

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXIV - Serie IV – volume V (2)
giugno 2023**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

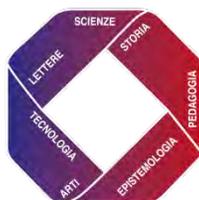
PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVIII - Serie IV - Volume V (2)
Giugno 2023



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-691-9

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di giugno 2023 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra	7
<i>Dall'abaco alla numerazione posizionale</i>	
Franco Francia	37
<i>Insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio</i>	
Giovanna Della Vecchia	67
<i>La crisi dei fondamenti</i>	
Alessandro Amabile , Emilio Balzano, Pietro Piccialli, Rodolfo Figari , Giancarlo Artiano	89
<i>Fisica e matematica delle leggi di evoluzione</i>	
Giorgio Pietrocola	109
<i>Il siamese di Koch</i>	
Marco D'Errico	125
<i>Perimetro e area nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	157



Anno X, N. 19 giugno 2023

ARTE SCIENZA

*L'immaginazione artistica e scientifica.
Convergenze e divergenze*
di Luca Nicotra

Letteratura combinatoria in Perec e Calvino
di Angela Donatiello

*La figura del maestro di scuola
nell'Italia postunitaria*
di Antonio Castellani

Prospettiva inversa
di Duilio Carpitella

La peste di Noja
di Ferdinando Gargiulo

ISSN 2385-1961

Dall'abaco alla numerazione posizionale

Luca Nicotra*

* Membro onorario APAV e AFSU, presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza",
Direttore responsabile del «Periodico di Matematica», di «ArteScienza», del
«Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane»;
luca.nicotra1949@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.110

Sunto: *La Tavola Pitagorica è nota a tutti fin dalle prime classi della scuola elementare, eppure le sue origini storiche e la sua struttura matematica riservano varie sorprese. In questo articolo viene posto in evidenza un falso storico troppo spesso dimenticato. Noi oggi chiamiamo "Tavola Pitagorica" la tavola di moltiplicazione dei numeri naturali nel sistema posizionale decimale, ma in realtà il corrispondente nome latino Mensa Pythagorea indicava, nel Medioevo, l'abaco a gettoni o a colonne attribuito ai tardo neopitagorici del secolo XI. Ripercorrere l'intricato iter che ha portato a questo errore storico rileva anche aspetti molto interessanti della Mensa Pythagorea, ultimo tipo di abaco medioevale, che preludono all'utilizzo dell'attuale sistema di numerazione scritta posizionale.*

Parole Chiave: *Tavola Pitagorica, abaco, Boezio, sistema di numerazione posizionale.*

Abstract: *The multiplication table has been known to all since the first grades of elementary school, yet its historical origins and its mathematical structure reserve various surprises. This article highlights a historical fake too often forgotten. Today we call the multiplication table of natural numbers in the decimal positional system "Pythagorean Table", but in reality the corresponding Latin name Mensa Pythagorea indicated, in the Middle Ages, the coin or column abacus*

attributed to the late neo-Pythagoreans of the 11th century. Retracing the intricate process that led to this historical error also reveals very interesting aspects of the Mensa Pythagorea, the last type of medieval abacus, which prelude the use of the current written positional numbering system.

Keywords: *Multiplication table, abacus, Boethius, positional numbering system.*

1 - Un falso storico dimenticato

La tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo, fin dalle scuole elementari, con il nome di “Tavola Pitagorica” non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione (Nicoira, 2009).

D'altra parte, già l'utilizzo nella Tavola Pitagorica del sistema di numerazione decimale posizionale, inventato nell'India settentrionale presumibilmente nel V secolo e poi diffuso in Europa dagli arabi nel Medioevo, dovrebbe essere sufficiente per dubitare della attribuzione della tavola ai pitagorici. I greci, infatti, utilizzavano un altro sistema di numerazione scritta, di tipo decimale additivo, simile al sistema usato dai romani antichi.

Nel riprodurre il manoscritto dell'*Ars Geometrica*¹ attribuita a Severino Boezio (480-526), il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico, in essa trattato, con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome *Mensa Pythagorea* che designava quell'abaco. Secondo le moderne indagini filologiche, tuttavia,

¹ Contenuta nell'opera *De Institutione Arithmetica* (Boezio, 1867).

sembra che l'*Ars Geometrica* non sia di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica. Dunque sarebbe errata anche l'attribuzione a Pitagora, o ai suoi diretti seguaci, dell'abaco descritto nell'*Ars Geometrica*, appartenendo invece al basso Medioevo. Il primo a rilevare questo falso storico è stato Corrado Mannert nel 1801 (Mannert, 1801). Successivamente anche Michel Chasles (Chasles, 1875, p. 468), V.G. Enestrom (Enestrom, 1894, p. 120) e Paul Tannery (Tannery, 1897, pp. 162-163), hanno citato la sostituzione dell'abaco neopitagorico con la tavola di moltiplicazione. Guglielmo Libri, celebre matematico e bibliofilo dell'Ottocento, prese in considerazione tale errore, tant'è che nella sua tesi sull'origine delle nostre cifre menziona l'abaco neopitagorico (Libri, 1839, pp. 261-280). Tuttavia, ancor oggi si perpetua questo falso storico e si continua ad attribuire a Pitagora la paternità della ben nota tavola di moltiplicazione. Ripercorrere l'intricato iter che ha portato a questo errore storico rileva aspetti molto interessanti dell'ultimo tipo di abaco medioevale (detto *Mensa Pythagorea* o anche *abaco a colonne* o *a gettoni*), che precludono all'utilizzo dell'attuale sistema di numerazione scritta posizionale.

2 - Il primo strumento per calcolare: la tavola di Salamina.

La costruzione di strumenti per computare è comune a tutti i popoli dell'antichità. Essi sono stati ampiamente utilizzati

anche dopo l'introduzione dei sistemi di numerazione scritta, sia perché il calcolo strumentale è più rapido sia perché, fino a tempi abbastanza recenti, erano poche le persone che sapevano leggere e quindi in grado di utilizzare la numerazione scritta.

Lo strumento per calcolare più diffuso era l'abaco, di cui sono state realizzate diverse versioni, differenti sia nelle realizzazioni fisiche sia nella struttura di calcolo.

I primi a costruire un abaco furono i babilonesi, che intorno al V, IV sec. a.C. utilizzarono un *abaco di marmo* di forma rettangolare di dimensioni enormi (149 cm x 75 cm e spesso 4,5 cm) e pesante circa 130 Kg. Su di esso erano incisi due gruppi di undici linee verticali attraversate da una linea orizzontale. All'incrocio fra questa e la terza, la sesta e la nona linea verticale sono incise delle croci. Inoltre sono incise due serie di 11 caratteri greci e una serie di 13 caratteri greci. Poiché ognuno di tali caratteri rappresenta una corrispondente quantità di talenti, dracme, oboli e khalki,² si presume che la tavola fosse utilizzata per calcoli di contabilità commerciale. Nell'isola di Salamina, nel 1846, gli archeologi , Alessandro Rangabé Rizos (1810-1892) e Louis-Hugues Vincent (1872-1960) trovarono un esemplare di tale abaco (figura 1) (Loria, 1914, p. 749; Rangabé, Vincent, 1846).

Il sistema di numerazione utilizzato in tale tavola, detto Erodiano in onore del grammatico e storico greco (170-250 circa) che per primo lo espose desumendolo da antiche scritture, è quello originario greco, basato sull'uso di rappresentare nella scrittura i numeri con le iniziali dei loro nomi.

² Tutte unità di misura commerciali.

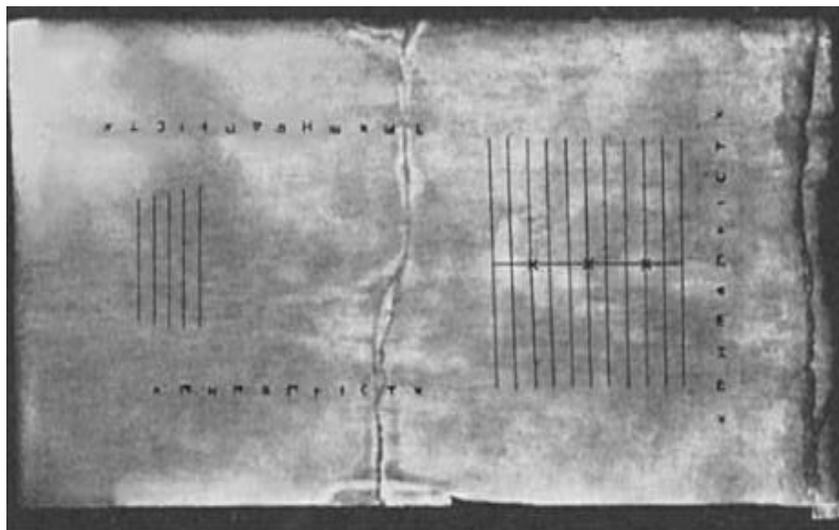


Fig. 1 – L'abaco di Salamina.

3 – L'abaco a polvere

Gli antichi fenici, gli ebrei e successivamente i greci, gli etruschi e i romani usavano l'*abaco a polvere*: una tavoletta rettangolare, di legno o di bronzo, chiamata *abak* dai fenici, *avak* dagli ebrei, *αβαχ* dai greci, *apcar* dagli etruschi, *abacus* dai romani, termini che derivano tutti dall'antica parola fenicia *abak = polvere*. Sulla tavoletta, infatti, era incollata della polvere di colore verde (*pulvis hyalinus*) che permetteva di tracciare con una bacchetta (*radius*) simboli numerici e figure geometriche, utilizzandola come noi oggi usiamo la lavagna.

I romani appresero l'abaco a polvere dai greci e dagli etruschi. È menzionato da numerosi autori antichi latini.

Cicerone (106-43 a.C.) ne parla nelle sue *Tuscolanae Disputationes* (Quaestio V,23):

*... ex eadem urbe umile homunculum a pulvere et radio
excitabo, qui multis annis post fuit Archimedes.*

da cui risulta che Archimede usava tale tipo di abaco, per disegnare le figure geometriche.

Anche Virgilio (70-19 d.C.) lo cita nelle sue Egloghe (III,40):

*... si quis fuit alter
Descripsit radio totum qui gentibus orbem.*

Persio (34-62 d.C.) scrive nella *Satira I*:

*Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas,
Scit risisse vafer, multum gaudere paratus.
Si cynico barbam petulans nonaria vellat.*

Marziano Capella (sec. V d.C.), nella sua enciclopedia sulle sette arti liberali *De Nuptiis Philologiae et Mercuri* scritta in forma allegorica, lo descrive ampiamente nei libri dedicati alla Geometria e all'Aritmetica:

*Patent denique jam ingressurae artes quae decentem
quamdam, atque hyalini pulveris respersione coloratam
velut mensola gestitantes. Illud quippe quod gerulae
detulerunt, abacus nuncupatur, res depingendis
designandisque opportuna formis. Quippe ubi vel lineares
ductus, vel circulares flexus, vel triangulares abraduntur
aufRACTUS. (Liber VI, De Geometria).*

*Sic abacum perstare jubet, sic tegmine glauco pandere
pulvereum formarum ductibus aequor. (Liber VII, De
Arithmetica).*

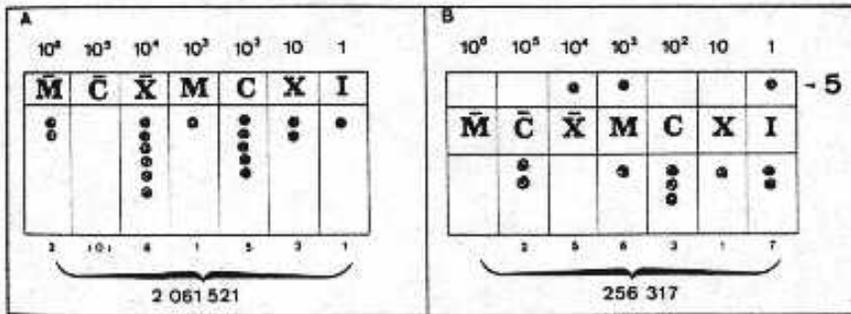


Fig. 2 – L'abaco romano a lapilli in due diverse versioni.

4 – L'abaco a lapilli

Successivamente i romani usarono un secondo tipo di abaco, l'abaco a lapilli (figura 2), costituito da una tavoletta rettangolare con scanalature parallele al lato minore, al di sopra delle quali erano impresse le lettere del sistema di numerazione romano, per indicare l'ordine delle unità al quale ciascuna scanalatura corrispondeva. Cominciando da destra, la prima scanalatura era quella delle unità frazionarie (non sempre presente come in figura 2), la seconda era dedicata alle unità semplici e sopra di essa figurava il numerale I, la terza era dedicata alle decine e aveva sovrainpresso il numerale X, la quarta scanalatura era quella delle centinaia e aveva il corrispondente numerale C, e così via.

All'interno di ciascuna scanalatura, secondo i modelli di abaco che si susseguirono nel tempo, erano disposti tanti sassolini (*calculi*, da cui il termine calcolare) o dischetti (*abaculi*) o monetine (*denarii supputatorii*) quanti erano le unità di quell'ordine da rappresentare.

Se in corrispondenza di ciascuna scanalatura (figura 2), iniziando dalla prima a sinistra non vuota, si scrive il numerale romano corrispondente all'ordine delle unità della scanalatura tante volte quanti sono i *calculi* o *abaculi* in essa contenuti, si ottiene la rappresentazione scritta del numero indicato dall'abaco, secondo il sistema di numerazione additivo romano (vedi box di approfondimento). Il numero era, quindi, pensato come somma delle unità dei vari ordini.

Di tale abaco, utilizzato anche dai greci e dagli etruschi oltre che dai romani, esistono numerose citazioni nella letteratura classica (Polibio, Plutarco, Erodoto, Lisia, Orazio). Basti ricordare quella di Orazio, il quale nella satira I,6 descrive i fanciulli che si recano a scuola portando a tracolla la tavoletta e la cassetina contenente i *calculi*:

*Causa fuit pater bis, qui macro pauper agello
Noluit in Flavi ludum me mittere, magni
Quopueri magnis e centurionibus orti,
Laevo suspensi loculos tabulamque lacerto,
Ibant octonis referentes idibus aera.*

Come fossero eseguiti i calcoli con l'abaco a lapilli non è stato tramandato ed è perciò sostanzialmente sconosciuto, anche se sono state avanzate varie congetture. Ciò che è certo è che il suo uso doveva essere semplice e rapido, essendo usato dai ceti non colti e dai ragazzi a scuola, come ci racconta Orazio. Dell'abaco a lapilli sono pervenute fino a noi due testimonianze iconografiche: un'effigie incisa nella *gemma calculatoria* conservata al gabinetto delle medaglie della Biblioteca Nazionale di Parigi e un'altra scolpita in un sarcofago romano conservato al Museo Capitolino di Roma.

Nella *gemma calcolatoria* di Parigi è rappresentato un ragazzo seduto davanti a un tripode contenente i *calcoli* e che regge con la mano sinistra la tavola (Chabauillet: Catalogo n° 1898; Orioli, 1865). Nel sarcofago romano, invece, è rappresentato uno schiavo che tiene fra le mani una tavoletta con dei sassolini (*Del Museo Capitolino* tomo IV, tav. 20 Roma: Fulgoni, 1782).

L'uso dell'abaco a lapilli si protrasse fino all'inizio del sec. XVI, com'è testimoniato dallo scolio a *Beda il Venerabile* del Noviomago (*Scholia in Bedam: cap. De Indigitatione*):

Est et alia numero rum ratio per calculos, in tabula delineata, ductibus parallelispositos quae et ipsa vetus est, neque ab usu recessit: nisi quod loco calculorum, nummie nunc utantur, atque hujus est et fuit usus in numerandis speciebus negotialibus.

5 - L'abaco a bottoni

In due lettere inviate a Giusto Lipsio, il 15 marzo 1593, e all'erudito tedesco Gioacchino Liebbard (detto Camerario), il 18 agosto dello stesso anno, Marco Velsero fornisce il disegno di un terzo tipo di abaco usato dai romani, detto *abaco a bottoni*, che essi appresero dai greci e perfezionarono (Velsero, 1682, pp. 820,842). Il suo uso venne meno già nel secolo XIV, vale a dire due secoli prima rispetto all'abbandono dell'abaco a lapilli, probabilmente per la ragione che essendo più complicato di quello a lapilli, era utilizzato soprattutto dai ceti più abbienti, i quali vennero per primi a conoscenza sia del nuovo abaco a colonne sia del nuovo sistema posizionale di numerazione scritta.

Quest'ultimo utilizzava le cifre indiane, diffuse nell'Occidente europeo nel secolo XIII principalmente per opera di Leonardo Pisano detto Fibonacci, che nel suo celeberrimo *Liber Abaci* (1202) non solo illustrò il nuovo sistema, ma espose anche, utilizzandolo, tutta l'aritmetica elementare allora nota. Probabilmente, la diffusione in Europa del sistema posizionale e delle cifre indo-arabiche avvenne gradualmente attraverso gl'intensi contatti commerciali dei ricchi mercanti italiani con il mondo orientale, particolarmente fiorenti nel Basso Medioevo (secoli XI-XIII). Tali mercanti conoscevano, per motivi di contabilità commerciale, il modo di calcolare basato sul principio di posizione e sulle cifre indiane, già in uso in oriente. In ogni caso, si tenga presente che nel 1156 appariva nel mondo occidentale la prima traduzione in latino, con il titolo *Liber algorismi de numero indorum*, dell'opera scritta negli anni 800-825 dal matematico arabo Mohammed Ben Musa detto Al Khovarizmi, nella quale è illustrato il sistema di numerazione posizionale usato dagli indiani già dal secolo V. Tuttavia, il merito della diffusione di tale sistema in Occidente è dovuto soprattutto al *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, che ebbe gran diffusione e influenza in Europa.

Quanto fosse difficile il calcolo strumentale con gli abachi è testimoniato da vari racconti. Nei secoli XIV e XV pare che chi fosse interessato ad apprendere l'arte del calcolo dovesse rivolgersi alle università tedesche o francesi per le operazioni più semplici (addizioni e sottrazioni), ma a quelle italiane, allora più all'avanguardia, per le operazioni più complesse (moltiplicazioni e divisioni).

Sistema di numerazione scritta romano

Nel sistema di numerazione additivo, un numero è ottenuto per somma dei numeri indicati da opportuni simboli, i quali hanno il medesimo valore quale che sia la loro collocazione all'interno della rappresentazione dell'intero numero. Il sistema di numerazione degli antichi romani è un misto fra sistema additivo, sottrattivo e moltiplicativo, cioè è additivo in senso lato, in quanto sottrazioni e moltiplicazioni sono riconducibili a addizioni. Per esempio, il numero 43 è rappresentato con il numerale XLIII, in cui i simboli X, L e I rappresentano rispettivamente dieci, cinquanta e uno. Nella prima parte del numerale è fatta la sottrazione fra cinquanta e dieci (XL), mentre nella seconda parte si somma tre volte l'unità (III). La regola per stabilire se si deve sommare o sottrarre è semplice: una cifra si somma alla successiva se questa è minore, mentre si sottrae dalla successiva se questa è maggiore. Inoltre, per rappresentare il numero novemila, per esempio, i romani usavano il numerale IXM, che rappresenta il numero in questione come prodotto fra nove (IX) e mille (M). Altro carattere spurio del sistema di numerazione romano era costituito dalla base del sistema: dieci (base primaria) e cinque (base ausiliaria) per la parte intera, dodici per la parte frazionaria del numero (l'unità semplice *axis* era divisa in dodici *once*). Infatti, oltre i numerali per i gruppi di potenze di dieci i romani usavano anche numerali particolari per rappresentare raggruppamenti di unità in base cinque: V per cinque, L per cinquanta, D per cinquecento.

Infatti, un'operazione che un bambino oggi eseguirebbe in pochi minuti richiedeva allora, da parte di un adulto, ore e ore di applicazione! (Ifrah, 1989, pp. 276-277).

Nel 1853, un illustre archeologo, il padre gesuita Raffaele Garrucci, studiando una raccolta di antichi bronzi di proprietà di Carlo Bonichi, trovò un esemplare di abaco a bottoni (figure 3a e 3b), realizzato in un formato che oggi definiremmo "tascabile", conservato al Museo Kircheriano (Garrucci, 1853). Si tratta di una lamina di bronzo, di 11.5 cm x 9.4 cm, recante nove scanalature inferiori parallele al lato minore e otto superiori divise da una linea orizzontale (figure 3a e 3b).

Ciascuna scanalatura (o alveolo) della parte inferiore contiene quattro bottoni a forma di piccoli chiodi ribattuti nella parte posteriore (*claviculi umbellati o aerae*), ad eccezione della seconda (dedicata alle once) che ne ha cinque. Iniziando da destra, la prima scanalatura, priva della parte superiore, è divisa in tre parti, dedicate alle unità frazionarie romane: *semuncia*=1/2 *uncia*, *sicilicus*=1/4 *uncia*, *sextula*= 1/6 *uncia*. La seconda scanalatura è riservata all'unità frazionaria *uncia* = 1/12 *axis*.

Le scanalature dalla terza alla nona si riferiscono alla parte intera del numero: unità semplici I (*axis*), decine X, centinaia C, migliaia (I), decine di migliaia ((I)), centinaia di migliaia (((I))), milioni |M|.³

³ Gli ultimi quattro numerali indicati sono quelli arcaici sostituiti successivamente dai simboli M X C M. Le linee orizzontali indicano che il numero deve essere moltiplicato per 1000 (vedi fig. 2).

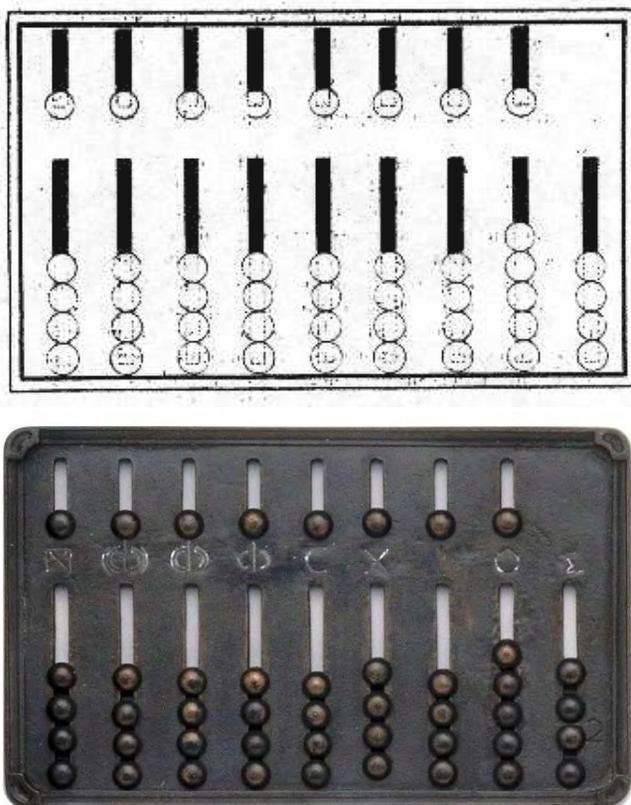


Fig. 3a - Disegno dell'abaco a bottoni rinvenuto da Raffaele Garrucci fra i bronzi di Carlo Bonichi. In Raffaele Garrucci, "Notizia di una tavoletta calcolatoria romana", «*Bullettino Archeologico Napolitano*», Nuova serie, anno II, Dicembre 1853, pagg. 93-96.

Fig. 3b - Modello in bronzo dell'abaco a bottoni rinvenuto da R. Garrucci.

Le scanalature superiori, invece, hanno ciascuna un solo bottone, che vale il numero di bottoni della scanalatura inferiore maggiorato di uno: cinque bottoni per gli alveoli della parte intera (dal terzo al nono), sei bottoni per l'alveolo delle once (il secondo).

6 - L'abaco a gettoni o Mensa Pythagorea

L'osservazione attenta dell'abaco e l'applicazione ad esso del principio di economia possono spiegare in quale modo, probabilmente, avvenne il passaggio dall'antico abaco romano alla sua versione medioevale l'*abaco a colonne o a gettoni*, che nelle sue successive varianti risultò uno strumento di calcolo in perfetta sintonia con il sistema posizionale di numerazione scritta, tanto da perdere la sua ragion d'essere e scomparire gradualmente dall'uso.

L'abaco antico, nelle sue varie forme costruttive esaminate, conteneva, infatti, già l'idea del valore posizionale delle cifre, in quanto ogni scanalatura era dedicata a un ordine di unità e quindi determinava il 'peso' dei *calcoli* in essa contenuti. Per esempio, tre sassolini entro la scanalatura delle unità semplici hanno il valore di tre unità semplici, mentre se contenuti nella scanalatura delle centinaia hanno il valore di tre centinaia, e così via. La rappresentazione strumentale dei numeri fornita dall'abaco era, quindi, posizionale, mentre quella scritturale, tramite i numerali, era additiva.

Il sistema utilizzato per numerare si basava, già da tempi remoti, sulla possibilità di pensare un numero come somma delle sue unità semplici, raggruppate in gruppi di potenze della base del sistema di numerazione adottato. Nel sistema di numerazione decimale, pertanto, i successivi gruppi contengono tante unità semplici quante ne indicano le successive potenze naturali della base 'dieci': $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, 10^nunità. Come è noto, tali gruppi sono considerati essi stessi 'unità complesse', rispettivamente del primo ordine o semplici, del secondo ordine o decine, del terzo ordine o centinaia, del quarto ordine o migliaia, e così

via. In tal modo, nel sistema decimale, dieci unità di un certo ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore. Per rappresentare un numero si può ricorrere a simboli, che possono essere sia oggetti sia segni scritti.

Nel caso della scelta di simboli-oggetto, si ha l'abaco nelle sue varie forme e la rappresentazione strumentale dei numeri. Per rappresentare le unità semplici si usano simboli-oggetto tutti uguali fra loro (per esempio i *calculi*) in quantità pari al numero massimo di unità ammissibile per ogni ordine (nove nel sistema decimale), oppure in quantità minore, se si conviene di assegnare ad alcuni di essi un valore diverso, come avviene in diverse varianti sia dell'abaco a lapilli sia dell'abaco a bottoni (ove il bottone superiore vale il numero di bottoni inferiori più uno). La distinzione dei vari ordini di unità è affidata alla diversa posizione delle scanalature in seno all'abaco.

Nel caso, invece, di simboli-scritti (cifre), si ottiene un sistema di numerazione scritta e la rappresentazione scritturale dei numeri tramite numerali.

In tal caso sarebbe necessario un doppio sistema di simboli: un insieme infinito di simboli per le infinite 'unità complesse' e un insieme finito di simboli per rappresentare il numero finito delle 'unità semplici' (nove nel sistema di numerazione decimale). Il principio di economia applicato all'antico abaco romano portò a utilizzare simboli scritti al posto dei sassolini o dei bottoni ponendo dentro ciascuna scanalatura un gettone con impressa la cifra che ne indica il numero.

Nell'esempio dell'abaco a colonne di figura 4, al posto di sette sassolini (o bottoni) che dovrebbero essere posti nella colonna delle decine si utilizza un solo simbolo-segno: la cifra

7. In cima ad ogni colonna continua, inoltre, a comparire la cifra dell'ordine di unità cui la colonna è dedicata.

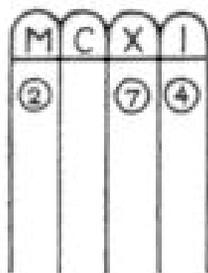


Fig. 4 – L'abaco medioevale a colonne o a gettoni detto anche *abaco di Boezio*. Fu detto anche erroneamente *Mensa Pythagorea*. Per maggiore chiarezza i gettoni riportano le attuali cifre indo-arabe e non gli apici di Boezio originali (vedi figura 6).

Il termine gettone deriva dal latino *iacere* che significa gettare. Infatti, i *calculi* erano gettati entro le scanalature: il gettone sostituì così di nome e di fatto l'operazione del 'gettare i sassolini', soppressa nel nuovo *abaco a colonne* o *a gettoni*, detto anche *abaco di Boezio* in quanto descritto verso la fine del primo libro dell'*Ars Geometrica*, attribuita da alcuni al console romano Manlio Torquato Severino Boezio (480-526), per il fatto che negli antichi manoscritti essa si trova assieme all'opera *De Institutione Arithmetica*, da lui compilata come rifacimento dell'*Introduzione Aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I secolo d.C).⁴

⁴ Manlio Torquato Severino Boezio (Roma 475 circa - Pavia 524 circa) apparteneva a una antica nobile famiglia, i cui membri avevano ricoperto importanti cariche nell'Impero Romano. Anche i due figli, Boezio e Simmaco, proseguirono la tradizione di famiglia di ricoprire ruoli statali prestigiosi diventando entrambi consoli nel 522. Boezio studiò alla Scuola

Le cifre impresse sui gettoni, che inizialmente non comprendevano ancora lo zero,⁵ furono chiamate *apici* da

di Atene, dove si insegnavano soprattutto Aristotele e Platone. Intorno al 502 si fa risalire l'inizio della sua attività letteraria e filosofica: scrisse i trattati del quadrivio (le quattro scienze fondamentali del tempo: aritmetica, geometria, astronomia e musica): *De institutione arithmetica*, *De institutione musica*, *De institutione geometrica* e *De institutione astronomica* (gli ultimi due perduti). La fama della sua grande erudizione si diffuse nell'Impero Romano d'Oriente e gli valse l'innalzamento a rango di *patricius* nel 507 e nel 510 la nomina a console *sine collega* da parte di Teodorico, carica biennale che gli diede diritto a un seggio permanente nel Senato Romano. Tradusse in latino e commentò molte opere di Aristotele, scrisse vari libri di filosofia e di teologia. Nel 522 fu nominato *magister officiorum*, alta carica nella burocrazia imperiale, molto vicina all'imperatore e dotata di vasti poteri, di cui Boezio si valse a favore di varie giuste cause. Fra queste, la difesa da un processo ingiusto dell'ex console Albino, accusato di complottare contro Teodorico. Fu proprio la difesa di Albino che causò la caduta in disgrazia di Boezio, che fu accusato in base ad alcune sue lettere forse falsificate, di avere sostenuto la necessità di «restaurare la libertà di Roma». Nel settembre 524 Boezio fu incarcerato a Pavia, con l'accusa di praticare arti magiche e in prigione scrisse la sua opera più famosa, il *De consolatione philosophiae*. Fu processato e nell'estate del 525 fu condannato a morte. La sentenza venne ratificata da Teodorico stesso ed eseguita nell'*Ager Calventianus*, una imprecisata località vicino Pavia, ove avvenivano le sentenze capitali.

⁵ L'utilizzo dell'abaco da parte degli "abacisti" non richiedeva l'uso dello zero per indicare una quantità mancante: bastava non mettere nulla nella colonna dell'ordine corrispondente. La necessità dell'uso dello zero fu avvertita più tardi dagli "algoristi", cioè da coloro che sostituirono l'abaco con il calcolo scritto "all'indiana" (algorismo) così detto perché faceva uso del sistema decimale posizionale e delle sue cifre, di origine indiana. *Abacus* è il termine latino con cui si designava l'abaco, mentre *abbacus* (con due b) è il termine latino con cui in Italia dal secolo XIII in poi ci si riferiva al calcolo (algorismo) basato sul sistema di numerazione scritta decimale e posizionale di origine indo-araba. Per tale motivo i due termini abaco e

Boezio stesso (figura 5) e *figure d'abaco* successivamente ed erano molto somiglianti alle cifre arabe dette *ghobar* (figura 6) diffuse dagli arabi occidentali della Spagna. Gli apici di Boezio subirono molte varianti dovute alla fantasia dei copisti, che arrivarono a ruotare sul fianco e persino a riprodurre soltanto una parte degli archetipi originali. Soltanto dopo il XIII-XIV secolo essi cominciarono a stabilizzarsi in forme molto somiglianti a quelle delle nostre cifre attuali (figure 7, 8).

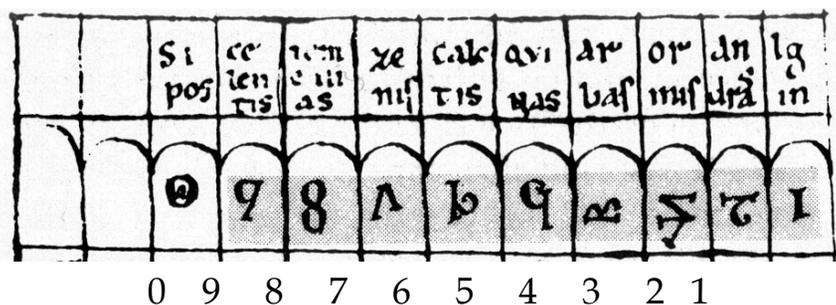


Fig. 5 – Gli apici di Boezio in un manoscritto latino dell’XI secolo. Qui compare lo zero. In alto i loro nomi nell’ordine da 0 a 9: *Sipos*, *Celentis*, *Temenias*, *Zenis*, *Caltis*, *Quimas*, *Arbas*, *Ormis*, *Andras*, *Igin*. L’origine e il significato di tali nomi (escluso *Quinas* di origine latina) sono ancora ignoti.

Tale somiglianza ha fatto sospettare ad alcuni studiosi che le origini del sistema di numerazione scritturale decimale potessero risalire ai romani del II secolo (Ginanni, 1753, pp. 19-110) o addirittura a Pitagora e alla sua scuola (Romagnosi,

algorismo sono stati utilizzati come sinonimi, mentre invece erano opposti i termini *abaco* e *algorismo*. Sulle differenze fra i termini *abacus* e *abbacus* vedasi Keith Devlin (Devlin, 2012, pp. 21-22).

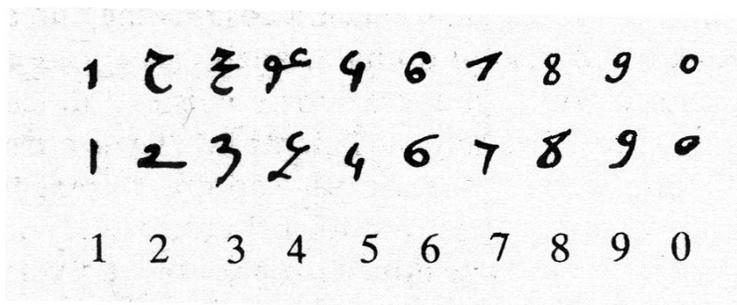


Fig. 6 – Cifre 'indo-arabe' dette *ghobār*.

1827, pp. 580 e seg). La tesi di Francesco Ginanni ⁶ poggia sul fatto che in un codice antico compaiono numeri rappresentati da lettere romane unite a cifre simili alle nostre attuali (Ginanni, 1753, p. 94).

⁶ Francesco Ginanni (1716 -1766), di famiglia nobile, trascorse la fanciullezza in un vivace ambiente culturale scientifico e letterario che vantava illustri studiosi, laici ed ecclesiastici. Nella sua opera *Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscolarum origine* sostiene che le nostre attuali cifre sono nate in Italia e che furono usate già nel sec. II d.C. sotto l'impero di Marco Aurelio. Secondo M. Chasles, A. Humboldt, invece, sarebbero state inventate nella Scuola Pitagorica e i neo-pitagorici greci di Alessandria le avrebbero diffuse nella Roma imperiale, poi nel Vicino Oriente e in India tramite gli scambi commerciali. Da Roma il sistema di numerazione posizionale viene esportato in Spagna e nelle province romane dell'Africa settentrionale. Gli arabi lo apprendono durante le loro conquiste di queste province. Non esistono, però, documenti storici che attestino la conoscenza del sistema di numerazione posizionale da parte dei greci; al contrario le fonti storiche confermano l'uso da parte dei greci del periodo alessandrino della notazione numerica additiva simile a quella ebraica. (Ifrah, 1989, p.240). Se i matematici greci avessero veramente ideato il sistema di numerazione decimale posizionale, lo avrebbero applicato e certamente Aristotile ne avrebbe fatta menzione nelle sue opere, come osserva Andrea Stiattesi (Stiattesi, 1870, p. 396).

La tesi di Gian Domenico Romagnosi, invece, era giustificata in quanto il nuovo abaco a gettoni, dove gli apici compaiono, è indicato nell'*Ars Geometrica* con il nome di *Mensa Pythagorea*, perché attribuito ai neopitagorici della scuola alessandrina, cui apparteneva Boezio stesso. *Tavola Pitagorica* o *Arco Pitagorico*, furono poi i nomi in volgare con i quali fu battezzato il nuovo abaco a colonne, che ebbe particolare diffusione nelle scuole claustrali medievali spagnole, per opera del teologo e matematico francese Gerberto di Aurillac (940 o 950-1003 d.C.),⁷ divenuto papa col nome di Silvestro II nel 999. Lo stesso Boezio dà spiegazione del diverso 'peso' che gli *apici* hanno nelle diverse colonne dell'abaco, confermando il loro valore posizionale.

7 - Un errore di trascrizione

Secondo le moderne indagini filologiche, invece, sembra che l'*Ars Geometrica* non fosse di Boezio, bensì un'opera medievale risalente al secolo XI che raccoglie contributi di vari autori. La denominazione *Mensa Pythagorea* deriverebbe, in tal caso, dalla sua attribuzione ai tardo-neopitagorici medioevali e non ai neopitagorici della scuola alessandrina, seguaci diretti dell'antica scuola pitagorica.

⁷ Appassionato studioso entrò in contatto con la cultura araba nella Spagna islamica, assorbendone le conoscenze matematiche e astronomiche, che si prodigò di diffondere in Europa.

Su questa diversa attribuzione poggia la tesi di coloro che confutano le origini pitagoriche delle cifre decimali a favore dell'origine indiana.⁸

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XII secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XIII secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XIV secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
XV secolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
circa 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fig. 7 - Evoluzione della grafia delle cifre 'indo-arabe'.

⁸ Molti documenti storici attestano che le nostre attuali cifre, compreso lo zero, e la notazione decimale posizionale sono nate nella parte settentrionale dell'India nel V sec. d. C. (Bombelli, 1876 cap. IX "Se gli antichi popoli italici conoscessero la numerazione indiana, detta volgarmente araba" pp. 59-65). Gli indiani diffusero l'invenzione presso i «greci di Alessandria nell'epoca classica del Sincretismo. Da essi sarebbe passata ai Neo-Pitagorici (di cui è nota la propensione ad accogliere le idee bramini), l'ultimo dei quali è appunto Manlio Severino Boezio; da questo l'avrebbe appresa Gerberto, il quale, a sua volta, l'avrebbe diffusa in tutta l'Europa, non esclusa la Spagna; quivi gli arabi l'avrebbero trovata e se ne sarebbero impadroniti». (Loria, 1914, p. 806, si veda anche l'intero paragrafo "La pretesa origine pitagorica del sistema decimale" a pp. 800-807). Gli stessi arabi del Vicino Oriente chiamavano *hindi* le cifre da loro utilizzate, lasciando chiaramente trasparire le loro origini indiane.

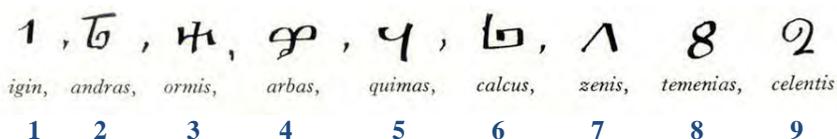


Fig. 8– Una variante degli apici di Boezio con i loro nomi.

Nel riprodurre successivamente il manoscritto dell' *Ars Geometrica* , il copista, per errore, sostituì l'abaco neopitagorico (figura 9) con la comune tavola di moltiplicazione, di aspetto assai simile, conservando però per quest'ultima il nome di Tavola Pitagorica che designava l'abaco neopitagorico.

Dunque, la tavola di moltiplicazione che tutti noi conosciamo come "tavola pitagorica" non deve il suo nome né a Pitagora né ad alcuno dei suoi seguaci, bensì soltanto a un errore di trascrizione. Tuttavia, ancor oggi si perpetua questo falso storico e si continua ad attribuire a Pitagora la paternità della tavola di moltiplicazione.

8 - Dall'abaco all'algorithmo

Il significato del nuovo abaco medioevale (*Mensa Pythagorea*) era mutato profondamente rispetto all'antico abaco romano, in quanto esso, oltre a fornire uno strumento di computazione, consentiva ormai di rappresentare un numero 'per mezzo di numerali', a meno dello zero, realizzando un notevole passo verso il trasferimento del principio di posizione dall'abaco alla rappresentazione scritta dei numeri.

Il passo successivo, nello spirito di una maggiore 'economia' nella rappresentazione dei numeri, sarebbe stato eliminare anche le scanalature (o colonne) sostituendole con

simboli scritti, in quanto esse, nell'*abaco a colonne*, servivano essenzialmente per rappresentare i diversi ordini delle unità, essendo venuta meno la loro funzione di 'contenitori' dei *calcoli* o dei bottoni. Utilizzando le cifre arabe, potremmo rappresentare, per esempio, il numero 2074 nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} 1000 \ 100 \ 10 \ 1 \\ 2 \ 0 \ 7 \ 4 \end{array}$$

cioè ponendo sotto al simbolo-segno (numerale) di ciascun ordine (1, 10, 100, 1000, ecc...), la cifra che indica il numero di unità di quell'ordine che contribuisce alla formazione del numero in questione.

Tale tipo di scrittura, che fu in uso fin da tempi antichissimi presso i cinesi,⁹ era moltiplicativa ma aveva in *nuce* il principio posizionale.¹⁰ Essa non è altro che la trasposizione in forma scritta dell'abaco: al posto delle scanalature ci sono le cifre 1, 10, 100, 1000, Che indicano i vari ordini di unità, e al posto dei *calcoli* ci sono le cifre che indicano le unità dei vari ordini che concorrono alla formazione del numero rappresentato, che si ottiene addizionando i prodotti parziali delle cifre incolonnate ($2 \times 1000 + 0 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \times 1$).

Spingendo ancora oltre il principio di economia, possiamo anche evitare di scrivere i simboli (di numero infinito) dei vari

⁹ Guglielmo Libri, *Histoire des sciences mathematiques en Italie*, 1, Paris, 1838, pp. 202-203.

¹⁰ Il principio posizionale della numerazione scritta fu noto ai babilonesi nel XX-IX sec. a.C., ai cinesi nel II sec. a.C. - II sec. d.C., e ai maya nel III-VI sec. d.C., ma nessuno di questi popoli lo seppe applicare compiutamente.

ordini di unità, essendo tali simboli superflui se si conviene di affidare alla posizione delle cifre, indicanti il numero di unità dei vari ordini che concorrono alla formazione del numero in questione, il compito di specificare l'ordine delle unità stesse. Si ha così, infine, il ben noto principio posizionale applicato alla numerazione scritta. È però necessario, a questo punto, introdurre un altro simbolo, lo zero, per indicare l'assenza di unità.

Nell'esempio precedente, fatta questa convenzione, basta, dunque, sopprimere la riga superiore delle cifre indicanti i vari ordini di unità, per ottenere la rappresentazione posizionale del numero come noi oggi la utilizziamo: 2074.

I cinesi, nella loro numerazione scritta, seguirono un percorso simile a quello tracciato; per esempio, dapprima scrivevano 23 in forma moltiplicativa e additiva nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} = 2 \\ + 10 \\ = 3 \end{array}$$

e poi, eliminando la cifra del 10:

$$\begin{array}{r} = 2 \\ = 3 \end{array}$$

In tal maniera, per rappresentare in forma scritta un numero, comunque grande esso sia, risultano sufficienti i simboli grafici delle unità semplici e dello zero, di numero

pari alla base del sistema di numerazione utilizzato (dieci nel sistema decimale).

In tal maniera, per rappresentare in forma scritta un numero, comunque grande esso sia, risultano sufficienti i simboli grafici delle unità semplici e dello zero, di numero pari alla base del sistema di numerazione utilizzato (dieci nel sistema decimale).

L'iter ipotizzato fu realmente realizzato, quando nell'abaco a colonne furono aboliti i gettoni e le cifre furono scritte direttamente sopra le colonne. Dunque, fu sempre più manifesta l'identificazione concettuale dell'*abaco a colonne* con l'*algoritmo* o *algorismo*,¹¹ termine con cui inizialmente era chiamato il sistema di numerazione scritta posizionale nei paesi latini, tant'è che i matematici italiani dei secoli XII e XIV usavano indifferentemente i termini abaco e algoritmo, per riferirsi al sistema numerico posizionale. Quest'ultimo, pertanto, rese obsoleto l'uso dell'abaco stesso, che era giustificato principalmente dalle difficoltà di eseguire i calcoli con il vecchio sistema di numerazione additivo. Infatti, il nuovo sistema di numerazione posizionale dava la possibilità sia di rappresentare i numeri con maggior economia di simboli, sia di semplificare i procedimenti del calcolo scritto, e pertanto vanificò il vantaggio dell'abaco, decretandone, in Europa, la definitiva scomparsa. Con l'identificazione fra abaco e algoritmo si avviava a conclusione la disputa fra abachisti e algoritmisti, vale a dire fra coloro che sostenevano i

¹¹ Il termine algoritmo deriva dalla latinizzazione di Al Khovarizmi, soprannome del matematico arabo Mohammed Ben Musa vissuto nel sec. IX, indicante la provincia persiana del Korassan da cui proveniva.

vantaggi del calcolare per mezzo dell'abaco oppure con il sistema di numerazione scritta (figura 10).

Tuttavia, non si pensi che il nuovo sistema numerico 'indiano' abbia avuto vita facile, tutt'altro: le "tavole per contare" (vale a dire gli abachi a gettone) continuarono a sopravvivere in Europa fino al XVIII secolo come è attestato dal loro uso ancora richiesto ai pubblici ufficiali dell'Amministrazione britannica (Ifrah, 1989, pp. 278, 290). Furono soprattutto i commercianti, i finanzieri, i banchieri e i funzionari statali a non abbandonare l'uso dell'abaco a gettoni, fin quando la Rivoluzione francese ne proibì l'uso. Evidentemente non si fidavano ancora dell'esattezza dei calcoli eseguiti "all'indiana".

Pythagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quendam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant; a posterioribus appellabatur abacus, ut quod alta mente conceperant, melius si quasi videndo ostenderent, in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.

Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim huiusmodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati 1, ista autem binario 6, tertia vero tribus 3, quarta vero 5 quaternario 4, haec autem quinque ascriberetur 5, ista autem senario 6, septima autem septenario conveniret 7, haec vero octo 8, ista autem novenario iungeretur 9. Quidam vero in huius formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut littera quae esset prima unitati, secunda binario, tertia ternario, ceteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in huiusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie ceu

Fig. 9 – La citazione della Mensa Pythagorea e degli apici nell'*Ars Geometrica* di Boezio. (*De Institutione Arithmetica* a cura di G. Friedlein, Lipsia, 1867, pp. 396, 397).

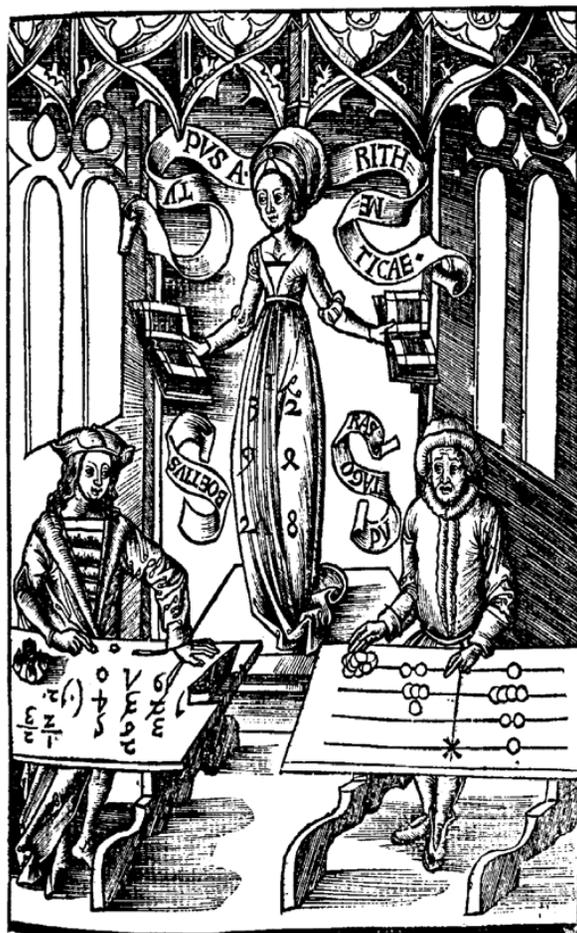


Fig. 10 - Un'immagine contenuta nell'opera Margarita Philosophica di Gregor Teisch (1503) che illustra in forma allegorica la diatriba fra abachisti (rappresentati da Pitagora) e algoritmisti (rappresentati da Boezio). Una figura femminile personifica l'Arithmetica e, dallo sguardo rivolto verso Boezio alla sua destra, si arguisce la preferenza data al calcolo tramite le nuove cifre indiane.

Bibliografia

BOEZIO Severino (1867). *De Institutione Arithmetica*, (a cura di G. Friedlein). Lipsia.

BOMBELLI Rocco (1876). *Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica*, 1, cap. IX "Se gli antichi popoli italici conoscessero la numerazione indiana, detta volgarmente araba" pp. 59-65) Roma.

BONCOMPAGNI Baldassarre (1877). «*Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*», 10° anno 1877.

BONCOMPAGNI Baldassarre (1881). «*Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*», 14° anno 1881.

CHASLES Michel (1843). «*Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris*», 16° e 17° anno 1843.

CHASLES Michel (1867). «*Comptes Rendus hebdomadaires des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris*», 64° anno 1867.

CHASLES Michel (1875). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Parigi: Gauthier - Villars.

DEVLIN Keith (2012). *I numeri magici di Fibonacci* (titolo originale: *The man of Numbers*), Bergamo: BUR Rizzoli.

ENESTROM Von Gustaf . (1894). «*Bibliotheca Mathematica*» (2) 8.

GARRUCCI Raffaele (1853). "Notizia di una tavoletta calcolatoria romana". «*Bullettino Archeologico Napolitano*», Nuova serie, anno II, Dicembre 1853, pp. 93-96.

GINANNI Francesco (1753). "Dissertatio mathematica critica de numeralium notarum minuscolarum origine". In: «*Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici*» a cura di Calogierà, Tomo 48, pp. 19-110, Venezia.

IFRAH Georges (1989). *Storia universale dei numeri*. Milano: Mondadori.

LIBRI Guglielmo (1839). "Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens". «*Journ. De Mathématiques*», T. IV, 1839.

LORIA Gino (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milano: Hoepli.

MANNERT Corrado (1801). *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica*. Norimberga.

NICOTRA Luca (2009). "La tavola pitagorica: un falso storico dimenticato". «*Alice&Bob*», n. 15, 2009, MatePristem Bocconi Springer-Verlag, Milano. La versione completa di approfondimenti è in <http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica>.

ORIOLI Francesco (1865). "Sopra uno specchio coi Dioscuri, e la gemma così detta calcolatoria esistente a Parigi". In «*Bullett. Istit. 1865*», pp. 152,157.

RANGABÉ Rizos Alessandro, VINCENT Louis-Hugues (1846). «*Revue archéologique*», p. 296 e 401.

ROMAGNOSI Gian Domenico (1827). «*Supplemento ed illustrazioni alla seconda parte delle Ricerche storiche sull'India di Robertson*». Tomo II, VI, Milano, Ferrario.

STIATTESI Andrea (1870). "Sull'Aritmetica. Dissertazione storica-critica". In: «*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*», Tomo III (novembre 1870).

TANNERY Paul (1897). «*L'Intermédiaire des Mathématiciens*», 4.

VANNUCCI Atto (1873). *Storia dell'Italia antica*. Volume Primo. Milano: Tipografia Editrice Lombarda.

VELSERO Marco (1682). "Epistolae ad Viros Illustres". *Opera Omnia*. Norimberga.

Insiemi del V ordine contenenti punti dello spazio

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.111

Sunto: *L'articolo introduce allo studio degli insiemi di punti materiali completi del V ordine posizionati nello spazio, ottenuti mediante l'unione di insiemi completi di ordine inferiore appartenenti alla retta e al piano. Le applicazioni vertono sia sulla relazione intercorrente fra le masse dell'insieme completo I e i volumi dei tetraedri i cui vertici sono quaterne di punti del relativo insieme di sostegno J sia sulla possibilità di trasformare insiemi completi mediante sostituzione di punti.*

Parole Chiave: Insiemi completi del V ordine propri e impropri. Il complementare di un insieme completo. Insiemi volumetrici.

Abstract: *The article introduces the study of sets of complete material points of the fifth order positioned in space, obtained by the union of complete sets of lower order belonging to the straight line and to the plane. The applications concern both the relationship between the masses of the complete set I and the volumes of the tetrahedrons whose vertices are quads of points of the relative support set J and the possibility of transforming complete sets by substituting points.*

Keywords: *Proper and improper V -order complete sets. The complement of a complete set. Volumetric sets.*

1 - Insiemi del I, II, III ordine. Il complementare

Richiamiamo brevemente le condizioni di completezza degli insiemi di punti materiali del I, II, III ordine citando teoremi noti contenuti nell'articolo *Insiemi completi del terzo ordine*, Periodico di Matematica, edizioni AFSU, giugno - dicembre 2019.

1. L'insieme di punti $J = (P)$, del primo ordine, contenente un unico elemento, è di sostegno al solo insieme completo improprio: $I = (0 P)$ (TH.1);
2. L'insieme di punti $J = (P, Q)$, del secondo ordine, è di sostegno al solo insieme completo improprio: $I = (0 \cdot P, 0 \cdot Q)$ (TH.2);
3. Essendo $J = (A, B, C)$ un insieme ternario di punti, si distinguono due casi:
 - a. se A, B, C sono punti allineati, J è di sostegno ad un insieme completo proprio: $I = (m A, s B, n C)$ con $m, s, n \in R^*$ (TH.3);
 - b. se A, B, C non sono punti allineati, J è di sostegno all'insieme completo improprio: $I = (0 \cdot A, 0 \cdot B, 0 \cdot C)$ (TH.6).

Con riferimento alla def. 7 e al TH.5 riscontrabili nell'articolo di cui sopra, introduciamo la seguente definizione:

Def. 1. Il punto materiale $x \cdot X$, essendo x la massa associata al punto X , è detto complementare dell'insieme binario $(m A, n B)$ se l'insieme ternario $I: (m A, n B, x X)$ è un insieme completo proprio.

Nota 1. Se $x \cdot X$ è il complementare di $(m A, n B)$ devono sussistere le condizioni di completezza di $I = (m A, n B, x \cdot X)$:

1. $m + n + x = 0$ da cui $x = -(m + n)$;
2. A, B, X devono essere punti allineati;
3. Deve risultare:

$$\left| \frac{d(A, B)}{x} \right| = \left| \frac{d(B, X)}{m} \right| = \left| \frac{d(X, A)}{n} \right| = K, \quad \text{con } K \in \mathbb{R}^*$$

Def. 2. Il punto materiale $y \cdot Y$, essendo y la massa associata al punto Y , è detto complementare dell'insieme ternario $(m A, n B, s C)$ se l'insieme quaternario $(m A, n B, s C, y \cdot Y)$ è un insieme completo, proprio.

Nota 2. Se $y \cdot Y$ è il complementare di $(m A, n B, s C)$ devono sussistere le condizioni di completezza di $I = (m A, n B, s C, y \cdot Y)$:

1. $m + n + s + y = 0$ da cui $y = -(m + n + s)$;
2. A, B, C, Y devono essere punti complanari;
3. Deve risultare:

$$\left| \frac{S_{BCY}}{m} \right| = \left| \frac{S_{ACY}}{n} \right| = \left| \frac{S_{ABY}}{s} \right| = \left| \frac{S_{ABC}}{y} \right| = K, \quad \text{con } K \in \mathbb{R}^*$$

essendo S_{XYZ} il simbolo con il quale rappresentare l'area del triangolo di vertici X, Y, Z .

2 - Definizione di punti esterni, punti interni

Def. 3. Sia $J_3 = (A, B, P)$ un insieme ternario di punti allineati. Il punto P è detto "punto interno di J_3 " se

appartiene al segmento $]A,B[$; in caso contrario è detto "punto esterno di J_3 ".

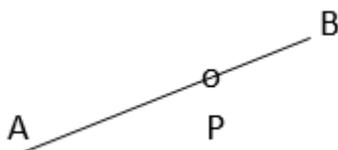


Fig. 1

Def. 4. Siano A, B, C tre punti non allineati. Il punto P dell'insieme $J_4 = (A, B, C, P)$ è detto "punto interno di J_4 " se appartiene al segmento $]X,Y[$ essendo X un vertice del triangolo $T(J_3)$, con $J_3 = (A, B, C)$, e Y un punto del lato opposto al vertice X . In caso contrario P è detto "esterno di J_3 ". Il punto P è detto "aderente a J_4 " se appartiene ad uno dei lati del triangolo $T(J_3)$.

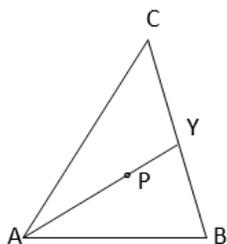


Fig. 2
Punto interno

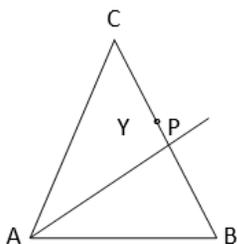


Fig. 3
Punto esterno

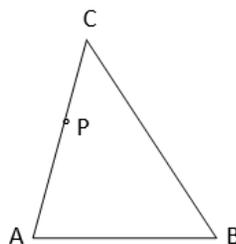


Fig. 4
Punto aderente

Def. 5. Sia J_5 un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Un piano π è detto interno a J_5 se entrambi i semispazi con origine π contengono punti di J_5 . Se uno dei due semispazi è vuoto il piano è detto esterno a J_5 .

Nota 3. Naturalmente un insieme del V ordine non contenente quaterne di punti non complanari non contiene neppure terne di punti allineati.

Def. 6. Se P è il solo punto di J_5 appartenente al semispazio S' con origine π , è detto "punto esterno di J_5 ". È il vertice del poliedro $P(J_5)$.

Def. 7. Un piano π , esterno all'insieme J_5 e contenente almeno un punto di questo insieme, è detto aderente a J_5 . Anche gli elementi esterni di J_5 , appartenenti ad un piano aderente a π , sono detti "punti aderenti al piano π ".

Def. 8. Sia J_5 un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Sia $J_3 = (A, B, C)$ un sottoinsieme ternario di punti di J_5 , aderenti al piano π . Chiamiamo faccia del poliedro $P(J_5)$, il triangolo $T(J_3)$. Diciamo "superficie del poliedro $P(J_5)$ ", l'insieme di tutte le facce di J_5 che indichiamo così: $S(J_5)$.

Def. 9. Sia Z un punto di J_5 , insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Diciamo che Z è punto interno di J_5 se è interno a (X, Y) essendo x un qualsiasi punto di J_5 e Y un punto interno ad un sottoinsieme ternario di J_5 , non contenente X

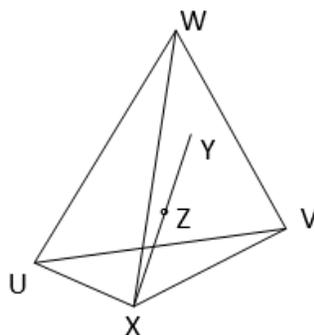


Fig. 5 - Il punto Z è interno al segmento] X Y [essendo X un vertice della piramide e Y un punto interno della faccia triangolare di vertici (U,V,W)

3 - Insiemi completi del V ordine dello spazio generati dall'unione di due insiemi del III e IV ordine completi

Nota 4. Siano $I_3 = (m_1 A_1, m_2 A_2, m_3 A_3)$, $I_4 = (n_1 B_1, n_2 B_2, n_3 B_3, n_4 B_4)$ due insiemi completi propri del terzo e quarto ordine; i relativi sostegni siano:

$J_3 = (A_1, A_2, A_3)$, $J_4 = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Gli elementi di J_4 appartengono al piano π , gli elementi di J_3 a r , retta intersecante π in un punto. Dall'unione di J_3 e J_4 si ottiene un insieme completo del settimo ordine di punti, non tutti complanari, appartenenti allo spazio S . Tuttavia, se i due insiemi, J_3 e J_4 , hanno un elemento in comune è possibile ricavare un insieme completo del quinto ordine contenente quaterne di punti materiali non complanari. Ipotizzando un punto in comune fra J_3 e J_4 , se J_4 ha un punto interno, si hanno i seguenti casi:

- a. Il punto interno A_j di J_3 coincide con il punto interno B_K di

J_4

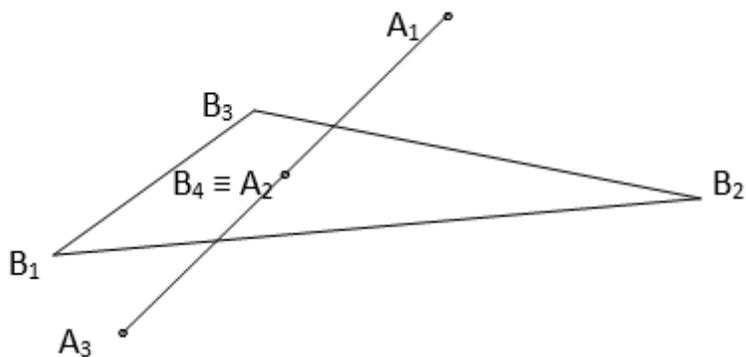


Fig. a - $A_i \equiv A_2$ e $B_k \equiv B_4$

b. Il punto esterno A_j di J_3 coincide con il punto interno B_k di J_4

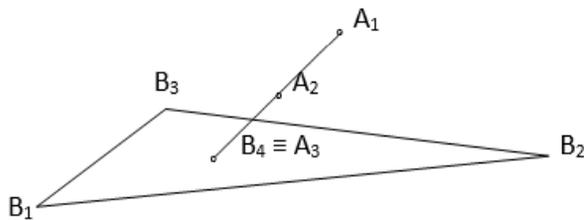


Fig. b - $A_i \equiv A_3$ e $B_k \equiv B_4$

c. Il punto interno A_i di J_3 coincide con il punto esterno B_k di J_4

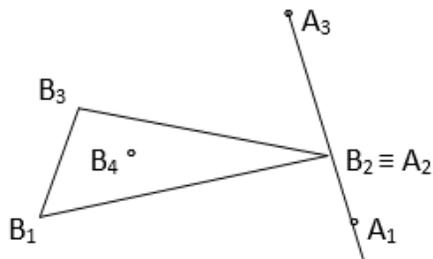


Fig. c - $A_i \equiv A_2$ e $B_k \equiv B_2$

- d. Il punto esterno A_i di J_3 coincide con il punto esterno B_k di J_4

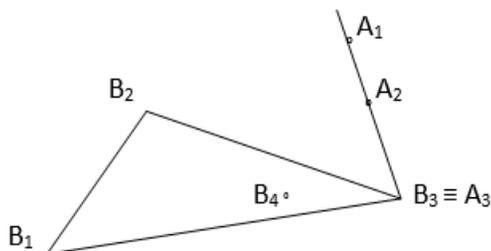


Fig. d - $A_i \equiv A_3$ e $B_k \equiv B_3$

Seguono due casi che si differenziano dai precedenti essendo J_4 un insieme di punti esterni:

- e. Il punto esterno A_j di J_3 coincide con il punto esterno B_K di J_4 essendo J_4 un insieme i cui punti sono tutti esterni

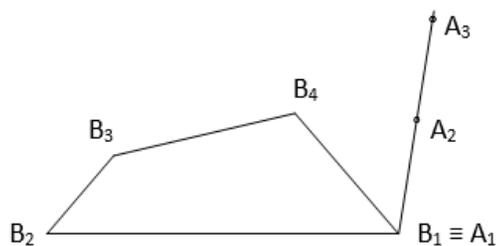


Fig. e - $A_i \equiv A_1$ e $B_K \equiv B_1$

- f. Il punto interno A_j di J_3 coincide con il punto esterno B_K di J_4

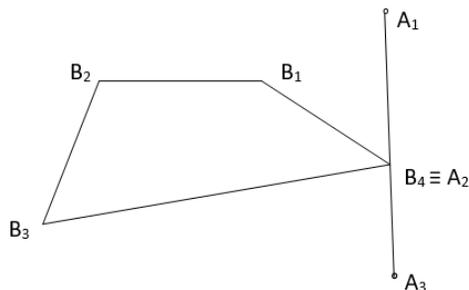


Fig. f - $A_i \equiv A_2$ e $B_K \equiv B_4$

Ricaviamo l'insieme completo del quinto ordine utilizzando le ipotesi contenute nel caso a).

Siano $J_3 = (A_1, A_2, A_3)$, $J_4 = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ i sostegni, rispettivamente, degli insiemi completi:

$$I_3 = (m_1 A_1, -m_2 A_2, m_3 A_3), I_4 = (n_1 B_1, n_2 B_2, n_3 B_3, -n_4 B_4)$$

Avendo posto, convenzionalmente, $m_i > 0$ e $n_j > 0$, il segno negativo dei punti materiali $-m_2 A_2$ e $-n_4 B_4$ indica la posizione interna dei punti A_2 e B_4 , rispettivamente, in J_3 e J_4 ¹

Nell'ipotesi che sia: $B_4 \equiv A_2$, come risulta in fig. a, è possibile ricavare due insiemi completi I'_3 e I'_4 equivalenti, rispettivamente, a I_3 e I_4 aventi un punto materiale opposto: moltiplicando I_3 e I_4 , rispettivamente, per n_4 e m_2 si ha: $I'_3 = n_4 \cdot I_3$ e $I'_4 = m_2 \cdot I_4$; sottraendo membro a membro, si ottiene l'insieme completo:

$$I' = I'_4 - I'_3 = m_2 \cdot I_4 - n_4 \cdot I_3. \text{ Sviluppando si ha:}$$

$$I' = (n_1 m_2 B_1, n_2 m_2 B_2, n_3 m_2 B_3, -n_4 m_2 B_4, -n_4 m_1 A_1, n_4 m_2 A_2, -n_4 m_3 A_3)$$

¹ Osservazione 1, pag. 209 e nota 10, pag 23, rispettivamente, delle riviste *Periodico di matematica* (giugno/dic 2019 e dicembre 2020).

Essendo opposti i punti materiali $-n_4 m_2 B_4$ e $n_4 m_2 A_2$, riducendo si ottiene:

$$I' = (n_1 m_2 B_1, n_2 m_2 B_2, n_3 m_2 B_3, -n_4 m_1 A_1, -n_4 m_3 A_3) \text{ da cui}$$

$$I' = (v_1 B_1, v_2 B_2, v_3 B_3, -v_4 A_1, -v_5 A_3)$$

avendo posto

$$v_1 = n_1 m_2, v_2 = n_2 m_2, v_3 = n_3 m_2, v_4 = n_4 m_1, v_5 = n_4 m_3.$$

Posto $B_1 = P_1, B_2 = P_2, B_3 = P_3, A_1 = P_4, A_3 = P_5$ si ottiene:

$$I' = (v_1 P_1, v_2 P_2, v_3 P_3, -v_4 P_4, -v_5 P_5)$$

Essendo $m_1 - m_2 + m_3 = 0$ e $n_1 + n_2 + n_3 - n_4 = 0$ segue che $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = 0$ considerando il caso b), nell'ipotesi che sia $B_4 \equiv A_3$, procedendo come sopra si ottiene il seguente insieme completo: $I'' = (v_1 P_1, v_2 P_2, v_3 P_3, -v_4 P_4, v_5 P_5)$.

Nota 5. Se si esaminassero i casi successivi: c), d), e), f), operando come sopra, si otterrebbero insiemi completi del V ordine analoghi a quello precedentemente ricavato. Tutti questi insiemi risulterebbero ripartiti in due classi:

1. gli insiemi completi contenenti due punti materiali negativi e tre positivi (o viceversa);
2. gli insiemi completi contenenti un punto materiale negativo e quattro positivi (o viceversa).

4 - Punti interni e punti esterni di insiemi completi del V ordine

TH.1 Sia I_5 un insieme completo proprio del V ordine con sostegno $J_5 = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ contenente quaterne di punti non complanari. Se $n_i A_i, n_K A_K$ sono elementi di segno concorde di $I_5 = (n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, n_4 A_4, n_5 A_5)$, allora, A_i, A_K sono punti esterni di J_5 .

Sia $-(n_1 + n_2)X$ il complementare di una coppia di punti materiali, $n_1 A_1, n_2 A_2$, che supponiamo scelta, in modo arbitrario, fra gli elementi di segno concorde di I_5 . L'insieme $I' = [n_1 A_1, -(n_1 + n_2)X, n_2 A_2]$ è completo così come l'unione $I'' = I_5 \cup [(-1)I']$; svolgendo si ha:

$$I'' = (n_3 A_3, n_4 A_4, n_5 A_5, (n_1 + n_2)X)$$

il cui sostegno è: $J'' = (A_3, A_4, A_5, X)$. Essendo l'insieme I'' completo, proprio, del IV ordine, [§ 1, 4)] i punti dell'insieme J'' devono essere complanari. Supponiamo appartengano al piano π .

Solo i punti A_1 e A_2 , separati dal punto X , per ipotesi non appartengono a π , ma ai due semispazi S^+ e S^- , con origine π , pertanto, per la def. 6, A_1 e A_2 sono punti esterni di J_5 .

TH.2 Sia I un insieme completo proprio del V ordine contenente quaterne di punti materiali non complanari. Se I contiene due elementi di segno concorde, discorde rispetto ai rimanenti elementi dell'insieme, allora, tutti i punti di J , sostegno di I , sono punti esterni.

Esplicitando i segni di I relativi al caso considerato, supponiamo sia: $I = (n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, -n_4 A_4, -n_5 A_5)$.

Tutti i punti materiali di I appartengono ad almeno una delle seguenti coppie contenenti elementi di segno concorde:

$(n_1 A_1, n_2 A_2), (n_1 A_1, n_3 A_3), (-n_4 A_4, -n_5 A_5), (n_2 A_2, n_3 A_3)$ pertanto, per il TH.1, tutti gli elementi di $J = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ sono punti esterni.

TH.3 Sia I un insieme completo, proprio, del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Se I contiene un punto materiale negativo e quattro positivi (o viceversa), il primo è punto interno di J , insieme di sostegno di I . I rimanenti sono tutti punti esterni di J .

Sia $I = (n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, n_4 A_4, -n_5 A_5)$, con $n_i > 0$, (1)
 l'insieme completo contenente quattro elementi di segno concorde posizionati in (A_1, A_2, A_3, A_4) che, in virtù del TH.1, sono tutti punti esterni di J . Scelta una qualsiasi coppia di punti materiali di I , contenente l'elemento negativo $-n_5 A_5$ e un qualsiasi punto materiale positivo, ad esempio la coppia: $(n_4 A_4, -n_5 A_5)$, risulta definito il relativo complementare $(n_5 - n_4) X$ e l'insieme completo:

$$I' = [n_4 A_4, -n_5 A_5, (n_5 - n_4) X] \quad (2)$$

Poiché la somma delle masse di (1) è:

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 = 0$, si ha: $n_5 - n_4 > 0$, $n_4 > 0$, $-n_5 < 0$, pertanto A_5 è punto interno della (2). Effettuando l'unione: $I \cup [(-1)I']$ si ottiene l'insieme completo

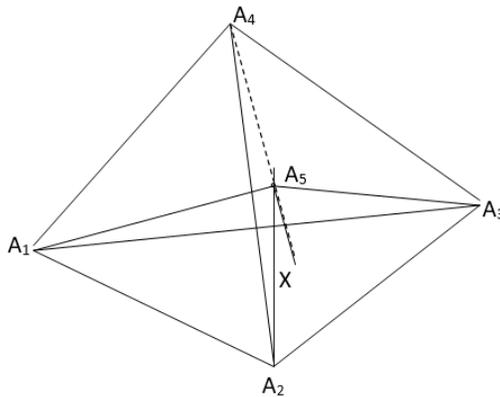


Fig. 6.

$$\begin{aligned}
 I'' &= [n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, n_4 A_4, -n_5 A_5, -n_4 A_4, n_5 A_5, -(n_5 - n_4)X] = \\
 &= [n_1 A_1, n_2 A_2, n_3 A_3, - (n_5 - n_4) X] \text{ il cui sostegno è } \\
 J'' &= [A_1, A_2, A_3, X].
 \end{aligned}$$

Poiché I'' è un insieme quaternario proprio, completo, e contiene un solo punto materiale negativo: $-(n_5 - n_4) X$, si ha:

1) A_1, A_2, A_3, X sono punti appartenenti allo stesso piano π ;

2) il punto materiale $-(n_5 - n_4)X$, di segno discorde rispetto ai rimanenti punti materiali di I'' , è posizionato internamente a J'' . Essendo A_4 un punto di I , X interno a J'' e A_5 interno a J' , per la def. 9, risulta che A_5 è interno a I .

Nota 6. Se $-3k \cdot X$ è il complementare di $H = (k \cdot A, k \cdot B, k \cdot C)$, diciamo che il punto X è il baricentro di H .

Applicazione 1. Sia $J = (A, B, C)$ un insieme ternario di punti appartenenti al piano π . Sia H il baricentro dei vertici del triangolo $T(J)$ e risulti: $d(A, B) = 10$, $d(B, C) = 4\sqrt{13}$, $d(A, C) = 2\sqrt{37}$. Siano M e N due punti allineati con H , appartenenti, rispettivamente, ai semispazi S^+ e S^- con origine π . Essendo $\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = \frac{1}{2}$ e sapendo che $d(A, N) = 2\sqrt{11}$, $d(B, N) = 2\sqrt{26}$, $d(C, N) = 2\sqrt{34}$, calcolare $d(M, N)$ e $d(M, B)$.

Essendo H il baricentro di $T(J_1)$, con $J_1 = (A, B, C, H)$, l'insieme $I_1 = (A, B, C, -3H)$ è completo. Essendo

$$\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = \frac{1}{2}, \text{ l'insieme } I_2 = (2M, -3H, N) \text{ è completo.}$$

Anche l'insieme $I = I_1 \cup (-I_2) = (A, B, C, -2M, -N)$ è completo.

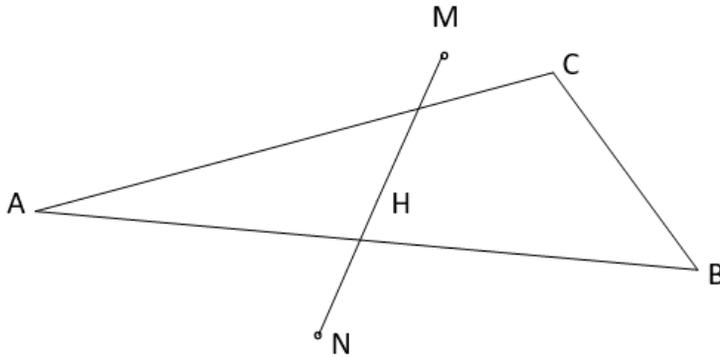


Fig. 7.

Applicando il TH.12 si ha:

$$(A, B, C, -2 M, -N, 2 M, -2 N)^2 = (2 M, -2 N)^2 \text{ da cui}$$

$$(A, B, C, -3 N)^2 = (2 M, -2 N)^2$$

Svolgendo si ha l'equazione:

$$[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 3 [d(A, N)]^2 + [d(B, C)]^2 - 3 [d(B, N)]^2 +$$

$$-3 [d(C, N)]^2 = -4 [d(M, N)]^2 \text{ la cui soluzione è:}$$

$$d(M, N) = 3\sqrt{11}.$$

Per calcolare $d(M, B)$ utilizziamo ancora il TH.12:

$$(A, B, C, -2 M, -N, 2 M, -2 B)^2 = (2 M, -2 B)^2$$

$$(A, -B, C, -N)^2 = (2 M, -2 B)^2$$

$$- [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - [d(A, N)]^2 - [d(B, C)]^2 + [d(B, N)]^2 +$$

$$- [d(C, N)]^2 = -4 [d(B, M)]^2 \text{ da cui } d(B, M) = \sqrt{59}.$$

Applicazione 2. Sia $J = (A, B, C, M, N)$ un insieme contenente quaterne di punti non complanari. Sia π il piano contenente (A, B, C) , origine dei semispazi S^+ e S^- contenenti, rispettivamente, M e N , punti appartenenti alla retta t intersecante π in H . Essendo $\frac{d(B, H)}{d(H, T)} = 2$ con T appartenente

ad $[A, C]$, soddisfacente la condizione: $\frac{d(A,T)}{d(T,C)} = \frac{3}{5}$, sapendo che $d(A, B) = 12$, $d(B, C) = 4\sqrt{5}$, $d(A,C) = 8\sqrt{25}$, $d(A,N) = \sqrt{30}$, $d(B, N) = 3\sqrt{6}$, $d(C, N) = \sqrt{62}$, $d(C, M) = \sqrt{32}$, calcolare $d(M, N)$, $d(A, M)$.

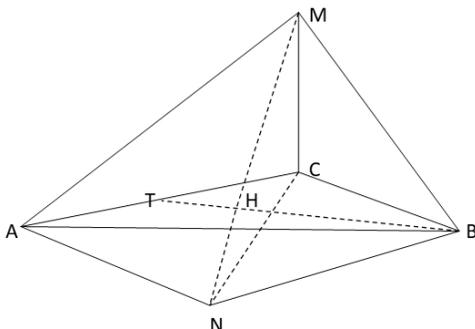


Fig. 8.

Un insieme completo con sostegno (B, H, T) è $I' = (B, -3H, 2T)$.

Un insieme completo con sostegno (A, T, C) è $I'' = (5A, -8T, 3C)$.

Mediante gli insiemi I' e I'' ricaviamo l'insieme completo con sostegno (A, B, C, H) :

$$I''' = [(4I') \cup I''] = (5A, 4B, 3C, -12H).$$

Attribuendo, in modo arbitrario, massa eguale a 12 ad H , indicando con x la massa incognita di M , l'insieme completo con sostegno (N, H, M) diviene:

$I^{IV} = [(x - 12)N, 12H, -xM]$. Dall'unione di I''' e I^{IV} si ottiene l'insieme completo: $I = [I''' \cup I^{IV}] = [(5A, 4B, 3C, -xM, (x - 2)N)]$.

Applicando il TH. 12 citato nella applicazione 1, si ha:

$$[I \cup (xM, -xC)]^2 = (xM, -xC)^2$$

$$\{[5 A, 4 B, 3 C, -x M, (x-12)N] \cup (x M, -x C)\}^2 =$$

$$= (x M, -x C)^2$$

$$[5 A, 4 B, (3-x) C, (x-12)N]^2 = (x M, -x C)^2.$$

Sviluppando:

$$20 [d(A, B)]^2 + 5(3-x) [d(A, C)]^2 + 5(x-12) [d(A, N)]^2 + 4(3-x) [d(B, C)]^2 + 4(x-12) [d(B, N)]^2 + (3-x)(x-12) [d(C, N)]^2 =$$

$$= -x^2 [d(M, C)]^2$$

$$5x^2 - 56x + 144 = 0 \text{ da cui } x_1 = 4, x_2 = \frac{36}{5}.$$

Corrispondentemente, sostituendo x_1, x_2 in I si ottengono i due insiemi:

$$I_1 = (5 A, 4 B, 3 C, -4 M, -8 N), I_2 = (25 A, 20 B, 15 C, -36 M, -24 N)$$

Per ricavare $d(M, N)$, $d(A, M)$, relativamente all'insieme I_1 , utilizziamo il TH. 12:

$$[I_1 \cup (4 M, -4 N)]^2 = (4 M, -4 N)^2$$

$$(5 A, 4 B, 3 C, -4 M, -8 N, 4 M, -4 N)^2 = (4 M, -4 N)^2$$

$$(5 A, 4 B, 3 C, -12 N)^2 = (4 M, -4 N)^2$$

$$20 [d(A, B)]^2 + 15 [d(A, C)]^2 - 60 [d(A, N)]^2 + 12 [d(B, C)]^2 +$$

$$- 48 [d(B, N)]^2 - 36 [d(C, N)]^2 = -16 [d(M, N)]^2 \text{ da cui}$$

$$d(M, N) = \sqrt{34}.$$

Analogamente, per ricavare $d(A, M)$ sviluppiamo l'equazione

$$[I_1 \cup (4 M, -4 A)]^2 = (4 M, -4 A)^2$$

$$(5 A, 4 B, 3 C, -4 M, -8 N, 4 M, -4 A)^2 = (4 M, -4 A)^2$$

$$(A, 4 B, 3 C, -8 N)^2 = (4 M, -4 A)^2$$

$$4 [d(A, B)]^2 + 3 [d(A, C)]^2 - 8 [d(A, N)]^2 + 12 [d(B, C)]^2 +$$

$$- 32 [d(B, N)]^2 - 24 [d(C, N)]^2 = -16 [d(M, A)]^2 \text{ da cui } d(M, A) =$$

$$4\sqrt{6}.$$

Operando in modo analogo, nel caso si consideri l'insieme completo I_2 , si calcolano $d(M, N)$, $d(A, M)$.

Nota 7. Nell'applicazione successiva si utilizza il metodo esposto nel § 3 per generare un insieme del VI ordine.

Applicazione 3. Due piramidi abbiano in comune la base triangolare i cui vertici, appartenenti al piano π , siano A, B, C . Siano M e N i vertici delle due piramidi, appartenenti, rispettivamente, ai due semispazi S^+ e S^- con origine π . Siano S e T due punti degli spigoli $[N, B]$ e $[M, C]$ e risulti:

$$\frac{d(B,S)}{d(S,N)} = \frac{3}{2}, \quad \frac{d(C,T)}{d(T,M)} = 1. \quad (3)$$

Essendo completo l'insieme $I = (8 A, 5B, 5 C, -10 M, -8 N)$ e sapendo che $d(A, B) = 10$, $d(B, C) = 4\sqrt{10}$, $d(A, C) = 6\sqrt{5}$, $d(A,N) = d(B, N) = d(C, N) = 5\sqrt{3}$, trovare $d(S,T)$.

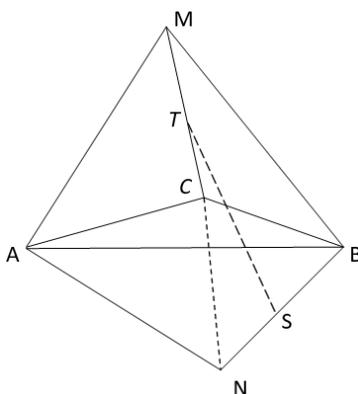


Fig. 9

Dalla (3) si ricavano i due insiemi completi

$$I' = (C, -2T, M) \text{ e } I'' = (2 B, -5 S, 3 N).$$

Dall'unione di I e $(10 I')$, equivalente ad I' , si ha:

$$\begin{aligned} I''' &= I \cup (10 \cdot I') = (8 A, 5B, 5 C, -10 M, -8 N, 10C, -20T, 10 M) \\ &= (8 A, 5 B, 15 C, -8 N, -20T). \end{aligned}$$

(l'insieme I'' è completo e non contiene M). Dall'unione di I''' e $[(-4)I'']$, si ottiene l'insieme del VI ordine:

$$I^V = I''' \cup [(-4)I''] = (8A, 5B, 15C, -8N, -20T, -8B, 20S, -12N) = (8A, -3B, 15C, -20N, -20T, 20S).$$

L'insieme completo I^V così ottenuto contiene i due punti materiali: $-20T, 20S$ aventi masse opposte. Dovendo calcolare $d(T, S)$, applichiamo il TH.12, citato nella nota 1:

$$\begin{aligned} [I^V - (20S, -20T)]^2 &= (20S, -20T)^2 \text{ da cui} \\ (8A, -3B, 15C, -20N)^2 &= (20S, -20T)^2 \\ -24[d(A, B)]^2 + 120[d(A, C)]^2 - 160[d(A, N)]^2 - 45[d(B, C)]^2 + \\ +60[d(B, N)]^2 - 300[d(C, N)]^2 &= -400[d(S, T)]^2 \text{ da cui:} \\ [d(S, T)]^2 &= 45, d(S, T) = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

5 - Relazione fra masse di punti in un insieme completo e volumi

Nota 8. Nella nota 2 del §.1 del Periodico di Matematica del settembre 2021, Ed. AFSU, venivano introdotti i simboli S_{ABC} e S_{ABCD} per indicare l'area di triangoli e quadrilateri. Dovendo trattare, nei paragrafi successivi, solidi geometrici, conveniamo di introdurre simboli analoghi. Per rappresentare il volume di un tetraedro di vertici (A, B, C, D) , scriviamo: V_{ABCD} .

TH. 4. Sia $J' = (A, B, C, H)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π , con H interno a J' . Sia r la retta intersecante il piano π in H , contenente i punti M e N , con H interno a $J'' = (M, H, N)$.

L'insieme $J = (A, B, C, M, N)$ è di sostegno all'insieme completo:

$$I = (V_{BCMN} \cdot A, V_{ACMN} \cdot B, V_{ABMN} \cdot C, -V_{ABCN} \cdot M, -V_{ABCM} \cdot N).$$

Ciascuna massa, associata ad un punto $X \in J$, è il volume del tetraedro i cui vertici sono quaterne di punti di J non contenenti X .

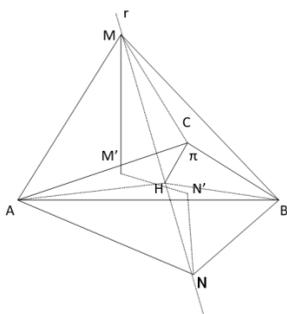


Fig. 10

L'insieme $J' = (A, B, C, H)$ è di sostegno all'insieme completo:

$$I' = (S_{BCH} \cdot A, S_{ACH} \cdot B, S_{ABH} \cdot C, -S_{ABC} \cdot H)$$

essendo la massa di un punto $X \in J'$ eguale all'area del triangolo i cui vertici sono la terna di punti di J' non contenente X . Siano M', N' le proiezioni ortogonali di M e N su π . L'insieme $J'' = (M, H, N)$ è di sostegno all'insieme completo

$$[d(N, H) \cdot M, -d(N, M) \cdot H, d(M, H) \cdot N] \tag{4}$$

Posto $d(M, M') = h_1, d(N, N') = h_2, d(N, M) = h_1 + h_2 = h_0$, essendo simili i triangoli $T(M, M', H)$, $T(N, N', H)$, si ha:
 $d(M, H) = K h_1, d(N, H) = K h_2, d(N, M) = K(h_1 + h_2) = K h_0$,
 con $K \in R^+$ (5)

Sostituendo le (5) nella (4), dividendo per K , si ha:

$$I'' = [h_2 M, -h_0 H, h_1 N]$$

Moltiplicando I' per $\frac{1}{3} h_0$ e I'' per $\frac{1}{3} S_{ABC}$ e sottraendo al primo prodotto il secondo:

$[\frac{1}{3} h_0 (I')] \cup [\frac{1}{3} S_{ABC} (-I'')]$ si ha:

$$[\frac{1}{3} h_0 S_{BCH} A, \frac{1}{3} h_0 S_{ACH} B, \frac{1}{3} h_0 S_{ABH} C, -\frac{1}{3} h_0 S_{ABC} H, -\frac{1}{3} h_2 S_{ABC} M, \frac{1}{3} h_0 S_{ABC} H, -\frac{1}{3} h_1 S_{ABC}]$$

Riducendo l'insieme diviene:

$$[\frac{1}{3} h_0 S_{BCH} A, \frac{1}{3} h_0 S_{ACH} B, \frac{1}{3} h_0 S_{ABH} C, -\frac{1}{3} h_2 S_{ABC} M, -\frac{1}{3} h_1 S_{ABC} N] \quad (6)$$

Poiché si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} h_0 S_{BCH} &= V_{BCMN}, \frac{1}{3} h_0 S_{ACH} = V_{ACMN}, \frac{1}{3} h_0 S_{ABH} = V_{ABMN}, \frac{1}{3} h_2 S_{ABC} = \\ &= V_{ABCN}, \frac{1}{3} h_1 S_{ABC} = V_{ABCM}, \end{aligned}$$

sostituendo nella (6) si ottiene la tesi.

Nota 9. Nell'ipotesi che H risulti punto esterno di $J' = (N, M, H)$, procedendo come sopra, si ottengono risultati analoghi.

TH. 5. Sia $J' = (A, B, C, H)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π , con H interno a J' . Sia r la retta intersecante il piano π in H contenente i punti M e N , con M interno a $J'' = (M, H, N)$.
L'insieme

$J = (A, B, C, M, N)$ è di sostegno all'insieme completo:

$$I = (V_{BCMN} \cdot A, V_{ACMN} \cdot B, V_{ABMN} \cdot C, V_{ABCM} \cdot N, -V_{ABCN} \cdot M).$$

Ciascuna massa, associata ad un punto $X \in J$, è il volume del tetraedro i cui vertici sono quaterne di punti di J non contenenti X .

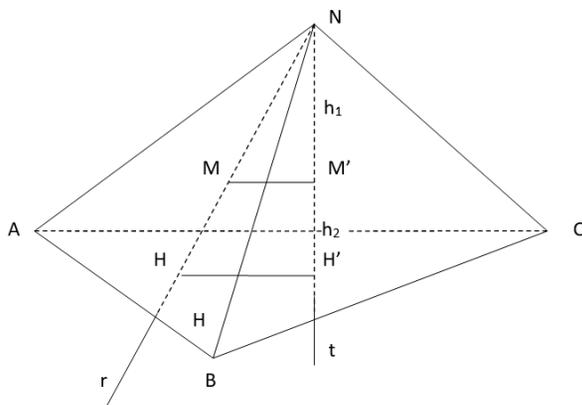


Fig. 11

L'insieme $J' = (A, B, C, H)$ è di sostegno all'insieme completo

$$I' = (S_{BCH} \cdot A, S_{ACH} \cdot B, S_{ABH} \cdot C, -S_{ABC} \cdot H). \quad (7)$$

L'insieme $J'' = (M, N, H)$ è di sostegno all'insieme completo

$$[d(M, H) \cdot N, -d(N, H) \cdot M, d(N, M) \cdot H] \quad (8)$$

Sia H' la proiezione ortogonale di N su π . Sia t la retta passante per N e H' .

Sia M' la proiezione ortogonale di M su t . Posto:

$d(N, M') = h_1$, $d(M', H') = h_2$, $d(N, H') = h_1 + h_2 = h_0$, dalla similitudine dei triangoli $T(N, M, M')$ e $T(N, H, H')$, si ha:

$$\begin{aligned} d(N, M) &= K \cdot d(N, M') = K h_1, & d(M, H) &= K \cdot d(M', H') = K h_2, \\ d(N, H) &= K \cdot (h_1 + h_2) = K h_0 \text{ con } K \in R^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Sostituendo le (9) nella (8) e dividendo per K si ha:

$$I'' = (h_2 N, -h_0 M, h_1 H) \quad (10)$$

Moltiplicando la (7) per $\frac{1}{3} h_1$ e la (10) per $\frac{1}{3} S_{ABC}$, effettuando l'unione dei due insiemi così ottenuti, si ha:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} h_1 I' \right] \cup \left[\frac{1}{3} S_{ABC} I'' \right] = \\ & = \left[\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} \cdot A, \frac{1}{3} h_1 S_{ACH} \cdot B, \frac{1}{3} h_1 S_{ABH} \cdot C, -\frac{1}{3} h_1 S_{ABC} \cdot H, \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{3} h_2 S_{ABC} \cdot N, -\frac{1}{3} h_0 S_{ABC} \cdot M, \frac{1}{3} h_1 S_{ABC} \cdot H \right]. \end{aligned}$$

Riducendo si ha:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} \cdot A, \frac{1}{3} h_1 S_{ACH} \cdot B, \frac{1}{3} h_1 S_{ABH} \cdot C, \frac{1}{3} h_2 S_{ABC} \cdot N, \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{3} h_0 S_{ABC} \cdot M \right] \quad (11) \end{aligned}$$

Il volume del tetraedro V_{BCHN} può essere così sviluppato:

$$V_{BCHN} = \frac{1}{3} h_0 S_{BCH} = \frac{1}{3} h_1 S_{BCH} + \frac{1}{3} h_2 S_{BCH} = \frac{1}{3} h_1 S_{BCH} + V_{BCHM}$$

da cui

$$\frac{1}{3} h_1 S_{BCH} = V_{BCHN} - V_{BCHM} = V_{BCMN}$$

Procedendo in modo analogo possiamo disporre delle seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} V_{BCMN} &= \frac{1}{3} h_1 S_{BCH}, \quad V_{CAMN} = \frac{1}{3} h_1 S_{ACH}, \quad V_{ABMN} = \frac{1}{3} h_1 S_{ABH}, \\ V_{ABCM} &= \frac{1}{3} h_2 S_{ABC}, \quad V_{ABCN} = \frac{1}{3} h_0 S_{ABC}. \end{aligned} \quad (12)$$

Sostituendo le (12) nella (11) si ha:

$$I = (V_{BCMN} \cdot A, V_{ACMN} \cdot B, V_{ABMN} \cdot C, V_{ABCM} \cdot N, -V_{ABCN} \cdot M).$$

Nota 10. Nell'ipotesi che H risulti punto esterno di $J = (A, B, C, H)$, procedendo come sopra, si ottengono risultati

analoghi a quelli ricavati mediante il TH.5 con la variante di avere due punti materiali di segno concorde, discorde rispetto ai rimanenti.

TH.6. L'insieme del V ordine $J = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, contenente quaterne di punti non complanari, sia il sostegno di due insiemi completi, propri:

$I' = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$ e $I'' = (n_1 P_1, n_2 P_2, n_3 P_3, n_4 P_4, n_5 P_5)$.

Si ha: $n_i = K \cdot m_i$ per $i = 1, 2, \dots, 5$ con $K \in R^*$.

Posto $K = \frac{n_1}{m_1}$, si ha: $K \cdot I' = (n_1 P_1, \frac{n_1}{m_1} m_2 P_2, \frac{n_1}{m_1} m_3 P_3, \frac{n_1}{m_1} m_4 P_4, \frac{n_1}{m_1} m_5 P_5)$.

Sottraendo $K I'$ a I'' , si ha:

$$I''' = (n_1 P_1, n_2 P_2, n_3 P_3, n_4 P_4, n_5 P_5, -n_1 P_1, -\frac{n_1}{m_1} m_2 P_2, -\frac{n_1}{m_1} m_3 P_3, -\frac{n_1}{m_1} m_4 P_4, -\frac{n_1}{m_1} m_5 P_5) = [(n_2 - \frac{n_1}{m_1} m_2) P_2, (n_3 - \frac{n_1}{m_1} m_3) P_3, (n_4 - \frac{n_1}{m_1} m_4) P_4, (n_5 - \frac{n_1}{m_1} m_5) P_5].$$

Essendo completi gli insiemi $(K \cdot I')$ e I'' anche la relativa unione I''' è un insieme completo; essendo del IV ordine e contenendo per ipotesi quaterne di punti non complanari, I''' deve risultare improprio e quindi almeno la massa di un punto di I''' deve risultare nulla: $(n_i - \frac{n_1}{m_1} m_i) = 0$.

L'insieme I''' , ridotto del punto $(n_i - \frac{n_1}{m_1} m_i) P_i$, essendo del terzo ordine, non contenente punti allineati, è improprio pertanto le masse di ciascun punto sono tutte nulle:

$$(n_2 - \frac{n_1}{m_1} m_2) = 0, (n_3 - \frac{n_1}{m_1} m_3) = 0, (n_4 - \frac{n_1}{m_1} m_4) = 0,$$

$(n_5 - \frac{n_1}{m_1} m_5) = 0$ da cui

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2}, \quad \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_3}{m_3}, \quad \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_4}{m_4}, \quad \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_5}{m_5},$$

che possiamo riscrivere così: $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3} = \frac{n_4}{m_4} = \frac{n_5}{m_5} = K$

da cui segue $n_i = K \cdot m_i$.

Def. 10. Due insiemi completi del V ordine, propri, aventi stesso sostegno:

$$I'' = (u_1 P_1, u_2 P_2, u_3 P_3, u_4 P_4, u_5 P_5),$$

$$I'' = (v_1 P_1, v_2 P_2, v_3 P_3, v_4 P_4, v_5 P_5)$$

sono detti equivalenti.

Def. 11. Indichiamo con U la classe di insiemi equivalenti con sostegno $J = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.

Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$ appartiene ad U e le masse m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 coincidono, rispettivamente, con i volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a J : $V_{2345}, V_{1345}, V_{1245}, V_{1235}, V_{1234}$, diciamo che I è l'insieme volumetrico della classe di equivalenza.

Applicazione 4. Sia $J = (A, B, C, M, N)$ un insieme del V ordine contenente quaterne di punti non complanari. Il volume del tetraedro $T(A, B, C, N)$ risulti: $V_{ABCN} = 16$ essendo:

$$d(A,B) = 8, \quad d(B,C) = 6\sqrt{2}, \quad d(A,C) = 2\sqrt{10}, \quad d(A,N) = 3,$$

$$d(B,N) = \sqrt{41}, \quad d(C,N) = \sqrt{29}.$$

Sapendo che H è punto interno sia di $J' = (A, B, C, H)$ sia di $J'' = (N, H, M)$, trovare le distanze $d(MA), d(MB), d(MC), d(MN)$ affinché i volumi dei tetraedri: $T(B, C, N, M), T(A, B, N, M), T(A, C, N, M)$ siano: $V_{B,C,N,M} = 24, V_{A,B,N,M} = 8, V_{A,C,N,M} = 16$.

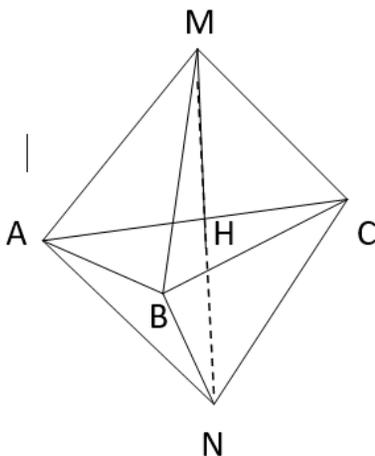


Fig. 12

Posto $m_i > 0$, gli insiemi completi aventi sostegno, rispettivamente, J' e J'' , sono:

$$I' = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, -m_4 H) \text{ e } I'' = (m_5 N, m_6 M, -m_7 H).$$

Moltiplicando I' per m_7 , I'' per m_4 e sottraendo al primo insieme il secondo si ha:

$$\begin{aligned} m_7 I' - m_4 I'' &= (m_1 m_7 \cdot A, m_2 m_7 \cdot B, m_3 m_7 \cdot C, -m_4 m_7 \cdot H, \\ &- m_4 m_5 \cdot N, -m_4 m_6 M, m_4 m_7 \cdot H) = \\ &= (m_1 m_7 \cdot A, m_2 m_7 \cdot B, m_3 m_7 \cdot C, -m_4 m_5 \cdot N, -m_4 m_6 M). \end{aligned} \quad (13)$$

Per il TH.6 si ha: $m_1 m_7 = K \cdot V_{BCNM}$, $m_2 m_7 = K \cdot V_{ACNM}$, $m_3 m_7 = K \cdot V_{ABNM}$, $m_4 m_5 = K \cdot V_{ABCM}$, $m_4 m_6 = K \cdot V_{ABCN}$ con $K \in \mathbb{R}^*$. Sostituendo nella (13) si ha:

$$(K \cdot V_{BCNM} \cdot A, K \cdot V_{ACNM} \cdot B, K \cdot V_{ABNM} \cdot C, -K \cdot V_{ABCM} \cdot N, -K \cdot V_{ABCN} \cdot M).$$

Dividendo per K si ottiene l'insieme volumetrico:

$$I_v = (V_{BCNM} \cdot A, V_{ACNM} \cdot B, V_{ABNM} \cdot C, -V_{ABCM} \cdot N, -V_{ABCN} \cdot M).$$

Essendo $V_{ABCM} = (V_{BCNM} + V_{ACNM} + V_{ABNM}) - V_{ABCN} =$
 $= (24 + 16 + 8) - 16 = 32$, l'insieme volumetrico I_V diviene:
 $(24 \cdot A, 16 \cdot B, 8 \cdot C, -32 \cdot N, -16 \cdot M)$
 da cui l'equivalente $I = (3 \cdot A, 2 \cdot B, C, -4 \cdot N, -2 \cdot M)$.

Calcoliamo $d(M, A)$ mediante il TH.12 (Nota 1):
 $[I \cup (2M - 2A)]^2 = (2M - 2A)^2$ da cui $(A, 2 \cdot B, C, -4 \cdot N)^2$
 $= (2M - 2A)^2$. Sviluppando, si ha:

$$2 [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 4 [d(A, N)]^2 + 2 [d(B, C)]^2 +$$

$$- 8 [d(B, N)]^2 - 4 [d(C, N)]^2 = - 4 [d(A, M)]^2$$

$$2 \cdot 64 + 40 - 36 + 144 - 328 - 116 = - 4 [d(A, M)]^2 \text{ da cui}$$

$$d(A, M) = \sqrt{42}.$$

Procedendo in modo analogo si ricava:
 $d(M, B) = \sqrt{26}$, $d(M, C) = 5 \sqrt{2}$, $d(M, N) = 5 \sqrt{3}$.

Applicazione 5. Sia $T(A, B, C, D)$ il tetraedro regolare inscritto nella sfera di raggio R e centro M . Sia Q il punto che divide il segmento $[A, M]$ secondo il rapporto $\frac{d(M,Q)}{d(Q,A)} = \frac{1}{4}$. Trovare i volumi dei tetraedri $T(A, B, C, Q)$, $T(A, B, D, Q)$, $T(B, C, D, Q)$, $T(A, C, D, Q)$.

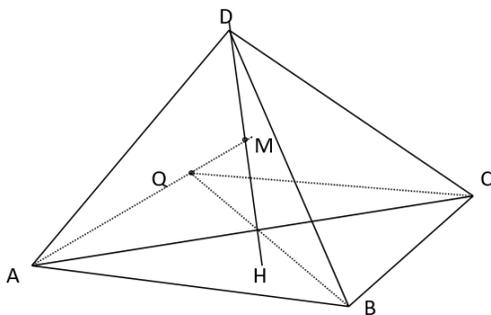


Fig. 13

L'insieme completo con sostegno $J' = (A, B, C, D, M)$ è $I' = (A, B, C, D, -4M)$.

L'insieme completo con sostegno $J'' = (A, Q, M)$ è $I'' = (A, -5Q, 4M)$.

Effettuando l'unione di I' e I'' e riducendo, si ha: $I''' = (2A, B, C, D, -5Q)$.

L'insieme volumetrico equivalente a I' è:

$I_V' = (v \cdot A, v \cdot B, v \cdot C, v \cdot D, -4v \cdot M)$ essendo $4v = V_{ABCD} = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$. L'insieme volumetrico equivalente a I''' è

$I_V''' = (2K \cdot A, K \cdot B, K \cdot C, K \cdot D, -5K \cdot Q)$. Essendo la massa $(5K)$ di Q eguale a V_{ABCD} , si ha:

$(5K) = V_{ABCD} = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$ da cui $K = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}$. Sostituendo la K in I_V''' si ha:

$$I_V''' = \left(\frac{16}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot A, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot B, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot C, \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot D, -\frac{40}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3} \cdot Q \right)$$

da cui:

$$V_{BCDQ} = \frac{16}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}, \quad V_{ACDQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}, \quad V_{ABDQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}, \\ V_{ABCQ} = \frac{8}{27 \cdot 5} R^3 \sqrt{3}.$$

TH.7 Sia $I' = (m_1P_1, m_2P_2, m_3P_3, m_4P_4, m_5P_5)$ un insieme completo proprio con sostegno $J' = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$. Se la massa m_i di un qualsiasi punto materiale $m_i P_i$ di I' è eguale al volume del tetraedro i cui vertici sono $\{J'\} - \{P_i\}$, allora, I' è l'insieme completo, volumetrico, della classe di appartenenza di I' .

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme volumetrico, appartenente alla stessa classe di equivalenza di I' , sia: $I'' = (v_1P_1, v_2P_2, v_3P_3, v_4P_4, v_5P_5)$. Per il TH.6, fra le masse di I' e I'' intercorre la seguente relazione:

$$v_i = K \cdot m_i, \text{ con } K \in \mathbb{R}^* \quad (14)$$

$$\text{pertanto si ha: } K \cdot I' = (K \cdot m_1P_1, K \cdot m_2P_2, K \cdot m_3P_3, K \cdot m_4P_4, K \cdot m_5P_5) = (v_1P_1, v_2P_2, v_3P_3, v_4P_4, v_5P_5) = I'' \quad (15)$$

Poiché, per ipotesi, $m_i = v_i$, dalla relazione (14) risulta $K = 1$. Sostituendo $K = 1$ nella (15) si ha: $I' = I''$.

Applicazione 6. Sia $J = (A, B, C, N, M)$ l'insieme del V ordine, contenente quaterne di punti non complanari, sostegno dell'insieme completo volumetrico

$$I_v = \left[\frac{20}{3}A, \frac{16}{3}B, 4C - 20M, 4N \right]$$

Sia P un punto allineato con A e M , con M interno a $J' = (A, M, P)$, e risulti: $\frac{d(P,M)}{d(M,A)} = \frac{2}{1}$. Calcolare i volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a $J'' = (A, B, C, N, P)$.

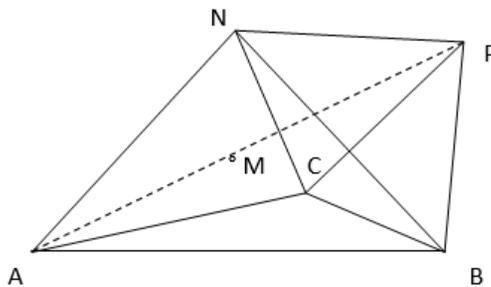


Fig. 14

L'insieme completo I' , con sostegno J' , è $I' = (2 A, -3 M, P)$.

Indichiamo con I'' l'insieme $(3 \cdot I_V) \cup (-20 I')$. Si ha:

$$I'' = (20 A, 16 B, 12 C, -60 M, 12 N, -40, 60 M, -20 P).$$

Riducendo si ha:

$$I'' = (-20 A, 16 B, 12 C, 12 N, -20 P).$$

L'insieme completo I'' è volumetrico in quanto sia la massa del punto materiale $20 M$, appartenente a I_V , sia la massa del punto materiale $20 P$, appartenente a I'' , corrispondono al volume dello stesso tetraedro $T(A, B, C, N)$.

Per il TH.7, poiché la massa del punto P è eguale a 20, l'insieme I'' è volumetrico; conseguentemente le masse degli elementi di I'' corrispondono ai volumi dei tetraedri i cui vertici appartengono a (A, B, C, N, P) .

Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). Insiemi di punti materiali. «*Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. I (1-2). Roma:Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine. «*Periodico di Matematica*» (IV), Vol. II (1). Roma:Edizioni AFSU.



La crisi dei fondamenti

Dal paradiso di Cantor all'inferno di Gödel

Giovanna Della Vecchia *

* DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.112

Sunto: *La ricerca dei fondamenti della Matematica diede origine, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, alla nascita di nuove teorie e all'insorgere di diverse scuole di pensiero impegnate a creare più solide basi logiche e filosofiche della Matematica. Il presente lavoro intende fare alcune riflessioni intorno alla corrente dei "logicisti" che riconducevano i fondamenti della Matematica ai principi della logica e al loro progressivo tentativo di identificare la matematica con la logica.*

Il progetto logicista era destinato a subire però un duro colpo con l'insorgere dei paradossi e soprattutto del paradosso di Russell; gli sforzi compiuti per risolvere il problema impegnò i maggiori matematici del tempo fino a quando, nel 1931, un giovane matematico austriaco, Kurt Gödel, con i suoi teoremi di incompletezza e coerenza, infierì un duro colpo sia al sogno logicista sia all'aspirazione di altri matematici impegnati a risolvere la questione, mettendo ufficialmente fine alla crisi dei fondamenti.

Parole Chiave: *I fondamenti della Matematica, logicismo, paradossi, crisi dei fondamenti.*

Abstract: *The search for the foundations of Mathematics gave rise, in the late 19th and early 20th centuries, to the emergence of new theories and the rise of various schools of thought committed to creating more solid logical and philosophical foundations of Mathematics. This paper aims to make some*

reflections around the current of the "logicians" who saw the foundations of mathematics in the principles of logic and attempted to identify mathematics with logic. However, the logicist project suffers a severe blow with the emergence of paradoxes and especially Russell's paradox; the efforts made to solve the problem engaged the leading mathematicians of the time until, in 1931, a young austrian mathematician, Kurt Gödel, with his incompleteness and coherence theorems, dealt a severe blow to both the logicist dream and the aspiration of other mathematicians committed to solving the question, officially ending crisis of the foundations of mathematics.

Keywords: *The foundations of mathematics, logicism, paradoxes, foundation crisis.*

1 - I fondamenti della matematica

L'attività che più ha impegnato i matematici tra la fine del XIX e i primi decenni del XX secolo si concentra soprattutto sulla ricerca dei «fondamenti», con l'intento di risalire alle basi logiche e filosofiche della Matematica e dare risposte soddisfacenti ai mille problemi riguardanti la natura della Matematica e la validità della Matematica deduttiva.

L'analisi matematica, inaugurata nel XVII secolo da Newton e Leibniz, aveva ottenuto un grosso riscontro tra i matematici e si era sviluppata con enorme successo, ma appariva ancora fragile e priva di fondamenta solide. I concetti di infinitesimo, di differenziale, di limite, efficaci dal punto di vista applicativo, non erano però ben definiti, facevano riferimento all'intuizione geometrica e risultavano privi di uno statuto matematico rigoroso.

Anche d'Alembert avvertiva che si rimaneva un po' nel vago nella presentazione corretta del calcolo infinitesimale, ma incoraggiava coloro che ne intraprendevano lo studio con la frase: «Andate avanti, e la fede vi verrà».

Nel corso del XIX secolo nasceva perciò tra i matematici, soprattutto dell'area tedesca, l'esigenza di dare all'analisi matematica un assetto più rigoroso: particolarmente sensibile a questa tematica si rivelava l'Università di Berlino che annoverava tra i suoi professori Karl Weierstrass. Presso tale Università aveva conseguito il dottorato nel 1867 George Cantor la cui formazione culturale era dunque maturata in questo clima di rigorizzazione dei fondamenti dell'analisi matematica.

Nella mente del giovane tedesco e degli altri matematici suoi contemporanei si faceva sempre più ferma la convinzione che tutta la matematica sviluppata fino ad allora poggiasse su concetti primitivi dati per scontati, su troppi assiomi e postulati ritenuti di per sé evidenti.

In merito a ciò Bertrand Russell affermava successivamente e provocatoriamente che *«postulare è un po' come rubare rispetto al guadagnarsi il pane onestamente»*.

L'esigenza di una fondazione corretta di tutta la Matematica diventava perciò di fondamentale importanza e suscitava un interesse generale anche alla luce di importanti fatti nuovi come la scoperta delle geometrie non euclidee o l'emergere della teoria degli insiemi, elementi di cui era necessario valutare le conseguenze sul piano epistemologico.

2 - La Matematica pura

Grazie alle ricerche e alle conquiste del XIX secolo la comunità scientifica sembrava riconoscere nella Matematica non una scienza naturale ma una creazione dell'intelletto

umano, tanto è vero che Bertrand Russell nel 1901 scriveva sull'International Monthly:

Il XIX secolo, che si vanta di avere inventato la macchina a vapore e la teoria dell'evoluzione, potrebbe a maggior ragione andar fiero della scoperta della matematica pura.

Cantor invece nel 1883 aveva detto:

La matematica è completamente libera nel suo sviluppo e i suoi concetti trovano una limitazione soltanto nella necessità di non essere in contraddizione e di essere coordinati ai concetti introdotti in precedenza da precise definizioni... L'essenza della Matematica sta nella sua libertà.

Tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, cominciava prepotentemente a maturare l'idea che la Matematica fosse una forma di pensiero assiomatico in cui, partendo da premesse arbitrarie è possibile trarre conclusioni valide.

Che i postulati fossero veri o no non aveva alcuna importanza e ciò portò Russell ad affermare scherzosamente:

La Matematica è quella disciplina in cui nessuno sa di che cosa parli né se ciò che dice sia vero.

L'attenzione dei matematici si spostava dalla ricerca della verità alla ricerca della coerenza.

3 - Le scuole di pensiero intorno ai fondamenti

Gli studi e le ricerche intorno ai fondamenti della Matematica nascevano dunque dall'esigenza di rigore che già

aveva caratterizzato fortemente la matematica ottocentesca e dalla necessità di rifondare l'intero edificio della Matematica su basi assiomatiche. Il tentativo di dare una rigorosa giustificazione formale all'insieme di definizioni e deduzioni su cui si basa l'aritmetica, aveva fatto nascere vere e proprie scuole di pensiero le cui tre principali sono senza dubbio:

- Il logicismo di Russell,
- L'intuizionismo di Brouwer,
- Il formalismo di Hilbert.
-

Il problema monopolizzò l'interesse della comunità scientifica per almeno un trentennio, si deve però riconoscere che non si giunse mai a conclusioni definitive o comunque universalmente condivisibili.

In questo lavoro ci limiteremo ad analizzare alcune questioni riguardanti il progetto logicista e le vicende che condussero al fallimento del tentativo di costruire la matematica sulle fondamenta della logica.

4 - Georg Cantor: *Je le vois, mais je ne le crois pas!*

La storia della ricerca dei fondamenti della Matematica non può non partire da Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845/1918) e dalla sua famosa Teoria degli insiemi che, elaborata a fine 800, era al centro del dibattito sui fondamenti.

Georg Cantor è considerato uno dei fondatori della matematica moderna; con la sua «Teoria degli insiemi» dà una

forte spinta al tentativo di dare alla matematica un assetto logico rigoroso e formalmente ineccepibile.

Si deve a lui il concetto di «numero transfinito» con il quale la matematica, nei limiti del possibile, riesce a manipolare anche gli insiemi aventi infiniti elementi e sottoporli ad una analisi rigorosa e formale.

Uno degli aspetti più interessanti della sua teoria è proprio il problema del confronto tra insiemi infiniti che affronta attraverso i seguenti passaggi:

- fissa il concetto di corrispondenza biunivoca tra due insiemi
- definisce gli insiemi equipotenti
- chiama numerabile ogni insieme equipotente ad N
-

Verifica così facilmente che risultano numerabili:

- Il sottoinsieme di N costituito dai quadrati dei numeri naturali (basta associare ad ogni n il suo quadrato n^2)
- L'insieme Z (basta associare ad ogni n il valore $-n/2$, se n è pari, $(n+1)/2$, se n è dispari)
- L'insieme Q dei numeri razionali (procedimento diagonale).

In merito alla potenza dell'insieme R fa le seguenti osservazioni:

- L'insieme $]0; 1[$ non è numerabile (reductio ad absurdum)
- L'insieme dei punti di una retta è equipotente all'insieme dei punti di un segmento (fig 1)

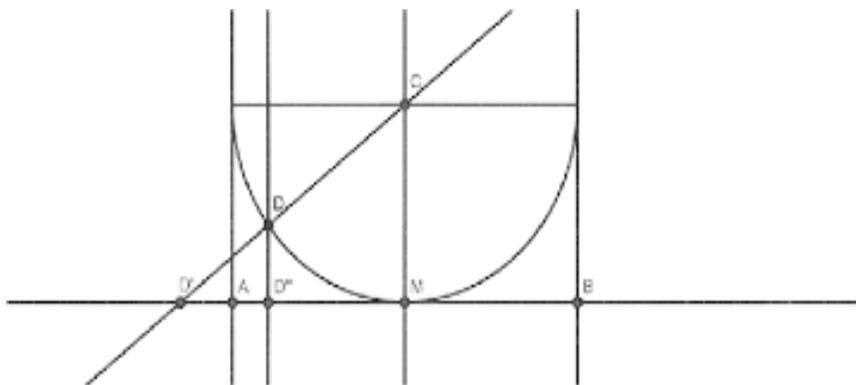


Fig.1

Poiché l'insieme $]0; 1[$ è non numerabile, allora anche l'insieme \mathbb{R} è non numerabile.

I due insiemi hanno la stessa potenza che chiama la "potenza del continuo".

Il problema era chiedersi che relazione esiste tra la cardinalità di \mathbb{N} e la cardinalità di \mathbb{R} , e se esistono insiemi di potenza più elevata del continuo.

Dal teorema di Cantor (ogni insieme A ha potenza minore della potenza di $P(A)$) si ha:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$$

Posto $|P(\mathbb{N})| = c$ e denotato con \aleph_0 (aleph-zero) la cardinalità di ogni insieme numerabile, risulta dunque

$$c > \aleph_0$$

Se si denota con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle applicazioni di \mathbb{N} in $\{0,1\}$, si dimostra che $|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Infatti, la legge che:

$$\begin{aligned} \text{ad ogni } f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow X_f = \{n \in \mathbb{N} / f(n) = 1\} \in P(\mathbb{N}) \text{ e} \\ \text{ad ogni } X \in P(\mathbb{N}) &\rightarrow f_X = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \notin X \end{cases} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $P(\mathbb{N})$, pertanto è anche

$$c = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}.$$

Si dimostra poi abbastanza agevolmente che la cardinalità di \mathbb{R} è uguale alla cardinalità di $P(\mathbb{N}) = c = 2^{\aleph_0}$

Nel passare da un insieme al suo insieme delle parti, dunque, la cardinalità aumenta e a partire da \aleph_0 , che è sicuramente il più piccolo numero transfinito (basta pensare che un sottoinsieme di \mathbb{N} o è finito o è numerabile), si riesce a costruire una sequenza di numeri cardinali transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Ci si chiede se tra \mathbb{N} ed \mathbb{R} esistono insiemi di cardinalità intermedia che equivale a chiedersi se tra \aleph_0 e $\aleph_1 (= c)$, esistono altri numeri transfiniti.

Cantor non seppe trovare una risposta a questa domanda per cui giunse a formulare una congettura nota come ipotesi del continuo: "Non esiste un insieme di cardinalità intermedia tra numerabile e continuo".

5 - Un aneddoto di Emmy Noether

Dedekind si esprimeva così nei confronti del concetto di insieme: egli si immaginava un insieme come un sacco chiuso, che contenga ben determinati oggetti, che però non si vedono, e dei quali non si sa altro se non che sono dati e determinati. Qualche tempo dopo Cantor diede a conoscere la sua rappresentazione di un insieme: drizzò la sua colossale figura, descrisse con il braccio alzato un gesto grandioso e

disse con uno sguardo sperduto nel vuoto: «io immagino un insieme come un abisso!».

(Dedekind, *Gesammelte Werke*, Brunswik 1932, vol.3 p.449)

6 - Quando la Filosofia incontra la Matematica

La settimana dal 1 al 5 agosto 1900 si tenne a Parigi un importante congresso internazionale di Filosofia: tra i partecipanti c'era, quale ospite d'onore, Giuseppe Peano, uno dei maggiori matematici italiani, e un giovane inglese ancora sconosciuto, Bertrand Russell. Il 3 Agosto Peano fece il suo intervento e parlò delle "definizioni matematiche": Russell rimase folgorato dalle idee di Peano e, a conclusione del convegno, lo avvicinò e gli chiese se avesse del materiale sul quale studiare. Peano aprì la borsa, estrasse delle bozze di suoi lavori e glielne regalò. Quei documenti diventarono l'origine degli studi del giovane inglese che, di lì a poco sarebbe diventato il più grande e famoso filosofo della matematica. Russell, oltre ad essere colpito dalla chiarezza e dall'autorevolezza con cui parlava delle sue ricerche, aveva soprattutto apprezzato il metodo con cui Peano portava avanti i suoi lavori: forse fu proprio quel metodo a suggerire al giovane inglese l'importanza del metodo della logica matematica.

7 - Gottlob Frege e il programma logicista

Oggi pare guadagnare sempre più sostenitori l'opinione che l'aritmetica sia una logica più ampia e che la

giustificazione più rigorosa delle leggi aritmetiche riporti indietro a leggi puramente logiche e solo ad esse. Sono anch'io di quest'opinione e su di essa fondo la richiesta d'includere la notazione aritmetica in quella logica.
(Gottlob Frege, *Funzione e concetto*)

Gottlob Frege (1848-1925), matematico, logico e filosofo tedesco, è stato il primo fautore del “logicismo”, teoria secondo la quale tutta l’aritmetica è riconducibile alla logica.

Il programma logicista di Frege perseguiva due obiettivi:

1. risolvere i concetti matematici, anche quelli considerati non ulteriormente definibili e perciò primitivi, in termini puramente logici;
2. dimostrare i teoremi della matematica mediante l'applicazione dei principi e delle regole di inferenza della logica.

In realtà, nel perseguire tali obiettivi Frege ricostruisce la teoria degli insiemi di Cantor in maniera logica per poi fondare l’aritmetica sull’insiemistica.

Nell’opera *Ideografia*, un linguaggio in formule del pensiero puro a imitazione di quello aritmetico (*Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denken*, 1879) Frege sviluppò un linguaggio simbolico in grado di formalizzare i ragionamenti ed enunciò uno dei principi cardine della teoria degli insiemi, il principio di comprensione (implicitamente presente nella teoria di Cantor), secondo il quale ogni proprietà definisce un insieme: per ogni proprietà $\phi(x)$ che contiene x come variabile libera, esisterà l’insieme $\{x : \phi(x)\}$ i cui membri sono esattamente quegli oggetti che soddisfano $\phi(x)$.

In effetti, Frege considera gli insiemi come «estensioni» di predicati «intensionali».

Poiché «estendere» significa «tirar fuori» e «intendere» vuol dire «tirar dentro», secondo Frege gli insiemi evidenziano in modo esplicito ciò che i predicati asseriscono in modo implicito: dunque ogni predicato definisce un insieme.

8 - Il paradosso di Russell e la crisi dei fondamenti

Se è vero il principio di comprensione secondo il quale ogni proprietà definisce un insieme, è possibile considerare la proprietà di essere un insieme che appartiene a se stesso oppure la proprietà di essere un insieme che non appartiene a se stesso e definirne i relativi insiemi.

Ad esempio è immediato affermare che l'insieme delle tazze da tè non appartiene a se stesso perché non è una tazza da tè (l'esempio è fornito dallo stesso Russell); invece l'insieme delle idee astratte, essendo esso stesso un'idea astratta, appartiene a se stesso. Anche l'insieme degli insiemi contenenti più di un determinato numero di oggetti (ad esempio più di tre oggetti) appartiene a se stesso.

Sia R l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, cioè

$$R = \{x / x \notin x\}$$

Ci chiediamo se R appartiene oppure no a se stesso: in realtà R appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso; viceversa R non appartiene a se stesso se e solo se appartiene a se stesso

allora $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

Dunque Russell scopre con sorpresa che la Matematica, ritenuta da sempre immune da contraddizioni, ne può risultare invece contagiata!

Il famoso “paradosso di Russell” è in realtà un’antinomia se si tiene conto del significato delle due parole:

paradosso = parà + doxa = contro l’opinione

antinomia = anti + nomos = contro la legge.

Numerose sono le metafore linguistiche del paradosso di Russell che aiutano meglio a comprenderne il significato; se ne riportano quelle più note e, a mio avviso, più accessibili a chi non è particolarmente esperto di teoria degli insiemi.



Escher, Mani che disegnano

8.1 - Il paradosso dell'eterologicità (Grelling-Nelson,1908)

Un aggettivo si dice autologico se possiede la proprietà che esso denota.

Ad esempio l’aggettivo “corto” è autologico perché la parola “corto” è effettivamente corta; anche “polisillabico” è

un aggettivo autologico. Viceversa un aggettivo si dice eterologico se non è autologico cioè se la proprietà che definisce non è applicabile a se stesso. Ad esempio gli aggettivi "lungo" e "monosillabico" sono eterologici.

Si supponga di ripartire tutti gli aggettivi in due insiemi costituiti uno dagli aggettivi autologici e l'altro dagli eterologici.

Ci si chiede a quale insieme appartenga l'aggettivo "eterologico". Se "eterologico" è autologico allora deve riferirsi a se stesso quindi deve essere eterologico; se "eterologico" è eterologico non si riferisce a se stesso, e quindi deve essere autologico.

In entrambi i casi si ottiene una contraddizione; in altre parole, l'aggettivo "eterologico" è autologico se e solo se è eterologico.

8.2 - Il paradosso del barbiere (Russell, 1918)

Un certo villaggio ha tra i suoi abitanti un solo barbiere. È ben sbarbato e fa la barba a tutti quelli che non si fanno la barba da soli. Ci si chiede allora: Chi rade il barbiere? Se si rade da solo non può radersi da solo per la premessa fatta. Se non si rade da solo deve farsi radere dal barbiere, cioè da sé stesso e quindi si deve radere da solo!

8.3 - Il paradosso del bibliotecario (Gonseth o Skolem?)

Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni cataloghi. Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via. Poiché i

cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il catalogo di tutti i cataloghi. A questo punto nasce una constatazione. La maggior parte dei cataloghi non riporta se stessa, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano se stessi. Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il catalogo di tutti i cataloghi che non includono sé stessi. Il giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere se stesso, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico.

http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_del_bibliotecario

8.4 - Il paradosso di Jourdain (Jourdain, 1913)

Su una facciata di un foglio di carta leggiamo “la proposizione sul retro è vera”, sull'altra “la proposizione sul retro è falsa”. Così, se vogliamo dar fede alla prima affermazione dobbiamo ammettere che essa è falsa, viceversa se la riteniamo falsa vuol dire che la proposizione sul retro deve essere falsa, ma ciò implica che la proposizione sull'altra facciata è vera!!! Purtroppo dobbiamo prendere atto che il primo enunciato è vero esattamente se è falso.

9 - Solatium miseris, socios habuisse malorum!

Il 16 giugno del 1902 Bertrand Russell scrisse a Frege una lettera in cui gli comunicava che i *Grundgesetze der Arithmetik*, da lui pubblicati nel 1893, contenevano una

contraddizione, o meglio, una antinomia, cioè un paradosso logico.

Caro collega,

da un anno e mezzo sono venuto a conoscenza dei suoi Grundgesetze der Arithmetik, ma solo ora mi è stato possibile trovare il tempo per uno studio completo dell'opera come avevo intenzione di fare. Mi trovo completamente d'accordo con lei su tutti i punti essenziali, [...].

C'è solo un punto in cui ho trovato una difficoltà. Lei afferma (p. 17) che anche una funzione può comportarsi come l'elemento indeterminato. Questo è ciò che io credevo prima, ma ora tale opinione mi pare dubbia a causa della seguente contraddizione. Sia w il predicato "essere un predicato che non può predicarsi di se stesso". w può essere predicato di se stesso? Da ciascuna risposta segue l'opposto. Quindi dobbiamo concludere che w non è un predicato. Analogamente non esiste alcuna classe (concepita come totalità) formata da quelle classi che, pensate ognuna come totalità, non appartengono a se stesse. Concludo da questo che in certe situazioni una collezione definibile non costituisce una totalità[...].

*Molto rispettosamente suo
Bertrand Russell.*

La lettera, che fu spedita dal giovane Bertrand Russell proprio mentre Frege stava ultimando la stampa del II volume dei *Grundgesetze der Arithmetik*, è considerata l'episodio che apre ufficialmente la crisi dei fondamenti.

L'antinomia di Russell ebbe infatti una risonanza devastante, sembra che abbia gettato nello sconforto i maggiori specialisti di logica matematica.

Lo stesso Frege, nel 1903, in un'appendice al II volume dei suoi *Grundgesetze* scrisse:

Nulla di più indesiderabile può capitare a uno scienziato del fatto che una delle fondamenta del suo edificio si incrina dopo che l'opera è finita. E' questa la situazione in cui mi trovo in seguito ad una lettera (contenente il paradosso) inviata mi dal sig. Bertrand Russell proprio mentre si stava ultimando la stampa di questo (secondo) volume... Solatium miseris, socios habuisse malorum!

Anch'io ho questo sollievo, se sollievo lo possiamo chiamare: infatti chiunque nelle sue dimostrazioni abbia fatto uso di estensioni di concetti, di classi, di insiemi (compresi i sistemi di Dedekind) si trova nella mia stessa posizione. Non è soltanto questione del mio particolare modo di gettare le fondamenta, ma è in questione la possibilità o meno di dare all'aritmetica un qualsiasi fondamento logico.

10 - I «Principia Mathematica»

Nel 1903 Bertrand Russell, che intanto continua a lavorare sul progetto logicista dà della Matematica la seguente definizione:

La Matematica pura è la classe di tutte le proposizioni aventi la forma "p implica q" dove p e q sono proposizioni contenenti una o più variabili, le quali sono le stesse in entrambe le proposizioni, e né p né q contengono alcuna costante ad eccezione delle costanti logiche.

In realtà egli afferma che la caratteristica principale della Matematica è costituita dalla sua struttura logica, e non da qualunque asserzione che possa scaturire dall'intuito o dal mondo delle sensazioni.

Nel tentativo di superare la sua stessa antinomia dà alla luce, assieme ad Alfred North Whitehead, i tre ponderosi volumi dei "Principia Mathematica", pubblicati tra il 1910 e

il 1913, opera che rappresenta il più grandioso tentativo di realizzare il sogno di Frege di una fondazione logica della matematica.

Nei «Principia Mathematica» Russell e Whitehead realizzano fin nei minimi particolari un programma volto a dimostrare che la Matematica non è distinguibile dalla Logica e che tutta la matematica pura può essere dedotta da un numero ristretto di principi logici fondamentali.

Per superare quell'antinomia che tanto aveva messo in crisi il pensiero logicista, Russell elabora la teoria dei tipi: gerarchie di livelli degli enti logici, organizzati dai più semplici ai più complessi e definiti riferendosi ad enti già dati (Livello 0: gli elementi. Livello 1: gli insiemi di elementi. Livello 2: gli insiemi di insiemi di elementi. E così via).

Più nel dettaglio chiama:

- “elementi primitivi” quegli oggetti che non siano essi stessi insiemi
- “insiemi del primo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono elementi primitivi
- “insiemi del secondo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono insiemi del primo ordine
- “insiemi del terzo ordine” quegli insiemi i cui elementi sono insiemi del secondo ordine e così via.

Ad esempio:

- $A = \{1,2\}$ è un insieme del primo ordine
- $B = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$ è un insieme del secondo ordine.

Ovviamente esistono anche insiemi del tipo $C = \{1, \{1,2\}\}$.

Chiama poi “omogeneo” un insieme se i suoi elementi sono primitivi o, comunque, tutti dello stesso livello.

Prendendo in considerazione solo insiemi omogenei Bertrand Russell crea un sistema di sicurezza per evitare le antinomie derivanti dalla teoria degli insiemi in quanto nessuno dei suddetti insiemi può contenere se stesso.

Ma gli sforzi compiuti per risolvere il problema non sembrano così ben ripagati: purtroppo si scontrano con la sorprendente conclusione raggiunta nel 1931 da un giovane matematico austriaco, Kurt Gödel (1906-1978).

11 - La fine di un sogno

*Dio esiste perchè la Matematica non è contraddittoria,
e il diavolo esiste perchè non possiamo dimostrarlo
(H. Weyl)*

Nel 1931 Gödel pubblica l'articolo più famoso dell'intera logica matematica: *Über formal unentscheidbare Sätze der «Principia mathematica» und verwandter System I.*

I due principali risultati sono: l'incompletezza dei sistemi formali coerenti, che contengono l'aritmetica elementare; l'impossibilità di dimostrare, all'interno di quei sistemi, la loro coerenza.

Teorema di incompletezza

Senza entrare in tecnicismi di non immediata interpretazione, il lavoro di Gödel dimostra che, all'interno di un sistema rigidamente logico come quello che Russell e Whitehead avevano sviluppato per l'aritmetica, è possibile formulare proposizioni che sono indecidibili o indimostrabili

nell'ambito degli assiomi del sistema. Cioè all'interno del sistema esistono proposizioni che non possono essere né dimostrate né invalidate.

Questo risultato di Gödel si applica, oltre che al sistema di Russell Whitehead, al sistema di Zermelo-Fraenkel e all'assiomatizzazione della teoria dei numeri tanto cara a Hilbert e ai formalisti: praticamente costituisce un duro colpo alle principali correnti di pensiero nate proprio con lo scopo di aggirare la trappola dei paradossi.

Teorema di coerenza

Sia T una teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica: se T è coerente, non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T .

Cioè «nessun sistema, che sia abbastanza coerente ed espressivo da contenere l'aritmetica, può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza».

Il secondo teorema di Gödel è di centrale importanza nella crisi dei fondamenti della matematica perché ha storicamente cancellato la possibilità di basare la validità di tutta la matematica sulla coerenza dell'aritmetica formalizzata, non essendo la coerenza dimostrabile con i soli mezzi dell'aritmetica stessa.

Gli sforzi compiuti per perseguire il rigore fino all'exasperazione avevano condotto a un'impasse.

Il dibattito sui fondamenti si protrasse per molti anni ancora, ma andò via via affievolendosi; la crisi dei fondamenti della matematica può considerarsi chiusa proprio nel 1931.

12 - Conclusione

Gödel non credeva che i suoi teoremi avrebbero messo in discussione la fede nella matematica: disse infatti semplicemente che la completezza dell'aritmetica non poteva essere dimostrata dagli assiomi dell'aritmetica, occorreva qualcos'altro.

Infatti i problemi sollevati dai teoremi di Gödel furono affrontati fuori dell'aritmetica, attraverso una nuova branca della logica matematica sviluppatasi verso la metà del XX secolo e nota come metamatematica.

Mi piace perciò terminare con le parole di quei matematici che scrivono sotto lo pseudonimo di Nicholas Bourbaki e che sicuramente incoraggiarono i matematici a uscire dall'impasse e proseguire nel loro lavoro con l'entusiasmo di sempre:

È da venticinque secoli che i matematici hanno l'abitudine di correggere i loro errori e vedere così la loro scienza arricchita, e non impoverita; ciò dà loro il diritto di guardare al futuro con serenità. (N.Bourbaki 1949).

Bibliografia

BOYER Carl Benjamin (1990). *Storia della matematica*. Milano: Oscar Mondadori.

KLINGE Morris (1999). *Storia del pensiero matematico II*. Torino: Einaudi.

MESCHKOWSKI Herbert (1973). *Mutamenti nel Pensiero Matematico*. Torino: Boringhieri.

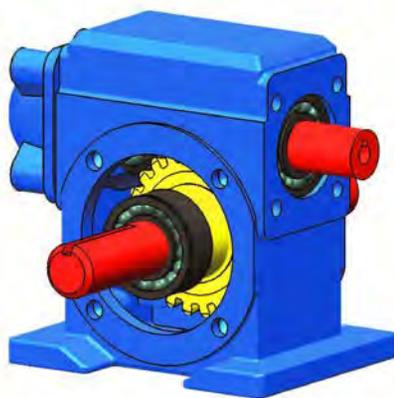
RUSSELL Bertrand (1995). *Introduzione alla filosofia matematica*. Roma: Newton.

ODIFREDDI_Piergiorgio (n.d.). *Vite da logico* 13
<https://www.youtube.com/watch?v=I-dsgyucG9o>

Ingegneria industriale assistita dal computer

La progettazione meccanica con CATIA V5

Luca Nicotra



in riga
edizioni 
Tecnologia
e Innovazione

La modellazione geometrica 3D nella progettazione meccanica con il sistema CAD integrato CATIA V5 della Dassault Systemes (Bologna: InRiga Edizioni, maggio 2023).

Fisica e matematica delle leggi di evoluzione.

Un' introduzione intuitiva basata sulla ricorrenza

Alessandro Amabile *, Emilio Balzano*, Pietro Piccialli*, Rodolfo Figari **, Giancarlo Artiano***

* Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini" - Università Federico II di Napoli

Email: alessandro.amabile@unina.it; balzano@unina.it;

pietro.piccialli@gmail.com;

** GSSI, L'Aquila

Email: rodolfo.figari@protonmail.com

*** Dipartimento di Matematica e Fisica - Università degli Studi della

Campania Vanvitelli

Email: Giancarlo.Artiano@unicampania.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.113

Sunto: *In questo contributo vogliamo sintetizzare un progetto didattico per la presentazione delle leggi di evoluzione dei sistemi fisici che abbiamo sperimentato negli ultimi anni con platee di professori e studenti delle scuole medie superiori. L'intento è quello di affrontare e risolvere le ovvie difficoltà degli studenti nel comprendere significato e uso delle leggi dinamiche nel prevedere l'evoluzione di sistemi fisici reali, legate anche alla mancanza di strumenti matematici adeguati. È nostra opinione che sia necessario che, da una parte, gli studenti acquisiscano un quadro quanto più chiaro possibile dell'apparato formale di una teoria fisica e, dall'altra, che riescano a impossessarsi di metodi computazionali con i quali verificare la reale efficacia della teoria stessa. Siamo altrettanto convinti che il*

significato euristico alla base dell'apparato formale sia acquisibile senza bisogno di conoscere una versione rigorosa e conclusa della matematica della teoria formalizzata. Al contrario, pensiamo che sia utile mostrare agli studenti come l'esigenza di rigore matematico scaturisca dalla necessità di dare una forma precisa a intuizioni forti non ancora formalizzate.

Parole Chiave: *fisica, didattica, apprendimento, insegnamento*

Abstract: *We outline a unified introduction to the evolution equations of classical systems intended for a high school students audience. The attempt consists in circumventing the lack of mathematical knowledge with the use of a discretized version of the equations of motion and of simplified forms of computation and analysis of their solutions. The aim is to allow students to approach theoretical features as well as computational aspects of the evolution equations through the use of spreadsheets, a work environment students are usually familiar with and an ideal tool for an intuitive approach to recursive computational algorithms. The proposal was presented to an audience composed by students of University courses of Physics teaching and to high school Science teachers.*

Keywords: *Physics, didactic, learning, teaching*

1 - Introduzione

Come si possono superare le difficoltà nel rispondere alle raccomandazioni ministeriali che suggeriscono che la Fisica classica e moderna debbano far parte dei programmi della Scuola Media Superiore? Si noti che non c'è ambito della Fisica (con l'importante eccezione dell'Ottica geometrica) che non faccia uso dell'Analisi Matematica, la quale tuttavia non è parte dei programmi della maggior parte delle scuole medie superiori. D'altra parte, se non ci si vuole accontentare di un'introduzione puramente informativa della Meccanica, è

necessario avere la possibilità di affrontare anche gli ambiti teorici che maggiormente poggiano sul Calcolo: la teoria della gravitazione universale, la dinamica del sistema solare, le oscillazioni (lineari e non) dei pendoli e le equazioni delle onde. È in questi ambiti che le leggi della dinamica e l'ipotesi dell'esistenza della forza gravitazionale manifestano tutta la loro potenza esplicativa. La dinamica celeste è stata la scienza del secolo dei Lumi, base della cosiddetta *metafora meccanica* e della convinzione che l'evoluzione di ogni sistema fisico fosse in principio prevedibile con i metodi della Meccanica, a patto di conoscerne con certezza le condizioni iniziali. Ogni paradigma successivo della Fisica, come i sistemi caotici o la dinamica quantistica, sono impossibili da comprendere senza fare riferimento ai successi della teoria newtoniana.

Tuttavia, se ci si limita alla cinematica dei moti rettilinei, a una definizione fenomenologica delle forze (basata sulla seconda legge), allo studio delle macchine semplici e al moto su piani inclinati, non c'è alcuna speranza di far provare agli studenti lo stupore nell'osservare l'efficacia predittiva del semplicissimo modello su cui si basa l'intera Meccanica Classica: insiemi di punti materiali (!) che si attirano con una forza (esistente per ipotesi, sebbene non direttamente visibile), il moto dei quali risulta approssimare con una con una precisione sconcertante i moti dei pianeti del Sistema Solare (!). L'idea che una teoria scientifica costituisca un modello costruito dalla mente umana per dare, tramite un vocabolario di regole di corrispondenza che traducano enti astratti in oggetti concreti, una comprensione della realtà attorno a noi è certamente una convinzione condivisa da molti scienziati e specialisti nell'analisi dei fondamenti della conoscenza. Al di

l'aspetto epistemologico, questa idea ha il merito di far percepire la scienza in maniera laica e curiosa: nulla a che vedere con leggi normative, con fideismo anti- o ultra-razionale o con ricerca di "verità" assolute. Alla scienza non è necessario "credere" (come spesso viene richiesto recentemente), se con la parola scienza si intende semplicemente una conoscenza condivisa sul mondo, storicamente determinata e ritenuta provvisoriamente valida. Non vi è alcun dubbio che domani questa conoscenza condivisa cambierà, per tenere conto di altre osservazioni e di altre acquisizioni teoriche oggi non disponibili. L'etica e la moralità degli interessi coinvolti nella produzione scientifica e delle applicazioni che ne conseguono non sono, purtroppo, garantiti all'interno della scienza stessa.

È nostra opinione che accenni a questo peculiare modo di essere della scienza e al suo statuto epistemologico siano importantissimi da condividere con gli studenti in ogni classe e con ogni platea che frequenta lezioni di Fisica e Matematica.

In questo spirito vogliamo mostrare come le difficoltà degli studenti di Fisica dovute alla mancanza di conoscenze di Analisi Matematica siano collegate a un modello a cui è molto difficile rinunciare: il continuo spazio-temporale. Vogliamo inoltre convincere che i concetti di osservazione e misura dello spazio e del tempo possono rendere le leggi d'evoluzione più intuitive e facilmente utilizzabili ai fini del calcolo. Allo stesso tempo, essi chiariscono quale tipo di linguaggio matematico sia adeguato alla formalizzazione di qualunque teoria del moto dei corpi. In questo modo, inoltre, seguiremo l'evoluzione del pensiero di Newton al quale la caduta della mela (?) suggerì le leggi del moto ben prima di delineare

rigorosamente quegli elementi di Calcolo Infinitesimale alla cui formulazione contribuì in maniera così rilevante.

2 - La Dinamica Newtoniana e la Teoria della Gravitazione Universale

L'idea di Newton fu di ipotizzare l'esistenza di una causa al moto dei corpi, ovvero le *forze* che agiscono su di essi, e specificarne l'effetto: la forza produce cambiamenti nel moto naturale, che è quello rettilineo uniforme, inducendo variazioni della velocità proporzionali alla forza stessa. Per prevedere il moto di un corpo l'entità e la direzione della forza agente devono essere note a priori in funzione della sua posizione e della sua velocità. Newton comprese che l'attrazione gravitazionale poteva unificare la spiegazione del moto osservato dei corpi nelle vicinanze della superficie terrestre (proiettili e mele), quello dei pianeti del sistema solare, le maree e il moto oscillatorio del pendolo.

La difficoltà con cui Newton si trovò a confrontarsi derivava, in ultima analisi, dalla concezione di un "tempo assoluto, vero e matematico, che di per sé e per sua natura fluisce in maniera uniforme senza alcun riferimento a nulla di esterno". Questa continuità (implicata nell'idea di flusso) e uniformità del tempo si traduce, in generale, nell'idea di forze agenti sui corpi che cambiano in maniera continua durante il moto. Ma come interpretare e calcolare l'effetto complessivo di un'infinità di forze continuamente variabili?

Newton affrontò il problema con un procedimento articolato in due fasi e basato sull'uso di diagrammi, talvolta chiamati *diagrammi di Newton*:¹

-la variazione della quantità di moto mv del corpo materiale in un "breve" intervallo di tempo Δt è proporzionale all'impulso della forza applicata al corpo durante lo stesso intervallo di tempo. Δt deve essere "sufficientemente breve" da poter ritenere la forza costante in entità e direzione nell'intervallo di tempo. Di conseguenza, l'impulso risulterà approssimato dal prodotto $F\Delta t$, dove F è la forza agente sul corpo all'inizio dell'intervallo.

-la traiettoria è ottenuta come il limite geometrico della spezzata ottenuta considerando il moto rettilineo e uniforme (cioè *inerziale*) in ciascun intervallo.

In formule, per Δt "piccolo" e per un corpo puntiforme, si avrà dunque

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t) \Delta t \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \Delta t \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $F(\mathbf{x}(t), t)$ è la forza che agisce sul corpo puntiforme all'istante t quando la sua posizione è $\mathbf{x}(t)$. La dipendenza della forza dalla posizione deve naturalmente essere ipotizzata a priori.²

1 Così sono chiamati da Feynman nella sua celebre lezione perduta, ma in altri ambiti l'espressione ha assunto altri significati.

2 Si noti che una possibile dipendenza della forza dalla velocità (per esempio una forza di attrito) non complica in alcun modo la procedura di ricerca iterativa della soluzione.

La seguente identità vettoriale, che esprime la variazione totale in posizione e velocità della particella puntiforme come la somma degli spostamenti o variazioni delle velocità in ciascun intervallo di tempo $[t_{i-1}, t_i]$ (qualunque sia la suddivisione in intervalli di tempo), sarà l'unica conoscenza cinematica richiesta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t_N) - \mathbf{x}(t_0) &= \sum_{i=1}^{i=N} [\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})] = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{v}_{t_{i-1}, t_i} (t_i - t_{i-1})
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove la velocità media tra gli istanti t e $t' > t$ è definita come

$$\mathbf{v}_{t, t'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t)}{t' - t}$$

Allo stesso modo, la variazione totale di velocità è espressa come

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t_N) - \mathbf{v}(t_0) &= \sum_{i=1}^{i=N} [\mathbf{v}(t_i) - \mathbf{v}(t_{i-1})] = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) =
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{v}_{t_{i-1}, t_i} (t_i - t_{i-1})$$

dove l'accelerazione media tra i tempi t e $t' > t$ è definita come

$$\mathbf{a}_{t,t'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}(t') - \mathbf{v}(t)}{t' - t}$$

In questo schema di tempo discretizzato si possono facilmente definire il *lavoro*, l'*energia cinetica* e *potenziale* e la *conservatività* delle forze elastiche e gravitazionali. Le leggi dinamiche e le identità cinematiche (2.2), (2.3) permettono di provare la conservazione dell'energia totale a meno di termini che diventano trascurabili quando il passo temporale della suddivisione diventa sufficientemente piccolo.

Per chiarire cosa intendiamo, ricorriamo a un esempio semplice: la "prova" del teorema dell'energia cinetica.

Dall'identità

$$\vec{v}_{i+1} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} |\vec{v}_{i+1}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{v}_i|^2 - \frac{1}{2} (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i &= \frac{m}{\tau} (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = \frac{m}{2\tau} |\vec{v}_{i+1}|^2 - \frac{m}{2\tau} |\vec{v}_i|^2 - \frac{m}{2\tau} |\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i|^2 \\ &= \frac{1}{\tau} (E_{cin_{i+1}} - E_{cin_i}) - \frac{m\tau}{2} |\vec{a}_i|^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Per valori limitati della forza, che implicano valori limitati delle accelerazioni, e per intervallo temporale τ sufficientemente piccolo, (2.4) prova che vale l'eguaglianza tra la velocità di variazione dell'energia cinetica e la potenza della forza ($\equiv \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$). Moltiplicando per τ e sommando su tutti gli i si trova che il lavoro totale della forza differisce dalla variazione totale di energia cinetica per un termine che diventa trascurabile per τ sufficientemente piccolo. Sebbene il procedimento non sia rigorosamente giustificato, esso può essere utile a far comprendere agli studenti le tappe concettuali che conducono a una teoria formalizzata del processo di limite.

Vogliamo sottolineare la concretezza, la semplicità e l'efficacia della discretizzazione temporale, se affiancata da una procedura semplice di calcolare le soluzioni dell'equazione (2.1). È altrettanto chiaro, tuttavia, che una teoria rigorosa non può essere data laddove non si specifichi cosa si intende per valore dell'intervallo temporale "piccolo" (specialmente se si adopera un modello continuo).

Risolvendo l'equazione di ricorrenza (2.1), per esempio mediante un foglio di calcolo, è possibile determinare numericamente il moto di un punto materiale in funzione del tempo. Più precisamente, quando la posizione e la velocità (e quindi la forza) siano note al momento iniziale, l'equazione di ricorrenza fornisce posizione e velocità ad ogni tempo t_i . Ogni passo computazionale consiste in un "copia-e-incolla" della riga precedente. Le formule di ricorrenza sono scritte solo nella prima riga tramite riferimenti relativi (a parte i parametri fissati che appaiono come riferimenti assoluti).

Di seguito, mostriamo come la procedura sopra descritta si applica a problemi classici spesso considerati troppo complicati per essere affrontati in un corso di fisica elementare. L'obiettivo è mostrare che l'acquisizione di una comprensione qualitativa e quantitativa delle caratteristiche rilevanti dell'evoluzione di sistemi anche complessi è sicuramente alla portata di studenti della scuola media superiore.

Il primo esempio che vogliamo discutere è la dinamica dei corpi in interazione gravitazionale. A livello di scuola secondaria superiore, l'argomento viene presentato indicando prima le proprietà sperimentalmente verificate della forza gravitazionale. Successivamente, si verifica che un moto circolare uniforme, con velocità angolare e raggio del cerchio in accordo con la terza legge di Keplero, è un'orbita che soddisfa ad ogni tempo la legge del moto.

Sono attualmente presenti in letteratura molte presentazioni semplificate (ma certamente più dettagliate di quelle accennate precedentemente) che introducono il problema a due corpi in maniera diversa e più efficace (vedi per esempio [9]). Noi qui presenteremo due problemi che, secondo noi, sono di grande importanza: il moto dei tre corpi e il moto del pendolo.

Come è noto, Newton utilizzò la legge di gravitazione universale insieme alla seconda legge del moto per analizzare il problema di due corpi in interazione gravitazionale. Egli caratterizzò tutte le possibili orbite e dedusse la validità delle leggi di Keplero del moto planetario. Nei *Principia*, si trova anche il primo tentativo di affrontare il problema dei tre corpi per calcolare gli effetti del Sole sul moto della Luna intorno

alla Terra. Non molto tempo dopo, Eulero analizzò una versione semplificata del modello dinamico successivamente indicato da Poincaré come il “problema dei tre corpi ristretto”. In questo modello tre punti materiali interagiscono tramite forze gravitazionali; un corpo ha una massa trascurabile rispetto alle masse degli altri due e i due corpi “pesanti” seguono orbite circolari attorno al loro comune centro di massa. Il problema a tre corpi ristretto ha segnato la nascita della teoria delle perturbazioni in meccanica celeste che ha permesso di capire e calcolare le variazioni secolari delle orbite dei pianeti, dando inizio alle indagini sulla stabilità del sistema solare. I risultati della meccanica celeste costituirono senza dubbio il più grande e sorprendente successo della meccanica Newtoniana.

Nel modo descritto sopra, è possibile indagare numericamente l'evoluzione di un sistema a tre corpi ulteriormente semplificato. Per semplicità assumeremo:

- che il corpo più pesante (il Sole) ha una massa M_S sufficientemente grande da essere sottoposto ad accelerazioni trascurabili. La sua posizione fissa viene presa come origine del sistema di coordinate cartesiane all'interno del quale si studia il movimento dei due pianeti;

- che il pianeta di grande massa M_e segua un'orbita circolare con velocità angolare costante. La sua posizione al tempo t sarà denotata $\mathbf{x}_e(t) = (x_e(t), y_e(t))$.

- che il secondo pianeta di massa m trascurabile rispetto alla massa del primo ha una velocità iniziale nel piano che contiene il Sole e i due pianeti all'istante iniziale, sicché il moto si svolgerà tutto su questo stesso piano. La distanza iniziale del pianeta "leggero" viene presa in un rapporto

sufficientemente piccolo rispetto al raggio dell'orbita circolare del pianeta più massivo. Per questa ragione il secondo pianeta verrà identificato come pianeta interno (e il primo come pianeta esterno). Le sue coordinate saranno indicate come $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$.

Sotto queste ipotesi, è possibile usare la (2.1) per analizzare il moto del pianeta leggero soggetto all'azione congiunta delle forze gravitazionali del sole e del pianeta esterno, per diverse condizioni iniziali e differenti rapporti di massa.

Nell'esempio che segue le componenti della posizione del pianeta esterno saranno

$$x_e(t) = R_e \cos \omega_e t; \quad y_e(t) = R_e \sin \omega_e t.$$

Le leggi del moto (2.1) avranno la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t) \Delta t \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m} [\mathbf{F}_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{F}_{M_e m}(\mathbf{x}(t), t)] \Delta t \end{cases} \quad (2.5)$$

dove le componenti x delle forze sul pianeta interno dovute rispettivamente al Sole e al pianeta esterno sono

$$F_{M_S m}(\mathbf{x}(t)) = \frac{GM_S m}{[(x^2(t) + y^2(t))]^{\frac{3}{2}}} x(t)$$

$$F_{M_e m}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{GM_e m}{[(x_e(t) - x(t))^2 + (y_e(t) - y(t))^2]^{\frac{3}{2}}} [x_e(t) - x(t)] \quad (2.6)$$

Le componenti y si ottengono rimpiazzando la x con la y .

Impostando le equazioni di ricorrenza nel foglio elettronico, è possibile esaminare il moto del pianeta interno

per vari valori dei parametri dinamici (il rapporto M_e/M_s e m/M_s) e per differenti condizioni iniziali. In particolare, gli studenti possono analizzare il regime delle piccole perturbazioni, quando le orbite di entrambi i pianeti sono di tipo Kepleriano. Successivamente, facendo crescere la massa del pianeta esterno, possono osservare le piccole perturbazioni nell'orbita del pianeta interno, arrivando poi al comportamento caotico del sistema, dove possono investigare la forte dipendenza del moto nel lungo periodo dalle condizioni iniziali.

Non appena gli studenti siano consapevoli della possibilità di calcolare soluzioni approssimate delle equazioni di evoluzione, tramite procedure di ricorrenza intuitive, possono essere introdotti a schemi di calcolo più efficienti e più stabili. In particolare, possono iniziare a fare uso di *objected-oriented software* per esaminare i comportamenti complessi di molti sistemi gravitazionali composti da corpi approssimativamente puntiformi. Agli studenti deve essere chiaro che le animazioni prodotte dal software non sono gli output di una scatola nera imperscrutabile - come molte applets presenti sul web tendono di fatto ad essere - ma il risultato dell'ottimizzazione di procedure di calcolo non dissimili da quelle che loro stessi possono implementare su un foglio di calcolo.

Esempi di soluzioni delle leggi evolutive relative a sistemi-modello gravitazionali e le loro animazioni ottenute con un foglio di calcolo o con un software orientato agli oggetti sono disponibili sul sito http://www.les.unina.it/?page_id=4784. Qui di seguito, abbiamo inserito alcune figure che mostrano diversi regimi del moto di due pianeti ottenute mediante un software a oggetti.

Un'altra dinamica indotta dalla gravitazione ed estremamente rilevante nelle sue connessioni storiche e concettuali con la moderna rappresentazione fisico-matematica del "tempo" è il moto dei pendoli. Per inciso, vale la pena ricordare che spesso i libri di testo riportano confuse tautologie sulla definizione "operativa" di intervallo di tempo e di unità di misura del tempo. Da un lato, si sottolinea la necessità di "trovare" (e non "definire") un fenomeno "periodico", quindi le piccole oscillazioni del pendolo si osservano sperimentalmente isocrone utilizzando un cronometro. In questo modo, l'importante osservazione della proporzionalità universale tra periodi di diversi sistemi oscillanti attorno a una posizione di equilibrio è sostituita da una banale tautologia.

Cercheremo di mostrare che il moto del pendolo può essere accuratamente esaminato attraverso la procedura di discretizzazione descritta nelle sezioni precedenti. In particolare, il processo può essere implementato su un foglio elettronico e permette di analizzare il moto oscillatorio di un pendolo, per generiche condizioni iniziali, in presenza di attrito viscoso e termini forzanti (ad esempio utilizzabile per modellare lo scappamento dell'orologio a pendolo). In effetti, il calcolo numerico delle soluzioni della (2.1) è applicabile identicamente ai casi di oscillazioni generate da forze confinanti che dipendono anche non linearmente dallo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio.

Le equazioni di ricorrenza per un pendolo nell'intervallo di tempo $[0, T]$, in presenza di attrito viscoso e di un termine forzante sono

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= -\frac{\beta}{m}\omega_i - \frac{g}{l}\sin\theta_i \\
 \omega_i &= \omega_{i-1} + \alpha_{i-1}\tau \\
 \theta_i &= \theta_{i-1} + \omega_{i-1}\tau
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

a cui si può aggiungere un termine forzante del tipo

$$\mu e^{-10\theta_i^2} (1 + \operatorname{sgn}\omega_i)$$

come modello di scappamento di un orologio a pendolo.

Nella (2.7) a_i (rispettivamente ω_i , θ_i) è l'accelerazione angolare (rispettivamente la velocità angolare e la posizione angolare al tempo $i\tau$ con $\tau = T/N$, β è il coefficiente di smorzamento e μ è il parametro di ampiezza del termine forzante. Quest'ultimo è un breve impulso che agisce solo quando il pendolo si trova vicino alla posizione verticale. Il termine $(1 + \operatorname{sgn}\omega_i)$ rende l'impulso attivo solo quando il pendolo attraversa la posizione verticale da sinistra a destra.

Gli studenti possono esaminare varie caratteristiche del moto. In particolare possono analizzare la dipendenza del periodo di oscillazione T dai parametri delle forze. Si può ad esempio verificare che

- -il periodo mostra variazioni trascurabili per piccole ampiezze di oscillazione ($\theta < 5^\circ$).
- -l'isocronismo si perde per grandi ampiezze di oscillazione.
- -il periodo dipende in modo trascurabile dallo smorzamento: anche se l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce.

- -lo scappamento ripristina l'energia persa dall'attrito viscoso senza modificare l'oscillazione

Simulazioni e presentazione grafica dei risultati sono disponibili sul sito http://www.les.unina.it/?page_id=4812.

Con la stessa procedura descritta sopra, è possibile indagare la dinamica dei campi classici. Oltre a ciò che è stato fatto nei casi precedenti, l'analisi numerica di un sistema spazialmente continuo richiede anche un'esplicita discretizzazione delle coordinate spaziali.³ I campi classici diventano così *funzioni su un reticolo spazio-temporale discreto* e le equazioni di evoluzione sono date come *matrici di transizione* che collegano reticoli spaziali corrispondenti a tempi successivi.

Le vibrazioni longitudinali di una corda elastica sono l'esempio più semplice di dinamica dei corpi deformabili. Un modello di corda elastica uni-dimensionale discretizzato può essere dato da una catena di N punti materiali che interagiscono con i loro vicini attraverso molle elastiche di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza a riposo pari alla spaziatura del reticolo spaziale Δx . Denotando con $s(j\Delta x, n\Delta t)$ lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio della massa j -esima al tempo $n\Delta t$, la forza agente su tale massa risulta

$$F_{j\Delta x, n\Delta t} = k[s((j + 1)\Delta x, n\Delta t) - s(j\Delta x, n\Delta t)] - k[s(j\Delta x, n\Delta t) - s((j - 1)\Delta x, n\Delta t)] = k[s((j + 1)\Delta x, n\Delta t) - 2s(j\Delta x, n\Delta t) + s((j - 1)\Delta x, n\Delta t)]. \quad (2.8)$$

³ Si noti che tale discretizzazione è comunque implicita in qualunque calcolo numerico che coinvolge coordinate spaziali, in virtù del numero inevitabilmente finito di cifre decimali utilizzate.

e l'equazione del moto diventa

$$\begin{cases} s(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - s(j\Delta x, n\Delta t) = v(n\Delta t) \Delta t \\ v((n+1)\Delta t) - v(n\Delta t) = \frac{1}{m} F_{j\Delta x, n\Delta t} \Delta t \end{cases} \quad (2.9)$$

dove j ha valori da $-N/2$ a $N/2$ e n misura il tempo discretizzato. Assegnati $s(j\Delta x)$ e le velocità $v(n\Delta x)$ al tempo $t=0$, la soluzione della equazione di ricorrenza da spostamenti e velocità di ogni punto materiale ad ogni tempo $n\Delta t$.

Gli studenti potranno esaminare come l'evoluzione dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri dinamici. Potranno inoltre individuare onde che si propagano e onde stazionarie.

3 - Conclusioni

Il nostro obiettivo era quello di pianificare una strategia unificata per presentare agli studenti delle scuole superiori aspetti teorici e computazionali delle equazioni di evoluzione della fisica classica e moderna. Le difficoltà tecniche che si incontrano nell'affrontare sistemi dinamici complessi in maniera analitica ha spesso impedito di inserire questi argomenti in qualsiasi programma di scuola superiore.

Il tentativo è stato quello di presentare le leggi di evoluzione dei sistemi fisici in maniera comprensibile a una platea studentesca che non conosca l'Analisi Matematica. Ci siamo però proposti di non rinunciare a presentare le idee-forza alla base di ciascuna legge di evoluzione e di fornire agli studenti la possibilità di calcolarne le soluzioni, così da poter valutare la loro efficacia. La proposta delineata sopra è stata

presentata nel corso universitario "Didattica della Fisica" rivolto agli studenti del secondo anno in fisica e matematica e in un corso di formazione per insegnanti di scienze delle scuole superiori. Maggiori dettagli e tutte le animazioni e le simulazioni ottenute con l'utilizzo del foglio elettronico o con software a oggetti sono disponibili nella sezione "Risorse Didattiche" del sito <http://www.les.unina.it>.

Bibliografia

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

BENACKA, J. (2016) "Numerical Modelling with Spreadsheets as a Means to Promote STEM to High School Students". In: «*Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*», 12, 4, 947-964.

DELLA CORTE A. and RUSSO L. (2016). *La bottega dello scienziato. Introduzione al metodo scientifico*. Bologna: Il Mulino.

GOODSTEIN D. and GOODSTEIN J. (1996). *Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun*. New York: W. W. Norton. Trad. Italiana: *Il moto dei pianeti intorno al Sole. Una lezione inedita di Richard Feynman* (1997). Bologna: Zanichelli.

GRAFFI S. and DEGLI ESPOSTI M. (2003). *Fisica matematica discreta*. Springer Science & Business Media.

ISRAEL G. (1996). *La visione matematica della realtà. Introduzione ai temi e alla storia della modellistica matematica*. Roma-Bari: Laterza.

LEVRINI O. and FANTINI P. (2013). "Encountering Productive Forms of Complexity in Learning Modern Physics". In: «*Science & Education*», 22, pp. 1895-1910.

MAYO D. G. (1996). *Error and the Growth of Experimental Knowledge*. Chicago: Chicago University Press.

SJØBERG S. (2002). "Science and technology education current challenges and possible solutions". In: E. Jenkins (Ed.), *Innovations in science and technology education*, Vol 8. Paris: UNESCO.

VISTNES, A. I. and HJORTH-JENSEN M. (2005). "Numerical Methods as an Integrated Part of Physics Education", 9th Workshop on Multimedia in *Physics Teaching and Learning (Graz, Austria 9-11 September 2004)*. *arXiv:physics/0505116 [physics.ed-ph]*.

WEBER, J. and WILHELM, T. (2020) "The benefit of computational modelling in physics teaching: a historical overview." In: «*European Journal of Physics*», 41, 034003.



ARTE SCIENZA magazine

Alessandra Calò, Anna Avelli, Anna Dell'Agata, Anna Maria Pertoldi,
Antonio Castellani, Carlo Rovelli, Caterina Marrone, Franco Valobra,
Fulvio Guerrieri, Georgi Gospodinov, Giuseppe Castelluzzo, Isabella de Paz,
Loretta Cappanera, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Luigi Zanni, Paola Dallavalle,
Pierluigi Assogna, Roberto D'Alessandro, Sonia Morganti, Stefano Torossi,
Susanna Schimperna, Ugo Locatelli, Viola Spicuglia

L'IMPERO DEI SENSORI	IMMAGINANDO L'ALDILA	LA DIVA SCIENZIATA	CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ NELLA SCIENZA	LA MENTE BICAMERALE	QUANDO IL PUBBLICO TI MANDA ALL'INFERNO	UMANESIMO DIGITALE
----------------------------	-------------------------	-----------------------	--	------------------------	---	-----------------------

Anno IV - N.5 giugno 2023 - Supplemento di *ArteScienza*
<http://www.associazioneartescienza.it>
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.94/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'A. P.S. "Arte e Scienza"

Il siamese di Koch

Un frattale straordinariamente vario nel tassellare il piano

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.114

Sunto: *Vengono presentati particolari poligoni con lati trasformati in merletti di Koch, alcuni dei quali, se non assenti, almeno poco noti in letteratura. Tra questi si evidenziano forme triangolari esagonali e rombiche capaci di veicolare una tassellazione del piano mediante una unica forma frattale, una variante allungata del fiocco di neve di Koch, detta Siamese, che si moltiplica in serie geometriche decrescenti di figure simili formanti trame frattali straordinariamente varie.*

Parole Chiave: *Curve di Koch, variante Siamese del fiocco di neve, tassellazioni con frattali.*

Abstract: *Particular polygons are presented with sides transformed into Koch curves, some of which, if not absent, are at least little known in the literature. Among these, hexagonal and rhombic triangular shapes are highlighted, capable of conveying a tessellation of the plane through a single fractal shape, an elongated variant of Koch's snowflake, called Siamese, which multiplies in decreasing geometric series of similar figures forming extraordinarily varied fractal textures.*

Keywords: *Koch curves, Siamese variant of the snowflake, tessellations with fractals.*

1 - Introduzione

Nel pittoresco mondo dei frattali, il protagonista di questo articolo sembra senza nome. Se in qualche occasione un nome gli è stato assegnato, la notizia non si è diffusa abbastanza, così nel 2020, quando pubblicai sul Tartapelago (Pietrocola 2020) una serie di animazioni sulla tassellatura frattale del piano, che lo mostrano come rivale del famoso fiocco di neve di Koch, dovetti assegnargliene uno! Lo chiamai “siamese” perché corrisponde alla fusione di due normali fiocchi gemelli in uno solo di forma allungata.

Sia il fiocco che il siamese, così come le altre figure che presenteremo, derivano dal celebre merletto di Koch, scoperto nel 1904 dal matematico svedese Helge von Koch (1870-1924).

1.1 - Il merletto a trina di Koch

Noto anche come curva di Koch e merletto a trina di Koch, il merletto è il mattone usato per costruire le figure che saranno introdotte nei prossimi paragrafi.

Diremo merlettato un segmento trasformato secondo la procedura seguente.

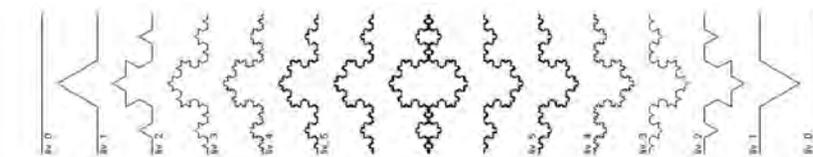


Figura 1. I primi livelli della costruzione con punta a sinistra e a destra. Al centro due opposti merletti combaciano formando l’antisiamese

Il primo passo per la costruzione del merletto è frazionare in tre parti uguali un segmento. I due estremi rimangono al loro posto mentre il centrale, raddoppiato, mantiene la continuità del segmento originario formando un triangolo equilatero privo però della base.

Il secondo passo è come il primo, ma si applica a ognuno dei quattro segmenti della spezzata ottenuta. Si continua così, un livello dopo l'altro, ogni volta la lunghezza dei segmenti è divisa per tre e il loro numero moltiplicato per quattro.

I passi non finirebbero mai, ma, mentre per gli antichi greci esisteva solo l'infinito potenziale, per noi esiste anche quello attuale (Lombardo Radice, 2014). Possiamo perciò considerare tutti gli infiniti passi come effettivamente conclusi e quindi il relativo risultato finale: una singolare curva continua, ma ovunque non derivabile, limitata in estensione, ma talmente frastagliata da avere lunghezza infinita! Come ogni figura simile ad una sua parte propria, cioè auto-simile, il merletto di Koch è considerato un frattale.

1.2 - Il fiocco e l'antifiocco di neve di Koch

Il fiocco è di gran lunga il più famoso delle figure che stiamo presentando. L'antifiocco, meno noto del fiocco, gode comunque di una relativa notorietà come mostra anche il possesso di un nome condiviso che lo identifica non solo in Italia (antisnowflake). Merlettando i lati di un triangolo equilatero verso l'esterno si ottiene il fiocco, merlettandoli verso l'interno si ottiene invece l'antifiocco (fig.2) . Il fiocco si può ottenere anche merlettando verso l'interno i lati di un esagono regolare. Un secondo modo per ottenere l'antifiocco

è, invece, merlettare da ambo le parti tre segmenti uguali convergenti in un punto a formare angoli di 120° .

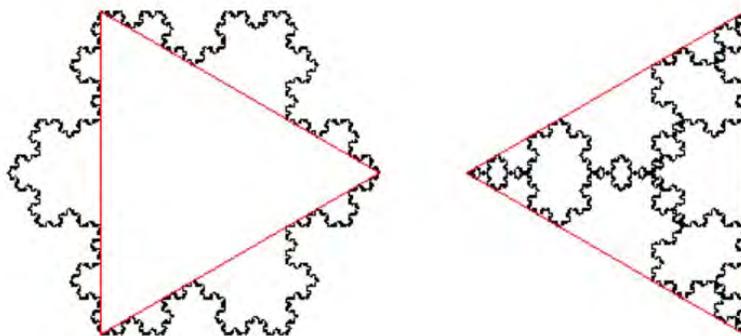


Figura 2. Il fiocco e l'antifiocco, merletti esterni e interni al triangolo.

Il fiocco è una curva chiusa di perimetro infinito. Infatti, nella sua costruzione partendo dal triangolo equilatero, passo dopo passo, il calcolo del perimetro porta ad una serie geometrica divergente di ragione $4/3$.

L'area delimitata dal fiocco conduce invece ad una serie geometrica convergente di ragione $4/9$ e risulta aumentata del 60% dell'area del triangolo equilatero che lo delimita internamente. Simmetricamente l'area dell'antifiocco, distribuita in quella di infiniti siamesi, diminuisce del 60% rispetto all'area dello stesso triangolo, che però lo delimita esternamente.

Il fiocco di neve composto da frattali, a rigore, non è autosimile, ma è comunque considerato un frattale in virtù degli elementi che lo compongono. L'antifiocco invece è autosimile. Per esempio se si sottraggono i tre siamesi più grandi da questo frattale rimane, al centro, isolato, un antifiocco con le dimensioni pari a un terzo dell'originale. Iterando questo

procedimento, si ottengono infinite miniature decrescenti in progressione geometrica.

2 - Il siamese e l'antisiamese di Koch

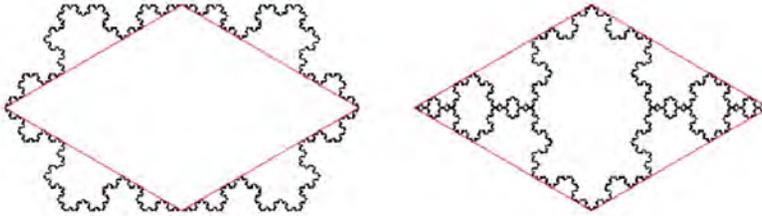


Figura 3. Il siamese e l'antisiamese, esterni e interni al rombo.

Un modo per costruire il siamese è partire da un particolare rombo, scomponibile mediante la sua diagonale minore in due triangoli equilateri, e merlettare i suoi lati verso l'esterno. Verso l'interno invece si ottiene l'antisiamese (fig.3). Come l'antifiocco si contrappone al fiocco che merletta esternamente il triangolo così l'antisiamese si contrappone al siamese che merletta esternamente il rombo. Anche questa coppia di figure, come le precedenti, ha una costruzione alternativa. Il secondo modo per ottenere il siamese è merlettare internamente un esagono ottenuto da un regolare raddoppiando due lati paralleli, avendo cura di merlettare separatamente le due metà dei lati doppi. Il secondo modo per ottenere l'antisiamese è merlettare un segmento da ambo le parti.

Al centro dell'antisiamese vi è il siamese maggiore. Ai suoi fianchi si notano i due siamesi, secondi in altezza, aventi

dimensioni ridotte a un terzo ed area ridotta ad un nono del maggiore.

Questi due a loro volta hanno due siamesi ancora più piccoli ai loro lati e così via all'infinito.

Le aree divise ogni volta per nove diminuiscono secondo una progressione geometrica di ragione $1/9$ mentre il loro numero raddoppia ogni volta. Anche il siamese, come il fiocco, è una curva chiusa di perimetro infinito.

L'area delimitata dal siamese porta invece ad una serie geometrica convergente e risulta aumentata del 40% rispetto all'area del rombo che lo delimita internamente. Simmetricamente l'area dell'antisiamese, distribuita in quella di infiniti siamesi, diminuisce del 40%.

L'antisiamese, come l'antifiocco, è un frattale autosimile. Infatti se si sottrae il siamese maggiore centrale, rimangono, isolati, due antisiamesi in miniatura. Iterando questo procedimento si ottengono miniature simili decrescenti in progressione geometrica.

Dunque, benché in letteratura sembri sconosciuto, il siamese si trova non di rado rappresentato come parte ripetuta dell'antifiocco dove compare anche l'antisiamese in tre copie uguali.

In questo frattale il siamese è unico attore, ma è moltiplicato all'infinito in una serie geometrica di suoi simili, sempre più piccoli man mano che ci si avvicina al centro oppure ai tre vertici che sono solo alcuni degli infiniti punti di accumulazione di questa figura.

L'antifiocco però è solo una delle molteplici composizioni che hanno il siamese come unico attore. Forse la bellezza complessiva dell'antifiocco ha avuto il sopravvento e ha messo

in ombra il suo protagonista, pur ripetuto all'infinito. Oppure, chissà, ad oscurare la fama del siamese potrebbe essere stata una paura irrazionale indotta dalla sua forma allungata evocante il pernicioso bacillo, scoperto però da un altro Koch.

3 - Il pupazzo di neve di Koch

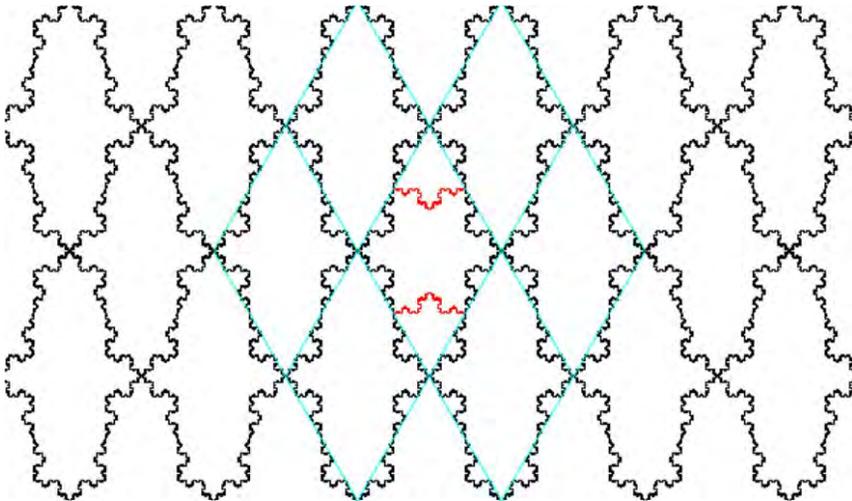


Figura 4. Il pupazzo di Koch eredita la proprietà di tassellare il piano dal rombo che lo genera. Al centro è evidenziata la possibilità di scomporre questo frattale in tre fiocchi, uno grande e due più piccoli. Ne deriva che il piano può essere tassellato da fiocchi di due diverse taglie.

Se infiniti sono i poligoni merlettabili, perché allora dare un nome solo ad alcuni di essi? E' opportuno dar loro un nome e studiarli quando svolgono un ruolo importante, per esempio nella tassellatura, e mostrano quindi straordinarie qualità. Ecco allora il pupazzo di neve di Koch (fig.4). Si ottiene da un rombo simile a quello già visto con angoli di 60° e 120° . Ogni

lato si merletta però in due tappe partendo da un angolo acuto. La prima metà del primo segmento viene merlettata esternamente, la seconda internamente, si procede per tutti e quattro i lati invertendo ogni volta l'ordine precedente (ei,ie,ei,ie).

Il pupazzo può essere anche scomposto in tre fiocchi. Uno grande e due piccoli. Per rendersene conto si può pensare ad un esagono regolare con due triangoli equilateri su due dei lati opposti che, eliminati i lati in comune, lo trasformano in rombo. L'algoritmo visto induce a merlettare esternamente i lati del triangolo e internamente quelli dell'esagono. In ambo i casi si genera parte di un fiocco dove però il fiocco dell'esagono ha un'area tripla di quella degli altri due. L'area racchiusa dal pupazzo è uguale a quella del rombo con cui viene costruito. Infatti quello che si perde con le quattro merlettature interne lo si recupera con le quattro esterne. stata una paura irrazionale indotta dalla sua forma allungata evocante il pernicioso bacillo, scoperto però da un altro Koch.

4 - Replicanti e tassellanti

Il più semplice dei nostri replicanti, capaci di riprodursi per scissione, è lo stesso merletto di Koch. E' infatti una figura che si ripete (Gardner, 1997) appartenente alla classe rep-2.

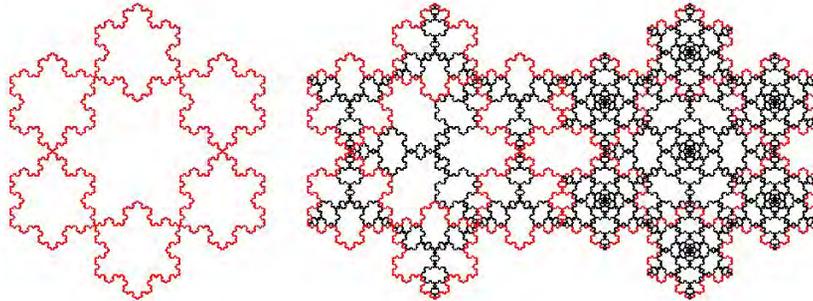


Figura 5. Un fiocco di neve formato da 7 fiocchi mostra che il fiocco è un replicante irregolare: irrep-7. Due copie dello stesso, sulla destra, integrate diversamente, sono state accostate per iniziare una tassellazione esagonale del piano veicolante una tassellazione di soli siamesi. La prima "piastrella" è stata integrata da un antisiamese, in ognuno dei sette fiocchi. La seconda da sei antisiamesi a raggiera. L'esempio mostra anche che, per ogni tassellazione con fiocchi di neve, si possono far corrispondere più tassellazioni con soli siamesi

Questo perché se lo suddividiamo in due parti uguali, ogni parte è un merletto in miniatura del tutto simile all'originale. Altri esempi di questa proprietà sono il triangolo rettangolo isoscele e il rettangolo corrispondente al foglio A4. Anche il fiocco è un replicante in quanto scomponibile in 7 parti simili a se stesso. Non tutte uguali però, sei uguali ed una più grande (fig.5). Per questo è considerato un replicante irregolare. Lo chiameremo irrep-7 come la sua classe di appartenenza. E il siamese? Non mi sembra si possa scomporre in un numero finito di copie simili a se stesso. In compenso, e non mi sembra poco, si può scomporre in un numero infinito di suoi simili. La prova in fig.6, dove si osservano infinite serie geometriche di siamesi incastrarsi alla perfezione a formare un solo siamese!

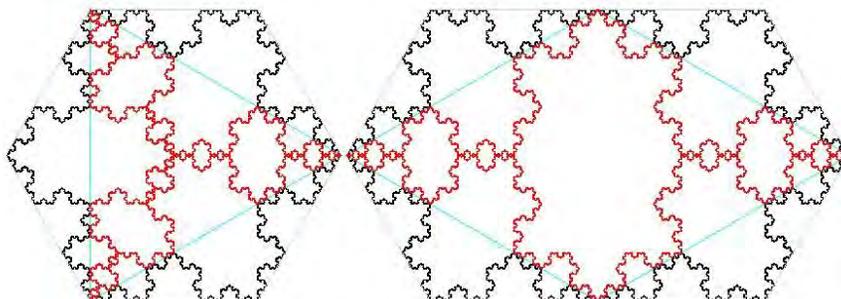


Figura 6. Antifiocco e antisiamese (in rosso) inseriti internamente al fiocco e al siamese. La seconda figura ottenuta si scompone in infinite copie di se stessa.

Il pupazzo si distingue tra le altre figure basate sul merletto di Koch per la sua capacità, ereditata dal rombo, di tassellare il piano, cioè di ripetersi identica ricoprendo il piano senza alcuna sovrapposizione. Il fiocco può fare altrettanto solo se si usano due sue copie, una di area tripla dell'altra. Per questo basta partire da una tassellazione di pupazzi e sostituire ognuno di essi con i tre fiocchi equivalenti, uno grande e due piccoli. Il siamese, a quanto ne so, non è in grado di tassellare il piano con un numero finito di copie ma eccelle invece nel tassellarlo con infinite copie di sé in serie geometriche decrescenti. Per constatarlo possiamo partire dall'antifiocco. Il solito modo di presentarlo in forma isolata nasconde molto della sua bellezza. Per scoprirlo possiamo tassellare il piano con il triangolo equilatero che lo contiene .

In alternativa potremmo usare rombi formati da coppie di triangoli frattali o esagoni composti da sei di questi (fig.7).

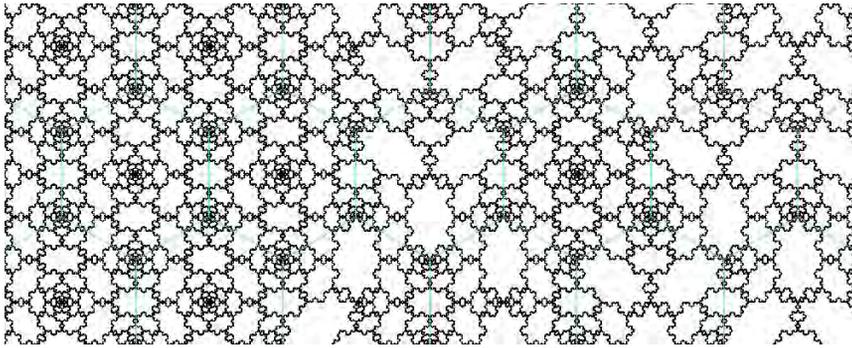


Figura 7. Tassellazione con siamesi veicolata da esagoni frattali di tipo diverso. A sinistra ci sono esagoni regolari ottenuti inserendo nel fiocco inscritto, sei antisiamesi a raggiera congiungenti il centro con i vertici dell'esagono. Proseguendo verso destra gli esagoni perdono casualmente da 0 a 3 raggi non consecutivi.

Continuando ad assemblare tasselli, data la simmetria della figura ripetuta, si otterrà sempre lo stesso disegno periodico. Emergerà con questo un magnifico incastro di un solo protagonista, sia pure in infinite copie di dimensioni decrescenti: il siamese di Koch!

Ci sono molti altri modi simili, però, per assemblare siamesi ed ottenere risultati incredibilmente vari. Potremmo tassellare il piano mediante il rombo frattale contenente l'antisiamese oppure con l'esagono allungato contenente il siamese oppure con l'esagono regolare del fiocco completo di antifiocco e tanti altri (fig.8).

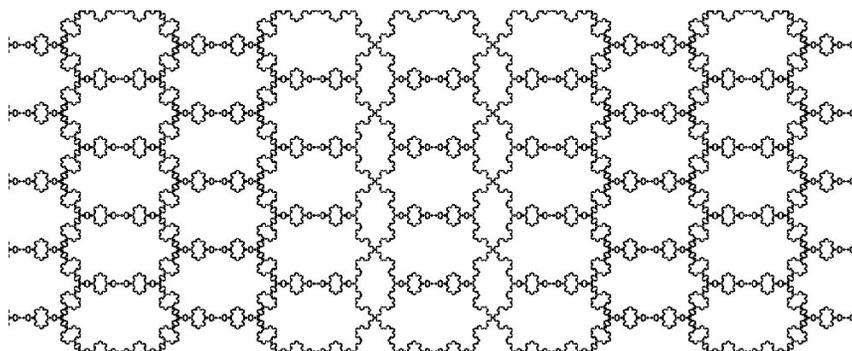


Figura 8. Tassellazione con siamesi veicolata da una tassellazione con esagoni allungati, merlettati internamente, e interrotta da due file centrali di rombi, merlettati esternamente, che si inseriscono perfettamente nella trama

C'è una gran varietà di diversi tasselli della normale geometria che possono veicolare una tassellazione frattale del piano fatta da soli siamesi.

Nel caso dell'esagono con fiocco e antifiocco si forma un esagono con vertici a cui corrispondono disegni alternati di due tipi. Ogni volta che si aggiunge un esagono frattale si hanno di fronte due diverse possibilità. Si potrebbe anche prendere a caso ogni volta tra due alternative creando configurazioni caotiche.

5- Un confronto

Dopo questa breve disamina introduttiva sulla intricata geometria creata dal merletto di Koch, è giunto il momento di mettere a confronto il fiocco e il siamese per stabilire se la grande fama del primo e la sistematica ignoranza del secondo hanno un loro motivo d'essere.

Dal punto di vista estetico il primo sembra essere preferibile per la sua maggiore simmetria ereditata dall'esagono regolare da cui deriva. Una figura che dal punto di vista estetico sembra essere superiore a quella dell'esagono allungato da cui deriva il secondo.

Il fiocco sembra anche aver ereditato qualcosa della capacità dell'esagono di tassellare il piano, pur non riuscendo a farlo con una sola figura identicamente ripetuta. Ci riesce però con due sue copie di diverse dimensioni, cosa che il siamese non sembra in grado di fare, nonostante il suo genitore esagonale sia anche lui capace di ciò. Come abbiamo visto, per questo scopo al siamese servono serie infinite, ma, in compenso, il risultato è straordinariamente vario.

Non che le tassellazioni del piano con fiocchi non possano essere rese varie. Sostituendo alcuni fiocchi tassellanti con l'irrep-7, come in tutti i replicanti, si può, infatti, complicare all'infinito.

Ciononostante la sfida con il siamese è persa perchè qualsiasi tassellazione con soli fiocchi si può trasformare in una tassellazione con solo siamesi in infiniti modi, per esempio inserendo un antifiocco dentro ogni fiocco (fig.6).

Risultando il viceversa impossibile ed essendoci tanti altri modi per tassellare il piano con soli siamesi, mi sembra di aver giustificato il fatto che queste tassellature appaiono all'occhio molto più varie e interessanti (Pietrocola, 2020).

Per concludere credo che il confronto mostri che le due figure siano entrambe degne di interesse per la loro specificità e che cooperino nel mostrare la bellezza della geometria frattale: un mondo che sembra ancora in parte inesplorato e in cui potrete entrare attivamente armandovi di una tartaruga

del linguaggio Logo (fig.9). Potreste così sperimentando voi stessi, come ho fatto io, le virtù di questo automa digitale ideato da Seymour Papert (Papert, 1984) per rendere l'apprendimento logico-formale attivo, divertente ed efficace.

6 - Sulla tartaruga

Tutte le figure di questo articolo sono state realizzate con FMSLogo una versione del Logo che si può scaricare gratis alla url "<https://fmslogo.sourceforge.io/>" cliccando poi su "download FMSLogo".

In fig.9 è visibile la finestra principale con il pulsante "Execute" per mandare in esecuzione gli ordini per la tartaruga scritti nell'apposita linea dei comandi alla sinistra del pulsante. Appena sopra c'è un campo di testo dove rimane traccia delle immissioni. Superiormente c'è il campo grafico dove la tartaruga, rappresentata dal classico triangolino, esegue gli ordini impartiti. Nella figura l'automa ha appena realizzato un pupazzo di neve rispondendo al comando "pupazzo 100". Le pochissime primitive necessarie per iniziare sono spiegate nel vocabolario animato del Tartapelago (Pietrocola, 2005). Se volete copiare le procedure per realizzare le figure mostrate nell'articolo potete immettere la url: "www.pietrocola.eu/periodicomat.txt", e poi copiare e incollare il testo nella memoria della tartaruga, accessibile premendo il tasto "Edall" che apre la finestra "Editor" visibile in figura. Dopo aver salvato il testo copiato mediante il menù "file" la tartaruga, a comando, eseguirà i vari disegni nelle dimensioni specificate. Tutto dovrebbe essere agevole ma se avete problemi non esitate a contattarmi.

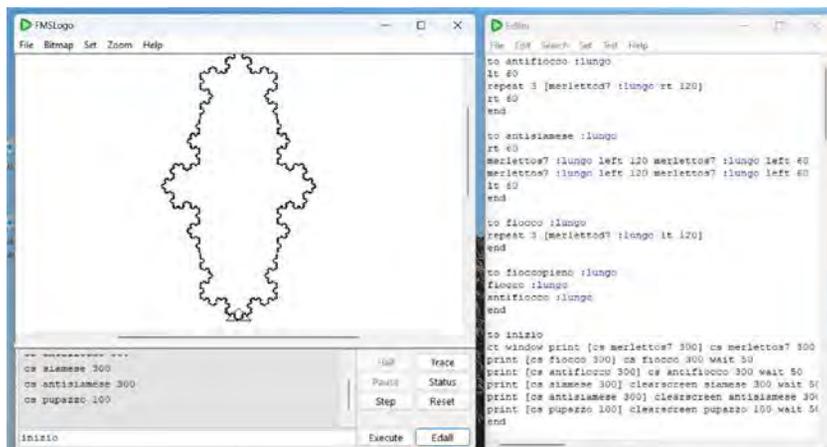


Figura 9. Le finestre del FMSLogo.

Bibliografia

G.Pietrocola (2020), L'arte della tassellazione del piano con fiocchi di Koch, Tartapelago, 2020, url:
<http://www.maecla.it/tartapelago/frattali/indexfiocchi.htm>

L.Lombardo Radice (2014), *L'infinito, Itinerari filosofici e matematici di un concetto base*, Editori Riuniti, 2014

G.Pietrocola (2005), Vocabolario animato primitive Logo, Tartapelago, Maecla, 2005, url:
<http://www.maecla.it/tartapelago/vocanimato/index.htm>

M.Gardner (1997), Figure piane che si ripetono in *Enigmi e giochi matematici*, vol.4, Sansoni

S. Papert (1984), *Mindstorm Bambini, computer e creatività*, Emme edizioni. (1993).



Perimetro e area nella scuola secondaria di I grado: dalle esperienze di Emma Castelnuovo all'uso di software di geometria dinamica

Marco D'Errico*

*IC Nino Cortese (Casoria – Na); marco.derrico1@posta.istruzione.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.115

Sunto: *Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.*

In diversi suoi lavori, questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro". Nell'articolo viene ripercorsa la proposta didattica di Emma Castelnuovo presentandola attraverso esperienze concrete svolte con alunni della scuola secondaria di I grado ed ampliandola attraverso l'utilizzo di software di geometria dinamica come Geogebra.

Parole Chiave: *Perimetro, area, didattica, Emma Castelnuovo, geogebra.*

Abstract: *In the Castelnuovo's lessons a surprising and, at the same time, innovative thing is to teach to observe and look around. In her works, this is*

particularly evident in the description of the topic "area and perimeter". In this article is presented concrete experiences on this topic carried out with students also using the geogebra software.

Keywords: *Area, perimeter, didactics, Emma Castelnuovo, Geogebra.*

1 - Introduzione

Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.

Nei suoi volumi "Documenti di un'esposizione matematica", "Pentole, ombre e formiche", "Officina matematica" e "Didattica della matematica" nonché nei testi per la scuola secondaria di I grado, questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro". Emma Castelnuovo in questa trattazione cerca di sciogliere uno dei nodi cruciali della geometria ovvero la confusione che spesso i bambini fanno tra perimetro e area all'inizio del ciclo scolastico secondario di I grado. Un classico errore, ad esempio, è di dividere per 4 l'area del quadrato al fine di ottenere la lunghezza del lato. L'innovazione introdotta su questi temi da parte di Castelnuovo è proprio il trattare questi due argomenti congiuntamente (ovvero relativamente allo stesso problema).

«La letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti sul piano relazionale, del tipo: se A e B sono due figure piane, allora:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l'ordine "perimetro - area" con "area - perimetro" » (D'Amore, 2005);

«se vi sono due relazioni con qualche mutuo legame reciproco, lo studente tenta di applicare la seguente "legge di conservazione": se la tal cosa cresce, anche quest'altra ad essa relazionata cresce (e viceversa)» (Azhari, 1998).

Si può partire, quindi, considerando che poligoni che hanno lo stesso perimetro possono avere diversa area o che poligoni con la stessa area possono avere diverso perimetro.

Durante una lezione tenuta a Cenci nel 2003 Emma Castelnuovo introduce queste tematiche sottolineando l'importanza che rivestono da un punto di vista didattico in quanto "c'è qualcosa che cambia". E questo induce prima di tutto ad osservare e poi a sperimentare.

2 - Poligoni isoperimetrici ma non equivalenti

Partiamo da un'osservazione contenuta in uno dei libri di Pappo di Alessandria (vissuto intorno al 350 d. C.): "le api, in virtù di un certo senso geometrico, sanno che l'esagono regolare ha un'area più grande, e contiene quindi più miele, del quadrato o del triangolo di ugual perimetro".

Nella narrazione della costruzione di Cartagine contenuta nell'Eneide di Virgilio (V, libro I, versi 335-368) troviamo invece che Didone, figlia del re Tiro, fugge dalla sua città per

questioni familiari e politiche e giunge nella bellissima baia di Cartagine. Affascinata da tanta bellezza, Didone decide di stabilirsi in questa terra. Ma il "proprietario" della zona non è intenzionato a cedere appezzamenti. Per far cambiare idea a Didone e, contemporaneamente, per prenderla in giro, il proprietario stesso le dona una pelle di bue per creare il "contorno" della sua città. Allora Didone raccoglie la sfida e taglia la pelle in strisce sottili, e per ottenere la massima superficie le dispone a forma di cerchio. Questo perché, a parità di perimetro, il cerchio è la figura geometrica che racchiude l'area massima. Molte città medioevali, infatti, hanno proprio questa forma (basta cercare in rete provando ad esempio con Milano, Parma e Viterbo).

Prendiamo quattro penne uguali fra loro. Possiamo costruire un quadrilatero. In particolare possiamo costruire un quadrato. La somma delle misure delle lunghezze delle penne rappresentano il perimetro del quadrato. Come possiamo rappresentare l'area? Possiamo ad esempio riempire l'interno del quadrato di sabbia (figura 1). Il quadrato che abbiamo costruito è articolabile. A mano a mano che il quadrato viene deformato come nella figura, pur rimanendo il perimetro lo stesso, la sabbia fuoriesce dalla figura fino a scomparire del tutto: ovvero, l'area diminuisce.

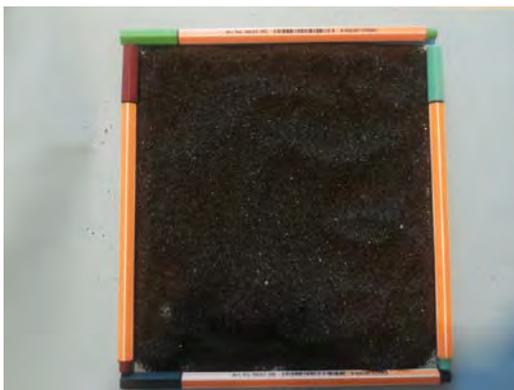
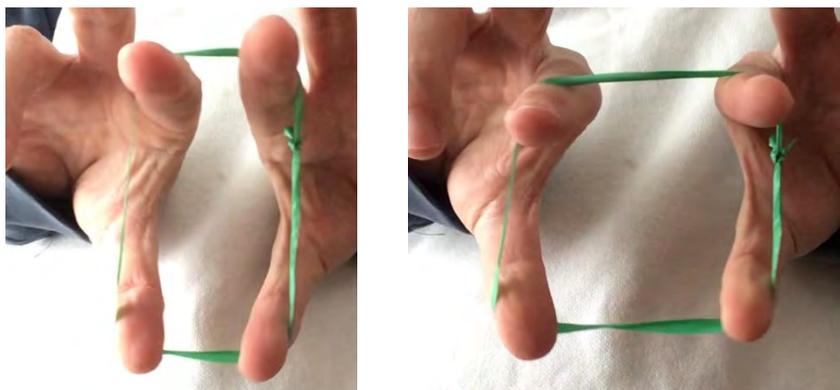




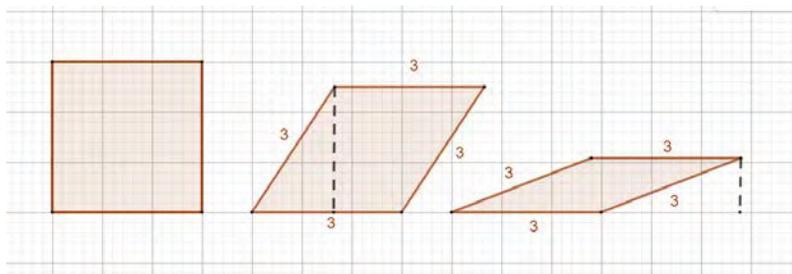
Fig. 1 – Parallelogrammi isoperimetrici

Possiamo realizzare questa esperienza simile anche con uno spago:



Quando il parallelogramma è completamente schiacciato l'area diventa uguale a zero.

L'altezza della figura infatti misura sempre meno man mano che si "schiaccia" la figura:



E dato che l'area la calcoliamo moltiplicando la base per l'altezza, chiaramente nel caso limite in cui l'altezza è zero (la figura è schiacciata completamente) anche l'area diventa uguale a zero perché qualsiasi numero moltiplicato per zero fa zero (è un caso limite; la figura è completamente schiacciata). L'altro caso è quando il parallelogramma è un quadrato con altezza massima e quindi anche area massima.

Passiamo a verificare anche numericamente allora. Ammettiamo che lo spago con cui abbiamo costruito il

rettangolo misuri 40 cm. Il suo semiperimetro misura allora 20 cm.

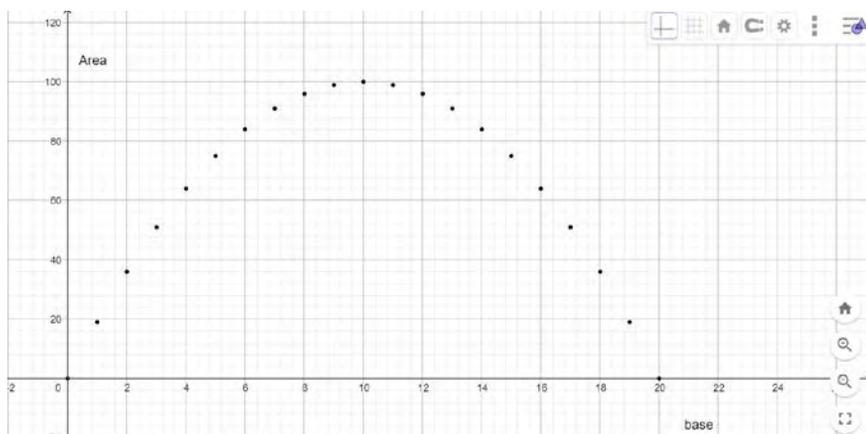
Facciamo variare le misure dei due lati (usando solo i numeri naturali), facendo in modo che il perimetro risulti sempre lo stesso. Vediamo se il calcolo dell'area fornisce effettivamente risultati differenti:

<i>Base</i>	<i>Altezza</i>	<i>Semiperimetro</i>	<i>Area</i>
1	19	20	19
2	18	20	36
3	17	20	51
4	16	20	64
5	15	20	75
6	14	20	84
7	13	20	91
8	12	20	96
9	11	20	99
10	10	20	100
11	9	20	99
12	8	20	96
13	7	20	91
...

(è utile far notare agli alunni che la differenza tra $9+11$ ed $11+1$ sta nel fatto che il secondo rettangolo è ruotato di 90° rispetto al primo).

Si osserva quindi che fra i rettangoli isoperimetrici ha l'area massima quello che ha i due lati di 10 e 10... ovvero un quadrato.

Rappresentiamo questi dati su un piano cartesiano. Per visualizzare come varia l'area del rettangolo su questo diagramma possiamo estrapolare dalla tabella i valori della base (asse x) e dell'area (asse y).



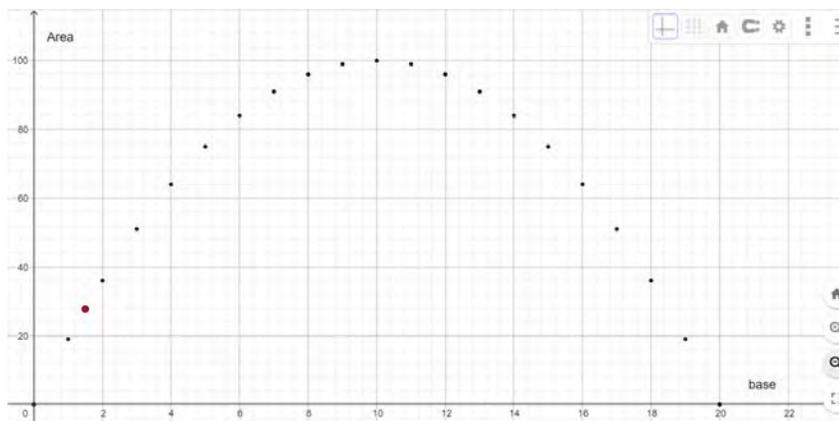
Discutiamo il grafico con gli allievi.

Ad esempio: cosa accade nel punto **(10; 100)**? Quali sono i casi limite? I punti seguono un andamento o sono posizionati a caso? Puoi mettere altri punti?

Proprio sull'ultima domanda possiamo dire che nella nostra tabella abbiamo considerato, per le dimensioni dei rettangoli, solo i numeri naturali. Possiamo però inserire anche i razionali (o meglio la loro rappresentazione decimale). Ad esempio:

<i>Base</i>	<i>Altezza</i>	<i>Semiperimetro</i>	<i>Area</i>
1,5	18,5	20	27,75

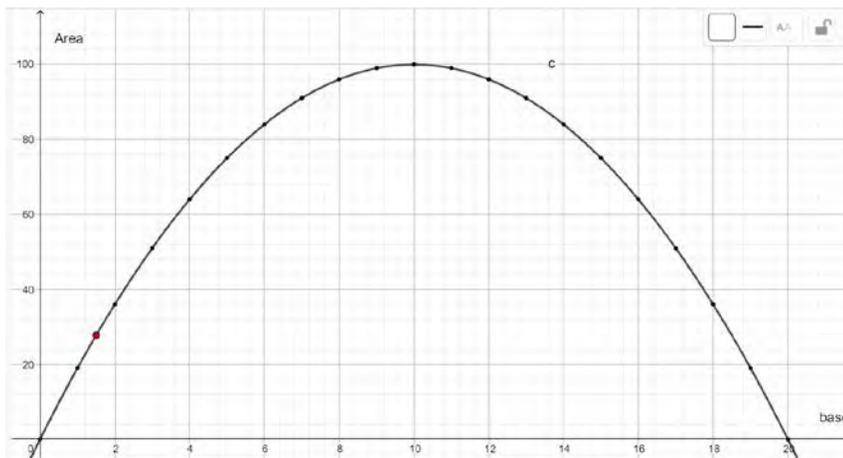
Se l'andamento dei punti sul diagramma cartesiano non è casuale, la nuova coppia che forma il punto $(1,5; 27,75)$ deve seguire l'andamento che abbiamo individuato. Proviamo:



Questo cosa significa?

Significa che in realtà quelli che vediamo sono solo alcuni dei punti che compongono una curva fatta da infiniti punti (tutte le coppie di numeri naturali e razionali che potrebbero rappresentare la base e l'area di un rettangolo il cui semiperimetro è 20).

Allora questa curva la possiamo tracciare:



Questa curva è una parabola.

Possiamo immaginarla come la traiettoria di una palla lanciata verso l'alto. La palla arriva al culmine e poi riscalda.

Anche la parabola è molto usata nell'architettura, nell'arte e nella tecnologia (i fari di un'automobile, le antenne "paraboliche").

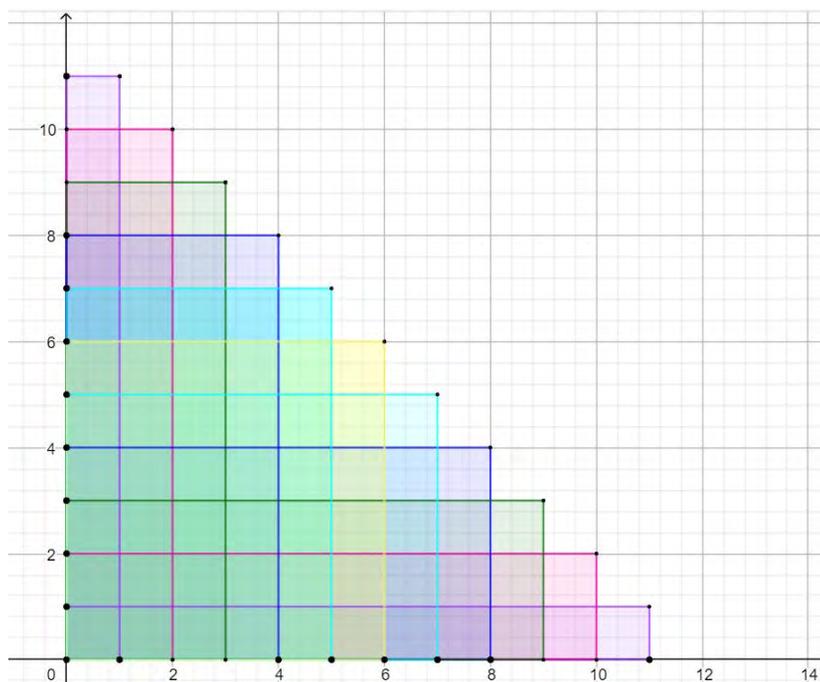
Adesso con cartoncini colorati costruiamo tutti i rettangoli isoperimetrici che hanno il perimetro di 24cm (semiperimetro di 12 cm). Per le dimensioni dei lati usiamo solo i numeri naturali. Facciamo ogni rettangolo di un colore diverso, ma quelli che hanno le dimensioni uguali li facciamo dello stesso colore.

Raccogliamo i dati nella tabella:

<i>Base</i>	<i>Altezza</i>		<i>Semiperimetro</i>
1	11		12
2	10		12
3	9		12
4	8		12

5	7		12
6	6		12
7	5		12
8	4		12
9	3		12
10	2		12
11	1		12

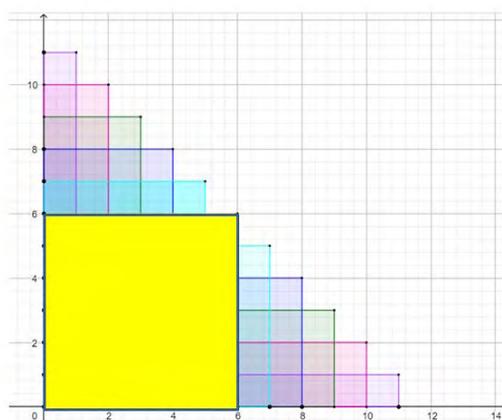
Poi costruiamo un altro diagramma cartesiano e disponiamo i rettangoli su questo diagramma in questo modo:



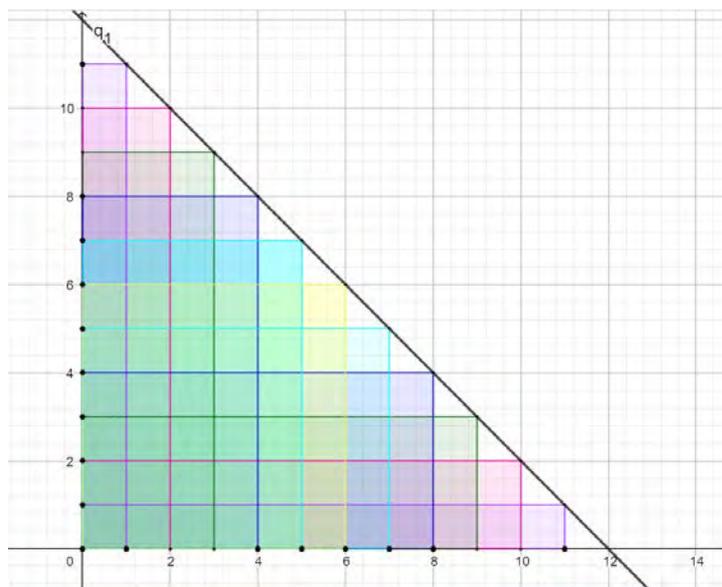
Discutiamo con gli alunni. Cosa possiamo dedurre da questo grafico? Qual è la figura che ha l'area massima?

Base	Altezza	Semiperimetro	Area
1	11	12	11
2	10	12	20
3	9	12	27
4	8	12	32
5	7	12	35
6	6	12	36
7	5	12	35
8	4	12	32
9	3	12	27
10	2	12	20
11	1	12	11

Fra tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro, come si vede, il quadrato è quello che ha area massima.



I vertici mobili (1; 11); (2; 10); (3; 9) ecc. di tutti i rettangoli si dispongono su una retta:



Tutti i vertici mobili hanno una caratteristica: la somma dell'ascissa e dell'ordinata è costante ed è uguale a 12.

Abbiamo considerato solo i numeri naturali. E se considerassimo anche i numeri razionali? Il vertice mobile si dispone ancora su questa retta.

Allora possiamo scrivere che la retta che vediamo contiene tutti i punti la cui somma tra ascissa (x) ed ordinata (y) è sempre 12.

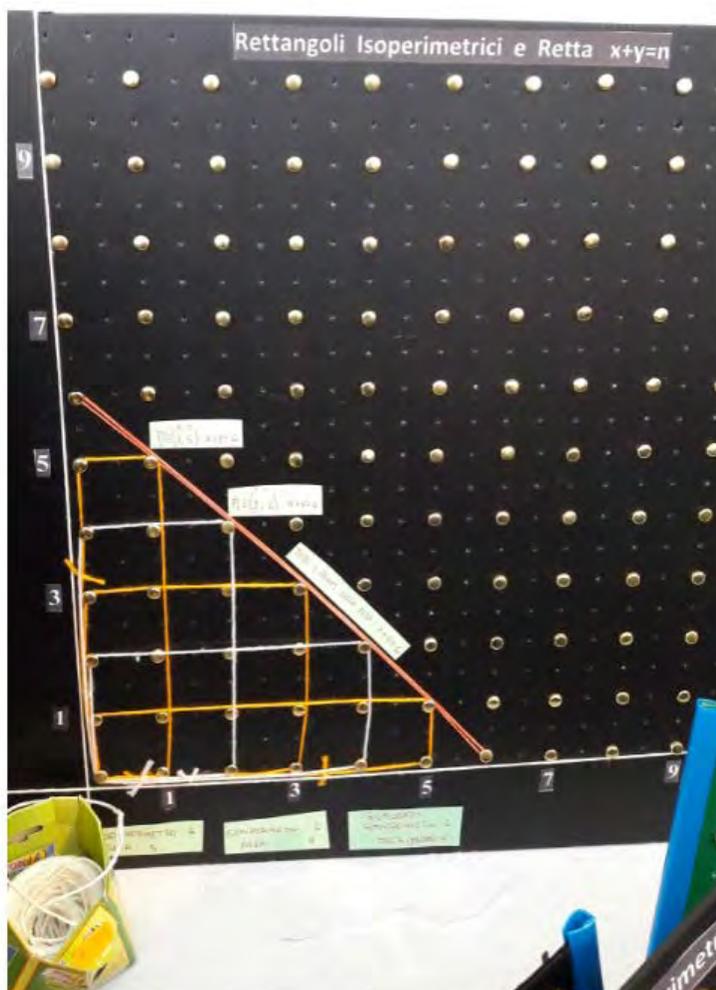
$$x + y = 12$$

La retta che abbiamo disegnato è la rappresentazione di questa equazione.

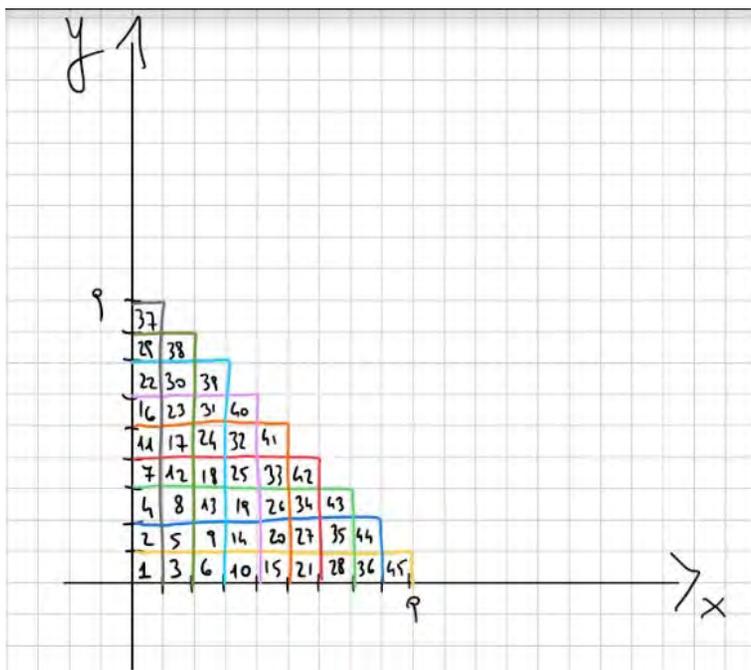
Ogni retta di questo tipo in generale avrà un'equazione:

$$x + y = n$$

Possiamo fare questa costruzione anche utilizzando un geoplano:



Passiamo adesso a calcolare l'area della figura ottenuta in questo modo:



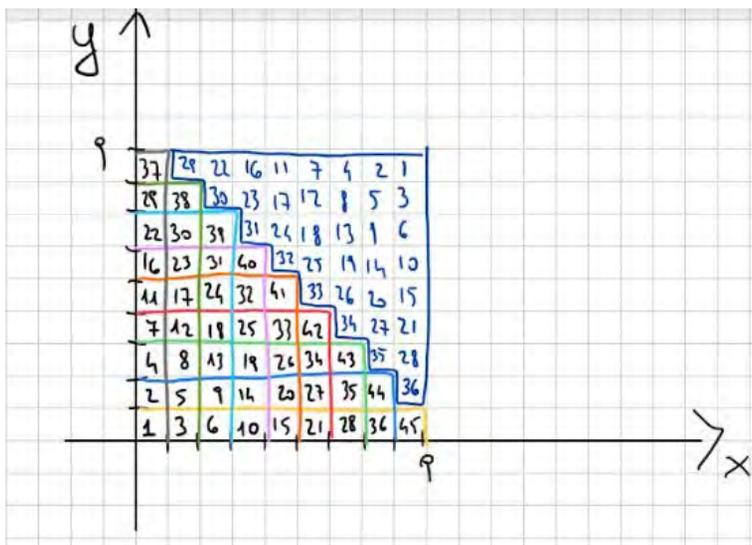
L'area è un numero triangolare:

$$45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

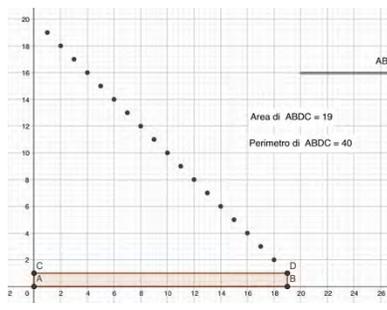
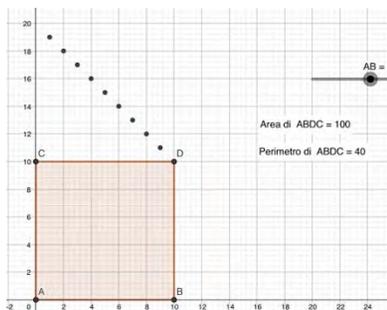
Se aggiungiamo il numero triangolare precedente a quello ottenuto, ovvero:

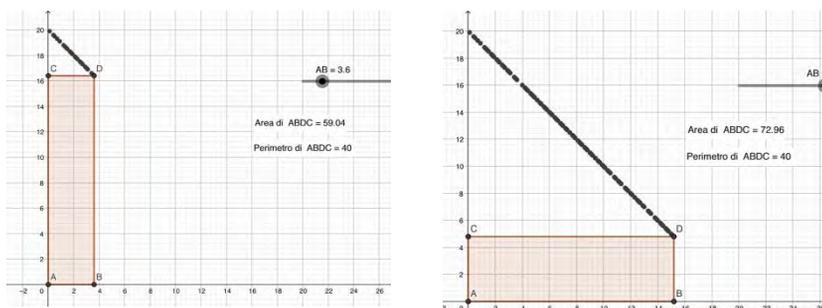
$$36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

avremo: $36 + 45 = 81$ che è un numero quadrato.



L'attività appena proposta può essere integrata con geogebra. Si può costruire un'animazione che faccia muovere i vertici mobili lasciando la loro traccia sul piano cartesiano, prima considerando solo i numeri naturali e poi aggiungendo gli altri insiemi numerici. Questo consente di richiamare anche altri concetti (continuità sulla retta dei numeri, l'importanza di chiarire quale insieme numerico stiamo considerando):





Riferiamoci adesso a triangoli isoperimetrici con uguale base (anche in questo caso il materiale che possiamo usare è molto semplice: un pezzo di spago, un paio di chiodi, una tavoletta di legno, un cartoncino, una matita).

Si fissano due chiodi sulla tavoletta di legno su cui è disteso il cartoncino; indichiamo i chiodi con le lettere A e B (AB quindi sarà la base dei nostri triangoli). Ai due chiodi A e B leghiamo un pezzo di spago (che sia più lungo della base AB). Con la matita si tende lo spago. Si vede che lo spago forma un triangolo di vertici: A, B, punta della matita (figura 2).

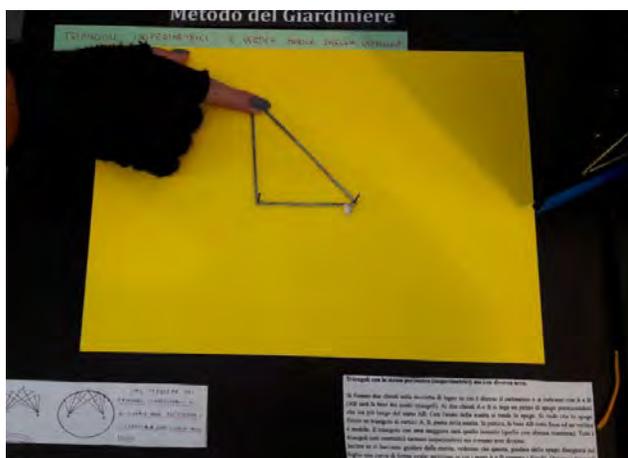
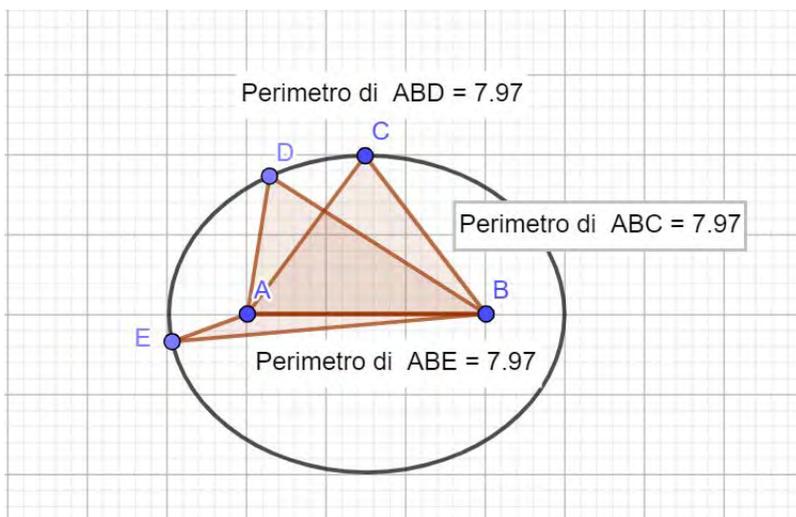
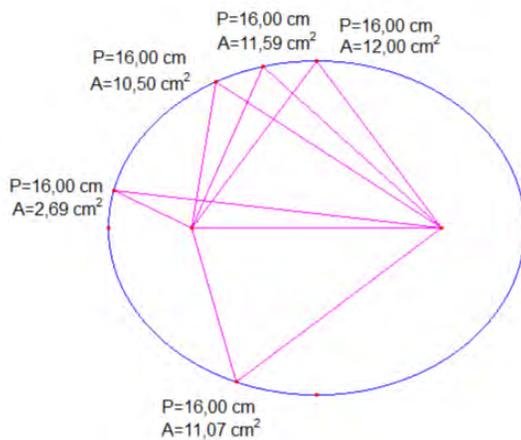


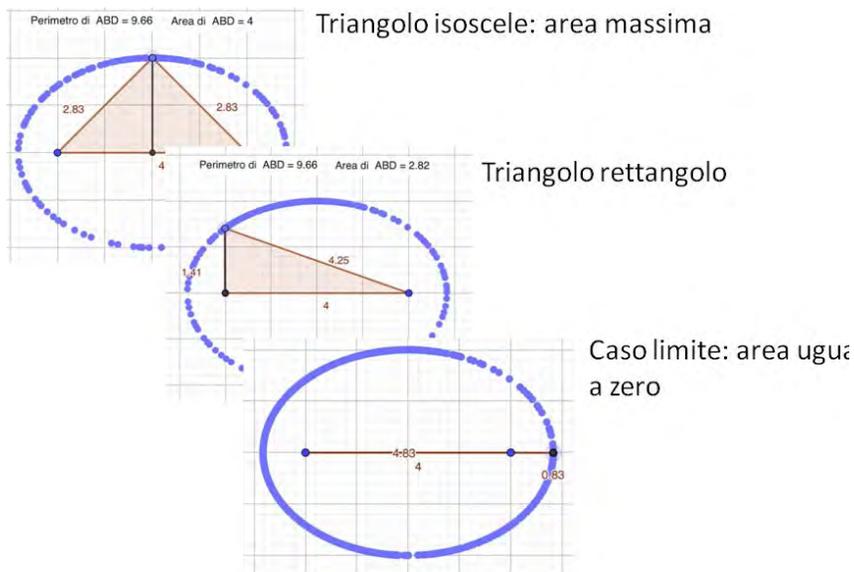


Fig. 2 Triangoli isoperimetrici

In pratica, la base AB resta fissa ed un vertice è mobile. Il triangolo con area maggiore sarà quello isoscele (quello con altezza massima). Tutti i triangoli così costruibili saranno isoperimetrici ma avranno aree diverse.

Inoltre se ci lasciamo guidare dalla matita, vedremo che questa, guidata dallo spago disegnerà sul foglio una curva di forma ovale: un'ellisse in cui i punti A e B saranno i fuochi. Dunque i triangoli isoperimetrici e di uguale base hanno i vertici su una nuova figura. Questa volta la figura che vediamo è una figura ovale: l'ellisse. I punti A e B si chiamano fuochi dell'ellisse. Il triangolo che ha l'area massima è quello isoscele. Infatti in questo caso l'altezza è massima. Ed essendo la base di tutti i triangoli fissata con i chiodi e quindi uguale per tutti, l'unico parametro che fa variare l'area è l'altezza. L'area diventa uguale a zero invece quando il triangolo è schiacciato con altezza minima ovvero uguale a zero. Più avviciniamo A e B più l'ellisse diventa un cerchio (come se la corda facesse da compasso). Questo metodo è chiamato "metodo del giardiniere" proprio perché lo usano i giardinieri quando vogliono fare aiuole ellittiche.





L'ellisse è una figura che si può osservare nell'ombra che lascia per terra un segnale stradale di forma circolare o un qualsiasi oggetto di forma circolare.



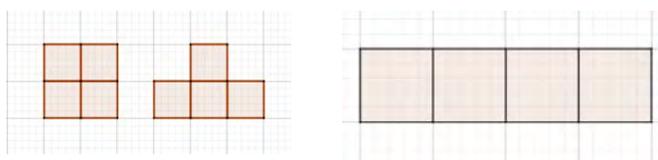
Quando in scienze si studieranno i pianeti si vedrà che essi ruotano intorno al sole proprio disegnando orbite ellittiche.

La terra infatti ruota intorno al Sole descrivendo un'ellisse ed il Sole sta proprio su uno dei due fuochi.

Anche nell'arte e nell'architettura l'ellisse è molto usata: il colosseo di Roma ha una forma ellittica.

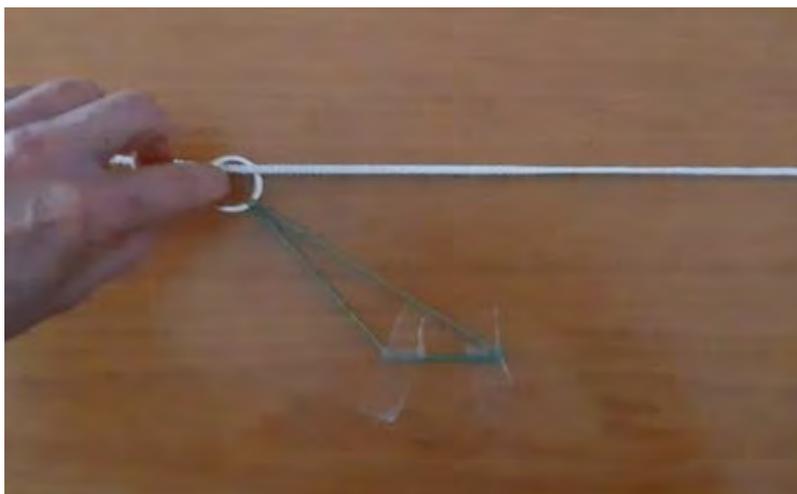
3 - Poligoni equivalenti ma non isoperimetrici

In questo caso possiamo partire da tanti quadratini disposti in modo da formare rettangoli diversi o anche altri poligoni. Costruiamo dei quadratini con dei cartoncini. Il perimetro cambia se i quadratini sono disposti in modo diverso:

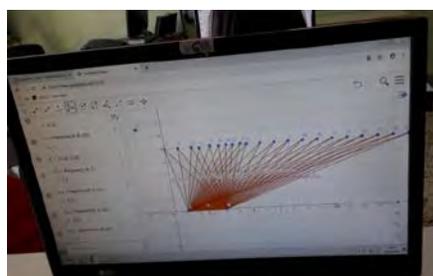
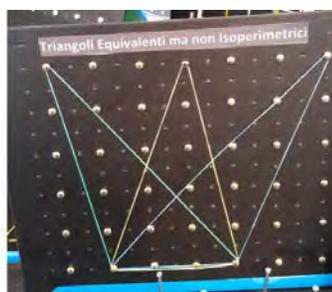


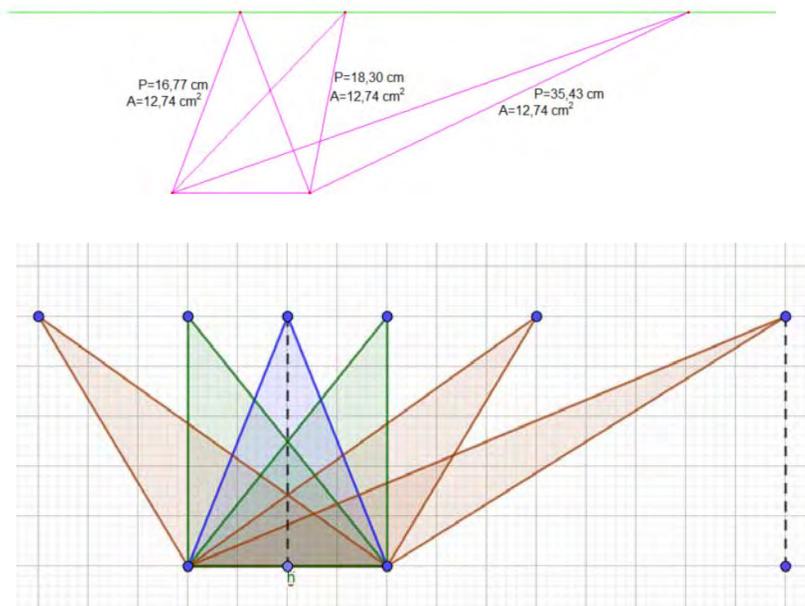
Ma tutte e tre le figure nel complesso hanno la stessa area.

Nel caso dei triangoli di uguale base e uguale area (e quindi uguale altezza), possiamo realizzare un'esperienza pratica. Su una tavoletta di legno costruiamo un triangolo variabile che abbia sempre la stessa base e la stessa altezza. Gli estremi della base sono due chiodi e il vertice opposto è un anellino che può scorrere lungo un filo disposto parallelamente alla base. Un elastico, legato ai due chiodi, passa entro l'anellino, e indica così il triangolo.



Anche in questo caso, spostando l'anellino, si vede che i triangoli che si possono costruire sono innumerevoli. L'elastico spostato prima a destra o a sinistra, lasciato libero, scorre fino a posizionarsi dove la tensione è minima (ovvero dove diventa isoscele). Si evidenzia così che il triangolo isoscele è quello con perimetro minimo tra quelli che hanno la stessa base e la stessa area. Possiamo realizzare l'esperienza anche sul geopiano con degli elastici o con geogebra.





Si può notare che l'altezza esce fuori dalla figura quando il triangolo diventa ottusangolo. Il caso limite è quando il triangolo è rettangolo. In questo caso l'altezza corrisponde con il lato (triangolo verde). Il triangolo che ha il perimetro minimo è quello isoscele (azzurro).

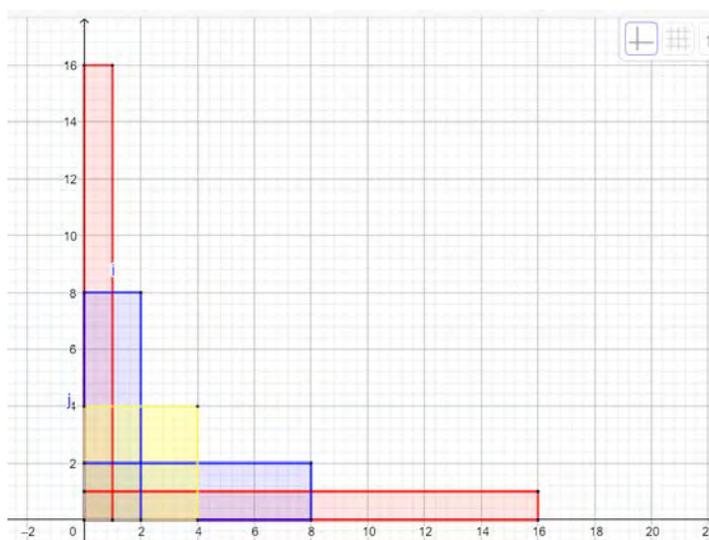
Vediamo cosa possiamo osservare con i rettangoli equivalenti.

Costruiamo rettangoli che abbiano area uguale a 16 cm^2 e con perimetro che cambia. Quindi troviamo tutte le coppie di numeri naturali il cui prodotto (*base* \times *altezza*) sia 16.

<i>Base</i> (x)	<i>altezza</i> (y)	<i>Area</i>
1	16	16
2	8	16

4	4	16
8	2	16
16	1	16

Mettiamo tutti i cartoncini su un diagramma cartesiano in questo modo:



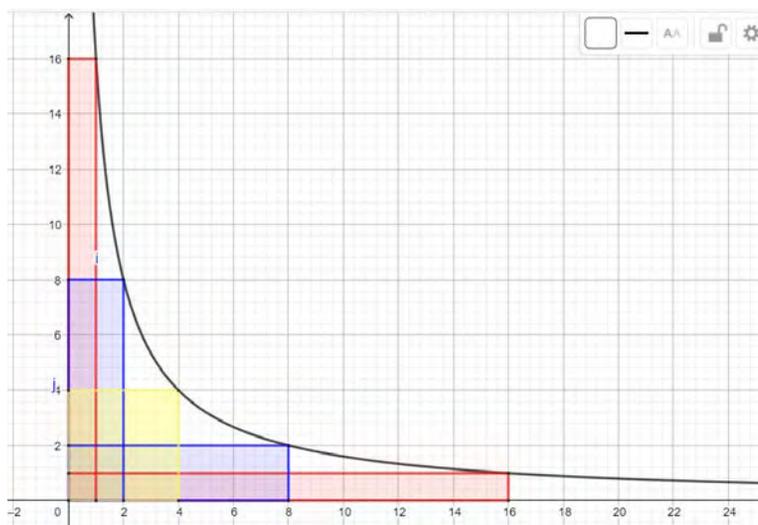
Si può discutere con gli alunni su cosa possiamo dedurre da questo grafico e cosa possiamo dire sui perimetri. Possiamo partire costruendo una tabella:

<i>Base (x)</i>	<i>Altezza (y)</i>	<i>Area</i>	<i>Perimetro</i>
1	16	16	34
2	8	16	20
4	4	16	16
8	2	16	20
16	1	16	34

Osserviamo che il quadrato ha il perimetro minimo tra tutti i rettangoli con la stessa area.

Tutti i vertici mobili hanno una caratteristica: il prodotto tra l'ascissa e l'ordinata è costante ed è uguale a 16.

Questa volta però i vertici mobili non si dispongono su una retta ma su una curva:



Questa curva è un ramo di iperbole.

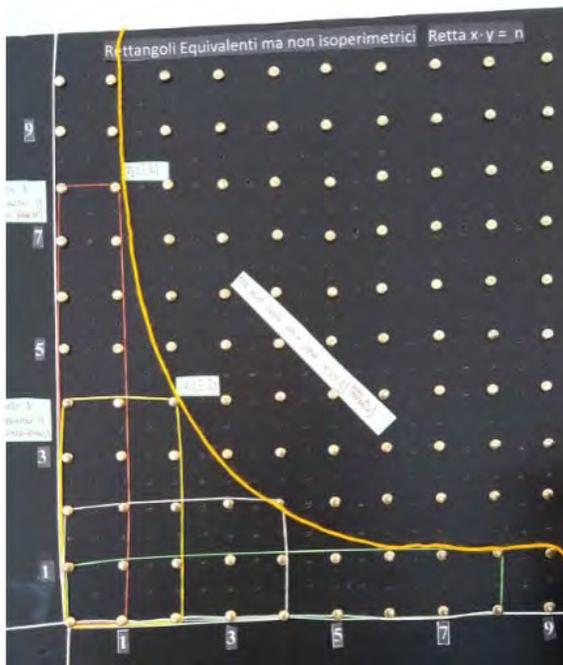
Possiamo scrivere che la curva che vediamo contiene tutti i punti il cui prodotto tra ascissa (x) ed ordinata (y) è sempre 16.

$$x \cdot y = 16$$

O più in generale

$$x \cdot y = n$$

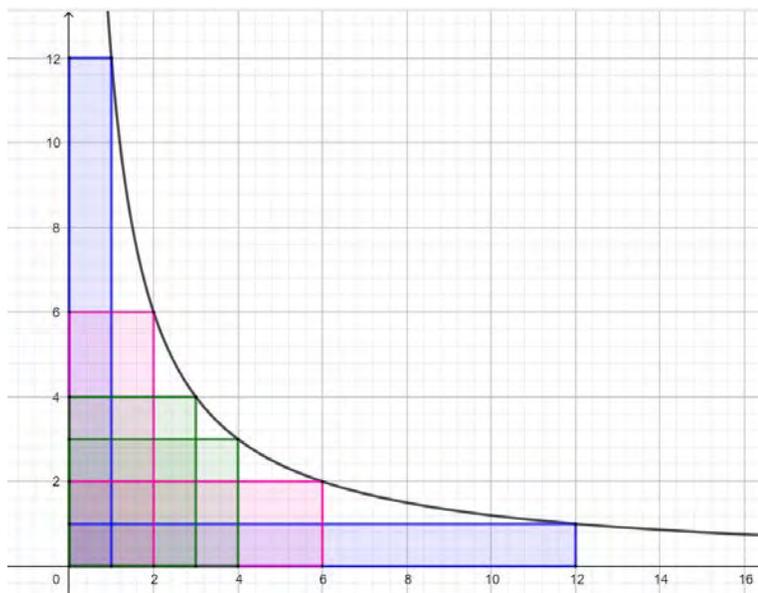
Possiamo costruirla anche con un geopiano:



Consideriamo adesso i rettangoli che hanno area uguale a 12 cm^2 (anche in questo caso usiamo solo numeri naturali per le misure di base ed altezza).

Costruiamo prima la tabella e poi il grafico sul diagramma cartesiano:

<i>Base</i> (<i>x</i>)	<i>altezza</i> (<i>y</i>)	<i>Area</i>
1	12	12
2	6	12
3	4	12
4	3	12
2	6	12
12	1	12



Possiamo discutere con gli alunni su cosa manca rispetto a prima. Che fine ha fatto il quadrato? In questo caso sembra che manchi. Per quale motivo?

Abbiamo detto prima che lungo il ramo di iperbole ci sono tutti i punti che hanno il prodotto di ascissa ed ordinata costante ed uguale all'area dei rettangoli che stiamo considerando.

Pertanto in questo caso:

$$x \cdot y = 12$$

E se consideriamo solo i numeri naturali non c'è nessun numero che moltiplicato per se stesso dia 12, ovvero che rappresenti il lato di un quadrato di area 12 cm².

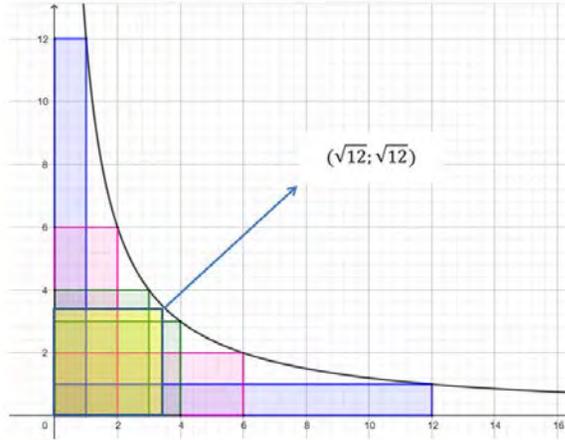
Ma il punto sulla curva c'è.

Corrisponderà ad un punto che ha come coordinate numeri irrazionali:

$$(\sqrt{12}; \sqrt{12})$$

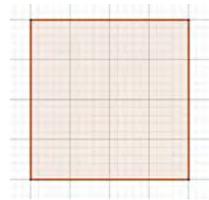
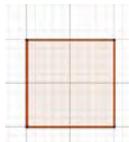
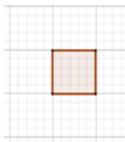
Infatti

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{12} = 12.$$



4 - L'area del quadrato cresce rapidamente all'aumentare del lato: la parabola

Consideriamo i seguenti quadrati:



Nel passare dal precedente al successivo cosa è cambiato?
Abbiamo raddoppiato il lato e vediamo che però l'area si quadruplica.

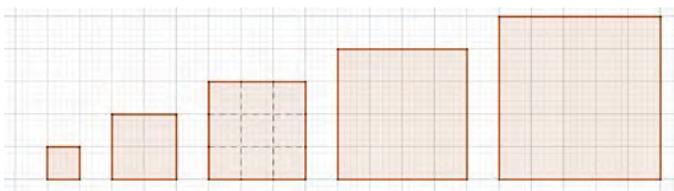
Possiamo fare una tabella:

x (lato)	1	2	4	...
y (area)	1	4	16	...

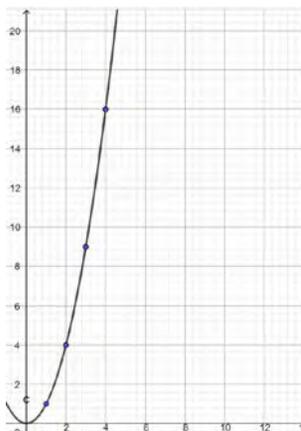
La legge che rappresenta questa situazione possiamo scriverla così:

$$y = x^2$$

Più in generale avremo:



Rappresentiamo la legge così ottenuta su un diagramma cartesiano:



La curva che otteniamo è ancora una volta una parabola.

5 - Conclusioni

Concludendo questo percorso possiamo riflettere su alcuni punti. In particolare sul fatto che è utile mettere in relazione area e perimetro di una stessa figura facendolo sottolineando le differenze che possono sussistere. Questo aiuta a non creare misconcenzioni, a lavorare trasformando le figure facendo variare area e perimetro o mantenendoli costanti. Inoltre il percorso proposto da Emma Castelnuovo e che in questo articolo viene ampliato con costruzioni ed animazioni fatte con un software di geometria dinamica tengono insieme diversi aspetti della matematica trattata nella scuola secondaria di I grado.

Bibliografia

AA.VV. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.*

AA.VV. (2001). *Matematica 2001.*

AZHARI N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks.* Manoscritto non pubblicato, cit. in Stavy, Tirosh.

CASTELNUOVO Emma (1977). *Documenti di un'esposizione matematica.* Torino: Bollati Boringhieri.

CASTELNUOVO Emma (1979). *La matematica.* Firenze: La nuova Italia.

CASTELNUOVO Emma (2017). *Didattica della matematica.* Torino: UTET.

CASTELNUOVO Emma (2017). *Pentole, ombre, formiche.* Torino: UTET.

CASTELNUOVO Emma (2008). *Officina matematica.* La Meridiana.

D'AMORE Bruno (1999). *Elementi di didattica della matematica.*, Bologna: Pitagora.

D'AMORE Bruno (2005). *Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti* Pubblicato in italiano: D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. La matematica e la sua didattica.* Bologna, Italia.

FRANK A.B., DI MARTINO P., NATALINI R., ROSOLINI G.(2016). *Didattica della matematica,* Milano: Mondadori.

<https://federazionemathesis.it/link-alle-relazioni-presentazioni-in-formato-pdf>

Profili biografici degli autori

Alessandro Amabile -

È dottorando in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la Storia, la Didattica e i Fondamenti della Fisica. È coinvolto in attività di sperimentazione didattica.

Giancarlo Artiano -

È dottorando in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la didattica della matematica e della fisica con l'utilizzo delle nuove tecnologie. È coinvolto in diversi progetti di contrasto alla povertà educativa e in programmi regionali e nazionali sulla formazione degli insegnanti.

Emilio Balzano -

Emilio Balzano laureato in fisica con lode svolge da molti anni attività di ricerca sull'insegnamento e sull'apprendimento della matematica e delle scienze e insegna didattica della fisica nella Laurea Magistrale in Fisica e a Scienze della Formazione Primaria. I suoi interessi di ricerca riguardano: -la rivisitazione in chiave didattica dei contenuti scientifici con un'attenzione ai fondamenti delle discipline scientifiche; -il ruolo delle nuove tecnologie per favorire i processi di modellizzazione e di formalizzazione matematica in ambito scientifico; -le opportunità nel mettere in relazione strutturata i contesti formali e informali di apprendimento; -le strategie e i modelli per la formazione iniziale e in servizio degli insegnanti. E' stato: -responsabile dei laboratori didattici del Dipartimento di Fisica di UNINA; -responsabile della Sezione Didattica di Città della Scienza e ora coordina le attività di un gruppo di ricerca sulla didattica della fisica e della matematica. E' stato coinvolto in decine di progetti nazionali ed europei

sull'educazione scientifica anche con ruoli di responsabilità e di coordinamento. E' ora coinvolto in progetti di contrasto alla povertà educativa. È autore di numerosi software multimediali e di articoli scientifici.

Giovanna Della Vecchia - giovanna.dellavecchia@unina.it

È stata docente di Matematica presso l'IIS "G. Minzoni" di Giugliano in Campania dal 1985 al 2020. Attualmente è docente a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli. Durante la sua carriera di docente della scuola secondaria di secondo grado ha sempre mostrato un particolare interesse per la ricerca didattica e ha ricoperto negli anni il ruolo di funzione strumentale sia nell'area "servizi e supporto agli studenti" che nell'area "formazione docenti". Presso l'istituto Minzoni ha svolto svariati ruoli e ha fatto parte dello staff dirigenziale impegnato nell'attività di progettazione, supporto organizzativo e didattico all'Istituzione scolastica. Ha svolto per diversi anni attività di formazione nell'ambito della didattica e della valutazione, nonché nei corsi di specializzazione per le attività di sostegno agli alunni in situazione di handicap per la provincia di Caserta (area logico - matematica). Ha preso parte a numerosi convegni/seminari in qualità di relatore ed è autore di numerose pubblicazioni inerenti alla Matematica e ai suoi possibili ambiti di applicazione.

Marco D'Errico - marco.derrico1@outlik.it

Laureato in scienze Geologiche con 110 e lode. Dottore di ricerca in Scienze della Terra. Attualmente insegnante a t. i. di Matematica e Scienze per superamento di Concorso pubblico. Precedentemente: Professore a contratto, assegnista di ricerca, borsista e contrattista presso Istituti di ricerca Nazionali ed Università italiane su linee di ricerca in ambito geologico e divulgazione scientifica, divulgatore scientifico presso società private e WWF ed animatore scientifico

presso "Festival della scienza" di Genova. È socio e membro del Consiglio direttivo dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" di cui attualmente ricopre la carica di Segretario.

Rodolfo Figari -

Laureato a Napoli nel 1971, ha lavorato in Teoria dei Campi quantici relativistici in spazi curvi e in teoria costruttiva dei campi quantici nella versione euclidea. In successive visite al Courant Institute of Mathematical Sciences di New York e al Centro di Ricerca Interdisciplinare dell'Università di Bielefeld si è interessato di Teoria delle Probabilità e di processi di Markov in spazi a infinite dimensioni. Da molti anni si occupa di modellistica e fondamenti della Meccanica Quantistica. Ha inoltre lavorato su problemi di didattica integrata di Matematica e Fisica in collaborazione con il gruppo di Didattica del Dipartimento di Fisica della Federico II. Ha insegnato Fisica generale e Metodi Matematici della Fisica nel corso di Laurea in Fisica e ha tenuto corsi di Meccanica Quantistica alla Sapienza di Roma e alle scuole di dottorato di Bielefeld e del Gran Sasso Institute of Scientific Sciences dell'Aquila.

Franco Francia (La Spezia) - franco.francia40@virgilio.it

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguito la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G.Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali - «Archimede»*, N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicitari dal 2008. Autore di oltre 400 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.* (coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017; *La progettazione meccanica con CATIA V5*, Bologna: InRiga, 2023 . Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Pietro Piccialli -

È laureato in Fisica. Le sue attività di ricerca riguardano la didattica della matematica e della fisica. È coinvolto in diversi progetti di contrasto alla povertà educativa e in programmi regionali e nazionali sulla formazione degli insegnanti.

Giorgio Pietrocola

