

Dall'abaco alla numerazione posizionale

Luca Nicotra*

* Membro onorario APAV e AFSU, presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza",
Direttore responsabile del «Periodico di Matematica», di «ArteScienza», del
«Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane»;
luca.nicotra1949@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.110

Sunto: La Tavola Pitagorica è nota a tutti fin dalle prime classi della scuola elementare, eppure le sue origini storiche e la sua struttura matematica riservano varie sorprese. In questo articolo viene posto in evidenza un falso storico troppo spesso dimenticato. Noi oggi chiamiamo "Tavola Pitagorica" la tavola di moltiplicazione dei numeri naturali nel sistema posizionale decimale, ma in realtà il corrispondente nome latino *Mensa Pythagorea* indicava, nel Medioevo, l'abaco a gettoni o a colonne attribuito ai tardo neopitagorici del secolo XI. Ripercorrere l'intricato iter che ha portato a questo errore storico rileva anche aspetti molto interessanti della *Mensa Pythagorea*, ultimo tipo di abaco medioevale, che preludono all'utilizzo dell'attuale sistema di numerazione scritta posizionale.

Parole Chiave: Tavola Pitagorica, abaco, Boezio, sistema di numerazione posizionale.

Abstract: The multiplication table has been known to all since the first grades of elementary school, yet its historical origins and its mathematical structure reserve various surprises. This article highlights a historical fake too often forgotten. Today we call the multiplication table of natural numbers in the decimal positional system "Pythagorean Table", but in reality the corresponding Latin name *Mensa Pythagorea* indicated, in the Middle Ages, the coin or column abacus

attributed to the late neo-Pythagoreans of the 11th century. Retracing the intricate process that led to this historical error also reveals very interesting aspects of the Mensa Pythagorea, the last type of medieval abacus, which prelude the use of the current written positional numbering system.

Keywords: *Multiplication table, abacus, Boethius, positional numbering system.*

1 - Un falso storico dimenticato

La tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo, fin dalle scuole elementari, con il nome di “Tavola Pitagorica” non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione (Nicotra, 2009).

D'altra parte, già l'utilizzo nella Tavola Pitagorica del sistema di numerazione decimale posizionale, inventato nell'India settentrionale presumibilmente nel V secolo e poi diffuso in Europa dagli arabi nel Medioevo, dovrebbe essere sufficiente per dubitare della attribuzione della tavola ai pitagorici. I greci, infatti, utilizzavano un altro sistema di numerazione scritta, di tipo decimale additivo, simile al sistema usato dai romani antichi.

Nel riprodurre il manoscritto dell' *Ars Geometrica*¹ attribuita a Severino Boezio (480-526), il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico, in essa trattato, con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome *Mensa Pythagorea* che designava quell'abaco. Secondo le moderne indagini filologiche, tuttavia,

¹ Contenuta nell'opera *De Institutione Arithmetica* (Boezio, 1867).

sembra che l'*Ars Geometrica* non sia di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica. Dunque sarebbe errata anche l'attribuzione a Pitagora, o ai suoi diretti seguaci, dell'abaco descritto nell'*Ars Geometrica*, appartenendo invece al basso Medioevo. Il primo a rilevare questo falso storico è stato Corrado Mannert nel 1801 (Mannert, 1801). Successivamente anche Michel Chasles (Chasles, 1875, p. 468), V.G. Enestrom (Enestrom, 1894, p. 120) e Paul Tannery (Tannery, 1897, pp. 162-163), hanno citato la sostituzione dell'abaco neopitagorico con la tavola di moltiplicazione. Guglielmo Libri, celebre matematico e bibliofilo dell'Ottocento, prese in considerazione tale errore, tant'è che nella sua tesi sull'origine delle nostre cifre menziona l'abaco neopitagorico (Libri, 1839, pp. 261-280). Tuttavia, ancor oggi si perpetua questo falso storico e si continua ad attribuire a Pitagora la paternità della ben nota tavola di moltiplicazione. Ripercorrere l'intricato iter che ha portato a questo errore storico rileva aspetti molto interessanti dell'ultimo tipo di abaco medioevale (detto *Mensa Pythagorea* o anche *abaco a colonne* o *a gettoni*), che preludono all'utilizzo dell'attuale sistema di numerazione scritta posizionale.

2 – Il primo strumento per calcolare: la tavola di Salamina.

La costruzione di strumenti per computare è comune a tutti i popoli dell'antichità. Essi sono stati ampiamente utilizzati

anche dopo l'introduzione dei sistemi di numerazione scritta, sia perché il calcolo strumentale è più rapido sia perché, fino a tempi abbastanza recenti, erano poche le persone che sapevano leggere e quindi in grado di utilizzare la numerazione scritta.

Lo strumento per calcolare più diffuso era l'abaco, di cui sono state realizzate diverse versioni, differenti sia nelle realizzazioni fisiche sia nella struttura di calcolo.

I primi a costruire un abaco furono i babilonesi, che intorno al V, IV sec. a.C. utilizzarono un *abaco di marmo* di forma rettangolare di dimensioni enormi (149 cm x 75 cm e spesso 4,5 cm) e pesante circa 130 Kg. Su di esso erano incisi due gruppi di undici linee verticali attraversate da una linea orizzontale. All'incrocio fra questa e la terza, la sesta e la nona linea verticale sono incise delle croci. Inoltre sono incise due serie di 11 caratteri greci e una serie di 13 caratteri greci. Poiché ognuno di tali caratteri rappresenta una corrispondente quantità di talenti, dracme, oboli e khalki,² si presume che la tavola fosse utilizzata per calcoli di contabilità commerciale. Nell'isola di Salamina, nel 1846, gli archeologi , Alessandro Rangabé Rizos (1810-1892) e Louis-Hugues Vincent (1872-1960) trovarono un esemplare di tale abaco (figura 1) (Loria, 1914, p. 749; Rangabé, Vincent, 1846).

Il sistema di numerazione utilizzato in tale tavola, detto Erodiano in onore del grammatico e storico greco (170-250 circa) che per primo lo espose desumendolo da antiche scritture, è quello originario greco, basato sull'uso di rappresentare nella scrittura i numeri con le iniziali dei loro nomi.

² Tutte unità di misura commerciali.

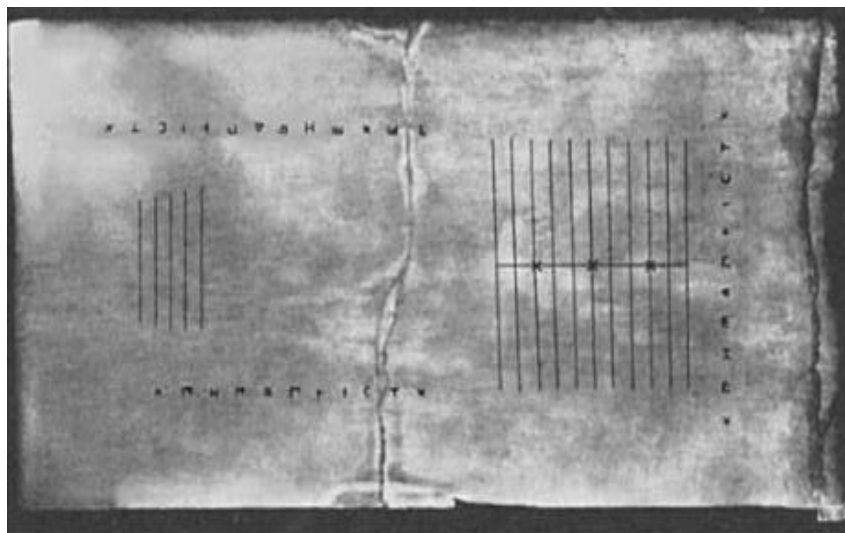


Fig. 1 – L'abaco di Salamina.

3 – L'abaco a polvere

Gli antichi fenici, gli ebrei e successivamente i greci, gli etruschi e i romani usavano l'*abaco a polvere*: una tavoletta rettangolare, di legno o di bronzo, chiamata *abak* dai fenici, *avak* dagli ebrei, *αβαχ* dai greci, *apcar* dagli etruschi, *abacus* dai romani, termini che derivano tutti dall'antica parola fenicia *abak* = *polvere*. Sulla tavoletta, infatti, era incollata della polvere di colore verde (*pulvis hyalinus*) che permetteva di tracciare con una bacchetta (*radius*) simboli numerici e figure geometriche, utilizzandola come noi oggi usiamo la lavagna.

I romani appresero l'abaco a polvere dai greci e dagli etruschi. È menzionato da numerosi autori antichi latini.

Cicerone (106-43 a.C.) ne parla nelle sue *Tuscolanae Disputationes* (Quaestio V,23):

*... ex eadem urbe umile homunculum a pulvere et radio
excitabo, qui multis annis post fuit Archimedes.*

da cui risulta che Archimede usava tale tipo di abaco, per disegnare le figure geometriche.

Anche Virgilio (70-19 d.C.) lo cita nelle sue Egloghe (III,40):

*... si quis fuit alter
Descripsit radio totum qui gentibus orbem.*

Persio (34-62 d.C.) scrive nella *Satira I*:

*Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas,
Scit risisse vafer, multum gaudere paratus.
Si cynico barbam petulans nonaria vellat.*

Marziano Capella (sec. V d.C.), nella sua enciclopedia sulle sette arti liberali *De Nuptiis Philologiae et Mercuri* scritta in forma allegorica, lo descrive ampiamente nei libri dedicati alla Geometria e all'Aritmetica:

*Patent denique jam ingressurae artes quae decentem
quamdam, atque hyalini pulveris respersione coloratam
velut mensola gestitantes. Illud quippe quod gerulae
detulerunt, abacus nuncupatur, res depingendis
designandisque opportuna formis. Quippe ubi vel lineares
ductus, vel circulares flexus, vel triangulares abraduntur
aufRACTUS. (Liber VI, De Geometria).*

*Sic abacum perstare jubet, sic tegmine glauco pandere
pulvereum formarum ductibus aequor. (Liber VII, De
Arithmetica).*

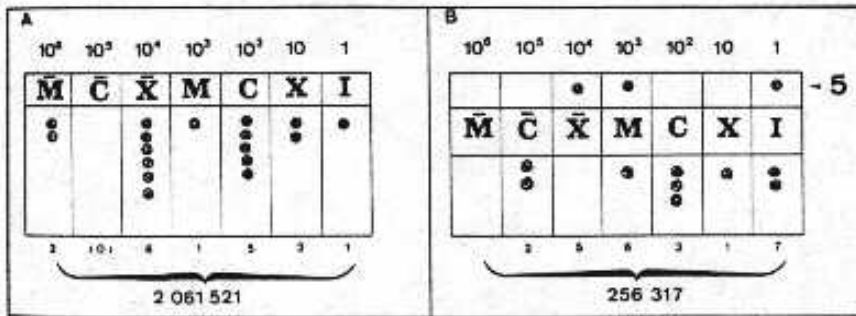


Fig. 2 – L'abaco romano a lapilli in due diverse versioni.

4 – L'abaco a lapilli

Successivamente i romani usarono un secondo tipo di abaco, l'abaco a lapilli (figura 2), costituito da una tavoletta rettangolare con scanalature parallele al lato minore, al di sopra delle quali erano impresse le lettere del sistema di numerazione romano, per indicare l'ordine delle unità al quale ciascuna scanalatura corrispondeva. Cominciando da destra, la prima scanalatura era quella delle unità frazionarie (non sempre presente come in figura 2), la seconda era dedicata alle unità semplici e sopra di essa figurava il numerale I, la terza era dedicata alle decine e aveva sovrainpresso il numerale X, la quarta scanalatura era quella delle centinaia e aveva il corrispondente numerale C, e così via.

All'interno di ciascuna scanalatura, secondo i modelli di abaco che si susseguirono nel tempo, erano disposti tanti sassolini (*calculi*, da cui il termine calcolare) o dischetti (*abaculi*) o monetine (*denarii supputatorii*) quanti erano le unità di quell'ordine da rappresentare.

Se in corrispondenza di ciascuna scanalatura (figura 2), iniziando dalla prima a sinistra non vuota, si scrive il numerale romano corrispondente all'ordine delle unità della scanalatura tante volte quanti sono i *calculi* o *abaculi* in essa contenuti, si ottiene la rappresentazione scritta del numero indicato dall'abaco, secondo il sistema di numerazione additivo romano (vedi box di approfondimento). Il numero era, quindi, pensato come somma delle unità dei vari ordini.

Di tale abaco, utilizzato anche dai greci e dagli etruschi oltre che dai romani, esistono numerose citazioni nella letteratura classica (Polibio, Plutarco, Erodoto, Lisia, Orazio). Basti ricordare quella di Orazio, il quale nella satira I,6 descrive i fanciulli che si recano a scuola portando a tracolla la tavoletta e la cassettona contenente i *calculi*:

*Causa fuit pater bis, qui macro pauper agello
Noluit in Flavi ludum me mittere, magni
Quopueri magnis e centurionibus orti,
Laevo suspensi loculos tabulamque lacerto,
Ibant octonis referentes idibus aera.*

Come fossero eseguiti i calcoli con l'abaco a lapilli non è stato tramandato ed è perciò sostanzialmente sconosciuto, anche se sono state avanzate varie congetture. Ciò che è certo è che il suo uso doveva essere semplice e rapido, essendo usato dai ceti non colti e dai ragazzi a scuola, come ci racconta Orazio. Dell'abaco a lapilli sono pervenute fino a noi due testimonianze iconografiche: un'effigie incisa nella *gemma calculatoria* conservata al gabinetto delle medaglie della Biblioteca Nazionale di Parigi e un'altra scolpita in un sarcofago romano conservato al Museo Capitolino di Roma.

Nella *gemma calcolatoria* di Parigi è rappresentato un ragazzo seduto davanti a un tripode contenente i *calculi* e che regge con la mano sinistra la tavola (Chabauillet: Catalogo n° 1898; Orioli, 1865). Nel sarcofago romano, invece, è rappresentato uno schiavo che tiene fra le mani una tavoletta con dei sassolini (*Del Museo Capitolino* tomo IV, tav. 20 Roma: Fulgoni, 1782).

L'uso dell'abaco a lapilli si protrasse fino all'inizio del sec. XVI, com'è testimoniato dallo scolio a *Beda il Venerabile* del Noviomago (*Scholia in Bedam: cap. De Indigitatione*):

Est et alia numero rum ratio per calculos, in tabula delineata, ductibus parallelispositos quae et ipsa vetus est, neque ab usu recessit: nisi quod loco calculorum, nummie nunc utantur, atque hujus est et fuit usus in numerandis speciebus negotialibus.

5 - L'abaco a bottoni

In due lettere inviate a Giusto Lipsio, il 15 marzo 1593, e all'erudito tedesco Gioacchino Liebbard (detto Camerario), il 18 agosto dello stesso anno, Marco Velsero fornisce il disegno di un terzo tipo di abaco usato dai romani, detto *abaco a bottoni*, che essi appresero dai greci e perfezionarono (Velsero, 1682, pp. 820,842). Il suo uso venne meno già nel secolo XIV, vale a dire due secoli prima rispetto all'abbandono dell'abaco a lapilli, probabilmente per la ragione che essendo più complicato di quello a lapilli, era utilizzato soprattutto dai ceti più abbienti, i quali vennero per primi a conoscenza sia del nuovo abaco a colonne sia del nuovo sistema posizionale di numerazione scritta.

Quest'ultimo utilizzava le cifre indiane, diffuse nell'Occidente europeo nel secolo XIII principalmente per opera di Leonardo Pisano detto Fibonacci, che nel suo celeberrimo *Liber Abaci* (1202) non solo illustrò il nuovo sistema, ma espose anche, utilizzandolo, tutta l'aritmetica elementare allora nota. Probabilmente, la diffusione in Europa del sistema posizionale e delle cifre indo-arabiche avvenne gradualmente attraverso gl'intensi contatti commerciali dei ricchi mercanti italiani con il mondo orientale, particolarmente fiorenti nel Basso Medioevo (secoli XI-XIII). Tali mercanti conoscevano, per motivi di contabilità commerciale, il modo di calcolare basato sul principio di posizione e sulle cifre indiane, già in uso in oriente. In ogni caso, si tenga presente che nel 1156 appariva nel mondo occidentale la prima traduzione in latino, con il titolo *Liber algorismi de numero indorum*, dell'opera scritta negli anni 800-825 dal matematico arabo Mohammed Ben Musa detto Al Khovarizmi, nella quale è illustrato il sistema di numerazione posizionale usato dagli indiani già dal secolo V. Tuttavia, il merito della diffusione di tale sistema in Occidente è dovuto soprattutto al *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, che ebbe gran diffusione e influenza in Europa.

Quanto fosse difficile il calcolo strumentale con gli abachi è testimoniato da vari racconti. Nei secoli XIV e XV pare che chi fosse interessato ad apprendere l'arte del calcolo dovesse rivolgersi alle università tedesche o francesi per le operazioni più semplici (addizioni e sottrazioni), ma a quelle italiane, allora più all'avanguardia, per le operazioni più complesse (moltiplicazioni e divisioni).

Sistema di numerazione scritta romano

Nel sistema di numerazione additivo, un numero è ottenuto per somma dei numeri indicati da opportuni simboli, i quali hanno il medesimo valore quale che sia la loro collocazione all'interno della rappresentazione dell'intero numero. Il sistema di numerazione degli antichi romani è un misto fra sistema additivo, sottrattivo e moltiplicativo, cioè è additivo in senso lato, in quanto sottrazioni e moltiplicazioni sono riconducibili a addizioni. Per esempio, il numero 43 è rappresentato con il numerale XLIII, in cui i simboli X, L e I rappresentano rispettivamente dieci, cinquanta e uno. Nella prima parte del numerale è fatta la sottrazione fra cinquanta e dieci (XL), mentre nella seconda parte si somma tre volte l'unità (III). La regola per stabilire se si deve sommare o sottrarre è semplice: una cifra si somma alla successiva se questa è minore, mentre si sottrae dalla successiva se questa è maggiore. Inoltre, per rappresentare il numero novemila, per esempio, i romani usavano il numerale IXM, che rappresenta il numero in questione come prodotto fra nove (IX) e mille (M). Altro carattere spurio del sistema di numerazione romano era costituito dalla base del sistema: dieci (base primaria) e cinque (base ausiliaria) per la parte intera, dodici per la parte frazionaria del numero (l'unità semplice *axis* era divisa in dodici *once*). Infatti, oltre i numerali per i gruppi di potenze di dieci i romani usavano anche numerali particolari per rappresentare raggruppamenti di unità in base cinque: V per cinque, L per cinquanta, D per cinquecento.

Infatti, un'operazione che un bambino oggi eseguirebbe in pochi minuti richiedeva allora, da parte di un adulto, ore e ore di applicazione! (Ifrah, 1989, pp. 276-277).

Nel 1853, un illustre archeologo, il padre gesuita Raffaele Garrucci, studiando una raccolta di antichi bronzi di proprietà di Carlo Bonichi, trovò un esemplare di abaco a bottoni (figure 3a e 3b), realizzato in un formato che oggi definiremmo "tascabile", conservato al Museo Kircheriano (Garrucci, 1853). Si tratta di una lamina di bronzo, di 11.5 cm x 9.4 cm, recante nove scanalature inferiori parallele al lato minore e otto superiori divise da una linea orizzontale (figure 3a e 3b).

Ciascuna scanalatura (o alveolo) della parte inferiore contiene quattro bottoni a forma di piccoli chiodi ribattuti nella parte posteriore (*claviculi umbellati* o *aerae*), ad eccezione della seconda (dedicata alle once) che ne ha cinque. Iniziando da destra, la prima scanalatura, priva della parte superiore, è divisa in tre parti, dedicate alle unità frazionarie romane: *semuncia*=1/2 *uncia*, *sicilicus*=1/4 *uncia*, *sextula*= 1/6 *uncia*. La seconda scanalatura è riservata all'unità frazionaria *uncia* = 1/12 *axis*.

Le scanalature dalla terza alla nona si riferiscono alla parte intera del numero: unità semplici I (*axis*), decine X, centinaia C, migliaia (I), decine di migliaia ((I)), centinaia di migliaia (((I))), milioni |M|. ³

³ Gli ultimi quattro numerali indicati sono quelli arcaici sostituiti successivamente dai simboli M X C M. Le linee orizzontali indicano che il numero deve essere moltiplicato per 1000 (vedi fig. 2).

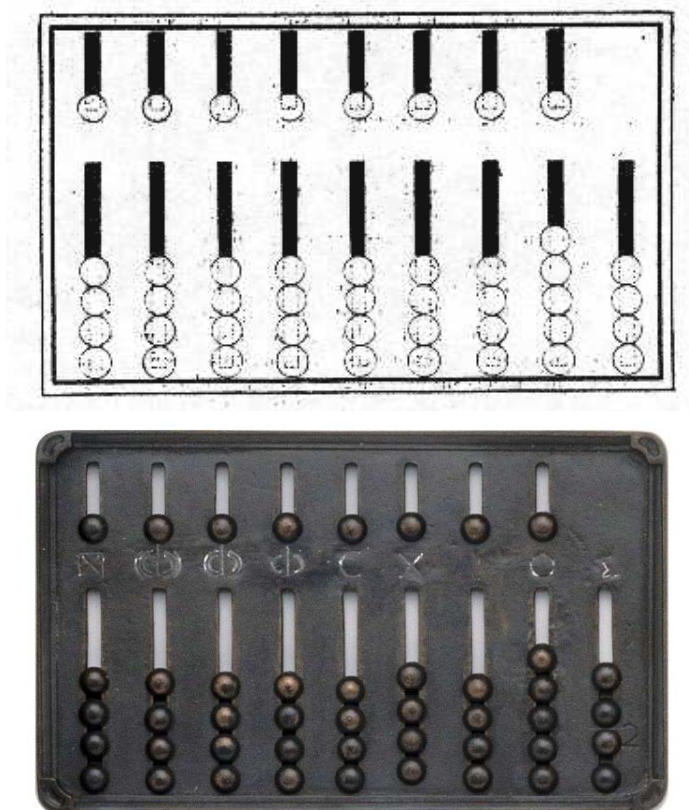


Fig. 3a - Disegno dell'abaco a bottoni rinvenuto da Raffaele Garrucci fra i bronzi di Carlo Bonichi. In Raffaele Garrucci, "Notizia di una tavoletta calcolatoria romana", «*Bullettino Archeologico Napolitano*», Nuova serie, anno II, Dicembre 1853, pagg. 93-96.

Fig. 3b - Modello in bronzo dell'abaco a bottoni rinvenuto da R. Garrucci.

Le scanalature superiori, invece, hanno ciascuna un solo bottone, che vale il numero di bottoni della scanalatura inferiore maggiorato di uno: cinque bottoni per gli alveoli della parte intera (dal terzo al nono), sei bottoni per l'alveolo delle once (il secondo).

6 - L'abaco a gettoni o Mensa Pythagorea

L'osservazione attenta dell'abaco e l'applicazione ad esso del principio di economia possono spiegare in quale modo, probabilmente, avvenne il passaggio dall'antico abaco romano alla sua versione medioevale l'*abaco a colonne o a gettoni*, che nelle sue successive varianti risultò uno strumento di calcolo in perfetta sintonia con il sistema posizionale di numerazione scritta, tanto da perdere la sua ragion d'essere e scomparire gradualmente dall'uso.

L'abaco antico, nelle sue varie forme costruttive esaminate, conteneva, infatti, già l'idea del valore posizionale delle cifre, in quanto ogni scanalatura era dedicata a un ordine di unità e quindi determinava il 'peso' dei *calculi* in essa contenuti. Per esempio, tre sassolini entro la scanalatura delle unità semplici hanno il valore di tre unità semplici, mentre se contenuti nella scanalatura delle centinaia hanno il valore di tre centinaia, e così via. La rappresentazione strumentale dei numeri fornita dall'abaco era, quindi, posizionale, mentre quella scritturale, tramite i numerali, era additiva.

Il sistema utilizzato per numerare si basava, già da tempi remoti, sulla possibilità di pensare un numero come somma delle sue unità semplici, raggruppate in gruppi di potenze della base del sistema di numerazione adottato. Nel sistema di numerazione decimale, pertanto, i successivi gruppi contengono tante unità semplici quante ne indicano le successive potenze naturali della base 'dieci': $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, 10^nunità. Come è noto, tali gruppi sono considerati essi stessi 'unità complesse', rispettivamente del primo ordine o semplici, del secondo ordine o decine, del terzo ordine o centinaia, del quarto ordine o migliaia, e così

via. In tal modo, nel sistema decimale, dieci unità di un certo ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore. Per rappresentare un numero si può ricorrere a simboli, che possono essere sia oggetti sia segni scritti.

Nel caso della scelta di simboli-oggetto, si ha l'abaco nelle sue varie forme e la rappresentazione strumentale dei numeri. Per rappresentare le unità semplici si usano simboli-oggetto tutti uguali fra loro (per esempio i *calculi*) in quantità pari al numero massimo di unità ammissibile per ogni ordine (nove nel sistema decimale), oppure in quantità minore, se si conviene di assegnare ad alcuni di essi un valore diverso, come avviene in diverse varianti sia dell'abaco a lapilli sia dell'abaco a bottoni (ove il bottone superiore vale il numero di bottoni inferiori più uno). La distinzione dei vari ordini di unità è affidata alla diversa posizione delle scanalature in seno all'abaco.

Nel caso, invece, di simboli-scritti (cifre), si ottiene un sistema di numerazione scritta e la rappresentazione scritturale dei numeri tramite numerali.

In tal caso sarebbe necessario un doppio sistema di simboli: un insieme infinito di simboli per le infinite 'unità complesse' e un insieme finito di simboli per rappresentare il numero finito delle 'unità semplici' (nove nel sistema di numerazione decimale). Il principio di economia applicato all'antico abaco romano portò a utilizzare simboli scritti al posto dei sassolini o dei bottoni ponendo dentro ciascuna scanalatura un gettone con impressa la cifra che ne indica il numero.

Nell'esempio dell'abaco a colonne di figura 4, al posto di sette sassolini (o bottoni) che dovrebbero essere posti nella colonna delle decine si utilizza un solo simbolo-segno: la cifra

7. In cima ad ogni colonna continua, inoltre, a comparire la cifra dell'ordine di unità cui la colonna è dedicata.

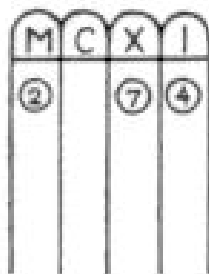


Fig. 4 – L'abaco medioevale a colonne o a gettoni detto anche *abaco di Boezio*. Fu detto anche erroneamente *Mensa Pythagorea*. Per maggiore chiarezza i gettoni riportano le attuali cifre indo-arabe e non gli apici di Boezio originali (vedi figura 6).

Il termine gettone deriva dal latino *iacere* che significa gettare. Infatti, i *calculi* erano gettati entro le scanalature: il gettone sostituì così di nome e di fatto l'operazione del 'gettare i sassolini', soppressa nel nuovo *abaco a colonne* o *a gettoni*, detto anche *abaco di Boezio* in quanto descritto verso la fine del primo libro dell'*Ars Geometrica*, attribuita da alcuni al console romano Manlio Torquato Severino Boezio (480-526), per il fatto che negli antichi manoscritti essa si trova assieme all'opera *De Institutione Arithmetica*, da lui compilata come rifacimento dell'*Introduzione Aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I secolo d.C).⁴

⁴ Manlio Torquato Severino Boezio (Roma 475 circa - Pavia 524 circa) apparteneva a una antica nobile famiglia, i cui membri avevano ricoperto importanti cariche nell'Impero Romano. Anche i due figli, Boezio e Simmaco, proseguirono la tradizione di famiglia di ricoprire ruoli statali prestigiosi diventando entrambi consoli nel 522. Boezio studiò alla Scuola

Le cifre impresse sui gettoni, che inizialmente non comprendevano ancora lo zero,⁵ furono chiamate *apici* da

di Atene, dove si insegnavano soprattutto Aristotele e Platone. Intorno al 502 si fa risalire l'inizio della sua attività letteraria e filosofica: scrisse i trattati del quadrivio (le quattro scienze fondamentali del tempo: aritmetica, geometria, astronomia e musica): *De institutione arithmetica*, *De institutione musica*, *De institutione geometrica* e *De institutione astronomica* (gli ultimi due perduti). La fama della sua grande erudizione si diffuse nell'Impero Romano d'Oriente e gli valse l'innalzamento a rango di *patricius* nel 507 e nel 510 la nomina a console *sine collega* da parte di Teodorico, carica biennale che gli diede diritto a un seggio permanente nel Senato Romano. Tradusse in latino e commentò molte opere di Aristotele, scrisse vari libri di filosofia e di teologia. Nel 522 fu nominato *magister officiorum*, alta carica nella burocrazia imperiale, molto vicina all'imperatore e dotata di vasti poteri, di cui Boezio si valse a favore di varie giuste cause. Fra queste, la difesa da un processo ingiusto dell'ex console Albino, accusato di cospirare contro Teodorico. Fu proprio la difesa di Albino che causò la caduta in disgrazia di Boezio, che fu accusato in base ad alcune sue lettere forse falsificate, di avere sostenuto la necessità di «restaurare la libertà di Roma». Nel settembre 524 Boezio fu incarcerato a Pavia, con l'accusa di praticare arti magiche e in prigione scrisse la sua opera più famosa, il *De consolatione philosophiae*. Fu processato e nell'estate del 525 fu condannato a morte. La sentenza venne ratificata da Teodorico stesso ed eseguita nell'*Ager Calventianus*, una imprecisata località vicino Pavia, ove avvenivano le sentenze capitali.

⁵ L'utilizzo dell'abaco da parte degli "abacisti" non richiedeva l'uso dello zero per indicare una quantità mancante: bastava non mettere nulla nella colonna dell'ordine corrispondente. La necessità dell'uso dello zero fu avvertita più tardi dagli "algoristi", cioè da coloro che sostituirono l'abaco con il calcolo scritto "all'indiana" (algorismo) così detto perché faceva uso del sistema decimale posizionale e delle sue cifre, di origine indiana. *Abacus* è il termine latino con cui si designava l'abaco, mentre *abbacus* (con due b) è il termine latino con cui in Italia dal secolo XIII in poi ci si riferiva al calcolo (algorismo) basato sul sistema di numerazione scritta decimale e posizionale di origine indo-araba. Per tale motivo i due termini abaco e

Boezio stesso (figura 5) e *figure d'abaco* successivamente ed erano molto somiglianti alle cifre arabe dette *ghobar* (figura 6) diffuse dagli arabi occidentali della Spagna. Gli apici di Boezio subirono molte varianti dovute alla fantasia dei copisti, che arrivarono a ruotare sul fianco e persino a riprodurre soltanto una parte degli archetipi originali. Soltanto dopo il XIII-XIV secolo essi cominciarono a stabilizzarsi in forme molto somiglianti a quelle delle nostre cifre attuali (figure 7, 8).

		Si	ce	tem	ze	calc	qui	ar	or	an	lg
		pos	len	en	nis	tis	mas	bas	mis	dra	in
		0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fig. 5 – Gli apici di Boezio in un manoscritto latino dell'XI secolo. Qui compare lo zero. In alto i loro nomi nell'ordine da 0 a 9: Sipos, Celentis, Temenias, Zenis, Caltis, Quimas, Arbas, Ormis, Andras, Igin. L'origine e il significato di tali nomi (escluso Quinas di origine latina) sono ancora ignoti.

Tale somiglianza ha fatto sospettare ad alcuni studiosi che le origini del sistema di numerazione scritturale decimale potessero risalire ai romani del II secolo (Ginanni, 1753, pp. 19-110) o addirittura a Pitagora e alla sua scuola (Romagnosi,

algorismo sono stati utilizzati come sinonimi, mentre invece erano opposti i termini abaco e algorismo. Sulle differenze fra i termini *abacus* e *abbacus* vedasi Keith Devlin (Devlin, 2012, pp. 21-22).

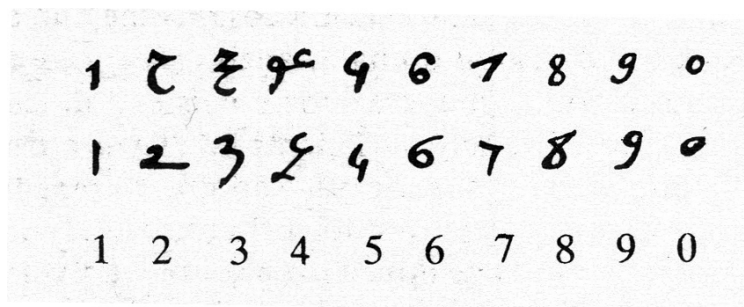


Fig. 6 – Cifre ‘indo-arabe’ dette *ghobār*.

1827, pp. 580 e seg). La tesi di Francesco Ginanni ⁶ poggia sul fatto che in un codice antico compaiono numeri rappresentati da lettere romane unite a cifre simili alle nostre attuali (Ginanni, 1753, p. 94).

⁶ Francesco Ginanni (1716 -1766), di famiglia nobile, trascorse la fanciullezza in un vivace ambiente culturale scientifico e letterario che vantava illustri studiosi, laici ed ecclesiastici. Nella sua opera *Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscularum origine* sostiene che le nostre attuali cifre sono nate in Italia e che furono usate già nel sec. II d.C. sotto l'impero di Marco Aurelio. Secondo M. Chasles, A. Humboldt, invece, sarebbero state inventate nella Scuola Pitagorica e i neo-pitagorici greci di Alessandria le avrebbero diffuse nella Roma imperiale, poi nel Vicino Oriente e in India tramite gli scambi commerciali. Da Roma il sistema di numerazione posizionale viene esportato in Spagna e nelle province romane dell'Africa settentrionale. Gli arabi lo apprendono durante le loro conquiste di queste province. Non esistono, però, documenti storici che attestino la conoscenza del sistema di numerazione posizionale da parte dei greci; al contrario le fonti storiche confermano l'uso da parte dei greci del periodo alessandrino della notazione numerica additiva simile a quella ebraica. (Ifrah, 1989, p.240). Se i matematici greci avessero veramente ideato il sistema di numerazione decimale posizionale, lo avrebbero applicato e certamente Aristotile ne avrebbe fatta menzione nelle sue opere, come osserva Andrea Stiattesi (Stiattesi, 1870, p. 396).

La tesi di Gian Domenico Romagnosi, invece, era giustificata in quanto il nuovo abaco a gettoni, dove gli apici compaiono, è indicato nell'*Ars Geometrica* con il nome di *Mensa Pythagorea*, perché attribuito ai neopitagorici della scuola alessandrina, cui apparteneva Boezio stesso. *Tavola Pitagorica* o *Arco Pitagorico*, furono poi i nomi in volgare con i quali fu battezzato il nuovo abaco a colonne, che ebbe particolare diffusione nelle scuole claustrali medievali spagnole, per opera del teologo e matematico francese Gerberto di Aurillac (940 o 950-1003 d.C.),⁷ divenuto papa col nome di Silvestro II nel 999. Lo stesso Boezio dà spiegazione del diverso 'peso' che gli *apici* hanno nelle diverse colonne dell'abaco, confermando il loro valore posizionale.

7 - Un errore di trascrizione

Secondo le moderne indagini filologiche, invece, sembra che l'*Ars Geometrica* non fosse di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici medioevali e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica.

⁷ Appassionato studioso entrò in contatto con la cultura araba nella Spagna islamica, assorbendone le conoscenze matematiche e astronomiche, che si prodigò di diffondere in Europa.

Su questa diversa attribuzione poggia la tesi di coloro che confutano le origini pitagoriche delle cifre decimali a favore dell'origine indiana.⁸

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XII secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XIII secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XIV secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XV secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
circa 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fig. 7 - Evoluzione della grafia delle cifre 'indo-arabe'.

⁸ Molti documenti storici attestano che le nostre attuali cifre, compreso lo zero, e la notazione decimale posizionale sono nate nella parte settentrionale dell'India nel V sec. d. C. (Bombelli, 1876 cap. IX "Se gli antichi popoli italici conoscessero la numerazione indiana, detta volgarmente araba" pp. 59-65). Gli indiani diffusero l'invenzione presso i «greci di Alessandria nell'epoca classica del Sincretismo. Da essi sarebbe passata ai Neo-Pitagorici (di cui è nota la propensione ad accogliere le idee braminiche), l'ultimo dei quali è appunto Manlio Severino Boezio; da questo l'avrebbe appresa Gerberto, il quale, a sua volta, l'avrebbe diffusa in tutta l'Europa, non esclusa la Spagna; quivi gli arabi l'avrebbero trovata e se ne sarebbero impadroniti». (Loria, 1914, p. 806, si veda anche l'intero paragrafo "La pretesa origine pitagorica del sistema decimale" a pp. 800-807). Gli stessi arabi del Vicino Oriente chiamavano *hindi* le cifre da loro utilizzate, lasciando chiaramente trasparire le loro origini indiane.

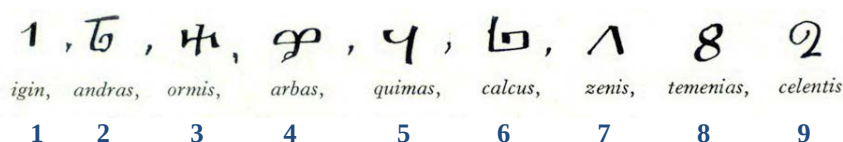


Fig. 8– Una variante degli apici di Boezio con i loro nomi.

Nel riprodurre successivamente il manoscritto dell' *Ars Geometrica* , il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico (figura 9) con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome di Tavola Pitagorica che designava l'abaco neopitagorico.

Dunque, la tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo come "tavola pitagorica" non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione. Tuttavia, ancor oggi si perpetua questo falso storico e si continua ad attribuire a Pitagora la paternità della tavola di moltiplicazione.

8 - Dall'abaco all'algorithmo

Il significato del nuovo abaco medioevale (*Mensa Pythagorea*) era mutato profondamente rispetto all'antico abaco romano, in quanto esso, oltre a fornire uno strumento di computazione, consentiva ormai di rappresentare un numero 'per mezzo di numerali', a meno dello zero, realizzando un notevole passo verso il trasferimento del principio di posizione dall'abaco alla rappresentazione scritta dei numeri.

Il passo successivo, nello spirito di una maggiore 'economia' nella rappresentazione dei numeri, sarebbe stato eliminare anche le scanalature (o colonne) sostituendole con

simboli scritti, in quanto esse, nell'*abaco a colonne*, servivano essenzialmente per rappresentare i diversi ordini delle unità, essendo venuta meno la loro funzione di 'contenitori' dei *calcoli* o dei bottoni. Utilizzando le cifre arabiche, potremmo rappresentare, per esempio, il numero 2074 nel seguente modo:

$$\begin{array}{cccc} 1000 & 100 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{array}$$

cioè ponendo sotto al simbolo-segno (numerales) di ciascun ordine (1, 10, 100, 1000, ecc...), la cifra che indica il numero di unità di quell'ordine che contribuisce alla formazione del numero in questione.

Tale tipo di scrittura, che fu in uso fin da tempi antichissimi presso i cinesi,⁹ era moltiplicativa ma aveva in *nuce* il principio posizionale.¹⁰ Essa non è altro che la trasposizione in forma scritta dell'abaco: al posto delle scanalature ci sono le cifre 1, 10, 100, 1000, Che indicano i vari ordini di unità, e al posto dei *calcoli* ci sono le cifre che indicano le unità dei vari ordini che concorrono alla formazione del numero rappresentato, che si ottiene addizionando i prodotti parziali delle cifre incolonnate ($2 \times 1000 + 0 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \times 1$).

Spingendo ancora oltre il principio di economia, possiamo anche evitare di scrivere i simboli (di numero infinito) dei vari

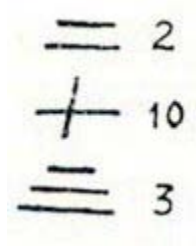
⁹ Guglielmo Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, 1, Paris, 1838, pp. 202-203.

¹⁰ Il principio posizionale della numerazione scritta fu noto ai babilonesi nel XX-IX sec. a.C., ai cinesi nel II sec. a.C. - II sec. d.C., e ai maya nel III-VI sec. d.C., ma nessuno di questi popoli lo seppe applicare compiutamente.

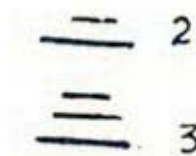
ordini di unità, essendo tali simboli superflui se si conviene di affidare alla posizione delle cifre, indicanti il numero di unità dei vari ordini che concorrono alla formazione del numero in questione, il compito di specificare l'ordine delle unità stesse. Si ha così, infine, il ben noto principio posizionale applicato alla numerazione scritta. È però necessario, a questo punto, introdurre un altro simbolo, lo zero, per indicare l'assenza di unità.

Nell'esempio precedente, fatta questa convenzione, basta, dunque, sopprimere la riga superiore delle cifre indicanti i vari ordini di unità, per ottenere la rappresentazione posizionale del numero come noi oggi la utilizziamo: 2074.

I cinesi, nella loro numerazione scritta, seguirono un percorso simile a quello tracciato; per esempio, dapprima scrivevano 23 in forma moltiplicativa e additiva nel seguente modo:



e poi, eliminando la cifra del 10:



In tal maniera, per rappresentare in forma scritta un numero, comunque grande esso sia, risultano sufficienti i simboli grafici delle unità semplici e dello zero, di numero

pari alla base del sistema di numerazione utilizzato (dieci nel sistema decimale).

In tal maniera, per rappresentare in forma scritta un numero, comunque grande esso sia, risultano sufficienti i simboli grafici delle unità semplici e dello zero, di numero pari alla base del sistema di numerazione utilizzato (dieci nel sistema decimale).

L'iter ipotizzato fu realmente realizzato, quando nell'abaco a colonne furono aboliti i gettoni e le cifre furono scritte direttamente sopra le colonne. Dunque, fu sempre più manifesta l'identificazione concettuale dell'*abaco a colonne* con l'*algoritmo* o *algorismo*,¹¹ termine con cui inizialmente era chiamato il sistema di numerazione scritta posizionale nei paesi latini, tant'è che i matematici italiani dei secoli XII e XIV usavano indifferentemente i termini abaco e algoritmo, per riferirsi al sistema numerico posizionale. Quest'ultimo, pertanto, rese obsoleto l'uso dell'abaco stesso, che era giustificato principalmente dalle difficoltà di eseguire i calcoli con il vecchio sistema di numerazione additivo. Infatti, il nuovo sistema di numerazione posizionale dava la possibilità sia di rappresentare i numeri con maggior economia di simboli, sia di semplificare i procedimenti del calcolo scritto, e pertanto vanificò il vantaggio dell'abaco, decretandone, in Europa, la definitiva scomparsa. Con l'identificazione fra abaco e algoritmo si avviava a conclusione la disputa fra abachisti e algoritmisti, vale a dire fra coloro che sostenevano i

¹¹ Il termine algoritmo deriva dalla latinizzazione di Al Khovarizmi, soprannome del matematico arabo Mohammed Ben Musa vissuto nel sec. IX, indicante la provincia persiana del Korassan da cui proveniva.

vantaggi del calcolare per mezzo dell'abaco oppure con il sistema di numerazione scritta (figura 10).

Tuttavia, non si pensi che il nuovo sistema numerico 'indiano' abbia avuto vita facile, tutt'altro: le "tavole per contare" (vale a dire gli abachi a gettone) continuarono a sopravvivere in Europa fino al XVIII secolo come è attestato dal loro uso ancora richiesto ai pubblici ufficiali dell'Amministrazione britannica (Ifrah, 1989, pp. 278, 290). Furono soprattutto i commercianti, i finanzieri, i banchieri e i funzionari statali a non abbandonare l'uso dell'abaco a gettoni, fin quando la Rivoluzione francese ne proibì l'uso. Evidentemente non si fidavano ancora dell'esattezza dei calcoli eseguiti "all'indiana".

Pythagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt
 10 sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant; a posterioribus appellabatur abacus, ut quod alta mente
 15 titiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.

Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim huiuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati 1, ista autem binario , tertia vero tribus , quarta vero 5 quaternario , haec autem quinque ascriberetur , ista autem senario , septima autem septenario conveniret , haec vero octo 8, ista autem novenario iungeretur . Quidam vero in huius formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ¹⁰ ut littera quae esset prima unitati, secunda binario, tertia ternario, ceteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in huiusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie ceu ¹⁵

Fig. 9 – La citazione della Mensa Pythagorea e degli apici nell'*Ars Geometrica* di Boezio. (*De Institutione Arithmetica* a cura di G. Friedlein, Lipsia, 1867, pp. 396, 397).

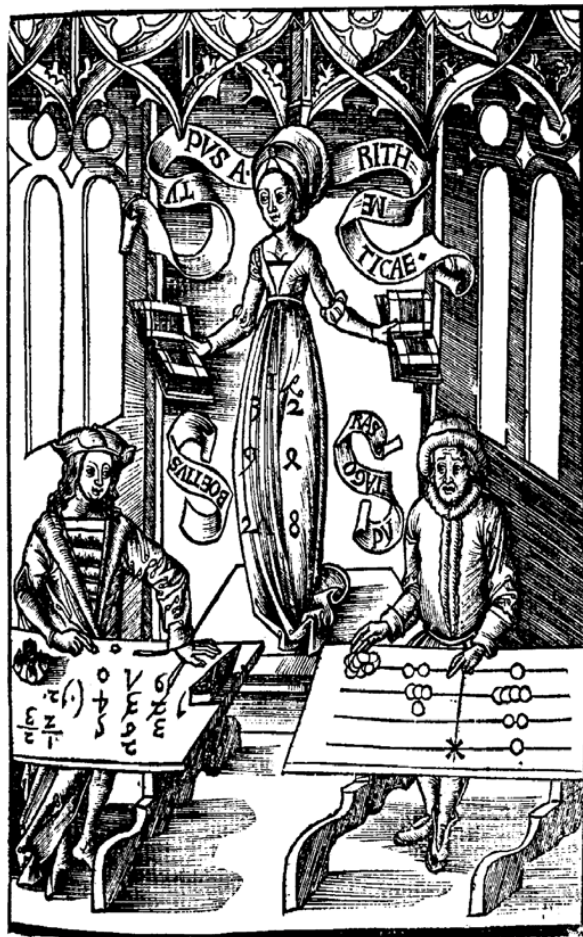


Fig. 10 - Un'immagine contenuta nell'opera Margarita Philosophica di Gregor Teisch (1503) che illustra in forma allegorica la diatriba fra abachisti (rappresentati da Pitagora) e algoritmisti (rappresentati da Boezio). Una figura femminile personifica l'Aritmetica e, dallo sguardo rivolto verso Boezio alla sua destra, si arguisce la preferenza data al calcolo tramite le nuove cifre indiane.

Bibliografia

BOEZIO Severino (1867). *De Institutione Arithmetica*, (a cura di G. Friedlein). Lipsia.

BOMBELLI Rocco (1876). *Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica*, 1, cap. IX "Se gli antichi popoli italici conoscessero la numerazione indiana, detta volgarmente araba" pp. 59-65) Roma.

BONCOMPAGNI Baldassarre (1877). «*Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*», 10° anno 1877.

BONCOMPAGNI Baldassarre (1881). «*Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*», 14° anno 1881.

CHASLES Michel (1843). «*Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris*», 16° e 17° anno 1843.

CHASLES Michel (1867). «*Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris*», 64° anno 1867.

CHASLES Michel (1875). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Parigi: Gauthier - Villars.

DEVLIN Keith (2012). *I numeri magici di Fibonacci* (titolo originale: *The man of Numbers*), Bergamo: BUR Rizzoli.

ENESTROM Von Gustaf . (1894). «*Bibliotheca Mathematica*» (2) 8.

GARRUCCI Raffaele (1853). "Notizia di una tavoletta calcolatoria romana". «*Bullettino Archeologico Napolitano*», Nuova serie, anno II, Dicembre 1853, pp. 93-96.

GINANNI Francesco (1753). "Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscularum origine". In: «*Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici*» a cura di Calogierà, Tomo 48, pp. 19-110, Venezia.

IFRAH Georges (1989). *Storia universale dei numeri*. Milano: Mondadori.

LIBRI Guglielmo (1839). "Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens". «*Journ. De Mathématiques*», T. IV, 1839.

LORIA Gino (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano: Hoepli.

MANNERT Corrado (1801). *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica*. Norimberga.

NICOTRA Luca (2009). "La tavola pitagorica: un falso storico dimenticato". «*Alice&Bob*», n. 15, 2009, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa di approfondimenti è in <http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica>.

ORIOLI Francesco (1865). "Sopra uno specchio coi Dioscuri, e la gemma così detta calcolatoria esistente a Parigi". In «*Bullett. Istit. 1865*», pp. 152,157.

RANGABÉ Rizos Alessandro, VINCENT Louis-Hugues (1846). «*Revue archéologique*», p. 296 e 401.

ROMAGNOSI Gian Domenico (1827). «*Supplemento ed illustrazioni alla seconda parte delle Ricerche storiche sull'India di Robertson*». Tomo II, VI, Milano, Ferrario.

STIATTESI Andrea (1870). "Sull'Aritmetica. Dissertazione storica-critica". In: «*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*», Tomo III (novembre 1870).

TANNERY Paul (1897). «*L'Intermédiaire des Mathématiciens*», 4.

VANNUCCI Atto (1873). *Storia dell'Italia antica*. Volume Primo. Milano: Tipografia Editrice Lombarda.

VELSERO Marco (1682). "Epistolae ad Viros Illustres". *Opera Omnia*. Norimberga.