni davvero spettacolari (tra le prove più recenti segnaliamo (Molokach, 2019), (Heo, 2017), (Nicollier, 2018), (Luzia, 2016), (Rahim, 2003), (Wares, 2017). Tuttavia, il teorema di Pitagora viene spesso insegnato in classe considerandone solo l'aspetto aritmetico, sebbene esistano centinaia di prove geometriche, alcune delle quali molto formative (Loomis, 1968).

Come mostrato in (Merzbach, 1968, p. 44), Pitagora di Samo (570 - 495 a.C.) fondò a Crotone la nota scuola matematico-filosofica, che ricorda in parte i culti orfici. La caratteristica più evidente dell'ordine pitagorico era la fiducia che manteneva negli studi filosofici e matematici come base per la condotta di vita. Secondo Proclo, la nuova enfasi posta sulla matematica è dovuta principalmente ai Pitagorici per i quali la matematica era più strettamente legata all'amore per la saggezza che alle necessità della vita pratica. Pitagora e la sua scuola rimangono comunque avvolti ancora nell'oscurità, anche a causa della perdita di documenti relativi a quell'epoca, (Merzbach, 1968). Lo stesso teorema di Pitagora ha probabilmente origini

babilonesi, ma è possibile che i pitagorici siano stati i primi a fornirne dimostrazioni grafiche. In (Heath, 1981) l'autore suggerisce che Pitagora conoscesse la nota dimostrazione dei due quadrati contenenti quattro triangoli rettangoli, riassemblati in modi diversi.

Nel corso dei secoli, il teorema è stato generalizzato in vari modi, fornendo dimostrazioni valide nelle geometrie euclidea, sferica ed iperbolica (Foote, 2017), (Veljan, 2000). Altre generalizzazioni recenti si trovano in (Cook, 2013), (Hwang, 2020), (Ferland, 2017), (Putz, 2003), (Zhan, 2007), (Nelsen, 2014), (Laudano, 2021a) e (Laudano, 2021b). È appena il caso di ricordare che l'interesse per il teorema di Pitagora abbraccia molti campi della conoscenza umana, dalle arti musicali alla crittografia, come si può vedere, ad esempio, in (Prabhu, 2014) e (Cubarsi, 2020).

Nelle pagine seguenti mostriamo alcune dimostrazioni visive del teorema di Pitagora ed alcune sue generalizzazioni, che possono essere sviluppate in classe, anche utilizzando software di geometria dinamica. Questo approccio può avere ricadute didattiche positive, in quanto consente agli studenti di esplorare autonomamente la possibilità di estendere il teorema, seguendo le intuizioni che l'esplorazione della figura suggerisce.

2 – Dimostrazioni effettuate mediante dissezione e composizione

Il Teorema di Pitagora ha incuriosito da sempre i più illustri scienziati che ne hanno fornito, in epoche anche molto lontane, diverse dimostrazioni. Alcune delle più interessanti

sono dovute a Leonardo da Vinci (Lemmermeyer, 2016), e Christiaan Huygens (Perng, 2019), (Alsina, 2010).

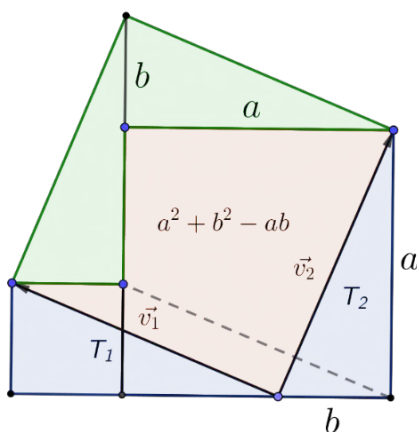


Figura 1. Le prove di Thābit ibn Qurra e Airy

Molte delle prove che verranno proposte in questo lavoro muovono dalla "prova socratica", citata nel Menone di Platone e ripresa da Thābit ibn Qurra nel IX secolo, come fondamento di un metodo più generale da lui chiamato "metodo di dissezione e composizione" (Sayili, 1960). Nella figura 1 è riportata la prima dimostrazione di Thābit ibn Qurra, nota come prova poetica di Sir George Airy, un astronomo inglese del XIX secolo che compose una poesia per spiegare questa costruzione. Dati due quadrati come nella figura 1, attraverso la traslazione dei triangoli T_1 e T_2 per mezzo dei vettori v_1 e v_2 si crea un nuovo quadrato con lati pari all'ipotenusa di T_1 . Il poligono arancione della figura seguente può, quindi, affermare:

Io sono, come potete vedere,
 $a^2 + b^2 - ab$

*Quando i due triangoli stanno su di me
nasce il quadrato dell'ipotenusa
ma se invece sto io su di loro
si ottengono i quadrati di entrambi i lati*

All'indirizzo <https://www.geogebra.org/m/jyz3kvm6> si può trovare uno schizzo dinamico di questa prova.

La seconda prova fornita da Thābit ibn Qurra si ottiene ribaltando il quadrato costruito sull'ipotenusa con una simmetria assiale, come nella figura 2. Esplorando questa prova con un software di geometria dinamica possiamo vedere che la dimostrazione socratica che compare nel Menone di Platone (Reale, 1992, pp. 950-954) è un caso particolare di questa costruzione per triangoli rettangoli isosceli. Un esempio è mostrato all'indirizzo <https://www.geogebra.org/classic/eykhrdaa>.

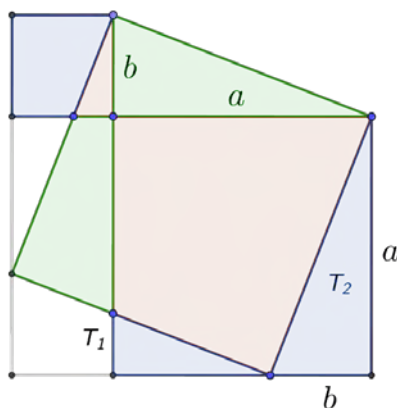


Figura 2. Prova di Thābit ibn Qurra

Le questioni precedenti sono collegate anche alla trisezione del quadrato: un problema che consiste nell'assemblare tre quadrati identici a partire da un quadrato più grande,

utilizzando il minimo numero di pezzi. Il matematico persiano Abu'l Wafa, nel X secolo, propose una soluzione alla trisezione del quadrato utilizzando le tassellazioni. Tale costruzione rappresenta una famosa prova del teorema di Pitagora (Blanvillain, 2010). Questa prova fu ripresa e migliorata da H. Perigal nel 1875, che realizzò un'elegante costruzione per dissezione e composizione (Perigal, 1875). Dati i quadrati ABCD e BEFG, come nella figura 3, siano H e I i punti medi di AE e GC e O il centro del quadrato BEFG. Si può provare facilmente che tracciando le rette HO e IO tale quadrato viene diviso in quattro parti uguali. Inoltre, poiché risulta $BC=LE$, il segmento IL è congruente all'ipotenusa del triangolo rettangolo BCE. Costruendo, poi, il quadrato ONMP (di lato $ON=CE$) mediante simmetrie centrali e traslazioni, si può notare che esso, oltre al quadrato ABCD, contiene quattro quadrilateri ottenuti traslando le quattro parti uguali del quadrato BEFG.

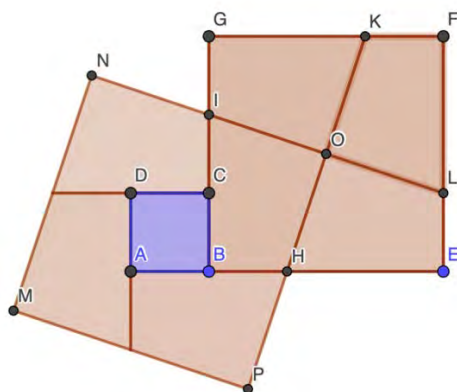


Figura 3. La prova di Perigal

La perfetta simmetria della divisione dei quadrati rende questa dimostrazione particolarmente elegante ed efficace. La costruzione di questa prova attraverso un software di geometria dinamica è mostrata all'indirizzo <https://www.geogebra.org/m/cntjphaq>.

È interessante notare che tutte le costruzioni di cui sopra si possono effettuare utilizzando solo traslazioni o simmetrie assiali e centrali. Queste attività possono dunque essere utili esercizi per avvicinarsi alle trasformazioni geometriche.

Si noti inoltre che le prove qui presentate richiamano il *tiling pitagorico*, una piastrellatura del piano euclideo con quadrati affiancati ed alternati di due dimensioni diverse, come nella figura 4, dove, effettuando opportuni tagli con rette perpendicolari, è possibile riconoscere molte dimostrazioni senza parole del teorema di Pitagora, tra cui anche le famose prove sopra citate.

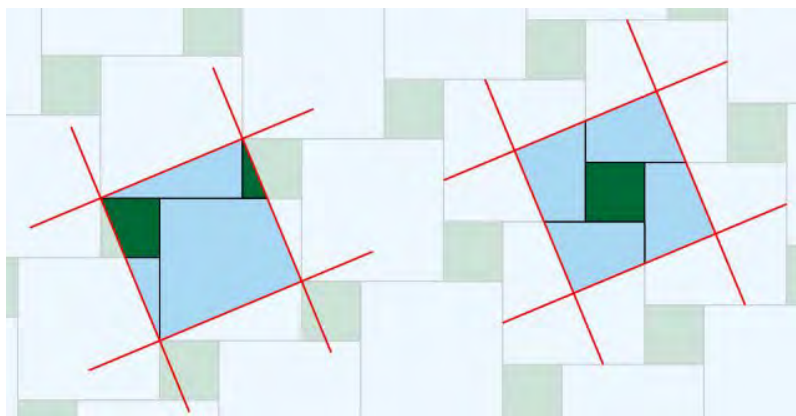


Figura 4. Ochtervelt Jacob, la dissezione di Thābit ibn Qurra (a sinistra) e la dissezione di Perigal (a destra) Di David Eppstein - Opera propria

Altre dimostrazioni interessanti ma poco conosciute del "teorema" si trovano in (Hoehn, 2000) e (Laudano, 2021b, p. 191).

Per concludere, sembra opportuno sottolineare che tutte le prove presentate possono essere utilizzate anche per dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora: *Se in un dato triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei restanti lati, allora è un triangolo rettangolo.*

L'enunciato precedente, spesso identificato o incorporato nell'enunciato originale del Teorema di Pitagora, merita di essere approfondito anche in ambito didattico, in quanto fornisce uno strumento numerico per verificare la perpendicolarità tra due rette. Pertanto, ben si presta alla progettazione di attività didattiche di laboratorio. A questo proposito, facciamo riferimento alla classica dimostrazione fatta da Euclide, Proposizione I, 48 degli Elementi (Euclide, 1970, pp.149-150).

3 – Verso le generalizzazioni del teorema di Pitagora

L'importanza del teorema di Pitagora risiede principalmente nella possibilità di estenderlo in molte direzioni. Di seguito, quindi, analizziamo alcune generalizzazioni del teorema che potrebbero essere proposte agli studenti. Una delle generalizzazioni più semplici e interessanti ci permette di dire che

Teorema 3.1 *Un triangolo è rettangolo se e solo se qualsiasi poligono costruito sul suo lato maggiore è equivalente alla somma*

dei poligoni ad esso simili costruiti sugli altri lati (in modo che i lati del triangolo siano omologhi).

Dimostrazione. Ricordiamo che il rapporto tra le aree di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto tra due lati omologhi. Quindi, siano $a \geq b \geq c$ i lati di un triangolo T e P_a , P_b , P_c poligoni simili costruiti sui lati a , b , c (con a , b e c lati omologhi). Ponendo $\text{Area}(P_a) = ka^2$, poiché per l'enunciato precedente $\text{Area}(P_a)/\text{Area}(P_b) = a^2/b^2$, si ha $\text{Area}(P_b) = kb^2$, e analogamente $\text{Area}(P_c) = kc^2$. Pertanto, il poligono P_a è equivalente alla somma di P_b e P_c se e solo se $a^2 = b^2 + c^2$.

È evidente che il Teorema 3.1 può essere ulteriormente esteso a figure simili non poligonali, come i semicerchi.

La dimostrazione del teorema di Pitagora attribuita a Einstein è un esempio di brillante applicazione delle considerazioni precedenti. Consiste nell'osservare che ogni triangolo rettangolo viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli rettangoli simili al primo (Schroeder, 2012), come nella figura 5. Pertanto, per il Teorema 3.1, il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.

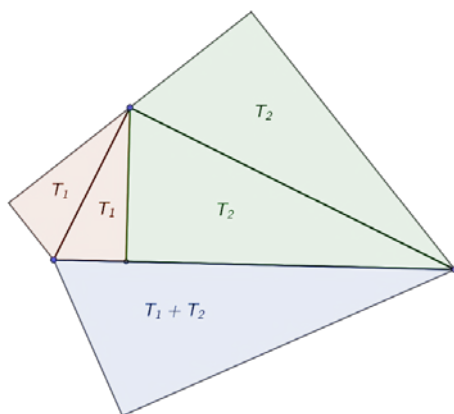


Figura 5. La prova di Einstein

Potrebbe essere interessante dal punto di vista didattico estendere alcune prove del Teorema di Pitagora, con l'aiuto di un software di geometria dinamica. Questo è possibile, ad esempio, per la classica prova del riarrangiamento, come si vede nella figura 6, ottenendo la seguente affermazione.

Teorema 3.2. *Siano a, b, c , con $c \geq a$, le lunghezze dei lati di un triangolo. Sia d la lunghezza della proiezione di c su b , ottenuta tracciando la ceviana congruente a a b. Allora $c^2 = a^2 + bd$. In particolare, se l'angolo opposto al lato a è retto allora $c^2 = a^2 + b^2$.*

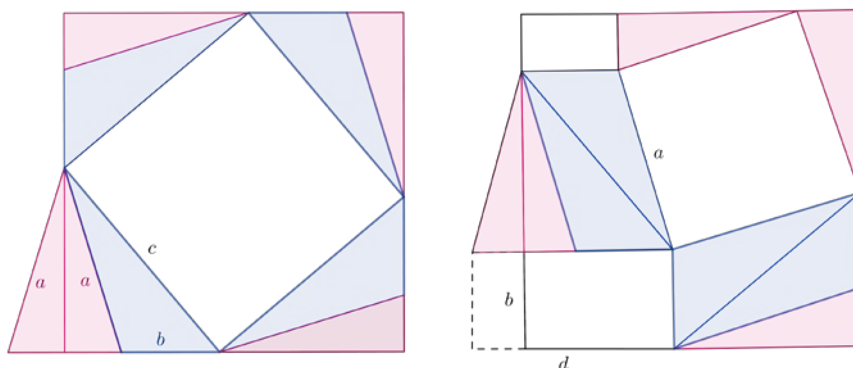


Figura 6. Una recente estensione della prova classica

Come mostrato in (Laudano, 2021a), la precedente generalizzazione vale sia per triangoli acutangoli che per triangoli ottusangoli. Inoltre è facile comprendere che dal Teorema 3.2 segue immediatamente il teorema del coseno, essendo $d = b - 2a \cos \gamma$.

Una delle più interessanti generalizzazioni del teorema di Pitagora fu enunciata da Thābit ibn Qurra nel IX secolo

(Merzbach, 1968, p. 213) e può essere ottenuta con la seguente Figura 7.

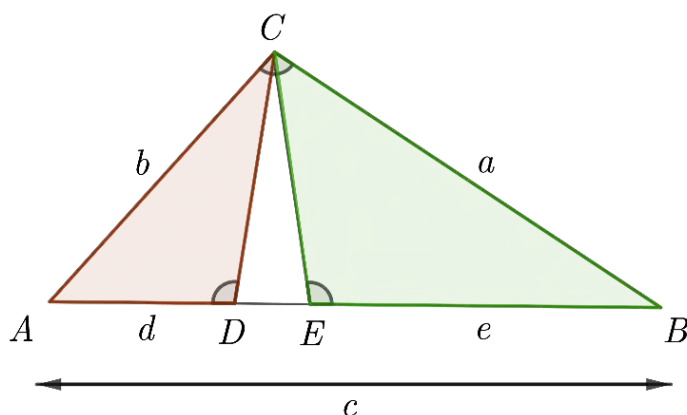


Figura 7. Prova estesa di Thābit

Sia ABC un triangolo, con la solita convenzione che a , b , c sono le lunghezze dei lati BC , CA , AB rispettivamente. Siano D ed E i punti di AB prodotti in modo tale che gli angoli ADC , BCA e CEB siano uguali. Sia d la lunghezza di AD ed e la lunghezza di EB . Poiché i triangoli ADC e ACB sono simili, si ha che $d : b = b : c$, cioè $b^2 = dc$. Con lo stesso ragionamento sui triangoli CED e ACB , possiamo dimostrare che $a^2 = ec$. Allora $a^2 + b^2 = c(d + e)$ e possiamo enunciare la seguente estensione del teorema di Pitagora.

Teorema 3.3. *In un triangolo qualsiasi, la somma dei quadrati di due lati è uguale al rettangolo le cui dimensioni sono il terzo lato e la somma delle proiezioni dei lati minori sul maggiore, ottenuta dalle ceviane che formano angoli congruenti all'angolo maggiore. In particolare, un triangolo è retto se e solo se la somma dei quadrati dei lati minori è uguale al quadrato del lato maggiore.*

Una recente dimostrazione della precedente generalizzazione, basata sull'equiscomponibilità, si trova in (Vincenzi, 2021, p. 235-237).

4 – Riflessioni conclusive

Con questo lavoro sul teorema di Pitagora, vogliamo mostrare che, partendo dalla storia della matematica, è possibile inserire l'insegnamento della geometria in un contesto formativo più ampio e significativo. Inoltre, utilizzando il software di geometria dinamica, è possibile condurre gli studenti verso il pensiero geometrico, evitando la ripetizione di ragionamenti preconfezionati, in modo che essi costruiscano, almeno in parte, le proprie competenze geometriche.

Vogliamo, infine, sottolineare la maggiore fruibilità delle prove visive rispetto alle prove algebriche nell'apprendimento a distanza, dove risulta più difficile mantenere l'attenzione degli studenti su lunghe sequenze di calcoli. Le prove visive, configurandosi come veri e propri rebus da decifrare, risultano spesso più intriganti e per il loro carattere manipolativo ed esplorativo, favoriscono l'approccio all'argomentazione.

Bibliografia

Alsina C. (2010). Proof Without Words: New Pythagorean-like Theorems, *The College Mathematics Journal*, 41(5), 370; doi:10.1080/07468342.2010.11922451

Blainvillain, C. &. (2010). Square trisection: Dissection of a square in three congruent partitions,. *BIAA*, 86, 7-18.

Cook, W. J. (2013). An n-dimensional Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, 44(2), 98-101; doi:10.4169/college.math.j.44.2.098

Cubarsi, R. (2020). An alternative approach to generalized Pythagorean scales. Generation and properties derived in the frequency domain. *Journal of Mathematics and Music*; doi:10.1080/17459737.2020.1726690

Euclide. (1970). *Gli Elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni). UTET.

Ferland, K. K. (2017). Extending Two Classic Proofs of the Pythagorean Theorem to the Law of Cosines. *Mathematics Magazine*, 90(3), 182-186; doi:10.4169/math.mag.90.3.182

Foote, R. L. (2017). A Unified Pythagorean Theorem in Euclidean, Spherical, and Hyperbolic Geometries. *Mathematics Magazine*, 90(1), 59-69; doi:10.4169/math.mag.90.1.59

Heath, S. T. (1981). "The 'Theorem of Pythagoras'". *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Dover Publications, Inc.

Heo, N. G. (2017). Proof Without Words: Pythagorean Theorem via Ptolemy's Theorem. *Mathematics Magazine*, 90(3), 187-187; doi:10.4169/math.mag.90.3.187

Hoehn, L. (2000). A neglected Pythagorean-like formula. *The Mathematical Gazette*, 84(499), 71-73.

Hwang, S. G. (2020). A Determinant Proof of a Generalized Pythagorean Theorem,. *The American Mathematical Monthly*, 127(3), 269-272; doi:10.1080/00029890.2020.1693228

Laudano, F. (2021a). $c^2=a^2+bd$, a visual generalization of the Pythagorean theorem. *The Mathematical Gazette*, 105(564), 520-521; doi:<https://doi.org/10.1017/mag.2021.125>

Laudano, F. (2021b). Visual argumentations in teaching trigonometry. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 54, 183 – 193; doi:10.33039/ami.2021.10.002.

Lemmermeyer, F. (2016). Leonardo da Vinci's Proof of the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, 47(5), 361-364; doi:10.4169/college.math.j.47.5.361

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of "Proofs,"* 2nd ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Luzia, N. (2016). A Proof of The Pythagorean Theorem After Descartes. *The American Mathematical Monthly*, 123(4), 386-386.

Merzbach, U. C. (1968). *A History of Mathematics*. Hoboken, New Jersey.: John Wiley and Sons, Inc.

Molokach, J. (2019). Proof Without Words: The Pythagorean Theorem. *Mathematics Magazine*, 92(4), 287-287; doi:10.1080/0025570X.2019.1586232

Nelsen, R. (2014). Proof Without Words: Pythagorean Quadruples. *The College Mathematics Journal*, 45(3), 179-179; doi:10.4169/college.math.j.45.3.179

Nicollier, G. &. (2018). Pythagorean Theorem: A Proof Without Words. *Mathematics Magazine*, 91(5), 382-383; doi:10.1080/0025570X.2018.1473701

Perigal, H. (1875). On Geometric Dissections and Transformations. *Messenger of Mathematics*, 19; doi:<http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/perigal/perigal.html>

Perng, C. T. (2019). A Variant of the Proof of the Pythagorean Theorem by Huygens. *Mathematics Magazine*, 92(1), 70-71; doi:10.1080/0025570X.2019.1541685

Prabhu, S. K. (2014). Cryptographic Applications of Primitive Pythagorean Triples. *Cryptologia*, 38(3), 215-222; doi:0.1080/01611194.2014.915257

Putz, J. F. (2003). On Generalizing the Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, 34(4), 291-295; doi:10.1080/07468342.2003.11922020

Rahim, M. H. (2003). A new proof of the Pythagorean using a compass and unmarked straight edge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(1), 144-150; doi :10.1080/0020739031000158227

Reale, G. (1992). *Platone, Tutti gli scritti*. Milano: Rusconi.

Sayili, A. (1960). Thābit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem,. *Isis*, 51(1), 35-37; doi:10.1086/348837.

Schroeder, M. R. (2012). *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*. Courier Corporation.

Veljan, D. (2000). The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem. *Mathematics Magazine*, 73(4), 259-272; doi: 10.1080/0025570X.2000.11996853

Vincenzi, G. (2021). On a Proof of the Thābit Ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem. *Journal for Geometry and Graphics*, 25(2), 231--241.

Wares, A. (2017). Looking for Pythagoras between the folds. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(6), 938-941; doi:10.1080/0020739X.2017.1286526

Zhan, M. Q. (2007). Structural analysis of Pythagorean monoids. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 402-407; doi:10.1080/00207390600967349

Marx tra Matematica e Dialettica

*Riflessioni in margine alla storica
"presentazione" di Lucio Lombardo Radice ai
Manoscritti matematici di Marx del 1881.*

Giuseppe Mangione*

*ITI "G. Ferraris"; pinoman2005@libero.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.108

Sunto: Verso gli ultimi anni di vita Marx si interessò al calcolo differenziale, individuandovi argomenti a favore del suo progetto di capovolgimento materialistico della dialettica di Hegel. La Presentazione del 1972 di Lucio Lombardo Radice ai Manoscritti matematici marxiani ci restituisce, in maniera ancora insuperata, la poliedricità del pensiero di Marx e l'attualità della sua visione unitaria del sapere.

Parole Chiave: Marx, Lombardo Radice, Calcolo differenziale, Dialettica,

Abstract: Marx dedicated his last studies to the differential calculus, identifying matters in favour of his project of the materialistic reversal of Hegel's dialectics. Lucio Lombardo Radice in the Presentation of 1972 to the Mathematical Manuscripts of Marx returns, in an unsurpassable way, the versatility of Marx's thought and the relevance of his unified view of knowledge.

Keywords: Marx, Lombardo Radice, Differential calculus, Dialectics.

1 - Introduzione

Sfogliando vecchi libri in mio possesso, mi sono imbattuto in un denso volumetto del 1972, il *Quaderno n.6 di Critica Marxista*, dal titolo *Sul marxismo e le scienze*, che ospitava articoli di autorevoli figure dell'intellettualità dell'epoca, tra cui, per citarne solo alcune, Ludovico Geymonat, Lucio Lombardo Radice, Giulio Giorello, Franco Selleri, che affrontavano temi di notevolissimo spessore ed interesse, ancora attuali, come la "neutralità" della scienza, le implicazioni filosofiche della teoria della relatività e della fisica quantistica, le prime considerazioni sulle ricadute filosofico-culturali delle scienze informatiche (allora ancora definite con il termine, oggi desueto, di "cibernetica") ed altro ancora, sugli stessi livelli di significatività teoretica; tutti i contributi erano percorsi dal filo rosso della problematizzazione del rapporto tra cultura scientifica e filosofica, naturalmente all'interno di una sorta di riferimento ideologico-filosofico unificante (ma non totalizzante) che, all'epoca, era rappresentato dal marxismo.

Al di là delle ovvie riflessioni sulla funzione di stimolo e promozione del dibattito culturale che avevano una volta i partiti politici («*Critica Marxista*» era diretta emanazione del Partito Comunista Italiano, del quale rappresentava, insieme al settimanale *Rinascita* e alla rivista «*Politica ed economia*,» il vero e proprio "laboratorio" intellettuale) e pur considerando rischi e i limiti delle interpretazioni allora in voga del pensiero di Marx come "filosofia generale", è indubbio che il confronto con quanto oggi si produce nell'agone politico-intellettuale direttamente riferibile alle attuali organizzazioni politiche, desta, a buona ragione, qualche perdonabile punta nostalgica

in chi, come lo scrivente, si trova ad essere “in avanti” con lo scorrere del tempo. Si tratta di un vero e proprio “mondo che non c’è più”, e che sarebbe vano immaginare di restaurare (come a volte si sente ingenuamente proporre) ma che ebbe una funzione determinante nell’emancipazione culturale delle classi popolari (e non) nazionali e nella democratizzazione del tessuto sociale. Si pensi, a mero titolo d’esempio, che il volume in questione lo ereditai da “compagni di sezione” che ne discutevano con passione e sufficiente capacità di comprensione, pur senza disporre di titoli di studio superiori. L’articolo più ostico, quasi “inavvicinabile”, risultava essere proprio quello di cui discuteremo in queste righe, e si riferisce alla pubblicazione di un manoscritto di Marx riguardante il calcolo differenziale ed alla, ancora oggi, insuperata *Presentazione* di Lucio Lombardo Radice.

2 – Il manoscritto marxiano nella Presentazione di Lombardo Radice

Il testo che prendiamo in esame, scritto da Marx nel 1881 e da questi inviato ad Engels nello stesso anno, fu tradotto e presentato da Lombardo Radice nel 1972, sui citati *Quaderni di Critica marxista*, col titolo *Sul concetto di funzione derivata*. Fu questa la prima traduzione e pubblicazione italiana del manoscritto, tratta dalla edizione critica del 1968 curata a Mosca dall’ Istituto per il marxismo-leninismo del Cc del Pcus.

Engels accolse lo scritto con particolare favore, in quanto erano quelli gli anni in cui andava elaborando le ultime parti della incompiuta *Dialettica della natura*, grande e controverso tentativo (già anticipato con la pubblicazione dell’*Antidürring*)

di dare una sistemazione organica alla filosofia dialettico-materialista, ancorato alla certezza che nella natura siano operanti le stesse «leggi dialettiche del movimento che anche nella storia dominano le apparenti accidentalità degli avvenimenti» (Engels, 1968, p. 10).

L'interesse di Marx per questo tipo di "ricostruzione complessiva" ebbe certamente caratteri di minore organicità. Tutti i suoi sforzi principali si concentrarono, fin dagli inizi degli anni cinquanta dell'Ottocento, sull'analisi della struttura economico-sociale del modo di produzione capitalistico e sui connessi risvolti politici, per cui le "incursioni" in altri campi (filosofia, antropologia, matematica e scienze naturali) potrebbero apparire come parentesi o deviazioni, temporanee e fini a se stesse, dal suo itinerario teoretico.

In realtà, parallelamente ai suoi studi economici, in Marx si sviluppò l'esigenza metodologica del *capovolgimento* della dialettica hegeliana, per estrarne, come scrisse nel *Proscritto* alla seconda edizione del *primo libro* del *Capitale*, il «nocciolo razionale» (Marx, 1977 b, p. 45) e per dare una solida sistemazione teorico-metodologica alla sua "critica dell'economia politica". Questa istanza era perfettamente concordante con la natura dell'elaborazione teorica di Engels, nel quale senza dubbio è maggiormente rinvenibile il tentativo, non prioritario in Marx, di una "ricostruzione filosofica generale" individuante leggi onnicomprensive.

È proprio in quest'ordine di idee, di natura metodologico-epistemologica, che va inquadrato il manoscritto di Marx sul calcolo differenziale, che ci accingiamo a descrivere sinteticamente guidati dalle pagine introduttive di Lombardo Radice che, dopo averne descritto la genesi e sottolineato la

“limpидità”, si produce in un doppio commento, il primo di natura matematica, l’altro di stampo filosofico, più breve, ma estremamente significativo, in quanto individuante i presupposti e il fine del testo.

La premessa di Lombardo Radice al commento matematico ci introduce subito nell’ottica marxiana e ce ne chiarisce il punto di partenza, stabilendo come Marx neghi recisamente una «esistenza matematica primaria e non riflessa» ai differenziali dx e dy , negando, quindi, «l’esistenza di infinitesimi attuali, di quantità infinitamente piccole ma non nulle».

Nel manoscritto Marx analizza il passaggio da una funzione $y = f(x)$ alla sua derivata «dal punto di vista operativo». Innanzitutto ne costruisce il rapporto incrementale (rapporto tra l’incremento $f(x_1) - f(x)$ della funzione e $x_1 - x$ della variabile indipendente) definendo una funzione $F(x, x_1)$, che Marx chiama “derivata provvisoria”. Poi evidenzia che fino a che gli incrementi sono finiti vi è uguaglianza tra rapporto incrementale e derivata provvisoria e, quando x_1 ritorna al valore x di partenza, al secondo membro abbiamo «una normalissima trasformazione algebrica» ($F(x, x_1)$ diventa $F(x, x)$) mentre al primo membro «il rapporto incrementale perde un significato operatorio effettivo, in quanto si tramuta nel rapporto $0/0$ ». Questo rapporto, continua Lombardo Radice che, come insegna Leibniz, definiamo “quoziente differenziale” dy/dx , «è per Marx allora null’altro che il simbolo della operazione “algebrica” effettivamente compiuta nel secondo membro: non ha una esistenza propria». Si tratta, riprendendo le stesse parole di Marx di «figure d’ombra senza corpo», in sostanza

di simboli «del processo reale di passaggio da una funzione originaria, $f(x)$, alla sua “derivata definitiva”, $f'(x)$, processo che si svolge tutto a secondo membro» (Lombardo Radice, 1972, pp. 273-274).

Aggiungiamo che l'insistenza marxiana sul fatto che dy/dx sia simbolo operativo “di un processo reale” avviene all'interno di una critica della “natura mistica” del calcolo differenziale, la cui genealogia storica Marx abbozza in un ulteriore manoscritto sulla *Storia del calcolo differenziale*, della quale individua tre fasi: quella “newtoniana-leibiziana” che non giustificerebbe “in termini reali” i differenziali, quella “razionalistica” di D'Alembert, da cui Marx trasse l'idea che andassero usate solo grandezze finite, e quella “algebrica” di Lagrange, di cui Marx condivideva il ruolo di fondamento attribuito all'algoritmo di calcolo (Marx, 1975).

Sulla scorta delle indicazioni di Lombardo Radice tralasciamo l'esposizione del procedimento di derivazione utilizzato da Marx, che non conosceva «la fondazione critica dell'analisi, da Cauchy a Weierstrass» ma che, proprio per questo, è dal nostro commentatore definito “geniale”, in quanto in grado di giungere autonomamente a criticare la cosiddetta “fondazione mistica” del calcolo infinitesimale. Questa, come chiarisce Marx ad Engels nel 1882, consiste nel fatto che « $x_1 = x + Dx$ sin dall'inizio viene mutato in $x_1 = x + dx$ [...] dove dx è presupposto mediante una definizione metafisica. Prima esiste, e poi viene definito».

Marx invece capovolge questa impostazione, definendo *operatoriamente* derivate e differenziali, non concependole, quindi, come entità o sostanze di tipo metafisico e di per sé esistenti, ma connotandole come «simboli di operazioni», con

un'impostazione che lo stesso Lombardo Radice arriva a collocare sulla «grande via di pensiero della definizione operativa moderna (Albert Einstein, Norbert Wiener)».

In particolare, Lombardo Radice sottolinea la pregnanza del metodo marxiano nel caso di funzione polinomiale:

Nel caso di una funzione polinomiale il "metodo algebrico" di Marx apre la via a sviluppi matematici importanti (ai quali certo Marx non poteva pensare, per quel che concerne i loro contenuti), cioè a una definizione operativo-formale della derivata di una funzione polinomiale a coefficienti in un campo qualunque, definizione del tutto indipendente dalle considerazioni di continuità e di limite che caratterizzano le funzioni di variabile reale

(Lombardo Radice, 1972, p. 275).

Dopo questo illuminante excursus matematico, Lombardo Radice concentra l'attenzione sul «nucleo filosofico», della riflessione matematica marxiana: se da un lato il processo di derivazione si presenta indubbiamente coi tratti della processualità dialettica della "negazione della negazione" (a partire da un valore della variabile indipendente lo si nega aumentandolo e infine si ricava la soluzione attraverso un'ulteriore negazione), dall'altro l'obiettivo di Marx è "rovesciare" l'idea di un'applicazione aprioristica della legge dialettica e realizza tale obiettivo associandolo alla critica della "fondazione mistica" del calcolo differenziale.

Marx, chiosa Lombardo Radice, dedica negli ultimi anni della sua vita «tanta attenzione e tanto sforzo di pensiero» alla fondazione del calcolo differenziale perché è convinto di poter ricavare da esso «un argomento decisivo contro

un'interpretazione metafisico-mistica della legge dialettica della negazione della negazione», per evitare il rischio che la stessa sia declinata con caratteri idealistici e deterministici (rischio invece rinvenibile nei procedimenti dialettici hegeliani e, come vedremo, non del tutto estranei alle “sistemazioni” generalizzanti di Engels).

3 – Calcolo differenziale e dialettica marxiana

La gravidanza dell'interpretazione di Lombardo Radice è tanto più significativa in quanto, successivamente alla sua prima rivisitazione, altre e diverse interpretazioni sono state proposte circa le motivazioni che avrebbero spinto Marx ad interessarsi a questi settori della matematica, specialmente riferendole ai suoi studi economici e, quindi, alla redazione del *Capitale*. L'analisi delle diverse posizioni ci porterebbe oltre i limiti del presente scritto ma, solo a mo' d'esempio, richiamiamo una recente e suggestiva ipotesi proposta da Forges Davanzati, economista e studioso del pensiero marxiano, secondo il quale questo interesse di Marx potrebbe derivare dalla lettura dell'opera degli economisti marginalisti (in particolare di Jevons) e dall'urgenza del confronto con gli stessi. In realtà lo stesso Davanzati depotenzia immediatamente la sua ipotesi ammettendo che essa non si fonda su alcun riferimento testuale ma solo sulla generica considerazione che Marx «conosceva più testi di quelli che citava» (Forges Davanzati, 2022, p. 30).

In effetti l'analisi dell'impostazione e delle tematiche trattate da Marx nel *Capitale*, evidenzia come entrambe esulino totalmente da qualsivoglia possibile riferimento ai

procedimenti di derivazione utilizzati dai marginalisti: Marx solo raramente, e in maniera non organica, ritiene di dover approfondire matematicamente i meccanismi microeconomici che danno luogo, nella concorrenza, alla formazione dei prezzi e dei valori di mercato (il terreno di indagine dove i marginalisti introducono i concetti di saggio marginale di sostituzione e di trasformazione utilizzando, appunto, i processi di differenziazione e di derivazione).

Allo stesso modo Marx non porta avanti, sul versante dell'analisi della produzione, quel processo di *trasformazione dei valori in prezzi di produzione* che sarà a lungo uno dei luoghi più visitati della critica alla sua teoria del valore e che comunque, nell'ottica dell'economia politica classico-ricardiana e non marginalista, avrebbe richiesto (e richiese) l'affinamento della matematica relativa alla "*risoluzione simultanea* mediante un opportuno sistema di equazioni" (Napoleoni, 1976, pp. 90-96) e non l'approfondimento dei procedimenti di derivazione e differenziazione.

Rimane quindi fondamentale, a nostro avviso, l'interpretazione di Lombardo Radice che focalizza l'attenzione sull'aspetto filosofico-metodologico, anche alla luce di un'analisi che problematizzi "concordanze e differenze" tra le elaborazioni teoriche di Marx ed Engels.

Innanzitutto è importante sottolineare che nel dibattito allora in corso nel marxismo teorico italiano sulla reale consistenza del pensiero engelsiano rispetto a quello di Marx, Lombardo Radice era tra i maggiori estimatori della statura intellettuale di Engels, annoverandolo tra i suoi «grandi maestri» (Lombardo Radice, 2006, p. 135-136) ed arrivando ad affermare che egli «prefigura il moderno epistemologo, meta-

scienziato ma non scienziato specialista» (Lombardo Radice, 1978, p. 22).

È in quest'ottica che Lombardo Radice liquida subito qualsiasi netta «contrapposizione diametrale» tra le visioni dei due "padri" del materialismo storico, ribadendo che Marx, non meno di Engels, fosse convinto della relazione tra le processualità dialettiche di "storia" e "natura" e tra i loro "riflessi" nel pensiero. Nonostante ciò egli individua nel loro diverso modo di concepire il processo di «negazione della negazione» una delle chiavi ermeneutiche decisive per gettare luce sui lavori matematici di Marx.

Nell'*Antidüring* infatti, Engels conduce, a detta di Lombardo Radice, un ragionamento "piuttosto assertorio" nella parte dedicata al rapporto differenziale, non chiarendone bene il processo e suscitando l'impressione di una dialettica ancora "mistica" o, come si esprimeva Marx nei confronti di Hegel, ancora "collocata sulla testa", non seguendo la via maestra di Marx che, come vedremo nel prossimo paragrafo, sarà sempre segnata dalla preoccupazione di non anticipare risultati non dimostrati.

Scriva infatti Engels nell'*Antidüring*, in riferimento al processo di derivazione (Engels, 1968, p. 146):

Invece di x e y io ho, nelle formule o nelle equazioni che mi stanno davanti, la loro negazione, dx e dy . Ora io continuo a calcolare con queste formule, tratto dx e dy come grandezze reali, anche se sottoposte a certe leggi eccezionali, e ad un certo punto nego la negazione, cioè integro la formula differenziale, al posto di dx e di dy ottengo di nuovo le grandezze reali x e y , ma non mi trovo di nuovo al punto in cui ero in principio; invece ho così risolto un problema sul

quale la geometria e l'algebra si sarebbero forse invano affaticate.

Lombardo Radice arriva inoltre a dubitare che Engels avesse compreso a pieno la «demistificazione dei differenziali operata da Marx» col suo metodo algebrico e cita i passi della *Dialettica della natura* dove si producono ardite identificazioni tra «rettilineo e curvilineo» che il calcolo infinitesimale produrrebbe» (Engels, 1978, pp. 272-274) a cui fanno però da contraltare alcuni interessanti tentativi di «interpretazione naturalistica del differenziale, paragonando l'infinitesimo matematico all'indivisibile fisico, il differenziale alle molecole e agli atomi». Per questo, pur ribadendo la validità dell'interpretazione algebrico-operativa di Marx del rapporto differenziale e del sotteso punto di vista sulla relazione discreto-continuo, Lombardo Radice chiude il paragone Marx-Engels non mancando di sottolineare come il citato rapporto discreto-continuo sia una questione aperta, che «ha travagliato scienza e filosofia per millenni, e che continua a svilupparsi in forme sempre nuove» (Lombardo Radice, 1972, p. 277).

4 – Il “capovolgimento” della logica di Hegel

L'individuazione della questione della “negazione della negazione” come fulcro teoretico del manoscritto analizzato, potrebbe dare l'impressione di un “bizantinismo” ermeneutico di interesse relativo e circoscritto agli esegeti del pensiero di Marx. In realtà si tratta di una questione centrale per l'interpretazione della validità del metodo marxiano, e della sua “attualità”, come motiveremo sinteticamente nelle

conclusioni. Riteniamo necessario però, per supportare ciò che andremo argomentando, un ulteriore cenno al senso che Marx dava del suo programma di capovolgimento della dialettica di Hegel.

L'evoluzione del rapporto Marx-Hegel è uno dei luoghi più controversi ma anche più studiati del pensiero marxiano; (tra la sterminata letteratura sulla questione, rimandiamo a due classici del pensiero filosofico italiano su Marx (Colletti, 1976; Dal Pra, 1977). In questa sede ci limitiamo a richiamare l'itinerario che va da una iniziale e severa critica del periodo giovanile, dove il processo di conoscenza hegeliano è stigmatizzato come "ipostatizzazione dell'idea" e sostituzione delle *contraddizioni reali* con *contraddizioni astrattamente razionali*, fino alla rivalutazione metodologica sollecitata nel 1857 da una lettura accidentale della *Scienza della Logica* ed espressamente teorizzata nel *Proscritto* alla seconda edizione del *Capitale*.

La critica "giovanile" ad Hegel è rinvenibile in tutte le opere che precedono la redazione del *Manifesto*. In particolare può desumersi dalla *Introduzione* alla *Kritik del 43*, dove Hegel è accusato di «degradare il sensibile a involucro dell'Assoluto», affermando una «concezione negativa della materia». Commentando la *Filosofia del diritto* di Hegel, Marx lo accusa di ridurre i reali rapporti di famiglia e società civile con lo Stato a «interna e immaginaria attività di questo»: famiglia e società civile, che dovrebbero essere modi di esistenza dello Stato, parti reali e agenti, sono invece «agite dall'idea reale; la condizione diventa il condizionato, il determinante il determinato». Hegel, obietta Marx:, «non sviluppa il suo pensiero secondo l'oggetto, ma sviluppa

l'oggetto secondo un pensiero predisposto nell'astratta sfera della logica» (Marx, 1977 a, pp. 17-23).

Nel 3° *Manoscritto filosofico* del 44 Marx riprende la critica di Feuerbach alla dialettica hegeliana ed alla caratterizzazione aprioristica della "negazione della negazione". Ancora, nella *Sacra famiglia*, Marx afferma che per Hegel lo spirito assoluto fa la storia e il filosofo è l'organo nel quale tale spirito giunge, in ritardo, alla coscienza: «lo spirito compie il movimento reale. Il filosofo viene *post festum*» (Engels, Marx, 1979, pp. 109-110). Infine, nella *Miseria della filosofia*, Marx riduce il concetto di storia di Hegel a «ciò che avviene nel suo ragionamento» e la sua filosofia all'illusione «di costruire il mondo col movimento del pensiero» (Marx, 1976, p. 93).

Eppure, nel 1857, mentre è immerso nei suoi studi di economia politica e nell'elaborazione del primo abbozzo del *Capitale*, Marx s'imbatte nella *Logica* di Hegel e ritiene di farne uso per una nuova esposizione dei suoi risultati teorici, come scrive a Engels in una famosa lettera del gennaio 1858 (Marx, Engels, 1971, p. 19):

Del resto faccio dei bei passi avanti. P. es. tutta la teoria del profitto, qual è stata finora, l'ho mandata gambe all'aria. Quanto al metodo del lavoro mi ha reso un grandissimo servizio il fatto che by mere accident mi ero riveduto la Logica di Hegel. Se tornerà mai il tempo per lavori del genere, avrei una gran voglia di rendere accessibile all'intelletto dell'uomo comune in poche pagine, quanto vi è di razionale nel metodo che Hegel ha scoperto ma nello stesso tempo mistificato.

Conseguentemente Marx, nel citato *Proscritto al Capitale*, esporrà magistralmente assonanze e differenze tra il suo metodo e la dialettica hegeliana, che va rovesciata «per scoprire il nocciolo razionale entro il guscio mistico» e che, nella sua dimensione razionale, non è altro che il riflesso della dimensione transeunte del capitalismo e di quella dinamica della storia, «perché nella comprensione positiva dello stato di cose esistente include simultaneamente anche la comprensione della negazione di esso» (Marx, 1977 b, p. 45).

Inoltre chiarirà come tutta l'impostazione del *Capitale* (la famigerata analisi del "Capitale in generale", che si avvicina per gradi alle "forme fenomeniche") vada interpretata alla luce della netta distinzione tra *esposizione della materia* e *evoluzione del concetto*, ribadendo che rapporti dialettici e contraddizioni non sorgono dal pensiero, ma sono riflessi di una realtà oggettiva. Una dialettica "materialistica" quindi, che non va confusa con una metafisica storica che s'impone al reale, ma trae da questo, inteso come insieme di «presupposti reali» e «storia reale», gli elementi oggettivi che la validano, su cui vengono costruite le categorie interpretative capaci ricostruire il circolo metodologico che verifica le idee-ipotesi, attraverso l'esperimento storico. Una dialettica, infine, lontana da ogni determinismo aprioristico, come Marx scrisse in una lettera del 1877 alla redazione della rivista russa *Ottecestvennye Zapiski*, chiarendo che alla «chiave di interpretazione» della storia «non si arriverà mai col grimaldello di una teoria storico-filosofica generale, la cui suprema virtù consiste nell'essere sopra-storica» (Marx, Engels, 1971, pp. 155-158).

La dialettica di Marx va dunque sempre messa in relazione ai caratteri fondamentali della sua gnoseologia che, anche se mai sistematizzati formalmente, possono rinvenirsi in una riformulazione della teoria aristotelica della *corrispondenza tra pensiero ed essere*, alla luce di una visione dinamica del reale che si *rispecchia* nelle scienze (il sapere del *particolare*) e nella filosofia (il sapere del *reale* considerato come un *tutto*) e quindi una dialettica dalle sfaccettature teoriche diverse, che Marx andava indagando nella pluralità dei suoi campi di applicazione, tra i quali, appunto, anche quello della matematica. In questo quadro epistemologico vanno inserite le riflessioni sul rapporto tra calcolo differenziale e principio della “negazione della negazione”.

Come è stato evidenziato da numerosi studi su Marx, la *dialettica della negazione* si dipana lungo tutta la sua opera. Infatti, già nei suoi primi scritti sulla *Questione ebraica*, lo Stato «esiste come *universale* solo in quanto questa sua universalità è posta per negazione dei particolarismi della società civile» (Di Marco, 2005, p. 18). Ritroviamo poi la stessa impostazione nelle pagine del *Capitale* sulla *Tendenza storica dell'accumulazione capitalistica*, dove si legge che «la produzione capitalistica genera essa stessa, con l'ineluttabilità di un processo naturale, la propria negazione. È la *negazione della negazione*» (Marx, 1977 b, p. 826).

L'insistenza sulla declinazione scientifica e non aprioristica della *negazione dialettica* che, seguendo Lombardo Radice, abbiamo individuato nei manoscritti matematici, è quindi in linea con lo sviluppo complessivo del pensiero marxiano e col suo rigore metodologico antimetafisico, attento a «non anticipare risultati non dimostrati» (Marx,

1969, p.3). Non si tratta, come lo stesso Engels sa bene, di una restaurazione della dialettica idealistica (egli scrisse l'Antidüring proprio per confutare questo tipo di accusa che Düring rivolse a Marx), ma di un metodo che non pretende di avere una funzione dimostrativa e che, con peso più o meno simile in Marx ed Engels, consente di andare al di là dei limiti della logica formale, senza per questo negare validità al principio di non contraddizione, quando è la realtà stessa, nel suo movimento, a mostrarci il processo della compenetrazione degli opposti. In conclusione, una dialettica della negazione che non si pone in antitesi col pensiero scientifico, ma ne ribadisce la complementarietà alla critica filosofica.

5 – Conclusioni.

Sintetizziamo i risultati raggiunti in questa breve disamina del manoscritto di Marx del 1881 e della *Presentazione* di Lombardo Radice:

- 1) Tra le diverse interpretazioni che sono state date circa le motivazioni dell'interesse di Marx verso la matematica, e in particolare il calcolo differenziale, quella proposta nel lontano 1972 da Lombardo Radice ci sembra ancora essere la più aderente allo spirito e alla prospettiva filosofica generale marxiana.
- 2) L'interesse di Marx per il calcolo differenziale è figlio di un'esigenza metodologica tesa a chiarire i diversi aspetti della logica dialettica, liberandola da quel misticismo implicito nell'impostazione di Hegel.
- 3) Un passaggio teorico fondamentale di questo "capovolgimento" marxiano sta nella ridefinizione

“materialistica” della dialettica della “negazione della negazione”, nei suoi diversi campi di applicazione

- 4) In matematica questa “ridefinizione materialistica” avviene parallelamente alla critica “demistificante” dei procedimenti di derivazione leibniziani che, secondo Lombardo Radice, proprio perché non fondata su un solidissimo patrimonio di conoscenze specifiche, denotano una “geniale” capacità di anticipazione di problematiche che attraverseranno la storia del pensiero matematico.

Come efficacemente ci spiega Lombardo Radice «Marx certo non *giocava* colla matematica» ma percorreva un itinerario teorico dove anche «andare in profondità, nella questione della fondazione del calcolo differenziale» significava «*pensare meglio* non solo localmente ma globalmente» (Lombardo Radice, 1972, p. 277).

Lombardo Radice, infatti, chiude l'articolo valorizzando il significato dell'opera marxiana alla luce di quell'esigenza di “unitarietà” tra cultura umanistica e scientifica che è stata la cifra del suo impegno intellettuale, sia come di autorevole cattedratico di matematica, sia come uomo politico.

Per ragioni che non è possibile qui richiamare, neppure sinteticamente, l'ermeneutica filosofica riferita a Marx ha purtroppo progressivamente sottratto gli aspetti “scientifici” del suo pensiero e le proficue ricadute che questi avevano sull'impianto filosofico-metodologico complessivo.

Si è andato così molto lontano da quanto auspicato da Lombardo Radice e dai tentativi compiuti, ad esempio, da una scuola filosofica come quella di Ludovico Geymonat, che vedeva nella metodologia marxiana addirittura la strada per

la risoluzione delle difficoltà gnoseologiche di ricomposizione tra scienza e filosofia, proprie, a suo dire, «sia delle teorie idealistiche che di quelle fenomeniste» o neopositiviste (Geymonat, 1978) e che evidenziava, invece, le sue affinità con una concezione della scienza come “approssimazione”, paradossalmente in alcuni aspetti «convergente con quella di Karl Popper filosofo *antidialettico* per antonomasia» (Giorello, 2006, pp. 186-189).

La valutazione sulla “attualità” del pensiero filosofico ed economico di Marx è operazione complessa e controversa, che non è possibile nemmeno abbozzare in questa sede. Ci sia consentito però, sulla scorta di quanto detto finora, avanzare la tesi che il lascito gnoseologico-metodologico marxiano (e oseremmo dire anche “didattico”) è ancora tra quelli più significativi dell’intera storia del pensiero.

Abbiamo visto come in Marx le considerazioni filosofiche generalizzanti dovessero essere sempre basate sull’analisi dei “fatti” e abbiamo evidenziato la sua idiosincrasia verso la pretesa speculativa di anticipare l’analisi con la sintesi, deducendo il particolare dal generale: la dialettica marxiana “non fonda” la scienza ma “è fondata” sulla scienza.

Rileggere Marx quindi con lo spirito che ci restituisce la *Presentazione* di Lombardo Radice, ci sembra un efficace maniera per porre un argine ai rischi della frammentazione culturale e anche dei riduzionismi pseudoscientifici (con annesse generalizzazioni metafisiche di fondamentali, ma particolari, teorie scientifiche) in un’epoca come la nostra che vede uno sviluppo esponenziale delle diverse scienze impensabile ai tempi del filosofo di Treviri.

Ed è in quest'ottica che ci piace congedarci richiamando quanto scriveva Lombardo Radice a chiusura dell'articolo che abbiamo commentato (Lombardo Radice, 1972, p. 277):

Il superamento della barriera tra le due culture non può e non deve essere un enciclopedismo (o impossibile o inutile), ma la piena comprensione dei fondamenti dei diversi metodi e indirizzi di ricerca, dalla storia alle scienze della natura alla matematica, per una reciproca fecondazione delle diverse, ma non divergenti, "strade di pensiero".

Bibliografia

- Colletti L. (1976). *Il marxismo ed Hegel*, Bari: Laterza.
- Dal Pra M. (1977). *La dialettica in Marx*, Bari: Laterza .
- Di Marco G. A. (2005). *Dalla soggezione all'emancipazione umana*, Soveria Mannelli, Rubettino.
- Engels F. (1968). *Antidürring*, Roma: Editori Riuniti.
- Engels F. (1978). *Dialettica della natura*, Roma: Editori Riuniti.
- Engels F., MARX K. (1979). *La sacra famiglia*, Roma: E. Riuniti.
- Forges Davanzati G., Sulpizio F. (2022). *Marx e la matematica*, Segni e comprensione, siba-ese.unisalento.it.
- Geymonat L., Giorello G., Bellone E., Tagliagambe S. (1978). *Attualità del materialismo dialettico*, Roma: Editori Riuniti.
- Lombardo Radice L. (1972). *Presentazione ai "Manoscritti matematici" di Karl Marx*, in AA.VV., *Sul marxismo e le scienze, Critica marxista, Quaderni n. 6*, Roma: Editori Riuniti.
- Lombardo Radice L. (1978). *Prefazione a ENGELS F., Dialettica della natura*, Roma: Editori Riuniti.
- Lombardo Radice L. (2006). *L'infinito*, Roma: Editori Riuniti.
- Giorello G. (2006). *Introduzione alla filosofia della scienza*, Milano: Bompiani.
- Marx K. (1972). *Sul concetto di funzione derivata*, in AA.VV., *Sul marxismo e le scienze, Critica marxista*, (cit.).
- Marx K. (1975). *Manoscritti matematici*, Bari: Dedalo.
- Marx K. (1976). *Miseria della filosofia*, Roma: Editori Riuniti.
- Marx K (1977 a). *Opere filosofiche giovanili*, Roma: Editori Riuniti.
- Marx K. (1977 b). *Il Capitale, Libro primo*, Roma: Editori Riuniti.
- Marx K. (1979). *Per la critica dell'economia politica*, E. Riuniti.
- Marx K., Engels F. (1971). *Lettere sul Capitale*, Bari: Laterza.
- Napoleoni C. (1976). *Valore*, Milano: ISEDI.

Se le calotte polari si sciolgono...

*Quali conseguenze climatiche dobbiamo
attenderci?*

Giuseppe D'Angelo*

* Laurea in Scienze Agrarie. Docente a tempo indeterminato di Scienze
Naturali presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT);
sitdang010762@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n1.109

Sunto: Il veloce innalzamento termico subito dal nostro pianeta, soprattutto a partire dalla metà del secolo scorso ha prodotto numerose conseguenze dal punto di vista climatico. Lo scioglimento dei ghiacciai, soprattutto quelli delle calotte polari, sta causando un progressivo lento innalzamento del livello medio dei mari. Ma la preoccupazione più grande sta nell'accumulo di energia termica nell'atmosfera. Il maggior calore dell'aria è causa di eventi climatici sempre più estremi quali uragani, alluvioni e siccità. È indispensabile ricorrere ad azioni decise in favore dell'ambiente attraverso una vera transizione ecologica.

Parole Chiave: Cambiamenti climatici, calotte polari, temperatura media, innalzamento del livello dei mari.

Abstract: *The rapid rise in temperature suffered by our planet, especially since the middle of the last century, has produced numerous consequences from a climatic point of view. The melting of glaciers, especially those of the polar caps, is causing a progressive slow rise in the average sea level. But the biggest concern lies in the accumulation of thermal energy in the atmosphere. The greater heat in the air is the cause of increasingly extreme climatic events such as hurricanes, floods and droughts. It is essential to resort to decisive actions in favor of the environment through a true ecological transition.*

Keywords: *Climate change, ice caps, average temperature, sea level rise.*

1 - Introduzione

Tante notizie, spesso anche piuttosto allarmanti, sull'andamento climatico generale del nostro pianeta vengono diffuse quasi quotidianamente da innumerevoli fonti informative. Andamento climatico certamente alterato a causa dell'eccessivo aumento della temperatura media atmosferica che ha, peraltro, causato anche il fenomeno dello scioglimento delle coltri glaciali polari. Ghiacciai dall'insostituibile funzione di regolatori termici planetari in grado di garantire l'indispensabile equilibrio climatico di cui ancora parzialmente godiamo. In questo breve lavoro si prendono in riesame alcuni dati climatici di facile accesso mediatico con lo scopo di fare delle puntualizzazioni sui reali pericoli legati alla concreta variazione del livello medio dei nostri mari. Verrà anche preso in considerazione il ruolo di volano idrico ricoperto dall'atmosfera terrestre. Lo scopo è quello di facilitare la comprensione, anche a chi non è del mestiere, di come vengono fatte certe previsioni sull'andamento climatico

e soprattutto far percepire il reale rischio che corriamo ogni giorno che passa non disponendo di un efficace e relativamente rapido rimedio agli evidenti cambiamenti climatici che caratterizzano la nostra epoca.

2 - La temperatura della terra è aumentata

Non è facile affermare con certezza che la temperatura media del nostro pianeta è realmente aumentata (https://it.wikipedia.org/wiki/Riscaldamento_globale, <https://www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/200907>, <https://www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/202105>).

Le ragioni risiedono principalmente nel fatto che le relative misurazioni termiche sistematiche e accettabili sono iniziate nel 1860 ma quelle realmente affidabili iniziano a partire dal 1950. Questo perché gli strumenti utilizzati non erano qualitativamente eccellenti. Non si sono sempre seguiti gli stessi criteri di osservazione, c'è stata una certa discontinuità nelle misurazioni ecc. Le osservazioni effettuate alcuni decenni fa presentano inoltre diverse lacune a livello di copertura geografica, considerando che non c'erano allora i mezzi tecnici che garantissero un'attendibile misurazione delle temperature in determinate zone della Terra: deserti, calotte polari, oceani. Il problema è stato poi risolto con le osservazioni satellitari, ma si sono dovuti attendere i primi anni '70. È stato possibile però fornire, grazie a tecniche alquanto sofisticate e a opportune correzioni, delle medie di provata affidabilità. Certo, permangono ancora alcune differenze fra i risultati ottenuti dai diversi gruppi deputati alle osservazioni. Nell'immagine sotto riportata (fonte: Copenhagen Diagnosis

2009)¹ si riportano i dati forniti da due importanti istituzioni in materia di climatologia (Hadley Center e NASA/GISS).

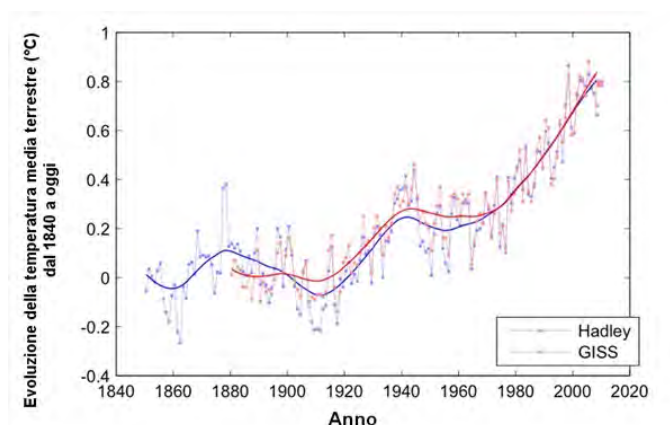


Grafico 1

Oggi si parla di riscaldamento globale e s'intende un incremento delle temperature medie sulla superficie della Terra che si è verificato principalmente a partire dalla metà del XX secolo. Il quarto rapporto dell'Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), consultabile al seguente link:

https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/ar4_syr_full_report.pdf, nei suoi studi di detection del 2007 stima che

la temperatura media della superficie terrestre è aumentata di 0.74 ± 0.18 °C durante il XX secolo. La maggior parte degli incrementi di temperatura sono stati osservati a partire dalla metà del XX secolo e sono stati attribuiti all'incremento di concentrazione dei gas serra.

¹ Confronta con [2]

3 - Di quanto aumenterebbe il livello del mare

Come sarà possibile comprendere chiaramente tra breve, il disgelo totale delle calotte polari è un evento del tutto ipotetico ed eventualmente verificabile in un lungo arco di tempo. Tuttavia, è possibile prevedere facilmente la quantità d'acqua che si otterrebbe dallo scioglimento delle attuali calotte polari (Groenlandia ed Antartide, essenzialmente) ed il conseguente aumento del livello medio dei mari. La tabella che segue riporta il semplice calcolo effettuato su un foglio Excel.

A	B	C	D	E	F	G	H
Continentee/regione	Superficie complessiva km ²	Superficie ricoperta dalle acque (71%) km ²	Superficie ricoperta da ghiaccio permanente km ²	Spessore medio coltre di ghiaccio km	Volume medio coltre glaciale permanente (km ³) (d6*66)	Volume medio di acqua da fusione (d6*0,9)	Eventuale variazione di livello dei mari (m) (g6/66)*1000
Antartide	14.000.000		12.300.000	1,6			
Groenlandia	2.166.086		1819512,24	2,3			
Terra	510.000.000	362100000	14.119.512	1,95	27.533.049	24779743,98	68,4334

Tab.1 – (dati tratti da: <http://it.wikipedia.org/wiki/Groenlandia> , <http://it.wikipedia.org/wiki/Antartide> e [Terra - Wikipedia](#))

Anche se l'area della calotta glaciale attorno al Polo Nord si è ridotta a 4,1 milioni di chilometri quadrati, la dimensione più piccola misurata dal 1979, ² tuttavia questi dati non hanno

² Quando iniziarono le osservazioni satellitari e la copertura di ghiaccio marino negli anni '70 e '80 era superiore di ben 7 milioni di chilometri quadrati

molta inferenza sul problema dell'aumento del livello medio dei mari. Ciò in quanto lo scioglimento riguarda principalmente i ghiacci della banchisa polare. Il loro scioglimento, infatti, lascia inalterato il livello del mare, per ovvie ragioni fisiche.³ Ad influire sull'innalzamento del livello delle acque è invece il contributo dato dal disgelo della copertura glaciale di Groenlandia ed Antartide in quanto ghiacciai che si estendono sulla terraferma (https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/Space_for_our_climate/Clearest_evidence_yet_of_polar_ice_loss).

Il livello medio globale del mare viene comunemente calcolato attraverso l'uso di strumenti detti mareometri. Queste apparecchiature misurano l'altezza della superficie del mare rispetto ad un riferimento fisso sulla costa. Tuttavia, l'altezza del terreno non è sempre costante. I movimenti tettonici e gli aggiustamenti glaciali isostatici⁴ possono determinare variazioni anche consistenti. Infatti, il terreno che era precedentemente compresso dai ghiacci, può risollevarsi quando questi si sciolgono. Per ricostruire l'andamento storico globale del livello marino i mareometri vengono installati in siti distanti dalle placche tettoniche in movimento ed anche su terreni poco soggetti al processo isostatico. Il livello delle

³ Il volume d'acqua spostato da una massa di ghiaccio equivale all'acqua prodotta dalla massa di ghiaccio quando fonde. Il ghiaccio infatti è più leggero dell'acqua, e quindi in essa galleggia, solo perché le molecole dell'acqua che lo costituiscono occupano un volume complessivo maggiore a temperatura $\leq 0^\circ\text{C}$.

⁴ Movimenti verticali di innalzamento ed abbassamento di corpi densi (masse rocciose regionali, calotte glaciali, sedimenti, ecc.) che rispondono al principio archimedeo.

acque del mare non è stato sempre lo stesso nel corso dei milioni di anni. Esso è sceso più volte portando alla luce parecchi chilometri quadrati di superficie, per poi risalire sommergendoli nuovamente. Queste variazioni prendono il nome di *variazioni eustatiche* del livello marino. Tali variazioni eustatiche sono ormai ben documentate ed accettate dagli studiosi, ma rimangono ancora poco chiare le cause e il meccanismo con cui queste variazioni avvenivano. Vi sono molte teorie e ipotesi a riguardo. Due le cause principali: una variazione del volume totale dell'acqua nei mari, o una variazione della capacità volumetrica dei bacini marini, cioè una variazione della loro forma. La prima ipotesi sembra quella più probabile. Secondo alcuni calcoli (come quello sopra riportato) la fusione totale dei ghiacci presenti nelle calotte polari provocherebbe un innalzamento del livello marino di circa 70 metri, ma l'abbassamento del fondo oceanico, a causa del maggior contenuto d'acqua, e quindi per il maggior peso, compenserebbe in parte l'innalzamento portandolo intorno ai 55 metri.

Recentemente Il gruppo guidato da Andrew Shepherd della Università di Leeds (Gran Bretagna) ha pubblicato sulla rivista Science i dati relativi ad uno studio che pone ordine ai contrastanti dati trentennali sullo scioglimento delle calotte polari artica ed antartica. Gli autori dello studio sostengono che tra il 1992 ed il 2011 le calotte groenlandese e antartica hanno contribuito, insieme, con almeno 11.1 millimetri alla risalita del livello marino.⁵ Si tratta dunque di un aumento di

⁵ https://en.wikipedia.org/wiki/Ice_Sheet_Mass_Balance_Inter-comparison_Exercise; <https://data.bas.ac.uk/full-record.php?id=GB/NERC/BAS/PDC/01477>.

11,1 mm in 19 anni (2011 - 1992). Un aumento di circa 11 millimetri in 19 anni corrisponde ad un volume d'acqua di fusione pari a circa 4019 Km³.⁶ Tale volume corrisponde poi ad una percentuale di acqua derivante da fusione di appena lo 0,0162% sul totale ricavabile dalla attuale estensione delle coltri glaciali.

	A	B	C
1	VOLUME (Km3) ACQUA DI FUSIONE DAL 1992 AL 2011	VOLUME MEDIO DI ACQUA DA FUSIONE DEI GHIACCIAI POLARI (Km3)	% DI ACQUA DA FUSIONE SUL TOTALE
2			
3	4019,31	24779743,98	0,0162

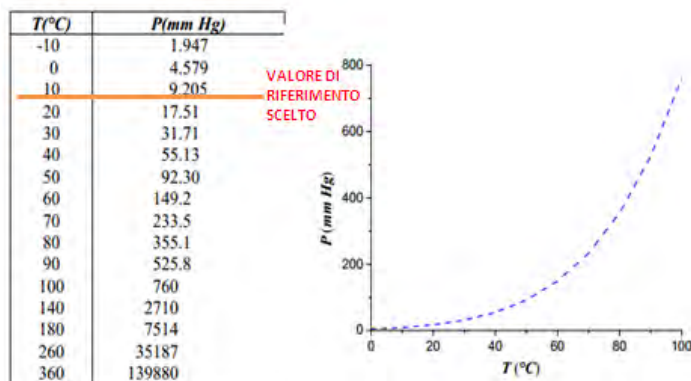
Tab.2

Dati più recenti forniti dallo stesso Shepherd aggiornano il valore dell'innalzamento medio del livello dei mari a 17,8 mm nel periodo 1992 - 2017. Ciò significa che nei primi 19 anni (dal 1992 al 2011) il livello dei mari si innalzava mediamente di 0,584 mm/anno (11,1 mm/19 anni) mentre negli ultimi 6 anni (dal 2011 al 2017) l'innalzamento medio annuo subisce un aumento più che doppio pari a 1,12 (6,7 mm/6 anni). Ciò evidenzia una forte accelerazione del fenomeno del disgelo. L'innalzamento medio annuo del livello del mare è infatti quasi raddoppiato ($1,12/0,584 = 1,92$) in poco meno di un terzo del primo periodo considerato ($6_{\text{anni}}/19_{\text{anni}} = 0,316$).

⁶ Il valore si ottiene moltiplicando la superficie riportata in colonna C6 della tab. 1 per 0,0000111 Km (11,1 mm)

4 - Atmosfera: un efficiente volano idrico?

Un aumento della temperatura media del pianeta comporta, peraltro, un aumento della quantità di vapore trattenuto dall'aria cioè ad una certa quantità d'acqua trattenuta dall'atmosfera allo stato aeriforme in equilibrio dinamico con lo stato liquido. Sappiamo infatti che la pressione di vapore di un liquido puro dipende solo dalla temperatura (<https://www.chimica-online.it/download/equazione-di-clapeyron.htm>), e una simile dipendenza può essere diagrammata ponendo la pressione di vapore della sostanza contro la relativa temperatura. In questo modo si ottiene una curva esponenziale il cui andamento è riprodotto nel grafico seguente:



Tab.3

Nell'aria è sempre presente una piccola quantità di vapore d'acqua, indicativamente circa 1% in massa, per cui si può correttamente parlare di aria umida. L'aria atmosferica "secca", e cioè priva di vapore, è come noto una miscela di gas ossigeno ed azoto ($\text{O}_2 \cong 23\%$ e $\text{N}_2 \cong 76\%$ in massa).

L'aria umida viene considerata nella tecnica come una miscela di aria (gas) e di vapore acqueo (vapore surriscaldato), prescindendo dalla sua composizione in ossigeno ed azoto. Si dice, quindi, che l'aria umida è una miscela d'aria secca e di vapore acqueo. Poiché lo stato del vapore può essere considerato "sufficientemente rarefatto" il comportamento di questo e dell'aria secca e cioè, nel complesso, dell'aria umida può essere descritto con buona approssimazione mediante l'equazione di stato dei gas perfetti.⁷ In particolare, indicando con P_t la complessiva pressione della miscela aria-vapore e con n_t il totale numero di moli⁸ presenti nel volume V , si può scrivere:

⁷ Il gas perfetto o ideale costituisce un modello astratto del comportamento dei gas cui tendono molti gas reali a pressioni prossime a quella atmosferica. Questo modello di riferimento è costituito da un gas per il quale valgono le seguenti condizioni: · le molecole sono immaginate come sfere di volume pressoché nullo e comunque trascurabile rispetto al volume del recipiente che contiene il gas; · il moto delle molecole avviene in ogni direzione con le medesime probabilità; · non esistono forze di attrazione e repulsione tra le molecole e gli urti tra le molecole e il recipiente e tra una molecola e l'altra sono elastici; · ad ogni singola molecola possono essere applicate le leggi della meccanica classica. Per un gas con queste proprietà si possono ricavare leggi semplici in grado di descriverne il comportamento al variare delle grandezze termodinamiche. In ogni stato termodinamico il comportamento di un gas perfetto segue la legge:

$$P V = n R T$$

essendo: P la pressione, V il volume specifico, R una costante caratteristica del gas in esame, T la temperatura assoluta ed n il numero di moli.

⁸La mole è la fondamentale unità di misura usata dai chimici per indicare una precisa quantità di materia di una determinata sostanza. Essa corrisponde, per definizione, a quella quantità in grammi di una sostanza

$$P_t V = n_t R T \quad (1)$$

ove è:

$$n_t = n_a + n_v$$

essendo n_a e n_v rispettivamente il numero di moli di aria e di vapore.

Si definisce *Umidità Relativa* il rapporto tra la densità del vapore ρ_v e la densità del vapore saturo ρ_s alla stessa temperatura:

$$i = \rho_v / \rho_s \quad (2)$$

È anche possibile esprimere i nella forma:

$$i = P_v / P_s \quad ^9$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori di $P_s = f(T)$ espressi in Pa

t [C°]	t+0,0	t+0,1	t+0,2	t+0,3	t+0,4	t+0,5	t+0,6	t+0,7	t+0,8	t+0,9
24	2991	3009	3028	3046	3065	3083	3102	3121	3140	3159
23	2814	2831	2849	2866	2884	2901	2919	2937	2955	2973
22	2646	2663	2679	2696	2712	2729	2746	2763	2780	2797

pari al suo peso atomico (se sostanza semplice, cioè un elemento) o molecolare (se si tratta di un composto).

⁹ L'umidità relativa i esprime anche il rapporto tra la massa di vapore m_v presente in un qualunque volume V d'aria e la massa di vapore m_s a saturazione (massima possibile).

È anche:

$$i = m_v / m_s = \rho_v / \rho_s \quad (3)$$

Sempre considerando il vapore come un gas ideale dividendo per V ambo i membri della (1) e considerato che η/V indica anche la densità di un gas, si può scrivere:

$$P_v = \rho_v \cdot R_v T$$

$$P_s = \rho_s \cdot R_s T$$

per cui risulta anche:

$$i = P_v / P_s \quad (4)$$

21	2488	2503	2519	2534	2550	2566	2582	2598	2614	2630
20	2338	2352	2367	2382	2397	2412	2427	2442	2457	2472
19	2196	2209	2223	2237	2251	2266	2280	2294	2309	2323
18	2061	2074	2087	2101	2114	2127	2111	2154	2168	2182
17	1934	1947	1959	1972	1984	1997	2010	2022	2035	2048
16	1814	1826	1838	1850	1861	1873	1885	1898	1910	1922
15	1701	1712	1723	1734	1746	1757	1768	1780	1791	1803
14	1594	1605	1615	1626	1636	1647	1658	1668	1679	1690
13	1393	1503	1513	1523	1533	1543	1553	1563	1574	1584
12	1398	1408	1417	1426	1436	1445	1455	1464	1474	1484
11	1309	1317	1326	1335	1344	1353	1362	1371	1380	1389
10	1224	1232	1241	1249	1257	1266	1274	1283	1291	1300
9	1145	1152	1160	1168	1176	1184	1192	1200	1208	1216
8	1070	1077	1084	1092	1099	1107	1114	1122	1129	1137
7	999	1006	1013	1020	1027	1034	1041	1048	1055	1062
6	933	939	946	952	959	965	972	979	986	992
5	871	877	883	889	895	901	907	914	920	926
4	812	818	823	829	835	841	847	853	858	864
3	757	762	768	773	779	784	790	795	801	806
2	705	710	715	720	726	731	736	741	746	752
1	657	662	666	671	676	681	686	690	695	700
0	611	616	620	624	629	634	638	643	647	652

Tab. 4 – Densità di vapore saturo in relazione alla temperatura.¹⁰

L'Umidità Assoluta è il rapporto tra la densità del vapore ρ_v e la densità dell'aria secca ρ_a :

$$x = \rho_v / \rho_a \quad (5)$$

L'umidità assoluta esprime il rapporto tra la massa del vapore m_v presente in un qualunque volume V d'aria e la massa di aria secca m_a presente nello stesso volume.

In genere per evidenziarne meglio il suo significato fisico si esprime in kg di vapore (kg_v) per kg di aria secca (kg_a) e cioè con le dimensioni [kg_v / kg_a].

Il legame tra x e la i può essere facilmente ottenuto. Risulta infatti:¹¹

¹⁰ Cfr. Con:

<https://architettura.unige.it/did/12/architettura/terzo0708/fisicatecnica/capitoli/cap5.pdf>

¹¹ Sulla base dell'equazione di stato dei gas perfetti può porsi:

$$\begin{aligned}
 X = \frac{\delta_v}{\delta_a} &= \frac{P_v R_a T}{P_a R_v T} = \frac{P_v P M_v}{P_a P M_a} = \frac{P_v}{(P_t - P_v)} * \frac{18}{29} = \\
 &= \frac{i * P_s}{(P_t - i * P_s)} * 0,622 \left[\frac{Kg_v}{Kg} \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

dove si è posto:

$$P_a = P_t - P_v$$

Da quanto esposto si intuisce che, una volta conosciuta la variazione di temperatura occorsa, è possibile calcolare la maggiore quantità di acqua trattenuta dall'atmosfera sotto forma di vapore. Ma non dobbiamo dimenticare che questo calcolo si riferisce ad una atmosfera termicamente uniforme ed in assenza di moti. In realtà questa è una condizione prettamente teorica mentre la realtà delle cose se ne discosta parecchio. La maggiore quantità di vapore trattenuto dall'atmosfera rappresenterebbe il volume idrico sottratto

$$P_a = p_a \cdot R_a T$$

$$P_v = p_v \cdot R_v T$$

Si ricorda che la massa molecolare e la costante dei gas "aria secca" e "vapor d'acqua" sono rispettivamente:

ARIA SECCA	VAPOR D'ACQUA
------------	---------------

$PM_a \cong 29$	$PM_v \cong 18 \text{ [kg/kmole]}$
-----------------	------------------------------------

$R_a \cong 0.287$	$R_v \cong 0.461 \text{ [kJ/kgK]}$
-------------------	------------------------------------

Poiché

$$R_a / R_v = 0.287 / 0.461 = 0,622 \cong 18 / 29$$

si può quindi scrivere l'equazione (6)

prevalentemente ai bacini idrici e bloccato allo stato di vapore nell'atmosfera. Tale volume non dovrebbe, quindi, essere considerato nel calcolo dell'aumento del livello medio dei mari. In che misura questo volume d'acqua trattenuta dall'atmosfera sotto forma di vapore potrà contribuire a contenere, almeno in parte, l'aumento del livello medio dei mari a causa del disgelo? Ma soprattutto cosa può fare l'energia termica associata al vapore acqueo quando si libera nel processo di condensazione? Sappiamo infatti che il calore latente di evaporazione dell'acqua rappresenta una notevole quantità di energia pari a 40680 J/mol.¹² Quando il vapore acqueo condensa nel passaggio di stato inverso (come nel caso della formazione delle nubi e negli eventi temporaleschi) esso viene ceduto all'atmosfera innescando in essa forti variazioni bariche.

5 - Calcolo dell'incremento termico nel 2050

Utilizzando i dati termici presentati dalla tabella 5 (in particolare gli scostamenti termici annuali non livellati)¹³ ed ipotizzando un trend futuro stabile, è stato possibile determinare la retta di regressione () dei valori della temperatura a partire dal 1965 (anno dal quale si è osservato un incremento più intenso e costante).¹⁴

¹² Il calore latente di ebollizione (vaporizzazione, a 100 °C) è $2,26 * 10^6$ J/Kg. Un Kg d'acqua corrisponde a 55,555 moli. Pertanto, il calore latente per una mole corrisponde a 40680 J

¹³ Fonte: <https://climate.nasa.gov/embed/127/>

¹⁴ https://www.matematicamente.it/esercizi/statistica-retta_di_regressione.pdf

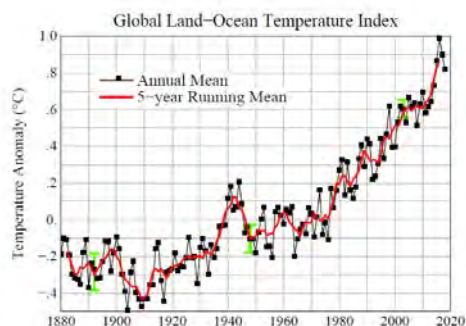


Grafico 2 – Andamento degli scostamenti termici fino al 2020

I valori riportati in tabella 5 rappresentano gli scarti delle temperature riferiti ad un valore medio di un periodo che non è stato specificato.

Con i dati relativi all'andamento termico medio mondiale estrapolati dalla Tab. 5 a partire dal 1965 è stato possibile ricavare l'equazione della relativa retta di regressione.

Tali dati sono stati poi utilizzati per realizzare il grafico Excel di seguito riportato che riproduce l'andamento degli stessi. Nel grafico 3 a viene tracciata anche la suddetta retta di regressione.

Prendendo come riferimento i valori dei punti di tale retta è stato calcolato il valore del rialzo termico prevedibile da oggi fino al 2050 ed oltre. Esso si aggira intorno a 0,45 °C. Prendendo poi come valore termico medio di riferimento per il nostro pianeta la media del XX secolo pari a 14,8 °C¹⁵ è pos-

¹⁵ Confronta con <https://www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/202105>

sibile ipotizzare per il 2050 una temperatura media di circa 16 °C (14,8 °C + 1,2 °C).

Land-Ocean Temperature Index (C)

Year	No_Smoothing	Lowess	Year	No_Smoothing	Lowess	Year	No_Smoothing	Lowess	Year	No_Smoothing	Lowess
1965	-0,11	-0,05	1979	0,16	0,16	1993	0,23	0,33	2007	0,66	0,63
1966	-0,06	-0,06	1980	0,26	0,2	1994	0,31	0,34	2008	0,54	0,64
1967	-0,02	-0,05	1981	0,32	0,21	1995	0,45	0,37	2009	0,66	0,64
1968	-0,08	-0,03	1982	0,14	0,21	1996	0,33	0,4	2010	0,72	0,65
1969	0,05	-0,02	1983	0,31	0,21	1997	0,46	0,42	2011	0,61	0,66
1970	0,03	0	1984	0,15	0,21	1998	0,61	0,44	2012	0,64	0,69
1971	-0,08	0	1985	0,12	0,22	1999	0,33	0,47	2013	0,68	0,74
1972	0,01	0	1986	0,18	0,24	2000	0,39	0,5	2014	0,74	0,78
1973	0,16	0	1987	0,32	0,27	2001	0,54	0,52	2015	0,9	0,83
1974	-0,07	0	1988	0,38	0,3	2002	0,63	0,55	2016	1,01	0,87
1975	-0,01	0,02	1989	0,27	0,33	2003	0,62	0,59	2017	0,92	0,91
1976	-0,1	0,04	1990	0,45	0,33	2004	0,54	0,61	2018	0,85	0,95
1977	0,18	0,07	1991	0,4	0,32	2005	0,68	0,62	2019	0,98	0,98
1978	0,07	0,12	1992	0,22	0,33	2006	0,64	0,63	2020	1,02	1,01

Tab.5 – Scostamenti termici a partire dal 1965 ¹⁶

Anomalia media della temperatura atmosferica a terra e della superficie dei mari, così come ricostruita dall'IPCC, negli ultimi 55 anni (tabella) e negli ultimi 140 anni (grafico)

¹⁶ Confronta con: https://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression. I dati in grassetto sono gli scostamenti termici tali e quali senza smussamento statistico (Smoothing). LOWESS (locally weighted scatterplot smoothing) è un metodo di regressione non parametrica spesso utilizzato in statistica.

Sebbene si tratti di un dato di per sé non eccessivamente allarmante, tuttavia, presenta le caratteristiche di un andamento costante che diventa certamente preoccupante se si dovesse protrarre per diverse decine d'anni. Va anche osservato che dal 1965 al 2020, secondo i valori della retta di regressione, la temperatura ha subito un incremento medio di 0,734 °C e che il trend termico non necessariamente deve restare costante. Anzi è probabile che assisteremo ad un suo ulteriore aumento in grado di modificare l'inclinazione della curva del grafico 3. La continua immissione nell'atmosfera di enormi quantità di gas serra ne è la causa principale. Il galoppante sviluppo economico e tecnologico di Paesi come Cina, India, ecc. non prelude certo ad una riduzione del fenomeno. È quindi ipotizzabile che anche il fenomeno del disgelo sia destinato ad incrementarsi.

Con riferimento a quest'ultimo problema c'è anche da dire che in un sistema complesso è possibile che, in seguito alla modificazione delle condizioni iniziali, si inneschino meccanismi di retroazione;¹⁷ catene causali circolari di fenomeni in cui le cause e gli effetti si influenzano a vicenda, alimentando e modificando l'evoluzione climatica. I feedback possono essere negativi, quando i fenomeni comparati variano reciprocamente in modo inverso (aumenta l'uno se diminuisce l'altro, o viceversa), oppure positivi, quando i fenomeni sono correlate in modo diretto (aumenta/diminuisce l'uno ed aumenta/diminuisce anche l'altro). In relazione allo scioglimento dei ghiacci polari un esempio di feedback negativo è dato dalla riduzione del

¹⁷ <https://ilbolive.unipd.it/it/news/ritiro-ghiacci-antartide-laumento-livello-mari>.

fenomeno dell'albedo,¹⁸ cioè della quantità di luce riflessa dalle superfici bianche dei ghiacciai, come conseguenza dello scioglimento degli stessi.

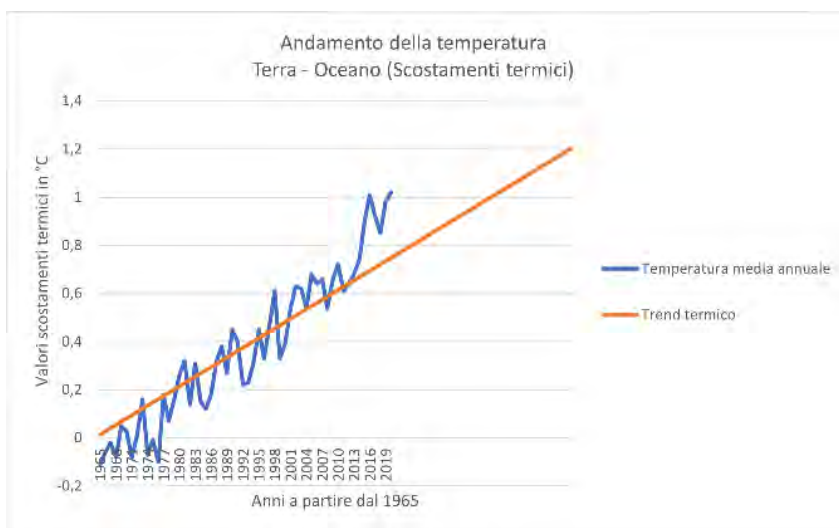
Infatti, la minore energia solare riemessa comporta un maggiore riscaldamento ambientale che determina una riduzione ulteriore della superficie della coltre glaciale, cioè un aumento del disgelo. Un esempio di feedback positivo è dato invece dalla relazione tra aumento della temperatura ed aumento del livello del mare a causa della maggior quantità di acqua presente derivante dalla fusione dei ghiacciai. Un altro evento in grado di accelerare notevolmente il disgelo delle calotte polari è quello della frammentazione progressiva con formazione di giganteschi iceberg. Il fenomeno è frequente e si verifica lungo i bordi della distesa glaciale che ricopre le terre emerse polari, là dove essa comunica con il mare. La frammentazione, infatti, comporta un aumento della superficie di contatto con l'aria e quindi un maggiore scambio termico che accelera la fusione. Il distacco di grandi frammenti di calotta dai suoi margini priva quest'ultima del freno naturale che le impedisce di continuare il suo scivolamento verso il mare. Infatti, la parte già a contatto con l'acqua sostiene come un pilastro la restante parte continentale ¹⁹.

Una volta che le piattaforme marine iniziano a sciogliersi, i ghiacciai continentali, privati della "protezione" fornita dalla

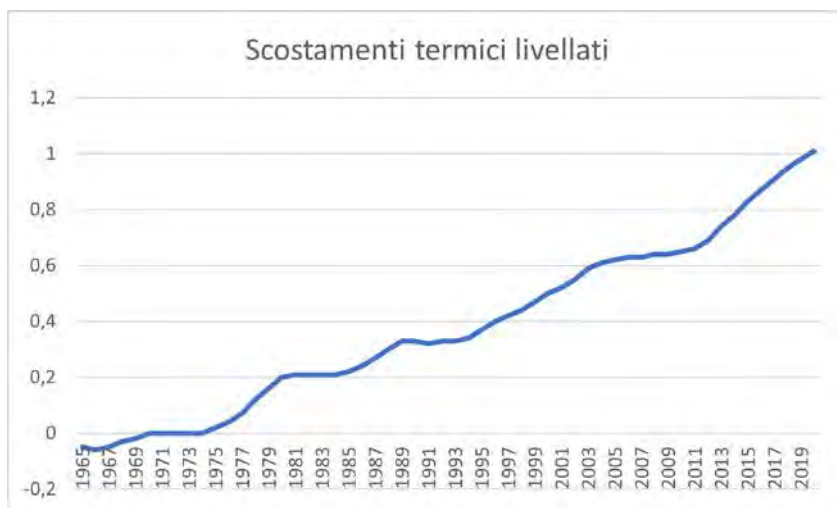
¹⁸ È la frazione di luce riflessa da un oggetto o da una superficie rispetto a quella che vi incide. Questo termine viene spesso utilizzato per indicare la riflettività dei corpi celesti che non brillano di luce propria, come pianeti e satelliti, ma anche in climatologia

¹⁹ Confronta con <https://ilbolive.unipd.it/it/news/ritiro-ghiacciai-antartide-laumento-livello-mari>

bordura di ghiacci marini, vanno incontro a una fusione più rapida: si innesca così un meccanismo di retroazione positiva impossibile da arrestare. Questo fenomeno è ancora più accentuato se lo strato roccioso su cui giace il ghiacciaio va non in direzione dell'oceano, ma verso la terra ferma (*reverse-sloped*). In questo caso la porzione basale del ghiacciaio si trova sotto il livello del mare correndo un maggior rischio di scioglimento, dovuto alle possibili infiltrazioni di acque oceaniche calde.



a)



b)

Grafico 3 – Andamento degli scostamenti termici dal 1965 al 2020 secondo i valori di tab. 5

Tenendo conto dell'incremento termico prevedibile da oggi al 2050 è corretto ipotizzare un aumento del ritmo di fusione delle calotte polari. Con i dati dell'innalzamento medio del livello dei mari a partire dal 1992 al 2017 sopra analizzati è possibile calcolare la relativa tendenza nel tempo e fare delle previsioni di quanto si potrà innalzare il livello dei mari da ora alla fine del secolo o anche più in là. In tabella 6 la retta di regressione ci fornisce (nella terzultima colonna) i valori in mm di innalzamento del livello dei mari nel tempo. Con i dati in possesso è possibile prevedere per la fine del secolo in corso un aumento complessivo di circa 73 mm. Mentre per lo scioglimento dell'intera coltre glaciale del pianeta (considerando un costante ritmo di scioglimento, in verità poco plausibile) dovremmo attendere fino all'anno 108.390 circa.

Sebbene il grafico 4 ci mostri un andamento regolare nel tempo bisogna però tenere in considerazione il fatto che il fenomeno del disgelo non sembra guidato da una legge di proporzionalità diretta in funzione del tempo, quindi a velocità costante. Al contrario esso sembra avere tutte le caratteristiche di un processo in accelerazione. Ciò a causa di tutti quei fenomeni di retroazione che abbiamo velocemente esaminato. Si verifica in pratica una sorta di circolo vizioso: più si riscalda l'aria → più si riscalda l'acqua dei mari → più velocemente fondono i ghiacciai → più si riscalda l'aria. Se teniamo conto di ciò il tempo necessario per lo scioglimento totale delle calotte glaciali si potrebbe ridurre di molto.

Ma i problemi nell'immediato non dipendono dallo scioglimento dell'intera coltre glaciale, che certamente stravolgerà la geografia mondiale in un tempo ancora lontano. Problemi molto seri giungeranno, in tempi a noi vicini o vicinissimi, già da un modesto scioglimento dei ghiacci. Tali problemi non saranno correlati soltanto all'innalzamento del livello dei mari come conseguenza del disgelo e quindi non riguarderanno soltanto le aree abitate costiere ma coinvolgeranno nel complesso tutto il pianeta come conseguenza generale dei cambiamenti del clima, sempre più caratterizzato da fenomeni estremi capaci di disseminare morte e distruzione e in grado di creare gravi crisi economiche. Problematiche queste che già stiamo vivendo in ogni parte del mondo.

Anno	Ind. (Xi)	Livello Medio acque (Yi) mm	X_i^2	$X_i \cdot Y_i$	X_i^2	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	Codev. ($X_i \cdot Y_i - 56 \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y}$)	Dev. ($X_i^2 - 56 \cdot \bar{X}^2$)	bl = Codev./Dev.	$b_0 = \bar{Y} - bl \cdot \bar{X}$	$Y = bl \cdot \bar{X} + b_0$	Ind. (Xi)	Anno
1992	0	0	0	0	0	0,772	9,633333	-17,2239376	-1,380298944	12,16928027	0,238649	0,238648963	0	1992
2011	1	11,1	1	11,1	1			-6,1239376	-0,380298944			12,40792924	1	2011
2017	1,316	17,8	1,731856	23,4248	1,731856			6,2008624	0,351557056			16,2534218	1,316	2017
		Totale	2,731856	34,5248	2,731856		Σ	-17,1470128	-1,409040832			24,57720951	2	2030
	0 = anno 1992											36,74648978	3	2049
	1 = 19 anni dal 1992											48,91577005	4	2068
	1,316 = 25 anni dal 1992											61,08505033	5	2087
												73,2543306	6	2106
												85,42361087	7	2125
												170,6085728	14	2258
												340,9784966	28	2524
												681,7183442	56	3056
												1363,198039	112	4120
												2726,15743	224	6248
												5452,076211	448	10504
												6827,204882	561	12651
												10903,91377	896	19016
												21807,5889	1792	36040
												68148,20817	5600	108392

Tab. 6 – Il periodo 1992 – 2011 è stato posto come periodo unitario quindi in colonna B si passa da 0 a 1. Il periodo dal 2011 al 2017 risulta una frazione di periodo unitario.



Grafico 4 – Innalzamento medio del livello dei mari previsto per il secolo in corso

6 - Calcolo del volume d'acqua trattenuto dall'atmosfera

Con i dati in possesso e quelli della *tabella 4* ipotizzando un valore medio di umidità relativa è possibile calcolare l'umidità assoluta con riferimento ai valori termici medi dell'anno 2020 e 2050. È possibile così fare un confronto delle quantità d'acqua trattenute dall'atmosfera sotto forma di vapore nei due anni di riferimento. Si consideri quindi la temperatura media dell'anno 2020 pari a $15,548\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($14,8 + 0,748$)²⁰ e quella media prevista del 2050 pari a $15,96\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($14,8 + 1,16$).²¹ Per questi due valori termici la *tabella 4* ci fornisce i rispettivi valori barici di saturazione espressi in Pascal: 1762 e 1814.

²⁰ Il valore 0,748 è stato ricavato dalla retta di regressione per l'anno 2020

²¹ Il valore 1,16 è stato ricavato dalla retta di regressione per l'anno 2050

Adesso ipotizzando una umidità relativa i pari al 60%²²e ricordando la (4) avremo:

per $T = 15,548^\circ\text{C}$

$$P_v = i * P_s = 60/100 * 1762 = 1057,2$$

per $T = 15,96$

$$P_v = i * P_s = 60/100 * 1814 = 1088,4.$$

Per valutare l'umidità assoluta si può utilizzare la (6) ponendo $P_t = 101300$ Pa:

per $T = 15,548^\circ\text{C}$

$$x = 0,622 * P_v/P_a = 0,622 * P_v/(P_t - P_v) = 0,622 * 1057,2/(101300-1057,2) = 0,00656 \text{ (Kgv/Kga)};$$

per $T = 15,96$

$$x = 0,622 * P_v/P_a = 0,622 * P_v/(P_t - P_v) = 0,622 * 1088,4/(101300-1088,4) = 0,0109 \text{ (Kgv/Kga)}$$

Si avrebbe quindi una differenza esprimibile come quantità d'acqua in più per kg di aria pari a:

$$\Delta K_g = 0,0109 - 0,00656 = 0,00434 \text{ Kg di acqua (vapore) per Kg di aria}$$

Essendo la superficie terrestre pari a: $5,094953216 \times 10^{14} \text{ m}^2$ e tenuto conto che $1 \text{ atm} = 101300 \text{ Pa} = 101300 \text{ N/m}^2$ il peso di tutta l'atmosfera risulta essere pari a:

$$101300 \text{ N/m}^2 * 5,094953216 \times 10^{14} \text{ m}^2 = 5,1611876 \times 10^{19} \text{ N}.$$

Tenuto conto, infine, che 1 Kg massa sulla superficie terrestre corrisponde a $9,81 \text{ N}$ (Kgp) la massa dell'atmosfera sarà:

$$5,1611876 \times 10^{19} / 9,81 = 5,2611494 * 10^{18} \text{ Kg}$$

²² Il valore di umidità relativa ipotizzato non è reale (troppo elevato) ma ci permette di fare un esempio di calcolo facendo emergere, peraltro, un paradosso numerico, come tra breve vedremo.

Quindi l'acqua in più presente nell'atmosfera nel 2050 rispetto ad oggi sarà:

$$0,00434 \text{ Kgv/Kga} * 5,2611494 * 10^{18} \text{ Kga} = 2,283 * 10^{16} \text{ Kgv.}$$

Se consideriamo il suo corrispondente volume come acqua liquida esso corrisponde a $2,283 * 10^{13} \text{ m}^3$. Circa 22834 Km^3 d'acqua che potrebbero riempire un parallelepipedo quadro profondo 4 Km e con lato maggiore di 75,5 Km. Insomma, un bel tratto di mare!

Tale quantità d'acqua corrisponde a circa 5,7 volte il volume d'acqua ottenuta dalla fusione dei ghiacciai che si è verificata dal 1992 fino al 2011 (4019,31 Km^3).

Questo volume d'acqua presente nell'aria compenserebbe quindi ampiamente gli 11,1 mm di innalzamento del livello dei mari causato dai 4019,31 Km^3 liberati nel suddetto periodo.

Visto che nel 2050 è previsto un innalzamento medio (secondo il trend attuale) pari a 36,75 mm (vedi tabella 7) che corrisponderebbero ad un volume d'acqua da disgelo pari a: $36,75 / 11,1 * 4019,31 = 13307,2 \text{ Km}^3$ l'acqua trattenuta dall'atmosfera sarebbe maggiore di quella che andrebbe a finire in mare a causa del disgelo!

Sembra evidente che dobbiamo tenere conto di qualche altro fattore. Non possiamo pretendere che l'umidità relativa di tutta l'atmosfera sia uguale dappertutto! Le differenze termiche presenti da luogo a luogo, in base alla latitudine e all'altitudine, fanno sì che le masse d'aria a differente temperatura si mescolino permettendo all'umidità presente di condensarsi sotto forma di pioggia e sottrarsi in tal modo dall'aria stessa. Pertanto, l'umidità relativa media presa in considerazione va sicuramente abbassata. Nel nostro calcolo

bisognerà quindi verificare quale potrebbe essere il valore reale medio planetario di i e di quanto esso si scosti realmente nei due periodi considerati (2020 e 2050). Non bisogna peraltro dimenticare che gli 11,1 mm di aumento del livello dei mari si sono verificati contestualmente all'aumento della temperatura dell'aria nel medesimo periodo di riferimento.

Comunque, la quantità d'acqua che è in grado di trattenere l'atmosfera è notevole. Se ammettiamo una presenza d'acqua nell'atmosfera pari a circa l'1% in peso dell'atmosfera stessa la sua massa ammonta a $5,26 \cdot 10^{16}$ Kg. Una quantità pari a 2,3 volte il valore differenziale calcolato sopra ($2,283 \cdot 10^{16}$ Kgv). Assumendo quindi un valore più basso dell'umidità relativa media dell'atmosfera ed ipotizzando tale valore costante nei due periodi presi in considerazione la stima verrebbe certamente ridimensionata. Ad esempio, rifacendo i calcoli con un valore di i del 45% la quantità di vapore in più trattenuta dall'atmosfera nel 2050 rispetto al 2020 si riduce a $765,5 \text{ Km}^3$ (pari solo al 19% del volume d'acqua che ha determinato l'innalzamento del livello dei mari dal 1992 al 2011). Ma quale potrebbe essere un valore medio più probabile dell'umidità relativa del nostro pianeta?

Dai dati finora presentati non è difficile ricavarlo. Prendendo infatti come periodo di riferimento gli anni dal 1992 al 2011 ed assumendo che in quel periodo l'umidità relativa si sia mantenuta costante è possibile applicare la (6) in modo specifico da ottenere per lo stesso periodo un valore differenziale dell'umidità assoluta (Δx) che corrisponda al volume d'acqua ottenuto dal disgelo delle coltri glaciali ($4019,31 \text{ Km}^3$). Tale equivalenza si basa sul principio che l'acqua presente nell'atmosfera è in equilibrio continuo con

quella liquida presente in tutti i bacini idrici del mondo e questo vale anche per l'acqua derivante dal disgelo. Quindi affinché l'umidità relativa del periodo si mantenga costante è necessario che i 4019,31 Km³ di acqua proveniente dal disgelo vengano costantemente scambiati dall'atmosfera in un ciclo continuo vapore/liquido andando a costituire l'incremento di umidità assoluta dell'aria nel periodo specificato. Pertanto, l'acqua di disgelo che non può stare in forma di vapore nell'atmosfera si troverà in forma liquida nei mari contribuendo al loro innalzamento di livello. Tramutando quindi 4019,31 Km³ in chilogrammi (prendendo come densità dell'acqua il valore di 1 g/cm³) e dividendo tale valore (4,01931 * 10¹⁵ Kgv) per la massa dell'atmosfera (5,2611494 * 10¹⁸ Kga) si è ottenuto un Δx pari a: 0,00076339. Ed utilizzando ancora la (6) si è ottenuto un valore dell'umidità relativa pari a 25,35.²³

²³ È stata risolta la seguente uguaglianza basata sulla (6):

$$\left[0,622 * \frac{\left(\frac{x}{100} * Ps_2 \right)}{101300 - \left(\frac{x}{100} * Ps_2 \right)} \right] - \left[0,622 * \frac{\left(\frac{x}{100} * Ps_1 \right)}{101300 - \left(\frac{x}{100} * Ps_1 \right)} \right] = 0,00076339 \quad (7)$$

Dove l'incognita x rappresenta l'umidità relativa del periodo mentre Ps₂ e Ps₁ sono i valori ricavati dalla tabella 4 della pressione di saturazione degli anni 2011 e 1992, alle corrispondenti temperature (*). L'equazione (7) è un'equazione di secondo grado con due radici reali delle quali va presa solo quella che verifica l'uguaglianza. Nel nostro caso si è ottenuto un valore di x, cioè dell'umidità relativa espressa in percentuale, pari a 25,35.

(*) Per il 1992 lo scostamento termico secondo la tabella 5 è di 0,22 °C, quindi la temperatura da considerare è 14,8 + 0,22 = 15,02 °C. Per il 2011 lo scostamento termico era invece di 0,61 °C quindi la temperatura da considerare è di 14,8 + 0,61 = 15,41 °C. I valori di Ps diventano così: 17461 per il 2011 e 17012 per il 1992.

Il dato sembra ragionevole soprattutto se guardiamo all'atmosfera nel suo complesso, quindi, sia la bassa atmosfera, più ricca di umidità, che quella alta notoriamente più secca.

A questo punto ricalcolando il Δx per il periodo 2020 – 2050, tenendo conto del nuovo valore di umidità relativa appena trovato, il volume d'acqua aggiuntivo trattenuto sotto forma di vapore dall'atmosfera nel 2050 scende a 429,7 Km³ (pari solo al 10,7% del volume d'acqua che ha determinato l'innalzamento del livello dei mari dal 1992 al 2011). In tal caso i 36,75 mm di innalzamento del livello del mare previsti per il 2050 verrebbero ridotti di pochissimo.²⁴ Va da sé però che l'attuale valore dell'umidità relativa media del pianeta sarà certamente cambiato e quello trovato per il periodo 1992 – 2011 può servire solo come dato orientativo per il calcolo dell'umidità assoluta dell'atmosfera nei periodi successivi.

Va poi ricordato che la progressiva riduzione delle superfici ghiacciate e la continua immissione di gas serra nell'atmosfera porteranno nel lungo periodo (decine o centinaia di anni) ad un sempre maggiore rialzo termico con un progressivo aumento dell'umidità assoluta dell'atmosfera. Essendo poi l'acqua sotto forma di vapore uno dei più importanti gas serra ciò determinerà un feed back positivo per l'innalzamento delle temperature medie. Più calda è l'aria più vapore essa conterrà ed ancora più calda essa diverrà per effetto serra. Quindi è difficile prevedere quanto l'ipotizzato aumento dell'umidità dell'aria possa contribuire a ridurre l'innalzamento del livello dei mari. Tuttavia, è ipotizzabile che variazioni significative nel tempo della temperatura dell'aria possano modificare lo

²⁴ Di appena 1,19 mm (10,7 % di 11,1 mm).

stato igrometrico dell'atmosfera e ciò potrà contribuire, in una certa misura, a ridurre l'innalzamento del livello dei mari.

Tuttavia, il problema fondamentale in questo caso non è tanto il contenimento dell'innalzamento del livello dei mari quanto piuttosto gli effetti meteorologici dovuti alla maggior presenza di acqua sotto forma di vapore. Infatti, nel 2050 l'acqua da condensazione che si verrà a formare, nei numerosi eventi meteorologici, libererà una enorme quantità di energia sotto forma di calore latente di condensazione.²⁵ Solo a considerare l'eccedenza rispetto al 2020 la quantità di energia rilasciata sotto forma di calore latente di condensazione è enorme. Il suo valore è facile calcolarlo:

$$4,297 * 10^{14} \text{ Kgv} = 2,387 * 10^{16} \text{ moli di acqua};$$

$$2,387 * 10^{16} \text{ moli} * 40680 \text{ J/mol}^{26} = 9,71 * 10^{20} \text{ J} = 9,71 * 10^{17} \text{ KJ}$$

L'International Energy Outlook ²⁷ (vedi il seguente grafico) con i dati relativi al 2004 ha previsto, per il 2025 , un consumo energetico complessivo pari a circa 625 quadrilioni di Btu/anno (British Thermal Unit)²⁸ corrispondenti a: $6,250 * 10^{17} \text{ Btu} * 1,055056 \text{ kJ/Btu} = 6,594 * 10^{17} \text{ KJ}$.

²⁵ Calore emesso dalle molecole d'acqua durante il processo di condensazione.

²⁶ Calore latente di evaporazione/condensazione dell'acqua

²⁷ Confronta con

https://it.wikipedia.org/wiki/Consumo_di_energia_nel_mondo,
https://www.energieverbraucher.de/files_db/dl_mg_1084170436.pdf
 e <http://www.et.byu.edu/~tom/classes/733/Biomass/2004-outlook-eia.pdf>

²⁸ Confronta con [https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrilione e](https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrilione_e)
https://it.wikipedia.org/wiki/British_thermal_unit

Per il 2050 l'energia annua richiesta sarà certamente maggiore rispetto alla previsione per il 2025 ma certamente la sua entità sarà ancora dello stesso ordine di grandezza di quella messa in gioco costantemente dai processi di evaporazione e condensazione dell'intera atmosfera correlabili esclusivamente all'incremento termico subito dalla stessa. Questi numeri ci danno una più chiara percezione della problematica ambientale. Tutto il calore che immettiamo nell'ambiente verrà utilizzato dallo stesso per generare eventi climatici spesso estremi. Il messaggio sembra chiaro: non immettiamo calore supplementare in atmosfera e gli eventi estremi si ridurranno!

Sappiamo bene infatti che le quantità eccessive di calore trattenuto dall'atmosfera possono dare origine, localmente, a variazioni bariche di notevole intensità in grado di generare una fenomenologia meteorologica estrema (alluvioni, uragani, siccità prolungata, ecc.) che nel corso degli ultimi decenni è stata sempre più frequente ed in grado di squilibrare gravemente l'intero ecosistema globale.

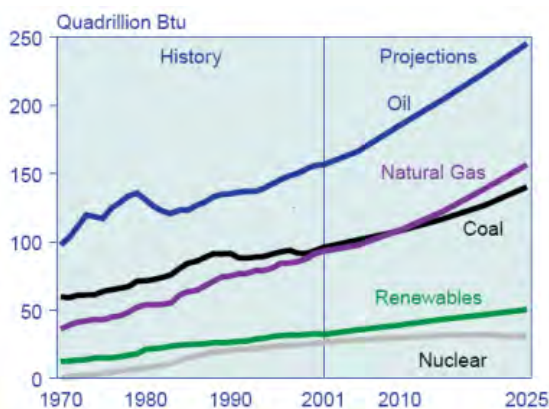


Grafico 5 – Consumi energetici mondiali. (Fonte: International Energy Outlook – 2004)

Tutto questo, insieme a tutte le sostanze inquinanti sversate nell'ambiente, compromette sempre più le condizioni di vita di tantissime specie animali e vegetali influenzando poi pesantemente sull'economia globale tramite la penalizzazione del settore agricolo e quindi, in ultima analisi, rende difficili le condizioni di esistenza della nostra stessa specie.

7 - Conclusioni

Dai dati sopra discussi si evidenzia chiaramente che l'aumento del livello medio dei mari (36,75 mm) previsto per il 2050 in base al trend degli ultimi anni anche se può essere ridotto in qualche misura dalla maggiore capacità idrica dell'atmosfera dovuta all'aumento termico previsto rimane un fenomeno, a lungo andare, preoccupante. Non si può tuttavia non far notare che il disgelo non produce un aumento del volume complessivo dei mari così veloce come spesso erroneamente immaginato. Una media di circa 34 mm circa fino al 2050 non rappresenta un grave pericolo per le nostre aree costiere, fino a quella data. Se a questa considerazione si aggiunge l'azione correttiva di alcuni fattori fisici quali gli assestamenti isostatici della crosta terrestre, le imprevedibili dinamiche sismiche, la già ricordata azione di contenimento operata dall'atmosfera, possiamo concludere che nel medio periodo non esiste rischio di imponenti trasgressioni marine. Il pericolo reale è rappresentato dai violenti fenomeni meteorologici legati all'abbondanza di vapore nell'atmosfera (alluvioni, tornado, uragani, gravi siccità, ecc.). Essi rappresentano un potente fattore di rischio difficilmente

controllabile e prevedibile, in grado di determinare ingenti danni in termini economici e, purtroppo, di vite umane. La prevenzione a breve termine di siffatte sciagure climatiche è molto difficile o pressoché impossibile data l'entità dei fenomeni. Viene richiesta una programmazione di interventi strutturali territoriali impostata su nuovi criteri di progettazione tecnica. Il vero problema, dunque, sarà quello di realizzare delle strategie operative per difenderci dalle sempre più frequenti "violenze climatiche" preoccupandoci un po' meno delle superfici costiere potenzialmente a rischio di invasione marina. È davvero necessaria una vera transizione ecologica a livello mondiale. Ciò comporterà un impegno enorme da parte di tutta l'umanità, un reale cambiamento di mentalità e di stili di vita. Risparmio, riciclo e nuove tecnologie eco-compatibili dovranno costituire il cardine di tutte le azioni umane presenti e future!

Bibliografia

Silvestroni, P. (1980). *Fondamenti di Chimica*. Roma: Veschi.

Allison, I., Bindoff, N., Bindshadler, R., Cox, P., de Noblet-Ducoudre, N., England, M., et. al. (2009). *The Copenhagen Diagnosis, 2009: Updating the World on the Latest Climate*.

Retrieved September 19, 2021, from https://www.ccrcc.unsw.edu.au/sites/default/files/Copenhagen_Diagnosis_FIGURES.pdf

Profili biografici degli autori

Alessandro Amabile -

È dottorando in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la Storia, la Didattica e i Fondamenti della Fisica. È coinvolto in attività di sperimentazione didattica.

Giancarlo Artiano -

È dottorando in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la didattica della matematica e della fisica con l'utilizzo delle nuove tecnologie. È coinvolto in diversi progetti di contrasto alla povertà educativa e in programmi regionali e nazionali sulla formazione degli insegnanti.

Emilio Balzano -

Emilio Balzano laureato in fisica con lode svolge da molti anni attività di ricerca sull'insegnamento e sull'apprendimento della matematica e delle scienze e insegna didattica della fisica nella Laurea Magistrale in Fisica e a Scienze della Formazione Primaria. I suoi interessi di ricerca riguardano: -la rivisitazione in chiave didattica dei contenuti scientifici con un'attenzione ai fondamenti delle discipline scientifiche; -il ruolo delle nuove tecnologie per favorire i processi di modellizzazione e di formalizzazione matematica in ambito scientifico; -le opportunità nel mettere in relazione strutturata i contesti formali e informali di apprendimento; -le strategie e i modelli per la formazione iniziale e in servizio degli insegnanti. E' stato: -responsabile dei laboratori didattici del Dipartimento di Fisica di UNINA; -responsabile della Sezione Didattica di Città della Scienza e ora coordina le attività di un gruppo di ricerca sulla didattica della fisica e della matematica. E' stato coinvolto in decine di progetti nazionali ed europei

sull'educazione scientifica anche con ruoli di responsabilità e di coordinamento. E' ora coinvolto in progetti di contrasto alla povertà educativa. È autore di numerosi software multimediali e di articoli scientifici.

Ferdinando Casolaro - ferdinando.casolaro@gmail.com

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni 'Novanta' al 2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed il Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre centoventi pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti". Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

Manuela Condelli - manuela.condelli@posta.istruzione.it

Laureata in Fisica nel 1996 presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II" con una tesi in astrofisica, ha lavorato come analista programmatrice per HP fino al 2009, quando ha conseguito la specializzazione all'insegnamento nella scuola secondaria superiore presso la Scuola Interuniversitaria Campana per la Specializzazione all'Insegnamento (SICSI), durante la quale ha

sviluppato l'interesse per la didattica in matematica e fisica. Sempre nel 2009 ha curato l'allestimento del museo di fisica del liceo "Umberto I" di Napoli. Docente a tempo indeterminato dal 2015, attualmente insegna presso il Liceo Scientifico "Amedeo di Savoia Duca d'Aosta" di Pistoia, dove coordina il dipartimento di matematica e fisica e si occupa degli aspetti didattici legati allo sviluppo del laboratorio di fisica nell'ambito del "Piano Scuola 4.0".

Giuseppe D'Angelo - sitdang010762@gmail.com

Laureato in Scienze Agrarie, ha conseguito l'abilitazione all'esercizio professionale di Agronomo e l'abilitazione all'insegnamento in Scienze Naturali. Docente a tempo indeterminato presso il liceo Scientifico Statale "Leonardo" di Giarre (CT). Ha collaborato saltuariamente con la rivista scientifica «Coelum Astronomia», nella quale ha pubblicato recentemente l'articolo: *Il paradosso di olbers: un metodo per conoscere il numero di stelle che popolano l'universo*. È autore di varie pubblicazioni su diverse altre riviste («La Chimica nella Scuola», «La tecnica della Scuola», «Linux Magazine») e del saggio *Lo Spazio Polisimmetrico* – prima edizione Ed. Book Sprint (cod ISBN 978-88-6823-1729).

Giovanna Della Vecchia - giovanna.dellavecchia@unina.it

È stata docente di Matematica presso l'IIS "G. Minzoni" di Giugliano in Campania dal 1985 al 2020. Attualmente è docente a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli. Durante la sua carriera di docente della scuola secondaria di secondo grado ha sempre mostrato un particolare interesse per la ricerca didattica e ha ricoperto negli anni il ruolo di funzione strumentale sia nell'area "servizi e supporto agli studenti" che nell'area "formazione docenti". Presso l'istituto Minzoni ha svolto svariati ruoli e ha fatto parte dello staff dirigenziale impegnato nell'attività di progettazione, supporto organizzativo e didattico all'Istituzione

scolastica. Ha svolto per diversi anni attività di formazione nell'ambito della didattica e della valutazione, nonché nei corsi di specializzazione per le attività di sostegno agli alunni in situazione di handicap per la provincia di Caserta (area logico - matematica). Ha preso parte a numerosi convegni/seminari in qualità di relatore ed è autore di numerose pubblicazioni inerenti alla Matematica e ai suoi possibili ambiti di applicazione.

Angela Donatiello – adonatiello@unisa.it

Laureata in Matematica con lode nel 2003, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "C. Pisacane" di Padula. Attualmente è dottoranda in Matematica presso l'Università degli Studi di Salerno, occupandosi di Didattica della Matematica. Dal 2012 al 2015 è stata docente a contratto in "Matematica e Basi di Informatica e Statistica" per il Corso di laurea in Scienze e Tecnologie Biologiche presso l'Università degli Studi dell'Insubria. Collabora con la Fondazione "I Lincei per la scuola" in qualità di tutor per corsi di formazione per docenti. Nel 2018 è stata docente esperto per il progetto "Liceo Matematico" presso il Liceo "Gatto" di Agropoli. Socia UMI, socia AIRDM e membro del Consiglio Direttivo dell'Associazione "Math&Phis" di Salerno, di cui attualmente ricopre la carica di segretaria.

Rodolfo Figari –

Laureato a Napoli nel 1971, ha lavorato in Teoria dei Campi quantici relativistici in spazi curvi e in teoria costruttiva dei campi quantici nella versione euclidea. In successive visite al Courant Institute of Mathematical Sciences di New York e al Centro di Ricerca Interdisciplinare dell'Università di Bielefeld si è interessato di Teoria delle Probabilità e di processi di Markov in spazi a infinite dimensioni. Da molti anni si occupa di modellistica e fondamenti della Meccanica Quantistica. Ha inoltre lavorato su problemi di didattica integrata di Matematica e Fisica in collaborazione con il

gruppo di Didattica del Dipartimento di Fisica della Federico II. Ha insegnato Fisica generale e Metodi Matematici della Fisica nel corso di Laurea in Fisica e ha tenuto corsi di Meccanica Quantistica alla Sapienza di Roma e alle scuole di dottorato di Bielefeld e del Gran Sasso Institute of Scientific Sciences dell'Aquila.

Fabrizio Mancinelli - fabrizio.mancinelli@posta.istruzione.it

Laureato in Fisica nel 2000 presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II" con una tesi in fisica medica, ha conseguito nel 2005 il Dottorato di Ricerca in Biochimica Cellulare presso l'Università della Campania "Luigi Vanvitelli" (già Seconda Università degli Studi di Napoli) con una tesi sugli effetti biologici delle radiazioni non ionizzanti da telefonia cellulare. Nel 2009 ha conseguito la specializzazione all'insegnamento nella scuola secondaria superiore presso la Scuola Interuniversitaria Campana per la Specializzazione all'Insegnamento (SICSI), durante la quale ha sviluppato l'interesse per la didattica in matematica e fisica. Nel 2011 ha curato l'allestimento del museo di fisica e scienze naturali dell'ISI "Carlo Piaggia" di Viareggio. Docente a tempo indeterminato dal 2012, attualmente insegna al Liceo Statale "Niccolò Forteguerri" di Pistoia. Ha collaborato con il prof. Italo Testa della "Federico II" su un progetto triennale per l'introduzione della "fisica di Karlsruhe" nella scuola secondaria superiore, è stato consulente didattico-scientifico per Mondadori al volume per il 5° anno di "Fisica lezione per lezione" di Caforio-Ferilli e collabora con la Casio per la stesura di attività didattiche con l'utilizzo della calcolatrice grafica.

Giuseppe Mangione - pinoman2005@libero.it

Laureato in Economia e Commercio presso l'Università di Napoli "Federico II" e, successivamente, in Filosofia, sempre alla "Federico II" di Napoli. È docente a tempo indeterminato presso l'I.T.I.S. Galileo Ferraris di Napoli, dove si interessa, in particolare,

di didattica inclusiva e interdisciplinare e di progetti tendenti all'inserimento della filosofia negli istituti tecnici. Dal corrente anno è socio dell'Associazione Mathesis di Napoli "Aldo Morelli".

Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di oltre 400 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.* (coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universalita, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane»,

«Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Cesare Palmisani - cesarepalmisani59@gmail.com

Docente a tempo indeterminato in servizio presso il Liceo Classico “Pietro Giannone” di Caserta; professore a contratto per l’a.a. 2021-22 presso il Dipartimento di Scienze Politiche Università degli Studi di Napoli “Federico II”; dottore in ricerca -XX ciclo- in “Matematica per l’Analisi Economica e la Finanza” con tesi dal titolo “Chaotic Dynamics in Solow-type Growth Models” conseguito nel 2008 presso l’Università degli Studi di Napoli “Federico II”.

Pietro Piccialli -

È laureato in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la didattica della matematica e della fisica. È coinvolto in diversi progetti di contrasto alla povertà educativa e in programmi regionali e nazionali sulla formazione degli insegnanti.

