

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVIII - Serie IV – volume V(3)
Suplemento settembre 2023**

**A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

**Atti III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
14-17 settembre 2023**

PARTE PRIMA



MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

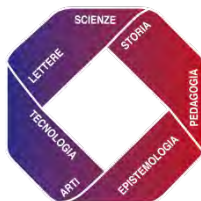
Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXVIII - Serie IV - Volume V (3)
Supplemento Settembre 2023

Atti III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
14-17 settembre 2023

PARTE PRIMA



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675
Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

978-88-3293-694-0

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2023 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

Atti
III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
14-17 settembre 2023



Le relazioni presentate nelle precedenti edizioni del *Convegno Matematica, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana* di Agerola sono state pubblicate come articoli nei numeri di settembre 2021 e 2022 del Periodico. Da quest'anno, invece, vengono raccolte negli Atti del Convegno, inseriti come supplemento del fascicolo di settembre del Periodico.

Tale scelta è motivata dal cospicuo numero di interventi del Convegno, che dimostra il successo a livello nazionale di questa iniziativa, testimoniato dalla provenienza di relatori provenienti da diverse regioni d'Italia. L'acquisto degli Atti non è compreso nell'abbonamento annuale del Periodico.

La pubblicazione di questi Atti è stata finanziata, dall'Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) nell'ambito del Progetto "*Renato Caccioppoli ed Enrico Caruso, simboli eccelsi del primo Novecento*", approvato dalla Direzione Generale per le politiche culturali e turismo della regione Campania, nel Piano per la Promozione Culturale 2023

La Direzione

Editoriale

Ferdinando Casolaro* Giovanna Della Vecchia**
Giovanni Vincenzi***

*Presidente ANFSU “R. Caccioppoli e Direttore di redazione Periodico di
Matematica - presidente.anfsu@liceocaccioppoli.edu.it

** Dipartimento di Architettura Università “Federico II, Napoli –
giovanna.dellavecchia@unina.it

*** Dipartimento di Matematica Università di Salerno – vincenzi@unisa.it

Il presente volume raccoglie i lavori presentati al Convegno “Matematica Natura e Scienze dell’Alta Costiera Amalfitana” che si è svolto, come di consueto, nella cittadina di Agerola al Campus Principe di Napoli ed è stato dedicato alla prof.ssa Tonia Olivello nel primo anniversario della sua scomparsa.

Il Convegno è stato organizzato dalle associazioni Mathesis campane aderenti o simpatizzanti alla Federazione Italiana Mathesis: “A. Morelli” di Napoli, Math&Phys di Salerno, Mathemare di Castellammare di Stabia e dall’Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane “R. Caccioppoli” (ANFSU). Hanno contribuito all’organizzazione l’Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU) e l’Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV), entrambe gemellate con l’ANFSU “R. Caccioppoli” nel perseguire gli obiettivi comuni di promozione del dialogo interculturale e di scambio di esperienze, valori e conoscenze.

La partecipazione dell'ANFSU "R. Caccioppoli" - come deliberato e verbalizzato dal Consiglio Direttivo svoltosi il 18 luglio 2023 - rientra nelle attività che l'Associazione ha programmato per il secondo semestre 2023 nell'ambito del Progetto "*Renato Caccioppoli ed Enrico Caruso, simboli eccelsi del primo Novecento*" approvato, in data 11 luglio 2023, dalla Direzione Generale per le politiche culturali e turismo della regione Campania, nel Piano per la Promozione Culturale 2023.

L'evento è alla sua terza edizione, dopo la prima del 2021 (*Quali conoscenze di Geometria nella Scuola di oggi?* 8-9-10 settembre) e la seconda del 2022 (*La matematica nell'insegnamento della fisica e la fisica nell'insegnamento della matematica*, 9-10-11 settembre).

La scelta della cittadina di Agerola è dovuta, oltre che alla grande disponibilità che l'amministrazione, oggi presieduta dal sindaco Tommaso Naclerio, ha dato negli anni alla realizzazione delle nostre attività, alla forte attrazione turistica che la cittadina ha da sempre esercitato favorendo la presenza di visitatori da ogni parte d'Italia.

Particolarmente vantaggiosa è, inoltre, la sua posizione geografica, in quanto Agerola fa da "ponte" tra la città metropolitana di Napoli e la città di Salerno ed è quindi facilmente raggiungibile da docenti e dirigenti delle Scuole e delle Università delle due prestigiose città.

Questa edizione del convegno è stata rivolta ai Docenti, ai Dirigenti Scolastici della Scuola Secondaria di Primo e Secondo Grado e a tutti i cultori delle Scienze Matematiche Fisiche e Naturali. L'evento è stato finalizzato alla diffusione di conoscenze e aspetti peculiari della Matematica e delle sue

applicazioni alle Scienze Naturali e alla condivisione, con professionisti esperti del settore, di esperienze didattiche innovative interdisciplinari relative agli insegnamenti della Matematica, della Fisica, della Chimica e della Biologia.

Il Comitato Scientifico è composto da: Anna Amirante, Loredana Biacino, Rosa Buonanno, Aniello Buonocore, Luigia Caputo, Ferdinando Casolaro, Mariarosaria Cuomo, Giovanna Della Vecchia, Giangiacomo Gerla, Ciro Iovino, Mario Mandrone, Alessandra Rotunno, Umberto Salzano, Renata Santarossa, Nicla Palladino, Sergio Pagano, Emilio Polverino, Maria Talamo, Ermanno Vasca, Giovanni Vincenzi, Antonio Vitiello.

Molto numerose sono state le proposte di intervento dei docenti che hanno inviato i risultati dei propri lavori da ogni parte d'Italia e, visto il numero rilevante delle proposte pervenute, il comitato scientifico ha dovuto prolungare la durata del Convegno di un giorno e selezionare solo alcune di esse. Tenuto conto dell'aspetto interdisciplinare dei temi trattati, le proposte sono state raggruppate in quattro sessioni:

1. Matematica, Fisica, Chimica e applicazioni per la scuola Secondaria di II grado.
2. Matematica, Fisica e Scienze Naturali per la scuola Secondaria di I grado.
3. Matematica per la scuola Secondaria di II grado.
4. Interventi dedicati a Tonia Olivello.

Nel convegno si è voluto favorire lo scambio di opinioni e di esperienze. Per questo motivo, oltre ai consueti spazi dedicati alle domande previste alla fine di ogni intervento, è stato organizzato uno speciale "salotto didattico", dal titolo

“Aperitivo in terrazza”, destinato a un confronto tra tutti i partecipanti su temi particolarmente significativi e attuali inerenti alla didattica della matematica e delle scienze.

Il dibattito è stato incentrato in particolare sulle seguenti tematiche:

- l’insegnamento e la professione docente oggi: scenari e criticità;

- il ruolo delle associazioni-

L “Aperitivo in terrazza” è stato ideato e organizzato dalla Prof.ssa Rosa Buonanno. Durante il dibattito sono stati previsti gli interventi di: Buonocore A., Casolaro F., Caracciuolo L., Polverino E., Rossetto S., Squillante M., Tomasi L., Vincenzi G. A supporto dei partecipanti è stato previsto l’utilizzo di una lavagna virtuale raggiungibile al sito:

<https://padlet.com/vincenzi2/aspettando-il-convegno-agerola-2023-in-segno-e-lascio-un-seg-b51fb9cbvhzu14zm>

In questo luogo virtuale ognuno dei presenti ha avuto la possibilità di suggerire temi per il dibattito e di prenotarsi in anticipo per intervenire nella discussione o per porre domande ai relatori.

L’evento è stato patrocinato dal Comune di Napoli, dal Comune di Agerola, dal Dipartimento di Fisica dell’Università di Napoli “Federico II” e dal Dipartimento di Matematica dell’Università di Salerno.

Si ringrazia l’ing. Luca Nicotra, Direttore responsabile del Periodico di Matematica, che con il prezioso contributo di assemblaggio dei vari articoli ha permesso la pubblicazione di questo lavoro.



PROGRAMMA

Giovedì 14 Settembre 2023

14:00 -14:30 Accoglienza

14:30 -15:00 Saluti istituzionali e presentazione del convegno:
Naclerio T (Sindaco di Agerola), Buonocore N., Buonanno R.,
Casolaro F., Eugeni F., Santarossa R., Vincenzi G.

**“Matematica, Fisica, Chimica, Scienze Naturali e Applicate
nella scuola secondaria di II grado”**

15:30 - 17:00 : moderatore: **Vasca E.**

- **Mandrone M.** Benevento, Vicepresidente APAV
Meccanica statistica e teoria dei quanti
- **Bianco M. C.**, Dip. Chimica “Zambelli”, Univ. Salerno
*Assorbimento e Isoterma: modelli matematici per
l'interpretazione dei dati sperimentali*
- **Sammarco A. S.** Dip. Chimica “Zambelli”, Univ. Salerno
*Studiare la simmetria e pesare il dato nell'analisi di
contaminanti ambientali: il caso delle diossine*

17:00 -17:30 Pausa

17:30 -18:30: moderatore: **Santarossa R.**

- **Capozziello S. - De Falco V.**, Dip. Fisica (area Space) della Scuola Superiore Meridionale, Napoli Astrofisica
Relativistica: dalla Relatività Generale all’immagine del buco nero attraverso conoscenze liceali
- **Adesso M*. - Capone R.** - Fiore O***.** (L. S. “Da Procida”*, Salerno - Dip. Mat. Univ. Bari** - Liceo Imbriani, Avellino***)
La successione di Fibonacci nel laboratorio di fisica

Venerdì 15 settembre 2023

“Matematica, Fisica, Chimica, Scienze Naturali e Applicate nella scuola secondaria di II grado”

9:00-10:30: moderatore: **Iovino C.**

-
- **Dragone L.* -Palma A.**** (Dip Mat “Tor Vergata”, Roma*; Dip Mat “Sapienza”, Roma**)
La proposta didattica dell’approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede
- **Moser A.**, Liceo scientifico “Labriola”, Roma
Modelli Matematici: un potente strumento interdisciplinare trascurato nelle normali prassi didattiche. Come rendere consapevoli gli studenti del concetto di modello matematico e in grado di costruirne dei semplici esempi?
- **Pasquazi D.**, LSS B. Touschek Grottaferrata, Roma,
Archimede non corse mai nudo!!!

10:30 - 11:00: Pausa

11:00 - 13:00: moderatore: **Buonanno R.**

- **Gibilisco P.* - Tomassi L.**** (Dip. Economia*, Dip. Mat, “Tor Vergata” Roma**)
La probabilità, ancella e regina dell’analisi matematica.
- **Torre M.**, Liceo Scientifico “G. Peano”, Tortona, (Al)

Esperimenti di Galileo con Arduino

- **Bevacqua F.**, Associazione Culturale Opus Lab – Ricerca & Didattica, Cosenza
Matematica&AI: Una proposta per comprendere il legame tra queste discipline
- **Cerasaro S.**, Dip. Mat, Univ. “Tor Vergata”, Roma,
Le Fractiones in Gradibus in classe nel terzo millennio, come nelle scuole d’abaco del XIII secolo.

“Matematica e Scienze Naturali nella scuola secondaria di I grado”

15:30 - 17:00: moderatore: **Caputo L.**

- **Moccaldi M.**, Scuola Media Galvani-Opromolla, Angri (SA)
La matematica e le scienze a fumetti: un’attività interdisciplinare
- **D’Errico M. - Petruccione E.**, I. C. Cortese, Casoria
Geometria e geologia
- **Angelucci G.**, Dip. Mat. “F. Enriques”, Univ Milano e Mathesis Bergamo
Un’attività interdisciplinare tra geometria e botanica per le classi della scuola primaria: caccia alla fillotassi e piante allo specchio

17:00 - 17:30: Pausa

17:30 - 18:30 moderatori: **Talamo M. - Bianco M. C.**

- **Mangiarotti M.A.**, Formatrice “Officine Scuola”, Pavia
La meraviglia degli alberi monumentali italiani
- **Gasparo D.* - Lepellere M. A.**** (Scuola secondaria di I grado “G. Caprini” Trieste*, Dip. Mat Univ. Udine**) *Embodied Design basato sull'azione per insegnare le proporzioni*

Sabato 16 settembre 2023

“Matematica per la scuola secondaria di II grado”

9:00 - 10:30: moderatore: **Vincenzi G.**

- **Tomasi L.** Centro Morin, Pieve del Grappa, Treviso
I poliedri regolari e il fascino delle simmetrie
- **Rossetto S.**, Centro Morin, Pieve del Grappa, Treviso
Esplorazioni algebriche sui numeri triangolari
- **Sabbadini R.**, Liceo “Farnesina”, Roma
*Gli illustri sconosciuti della geometrizzazione dell'algebra
ovvero come fare algebra con parallele e perpendicolari*

10:30 - 11:00 Pausa

11:00 - 12:30: moderatore: **Biacino L.**

- **Paolillo B.**, Liceo “Francesco Severi”, Salerno
*Ricerca e prassi in Didattica della Matematica: Il caso della
Goniometria e Trigonometria*
- **Coppa F.* -Palma A.**** Dip. Mat La Sapienza, Roma
*Un laboratorio didattico per il concetto di funzione attraverso
l'algebra dei segmenti di Cartesio*
- **Tomassi L.**, Dip. Mat. Tor Vergata, Roma
*I precursori medioevali dei compiti di realtà: le trame narrative
che nascondevano i rapporti “proibiti” in matematica.*

“Matematica per la scuola secondaria di II grado”

15:00 -16:00: moderatore: **Gerla G.**

- **Cardone V. 1, Donatiello A. 2, Ferraioli A.3, Lombardi L.4, Razzino G.1, Siani S.1** (1Liceo Scientifico “E. Medi”, Battipaglia (SA), Italia; 2 Dip. Mat., Università di Salerno; 3Liceo Scientifico “B. Rescigno”, Roccapiemonte (SA),

Italia; 4 Liceo Scientifico "P.S. Mancini", Avellino (AV), Italia)

Modellizzazione matematica all'aperto con MathCityMap: alcune esperienze di didattica fuori aula

- **Torre Matteo**, L. S. "G. Peano", Tortona (Al)

Il Debate nella didattica della Matematica

16:00 - 17:00: moderatore: **Polverino E.**

- **Amirante A.**, Dip. Mat. Salerno

Iperspazio, Frattali, Natura e...

- **de Rubertis G.**, Liceo Caccioppoli, Napoli, vice presidente ANFSU

Il Debate come metodologia didattica innovativa

17:15 -19:15: **Aperitivo in Terrazza.**

Dibattito. Coordina Buonanno R. Interverranno:

Buonocore A., Casolaro F., Caracciuolo L., Polverino E., Rossetto S., Squillante M., Toffalori C., Tomasi L., Vincenzi G.

Al tramonto, l'incantevole e suggestiva terrazza a picco sul mare del Gran Hotel S.Orsola farà da cornice ad un momento conviviale, in cui i partecipanti al convegno, ispirati dalla bellezza e dai profumi della costiera, avranno la possibilità di confrontarsi su:

- *L'insegnamento e la professione docente oggi: scenari e criticità.*
- *Il ruolo delle associazioni*

20:00: **Cena Sociale** e serata musicale con il gruppo "Ci arrangiamm' a sunà" di Aldo Pandolfi.

Domenica 17 settembre 2023

“Interventi e presentazione di alcuni lavori pubblicati dalla prof.ssa Tonia Olivello nell’ambito della Formazione docenti da parte di alcuni allievi, attualmente docenti di Matematica e Fisica”.

9:00 - 10:30: moderatore: **Talamo M.**

- **Perillo A.**, Vice Direttore del Tgr RAI Nazionale
Tonia Olivello, Una vita per l’insegnamento
- **Casolaro F.**, Presidente ANFSU “R. Caccioppoli”
Tonia Olivello tra Geometria e Didattica
- **Condelli M.***, **Mancinelli F.****, Docente nel Liceo Scientifico “Amedeo di Savoia”, Pistoia*, Docente nel Liceo “Niccolò Forteguerri”, Pistoia**
Dalla duplicazione del quadrato all’n-plicazione del d-politopo

10:30 - 11:00: Pausa

11:00 - 12:30: moderatore: **Della Vecchia G.**

- **Casolaro I.**, Liceo “Manzoni” di Latina
Una rappresentazione elementare dei concetti di Analisi Matematica nelle applicazioni fisiche
- **Paladino L.***, **Rotunno A.**** ITIS “G. Ferraris” Napoli*, Liceo Scientifico “Labriola” Napoli**
Risoluzione dei problemi algebrici con le trasformazioni geometriche
- **Cuomo M.**, Liceo “E. Pascal”, Pompei, Napoli
La Geometria e la fisica nello spazio tridimensionale. Il teorema di Pitagora nello spazio e la Sfera Galleggiante

12:30 -13:30: Discussione e conclusioni.

PRIMA SESSIONE

**Matematica, Fisica, Chimica e
applicazioni per la Secondaria di II grado**

LA STATISTICA CLASSICA E LE STATISTICHE QUANTISTICHE

Mario I. Mandrone*

*vicepresidente APAV;
vicepresidente Associazione Mathesis Sannio-Irpinia;
almavit@libero.it



Sunto: Il presente lavoro si propone: 1. di presentare i metodi e gli scopi della meccanica statistica; 2. di dare un'idea del grande interesse concettuale che presenta la riduzione del comportamento di sistemi macroscopici alle leggi del mondo atomico; 3. di fornire le basi concettuali della meccanica statistica classica e quantistica, nonché i fondamenti statistici della termodinamica classica.

A tale scopo si analizzerà, preliminarmente, la meccanica statistica classica sviluppata da Stefan Boltzmann (1844-1906), James C. Maxwell (1831-1879) e Josia W. Gibbs (1839-1903), tra la fine del 1800 e gli inizi del 1900, evidenziando le sue più importanti conseguenze quali la legge di ripartizione delle velocità molecolari e il principio dell'equipartizione dell'energia. In tutti i casi in cui il carattere quantistico del sistema cessa di essere trascurabile o diventa addirittura dominante, la meccanica statistica classica non è più applicabile. Saranno, pertanto, analizzate anche le statistiche a cui obbediscono i sistemi di particelle quantistiche: 1) La statistica di Bose-Einstein per particelle indistinguibili e con spin intero (bosoni); 2) La statistica di Fermi-Dirac per particelle indistinguibili e con spin semi-intero (fermioni). Entrambe convergono alla statistica di Boltzmann quando la descrizione quantistica può essere trascurata e le particelle possono essere descritte classicamente. Nel presentare tali argomenti si cercherà di mettere

in rilievo gli agganci storici e generalmente culturali dei singoli argomenti nella convinzione che questo sforzo sia utile per inquadrare la fisica in contesti culturali più ampi. Senza dubbio ciò non costituisce una trattazione esaustiva della statistica quantistica, ma ha solo lo scopo di evidenziarne gli aspetti rilevanti ai fini di una trattazione didattica.

Parole Chiave: Statistica di Maxwell-Boltzmann; Statistica di Bose- Einstein; Statistica di Fermi- Dirac.

Abstract: *This work aims at: 1. presenting the methods and aims of statistical mechanics; 2. giving an idea of the great conceptual interest that present a reduction of the behavior of macroscopic systems to the laws of the atomic world ;3. providing the conceptual foundations of classical and quantum statistical mechanics, as well as the statistical foundations of classical thermodynamics. We'll first analyze the classical statistical mechanics with its most important consequences such as the law of distribution of molecular speeds and the principle of equipartition of energy, Bose-Einstein statistics and Fermi-Dirac statistics. Certainly this does not constitute an exhaustive treatment of quantum statistics, but would like to highlight the relevant aspects for the purposes of a didactic treatment.*

Keywords: Maxwell-Boltzmann Statistics; Bose-Einstein Statistics; Fermi-Dirac Statistics.

1 - INTRODUZIONE ALLA MECCANICA STATISTICA

*“La fisica quantistica mi manda in estasi.
E’ come guardare l’universo senza veli.”
W. Pauli*

La meccanica statistica si è sviluppata nel corso del XIX secolo principalmente per merito del fisico inglese James Clerk Maxwell, del fisico austriaco Ludwig Boltzmann e del

fisico matematico J. Willard Gibbs. Negli anni Venti la meccanica statistica venne riformulata al fine di includere i nuovi principi della teoria quantistica. La natura delle particelle, infatti, così come viene intesa dalla teoria quantistica, è diversa da quella tipica della teoria classica, basata sui principi della meccanica di Newton. Le statistiche quantistiche sono applicate alla analisi di quei fenomeni macroscopici influenzati dal comportamento quantistico degli atomi. Tra questi fenomeni ricordiamo: il comportamento anomalo dei gas rarefatti a basse temperature (da cui il nome “gas degeneri”), la superfluidità, la superconduttività (esempio tipico di ciò è il comportamento dell’elio al di sotto di due gradi kelvin), il paradosso di Gibbs ossia la non additività dell’entropia.

E’ stato il fisico indiano S. N. Bose ad applicare per primo la nuova statistica in un suo lavoro del 1924 sulla radiazione del corpo nero: S. N. Bose, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, in *Zeitschrift fur Physik*, 26 (1924), pp.178-181. Nella derivazione della legge di Planck, Bose introdusse delle innovazioni delle quali lui stesso non si rese conto:

1. i quanti di luce sono considerati indistinguibili. Il conteggio dei possibili microstati è pertanto diverso da quello di Boltzmann.
2. Il numero dei quanti non si conserva.

Il 10 luglio 1924, durante una seduta dell’Accademia delle Scienze di Berlino, Einstein espose la generalizzazione della nuova statistica della materia (A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”, in *Berl. Ber.* (1924), pp. 261-

267). E, senza fare ipotesi particolari, applicò la nuova statistica riuscendo a ricavare:

1. la legge dei gas perfetti;
2. la nota formula di Sackur-Tetrode per l'entropia;
3. l'espressione additiva dell'entropia;
4. l'accordo con il teorema di Nernst, ossia che l'entropia di un qualunque sistema si annulla allo zero assoluto.

Nel 1926, in due maniere indipendenti Fermi e Dirac giungono alla formulazione dell'altra statistica quantica. Fermi, infatti, introduce il nuovo conteggio in un lavoro nel quale riprende la dimostrazione della formula di Sackur e Tetrode (problema già affrontato da Fermi in due lavori precedenti del 1923 - 1924) quantizzando il gas perfetto monoatomico e usando il principio di esclusione di Pauli del quale è intanto venuto a conoscenza (E. Fermi, "On Quantizing an Ideal Monoatomic Gas", in *Zeitschrift fur Physik*, 36, 902 (1926)). Dirac, qualche mese dopo, pubblica, sui *Proceedings of the Royal Society of London*, un lavoro dal titolo "On the theory of Quantum Mechanics". In questo lavoro egli utilizza i nuovi formalismi della meccanica quantistica. Ci volle ancora qualche anno prima che le due statistiche, inizialmente viste come contrapposte, potessero, grazie soprattutto agli interventi di Dirac e di Heisenberg, convivere in maniera pacifica. In particolare fu una fulgida intuizione del fisico tedesco che lasciò intravedere gli stretti rapporti che intercorrono tra lo spin e la statistica.

La statistica di Maxwell-Boltzmann, valida per particelle distinguibili (per esempio un gas di molecole in una scatola a temperatura ambiente), che può essere descritto in maniera

classica, si basa su due ipotesi che caratterizzano il comportamento delle particelle del sistema:

1. le particelle sono distinguibili;
2. la probabilità di occupazione di un certo stato è indipendente dal numero di particelle che si trovano in quello stato.

Ogni particella si comporta in maniera statisticamente indipendente dalla presenza delle altre. In altre parole la probabilità per una particella di trovarsi in un certo stato non dipende dal numero di particelle che si trovano già in quello stato. L'unico vincolo è quello di appartenere ad un sistema di particelle in equilibrio termico. È bene chiarire che la descrizione classica di una particella è un'approssimazione, che può essere utilizzata solo quando il comportamento quantistico delle particelle è trascurabile; la statistica classica dà quindi risposte ragionevoli quando la lunghezza d'onda della particella è piccola rispetto alla distanza media fra particelle vicine. Nei casi in cui le particelle identiche siano indistinguibili i risultati che si ottengono applicando la statistica classica portano a conclusioni errate ed è, pertanto, necessario ricorrere all'applicazione delle cosiddette statistiche quantistiche. In questi casi dobbiamo descrivere, come prevede la meccanica quantistica, le particelle attraverso le loro funzioni d'onda. Le statistiche a cui obbediscono questi sistemi di particelle sono:

La statistica di Bose-Einstein, valida per particelle con spin intero chiamate "bosoni", le cui ipotesi sono:

1. Le particelle sono indistinguibili;

2. La probabilità per una particella di occupare un certo stato aumenta all'aumentare del numero di particelle che occupano lo stato.

La statistica di Fermi-Dirac, secondo la quale:

1. Le particelle sono indistinguibili;
2. La probabilità per una particella di occupare uno stato è nulla se lo stato è già occupato da un'altra particella.

Le particelle, aventi spin semi-intero, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac sono chiamate fermioni. Entrambe le statistiche convergono alla statistica di Boltzmann quando la descrizione quantistica può essere trascurata e le particelle possono essere descritte classicamente. Vedremo che la distribuzione di Fermi-Dirac è la diretta conseguenza del principio di esclusione di Pauli; la otterremo, infatti, imponendo ad un sistema di fermioni indistinguibili la condizione che la funzione d'onda del sistema sia antisimmetrica (principio di esclusione di Pauli), mentre otterremo la distribuzione di Bose-Einstein imponendo ad un sistema di bosoni la condizione che la funzione d'onda del sistema risulti simmetrica. In generale per un sistema di particelle uguali possiamo dire che :

1. i sistemi di bosoni vengono descritti da funzioni d'onda simmetriche e seguono la statistica di Bose-Einstein;
2. i sistemi di fermioni vengono descritti da funzioni d'onda antisimmetriche e seguono la statistica di Fermi-Dirac. Due fermioni identici, non possono occupare lo stesso stato quantico. (Principio di esclusione di Pauli).

Il problema chiave della Meccanica Statistica è quello di trovare la partizione (o legge di distribuzione) più probabile di un sistema isolato (o non). Da questa partizione deve essere poi possibile ricavare le proprietà macroscopiche del sistema stesso. La teoria della Meccanica Quantistica si fonda sull'ipotesi che lo stato di un sistema può essere descritto mediante una funzione $\psi(x, t)$ a valori complessi, detta "funzione d'onda", dipendente dalle coordinate x e dal tempo t . Questa funzione esprime una densità di probabilità $|\psi|^2$; più precisamente $|\psi(x, t)|^2 dx$ rappresenta la probabilità che una misura eseguita all'istante t sul sistema dia valori contenuti nell'intervallo dx . L'evoluzione temporale della funzione d'onda è soggetta all'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo che, per una singola particella, prende la forma:

$$1) \quad \begin{cases} i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta \psi + V(x) * \psi \\ \psi(x, t_0) = \psi_0(x) \end{cases}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6,626 * 10^{-34} \text{ Js (costante di Planck); } i$$

= unità immaginaria,

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} \text{ è l'operatore laplaciano in tre dimensioni}$$

e $V(x)$ è l'energia potenziale (talvolta detto anche semplicemente potenziale) associata al campo di forze, supposte conservative, agenti sulla particella. La teoria può poi essere estesa al caso di un sistema composto da più

particelle o dove lo spazio delle configurazioni è più complesso di quello euclideo.

Da un punto di vista matematico il problema 1) è un problema di Cauchy dove $\psi_0(x)$ rappresenta la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema quantistico all'istante iniziale t_0 . Poiché la funzione d'onda $\psi(x, t)$ definisce, attraverso il suo modulo al quadrato, una densità di probabilità allora è naturale assumere $\psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ per ogni istante t e che $\|\psi_0(x)\| = 1$

Nel modello standard delle particelle elementari, fermioni e bosoni sono le due categorie di particelle fondamentali: i quanti di materia e i quanti di forza. I fermioni (quanti di materia) corrispondono alle particelle che costituiscono la materia (nuclei, atomi, molecole) cioè i quark (di cui sono formati i protoni e i neutroni, costituenti del nucleo atomico), l'elettrone e il neutrino, più altre particelle (con le stesse interazioni) ma molto più pesanti e quindi instabili. I bosoni (quanti di forza), invece, sono particelle che, nella concezione duale onda-corpuscolo della MQ, sono i mediatori delle forze fondamentali che si esercitano tra le particelle elementari e che quindi ne determinano le interazioni. La statistica di Bose-Einstein, con l'introduzione dell'indistinguibilità delle particelle e la quantizzazione della loro energia, riesce, tra l'altro, a spiegare compiutamente due importanti fenomeni: la radiazione del corpo nero e l'annullarsi del calore specifico allo zero assoluto. La statistica di Fermi-Dirac, invece, rende conto di moltissimi altri fatti sperimentali introducendo il principio di esclusione di Pauli (1925) nella trattazione statistica di un gas di elettroni.

. 2 - LA MECCANICA STATISTICA: LA DISTRIBUZIONE DI MAXWELL-BOLTZMANN



James Clerk Maxwell - Ludwig Boltzmann

La meccanica statistica è un ramo della fisica che studia il comportamento e le proprietà medie di sistemi costituiti da un numero molto grande di particelle: lo strumento di queste analisi sono i metodi e le tecniche della statistica applicati alla descrizione del moto delle particelle. La statistica di Maxwell-Boltzmann è stata ricavata nell'ambito dello studio della teoria cinetica dei gas, nella quale si assume che le molecole interagiscono tra di loro molto debolmente e solo durante le collisioni: si possono, cioè, trascurare tutti gli altri tipi di forze possibili. Anche a distanza di molti anni dalla sua iniziale formulazione, la teoria cinetica dei gas («cinetica» dal greco *Kineticòs* che significa movimento) rappresenta una delle teorie fisiche di maggior importanza e di maggior successo. Uno dei suoi grandi meriti è stato quello di aver precorso, in un periodo in cui l'atomicità della materia era ancora considerata con una certa diffidenza, l'esistenza delle molecole e dei loro movimenti. I principali protagonisti che con le loro ricerche hanno ampliato l'orizzonte della

meccanica newtoniana fino alle dimensioni atomiche sono stati Bernoulli, Brown, Joule, Einstein, Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Perrin, Stern e molti altri. Per ottenere la legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann, consideriamo un sistema classico, ovvero un sistema composto da particelle identiche ma distinguibili. Uno stato macroscopico di tale sistema è caratterizzato dal numero totale di particelle e dall'energia totale: nel caso di particelle classiche, che sono distinguibili, ad ogni stato macroscopico corrispondono diversi stati microscopici o microstati ognuno dei quali è caratterizzato da una assegnata probabilità. Per fare questo si deve introdurre l'ipotesi che tutti i microstati corrispondenti alla stessa energia totale sono equiprobabili. La distribuzione che si ottiene all'equilibrio, pertanto, è quella che ha la massima probabilità di realizzarsi. Ogni microstato è specificato dal numero di componenti (particelle) per ciascun livello energetico. Per ottenere la probabilità di un microstato, nell'ipotesi di equi-probabilità, è sufficiente contare il numero di modi in cui si può realizzare il microstato stesso. Per passare dal numero di modi alla probabilità basta aggiungere una costante moltiplicativa che normalizza all'unità la somma di tutte le probabilità.

Si supponga quindi che il numero totale delle componenti sia N e che ci sia un certo numero n di livelli occupati con certi numeri di occupazione $N_1, N_2, \dots, N_S$. Applichiamo, ora, il principio di massima verosimiglianza ad un sistema composto da un grande numero N di particelle identiche e distinguibili. Consideriamo, poi, una particolare partizione delle N particelle negli stati ϵ_i con $i = 1, \dots, S$. In un sistema fisico reale le particelle tenderanno a disporsi secondo la

configurazione che prevede il numero massimo possibile di modi W . Ricordiamo che non tutte le configurazioni delle partizioni sono ammesse, ma solo quelle che rispettano i vincoli di esclusione introdotti. Inoltre ipotizziamo che, all'equilibrio termodinamico, il sistema è nella sua configurazione più probabile. Si tratta quindi di un problema di massimizzazione vincolata per la cui risoluzione si può applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che riduce l'analisi ad una massimizzazione semplice di una funzione in N_i . Tale metodo consiste nel massimizzare la funzione:

$$L(n_1, n_2, \dots, n_s, \alpha, \beta) \\ = \ln W - \alpha \left(\sum_{i=1}^s n_i - N \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^s n_i \epsilon_i - E \right)$$

soggetta ai seguenti vincoli in quanto, per ipotesi, il sistema è chiuso ed isolato:

$$\sum_{i=1}^s n_i = N \quad ; \quad \sum_{i=1}^s n_i \epsilon_i = E$$

In generale, il numero di modi di distribuire le N particelle negli s stati, nel caso in cui ogni configurazione presenta la stessa probabilità di verificarsi, è dato da:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_s!}$$

Poiché questa condizione non sempre è verificata, per tenere conto della possibilità che gli stati posseggano

probabilità intrinseche diverse, si introduce un fattore g_i detto “degenerazione dello stato i-esimo” che descrive la probabilità di trovare una particella nello stato i-esimo. Pertanto, la probabilità di trovarne due nel medesimo stato sarà g_i^2 e la probabilità di trovarne n_i è $g_i^{n_i}$. Si ottiene così che il numero di modi di distribuire le N particelle negli s stati è dato da:

$$W_{MB} = N! * \prod_{i=1}^s \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

e la relativa probabilità è:

$$P_{MB} = \frac{W_{MB}}{N!} = \prod_{i=1}^s \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

All’equilibrio le particelle sono disposte nella configurazione di massima probabilità soggetta ai seguenti vincoli:

1. La conservazione del numero totale N di molecole:

$$N = \sum_i N_i$$

2. La conservazione dell’energia totale $U = \sum_{r=1}^N E_r$

Nelle ipotesi dette, quindi, a piccole variazioni dn_i del numero delle particelle nello stato i-esimo deve corrispondere un differenziale nullo della grandezza P , ovvero $dP = 0$. Matematicamente, si preferisce imporre: $d(\ln P) = 0$.

A tale scopo determinando il logaritmo di P_{MB} ed applicando i noti teoremi sui logaritmi e la formula di Stirling

$$\ln(x!) \cong x \ln x - x = x * (\ln x - 1),$$

si ottiene:

$$\ln(P_{MB}) = N - \sum_{i=1}^S n_i * \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right)$$

Imponendo, ora, la condizione: $d \ln P = 0$, tenendo conto che il sistema è chiuso ed isolato ed introducendo due parametri, per ora indeterminati, α e β , previsti dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange, vale la relazione complessiva:

$$\sum \left[\alpha + \beta \epsilon_i + \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) \right] dn_i = 0$$

Quindi, per ogni i la condizione di equilibrio diviene:

$$\alpha + \beta \epsilon_i + \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) = 0 \quad \text{da cui} \quad \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) = -\alpha - \beta \epsilon_i$$

$$\frac{n_i}{g_i} = e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$$

I due termini α e β sono legati al sistema fisico considerato. In particolare, si può esprimere α in funzione del numero totale di particelle N . Poiché:

$$\begin{aligned} N = \sum_{i=1}^S n_i &= \sum_{i=1}^S g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i} = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\alpha} * e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= e^{-\alpha} * \sum_{i=1}^S g_i * e^{-\beta \epsilon_i} \end{aligned}$$

Introdotta il termine Z detto “funzione di ripartizione” del sistema:

$$Z = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{Z} = \frac{N}{\sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i}}$$

Quindi:

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

L’espressione della legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann all’equilibrio è pertanto:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

dove il termine Z rappresenta la “funzione di ripartizione” del sistema. Quindi U dipende dalla funzione di partizione Z ed è funzione del parametro β :

$$Z = Z(\beta).$$

Tale parametro (β) può essere utilizzato per caratterizzare l’energia interna del sistema. Basta a tale scopo definire il parametro T , temperatura assoluta, in modo tale che:

$$K_B T = \frac{1}{\beta}$$

Con $K_B =$ costante di Boltzmann
 $= 1,38 * 10^{-23} J/K = 8,617 * 10^{-5} eV/K$.

Tale relazione costituisce la definizione statistica di temperatura assoluta. (Notiamo che tale definizione di temperatura è valida solo all’equilibrio, poiché β è stato introdotto durante il calcolo della partizione più probabile).

3 - STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN



Satyendra Nath Bose ed Albert Einstein

La prima distribuzione quantistica la dobbiamo al bengalese Satyendra Nath Bose (1894-1974), che nel 1920 si occupò delle teorie di Albert Einstein, secondo la quale le onde elettromagnetiche sono costituite da particelle chiamate fotoni. Bose tradusse la teoria della relatività generale di Einstein dal tedesco all'inglese, e decise di derivare da considerazioni statistiche la formula della radiazione del corpo nero di Max Planck (1858-1947), ottenuta ipotizzando che la radiazione non scambi energia con la materia in modo continuo, ma solo attraverso pacchetti discreti, detti appunto quanti. In questo modo, Bose ottenne un risultato di rilievo, individuando una legge statistica in grado di spiegare il comportamento dei fotoni. Tuttavia nessuna rivista europea volle pubblicare il suo articolo "Planck's Law and the Hypothesis of Light Quanta", nel quale descriveva l'effetto fotoelettrico sulla base di considerazioni statistiche, perché esso sembrava contenere un imbarazzante errore di statistica. I suoi risultati furono perciò ignorati. Scoraggiato, Bose scrisse ad Albert Einstein in persona, il quale invece si dimostrò

subito d'accordo con le sue teorie. I fisici iniziarono a prendere sul serio le idee di Bose solo quando Einstein mandò loro un proprio articolo in accompagnamento a quello di Bose, che fu pubblicato nel 1924. Secondo Einstein, poiché i fotoni sono indistinguibili tra loro, non si possono considerare diversi due fotoni aventi la medesima energia. Il famoso "errore" di Bose è oggi alla base di quella che chiamiamo la distribuzione di Bose-Einstein. Einstein applicò la stessa idea a tutte le particelle con spin intero (in unità $\hbar/2\pi$), di cui i fotoni sono un esempio; per questo oggi tali particelle sono chiamate bosoni, in onore di Bose. Applicando questa distribuzione agli atomi, i due fisici predissero l'esistenza di un nuovo, esotico stato della materia, chiamato condensato di Bose-Einstein, la cui esistenza è stata sperimentalmente dimostrata nel 1995. La distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla formula:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/K_B T} - 1}$$

con $E_i > \mu$. In essa, n_i è il numero medio di particelle nello stato i , E_i è l'energia dell' i -esimo stato, μ è il potenziale chimico, K_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta. Il valore g_i dell' i -esimo livello è chiamato degenerazione di quel livello di energia. Vediamo ora come può essere ricavata la distribuzione di Bose-Einstein. Supponiamo di avere un certo numero di livelli di energia, contraddistinti dall'indice i , ciascuno avente energia E_i e contenente un totale di n_i particelle, mentre g_i esprime la degenerazione dello stato i . Sia $w(n, g)$ il numero di modi di distribuire n particelle tra i g sottolivelli di un certo livello energetico.

Si può dimostrare che $w(n, g)$ è dato da:

$$w(n, g) = \frac{(n + g + 1)!}{n! (g - 1)!}$$

Generalizzando, il numero di modi di distribuire n_i particelle in g_i sottolivelli, al variare di i , è il prodotto dei modi in cui ogni livello di energia può essere occupato:

$$W = \prod_i w(n_i, g_i) = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \cong \prod_i \frac{(n_i + g_i)!}{n_i! g_i!}$$

In questa approssimazione si assume che $g_i \gg 1$. Seguendo lo stesso procedimento utilizzato per ottenere la statistica di Maxwell-Boltzmann, si dovrebbe determinare un insieme di n_i che massimizza la funzione W , sotto il vincolo che il sistema sia costituito da un numero prefissato di particelle e possieda un'energia prefissata. Per determinare ciò applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. A questo scopo, si costruisce la funzione:

$$f(n_i) = \ln W + \alpha \left(N - \sum n_i \right) + \beta \left(E - \sum n_i \epsilon_i \right)$$

Applichiamo la cosiddetta formula di Stirling per i fattoriali:

$$\ln x! \cong x \ln x - x$$

e teniamo conto dell'approssimazione $g_i \gg 1$. Derivando parzialmente rispetto ad n_i la $f(n_i)$ così ottenuta, uguagliando a zero tale derivata e risolvendo rispetto a n_i l'equazione in tal modo ottenuta si ottiene:

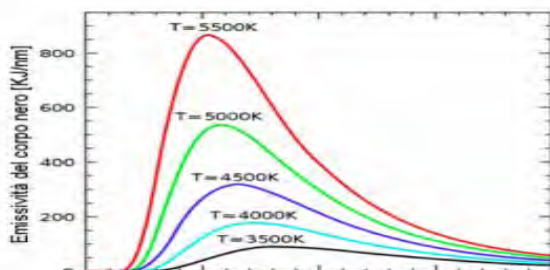
$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} - 1}$$

Si può dimostrare, in base a considerazioni di termodinamica, che: $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ed $\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}$. Sostituendo questi valori nella

relazione precedente si ottiene che la distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla formula:

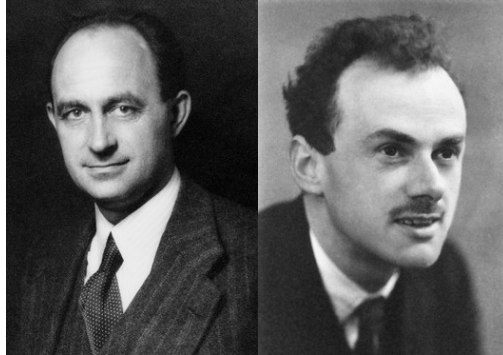
$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/K_B T} - 1}$$

Si osservi che quest’ultima si trasforma nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann per energie $(E_i - \mu) \gg K_B T$.



4 LA DISTRIBUZIONE DI FERMI-DIRAC

La distribuzione di Bose-Einstein non è l'unica distribuzione quantistica conosciuta. I due grandi fisici Enrico Fermi (1951-1954) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), due tra i padri nobili della Meccanica Quantistica, nel 1926 ne introdussero un'altra, detta distribuzione di Fermi-Dirac in loro onore, valida non per i bosoni ma per i fermioni. Queste ultime sono particelle a spin semintero (in unità $h/2\pi$) che obbediscono al Principio di Esclusione di Pauli, secondo il quale non possono esistere nello stesso stato quantistico due fermioni aventi gli stessi numeri quantici. In altre parole, i fermioni sono distinguibili fra di loro, a differenza dei bosoni che risultano indistinguibili.



Supponiamo, quindi, che siano verificate le seguenti ipotesi:

3. le particelle sono identiche e indistinguibili;
4. le particelle obbediscono al principio di esclusione di Pauli, cioè due particelle non possono trovarsi nello stesso stato dinamico e la funzione d'onda complessa deve essere antisimmetrica.

Tali tipi di particelle vengono dette “fermioni”. Si vuole determinare il numero delle distribuzioni distinguibili di n_i particelle tra i livelli degeneri g_i . In meccanica quantistica g_i corrisponde ai differenti stati quantistici aventi la stessa energia, cioè alla “degenerazione” del livello di energia. Naturalmente g_i (massimo numero di fermioni che possono trovarsi su un dato livello) deve avere un valore tale da non violare il principio di esclusione di Pauli. Supponiamo di avere n_i particelle. Il numero di modi di distribuire n_i particelle su g_i stati di energia ϵ_i è:

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

In questo modo però considero distinte tutte le distribuzioni che si ottengono permutando le particelle tra loro, cosa che non posso fare in quanto le particelle sono tra

loro indistinguibili. Pertanto, se le particelle sono indistinguibili, la relazione precedente va divisa per $n_i!$ ottenendo così:

$$\frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Se ora disponiamo tutte le particelle sui diversi livelli energetici E_i , si ha:

$$P = \prod_i \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

Per determinare la distribuzione più probabile, assumiamo che all'equilibrio statistico le particelle siano disposte nella configurazione di probabilità massima. Questa funzione deve essere massimizzata con i vincoli:

$$\sum_i g_i n_i = N; \quad \sum_i g_i n_i E_i = E$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla funzione si ottiene:

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \dots, n_S, \alpha, \beta) \\ = \ln P - \alpha \left(\sum_{i=1}^S n_i g_i - N \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^S g_i n_i E_i - E \right) \end{aligned}$$

con α e β parametri da determinare, si ottiene:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1}$$

che è la legge di distribuzione di Fermi-Dirac. Tale equazione fornisce i valori $n_1, n_2, \dots, n_S$ per la distribuzione più probabile, all'equilibrio. Da considerazioni termodinamiche si ha che:

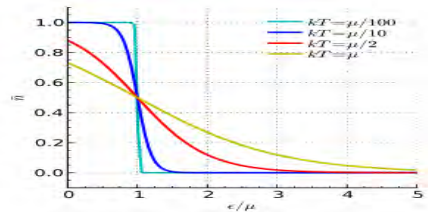
$$\beta = \frac{1}{KT}$$

Se l'energia di Fermi ϵ_F è data da $\epsilon_F = -\alpha KT$ si ha:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - E_F)/KT} + 1}$$

Da ciò si evince che, per $T = 0$, tutti gli stati di energia fino a $E = E_F$ sono occupati ($n_i = g_i$), mentre quelli con $E > E_F$ sono vuoti ($n_i = 0$). Questo segue da:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{(E_i - E_F)/KT} = \begin{cases} 0 & \text{per } E_i - E_F < 0 \\ \infty & \text{per } E_i - E_F > 0 \end{cases}$$



5 - CONCLUSIONI

Dall' analisi dei casi trattati si può affermare che:

- La statistica di Maxwell-Boltzmann si applica ai gas di molecole a temperatura ambiente o a temperature più alte.
- La statistica di Bose-Einstein si applica ai gas di bosoni, in stato di degenerazione. I bosoni sono particelle a cui non si applica il principio di Pauli, e non hanno spin o hanno spin intero come ad esempio: fotoni, fononi, mesoni, mesoni K, gas reali (idrogeno ed elio).

c. La statistica di Fermi-Dirac si applica ai gas di fermioni che, oltre ad essere in stato di degenerazione, sono anche soggetti al principio di Pauli. I fermioni sono particelle che hanno spin semintero come ad esempio: elettroni, protoni, neutroni.

Quest'ultima distribuzione viene spesso usata per lo studio degli elettroni nei solidi, e quindi costituisce la base per la teoria dei semiconduttori e dell'elettronica, avendo reso possibile scoperte come quella del transistor. Possiamo quindi dire che l'applicazione di una o dell'altra statistica dipende dal tipo di particelle coinvolte e anche dalle particolari condizioni fisiche in cui queste particelle si trovano. La distribuzione di Maxwell-Boltzmann rappresenta il limite classico in condizioni non degeneri e ad alta temperatura delle distribuzioni di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac: infatti, ad alta temperatura, la maggior parte dei sistemi si comporta analogamente a quelli classici, ovvero le differenze tra fermioni e bosoni sono trascurabili a meno che essi abbiano una densità molto alta, come ad esempio appunto in una nana bianca. Osserviamo, infine, che le tre statistiche possono essere riscritte insieme con l'espressione:

$$\frac{g_i}{n_i} + d = e^{\alpha + \epsilon_i / KT}$$

ove

$d = 0$ per la statistica di Maxwell-Boltzmann;

$d = -1$ per la distribuzione di Fermi-Dirac;

$d = +1$ per la distribuzione di Bose-Einstein

Per $n_i/g_i \ll 1$, cioè per sistemi molto rarefatti, ad esempio per alte temperature, le due statistiche quantistiche sono equivalenti a quella classica di Maxwell-Boltzmann.

L'obiettivo fondamentale della fisica particellare è di cercare una teoria che unifichi queste quattro interazioni fondamentali: il miglior candidato è, per ora, la teoria delle super-stringhe. Riuscire a comprendere la natura della "materia oscura" nell'universo- in particolare la sua componente non barionica- potrà aiutarci a capire quale sarà il futuro dell'universo e al contempo a trovare possibili tracce residue delle "super-particelle" prodotte nelle fasi iniziali dell'universo, assieme anche a misteriose particelle come i monopoli magnetici e i mini buchi neri. I neutrini, se hanno realmente massa non nulla, possono assumere un ruolo fondamentale nell'evoluzione dell'universo, anche come componente importante della materia oscura.

La fisica si è sempre occupata di fenomeni prevedibili e ripetibili. Famosissima, a questo proposito, l'affermazione di Laplace secondo la quale se un matematico «estremamente abile» conoscesse le condizioni iniziali dell'universo potrebbe calcolare tutto il futuro dell'universo stesso. Da tempo, però, la fisica si è dovuta arrendere di fronte alla complessità dei fenomeni comuni che non sempre mostrano la caratteristica della prevedibilità. Eppure, nonostante tutto, anche questa "complessità" che sembra sfuggire ai principi dell'ordine, può essere descritta da regole e leggi della meccanica statistica, della meccanica quantistica e della cromodinamica quantistica. La teoria della complessità evidenzia, difatti, come alcuni fenomeni complessi, quali la superconduttività e

la superfluidità, possono emergere solo dall'interazione coerente delle componenti microscopiche del sistema.

La meccanica statistica moderna è il prodotto di un lungo percorso storico. Si può affermare che molti dei problemi che si sono presentati nel suo sviluppo, possono dirsi, in larga parte, risolti. Numerose sono, oggi, le applicazioni della meccanica statistica quali, ad esempio, solo per citarne alcune: 1) Lo studio dei comportamenti collettivi in biologia: Stormi, sciame e colonie; 2) la propagazione rapida dell'informazione; 3) le dinamiche sociali: linguaggio, opinioni, consenso, innovazione; 4) i fenomeni emergenti in economia: Complessità /diversificazione della produzione. 5) i sistemi disordinati e vetrosi; 6) Problemi di ottimizzazione; 7) Reti biochimiche. Sia la meccanica statistica che la meccanica quantistica giocano un ruolo fondamentale non solo nella comprensione dei sistemi complessi ma anche nella dinamica caotica. La teoria del caos mostra come persino un sistema fisico deterministico possa risultare imprevedibile. A partire dalle ricerche del meteorologo americano Edward Lorenz, che negli anni Sessanta segnarono la nascita ufficiale della teoria del caos, numerosissimi fenomeni sono stati spiegati con modelli caotici caratterizzati dalla non linearità delle equazioni che li descrivono. I sistemi descritti da modelli caotici sono spesso di grande complessità. La scienza del caos ha trovato applicazioni in moltissimi campi: dalla meteorologia alla medicina, dalla dinamica dei fluidi alla biologia, dall'elettromagnetismo all'ottica laser.

Nelle Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i Licei Scientifici del nuovo ordinamento è previsto l'insegnamento della fisica del

Novecento. Ciò è reso possibile dal fatto che, in tutto il percorso di studi del Liceo Scientifico sono dedicate alla fisica 165 ore di insegnamento in più (132 al primo biennio e 33 al secondo) rispetto a quelle previste nel vecchio ordinamento. Pertanto il bosone di Higgs, le dimensioni aggiuntive dello spazio-tempo, l'anti-materia, il de-confinamento dei quarks, l'ipotetica formazione di mini buchi neri in laboratorio e la loro verosimile evaporazione mediante la radiazione di Hawking sono tematiche che potrebbero trovare facilmente l'interesse degli alunni. Questa proposta didattica trova il suo naturale completamento nello studio delle ultime frontiere della fisica, se non altro perché la fisica dei nostri giorni potrebbe essere prossima a realizzare la sintesi teorica resasi necessaria dopo l'affermarsi delle rivoluzionarie teorie introdotte nella prima metà del XX secolo. Anche nell'ambito dei progetti di orientamento, inoltre, è importante- come recitano le Indicazioni Nazionali- che lo studente del Liceo scientifico- possa approfondire tematiche di suo interesse, accostandosi alle scoperte più recenti della fisica (per esempio nel campo dell' astrofisica e della cosmologia o nel campo delle particelle elementari) o approfondendo i rapporti tra scienza e tecnologia.

Bibliografia

Baierlein R., Thermal (1998). *Physics-Cambridge*, University Press-Cambridge UK.

Bowley R., Sanchez M. (1997). *Introductory Statistical Mechanics*, Oxford University Press, 2nd edition.

Zemansky M. W., Dittman R. H. (1997). *Heat and Thermodynamics*, 7th edition, Singapore: McGraw Hill.

Landa L. D. , Lifshits E. M. (2010). *Fisica Statistica, Fisica Teorica*, Vol. 5/1, Roma: Editori Riuniti.

Bowley R., Sanchez M. (1999). *Introductory Statistical Mechanics*, Oxford University Press, 2nd edition.

Zemansky M. W., Dittman R. H. (1997). *Heat and Thermodynamics*, Singapore: McGraw Hill, 7th edition.

Goodstein D. L. (1986). *States of Matter*, New York : Dover Publications.

Hill T. L. (1988). *An Introduction to Statistical Thermodynamics*, New York: Dover Publications.

Ma S. K. (1985). *Statistical Mechanics*, Singapore: World Scientific Publishing.

Ferrari L. (2012). *Elementi di termodinamica statistica*, Napoli: F. R. Ferraro.

Casolaro F.-Trotta A., (2014). I neutrini- *Science and Philosophy*, Vol. 2, Number 2, December 2014.

Casolaro F.-Trotta A., (2019). Il modello standard ed oltre....Il bosone di Higgs, *Quaderni APAV n. 4*, pag 261-269

Buchi neri

Il meraviglioso viaggio dalla Relatività Generale all'immagine di un buco nero

Vittorio De Falco^{1,2}

¹ Scuola Superiore Meridionale, Largo San Marcellino 10, 80138
Napoli, Italy

² Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli, Complesso
Universitario di Monte S. Angelo, Via Cinthia Edificio 6, 80126
Napoli,,Italy



Sunto: Questo lavoro focalizza la sua attenzione sui buchi neri, che sono oggetti astrofisici compatti, cioè dotati di masse elevate concentrate in piccole regioni di spazio. Per tale motivo il campo gravitazionale nelle loro vicinanze è molto elevato, rendendoli difatti laboratori naturali per testare la gravità e vari fenomeni fisici ad alte energie (coinvolgenti lo studio delle più estreme condizioni ambientali presenti nell'Universo). I buchi neri sono descritti da teorie relativistiche della gravitazione, dove la Relatività Generale riveste un ruolo molto importante. Un rivoluzionario passo avanti nella comprensione di questi oggetti e della gravitazione è rappresentato dalla capacità tecnologica attuale di poter “fotografare” un buco nero e la materia che accresce attorno con sufficiente precisione. Questo lavoro si prefigge l’obiettivo di spiegare in maniera non troppo tecnica i concetti fondamentali che permettono di comprendere le idee, la metodologia di analisi, gli intenti di studio e l’importanza scientifica relativi all’immagine di un buco nero.

Parole Chiave: *Relatività Generale, buchi neri, gravitazione, immagine di un buco nero.*

Abstract: *This work focuses its attention on black holes, which are compact astrophysical objects, i.e., endowed with high masses concentrated in small regions of space. For this reason, the gravitational field in their vicinity is very strong, making thus them natural laboratories for testing gravity and various physical phenomena at high energies (involving the study of the most extreme environmental conditions present in the Universe). Black holes are described by relativistic theories of gravity, where General Relativity plays a paramount role. A revolutionary step forward in the comprehension of these objects, as well as gravitation, is represented by the current technological ability to photograph a black hole and the matter that accretes around it with sufficient precision. This work aims to explain not too technically the fundamental concepts to apprehend the ideas, the methodology of analysis, the intentions of study, and the scientific importance related to the image of a black hole.*

Keywords: *General Relativity, black holes, gravitation, image of a black hole.*

1 - Introduzione

Questo articolo ha origine in seguito ad una serie di incontri di orientamento tenutisi presso diversi licei di Napoli nell’anno 2023 per conto della Scuola Superiore Meridionale (SSM), che è un istituto di alta formazione ed eccellenza, istituito circa tre anni fa a Napoli e presso cui lavoro come ricercatore in astrofisica. Questi appuntamenti hanno avuto l’obiettivo sia di illustrare le prospettive di formazione della SSM sia di spronare i ragazzi allo studio delle materie scientifiche e in particolare all’astrofisica. Il mio intento è stato quello di presentare in maniera non troppo tecnica argomenti attuali di fisica moderna, cercando di comunicare i concetti fondamentali del mio ambito di ricerca evitando l’uso di

formule ed equazioni. Generalmente, le scienze sono considerate noiose dalla maggior parte degli studenti liceali perché molte volte sono propinate solo come materie tecniche prive di ragionamenti ed il cui obiettivo è portare a termine calcoli. Tuttavia, ho notato, con mio grandissimo stupore, un vivo interesse attraverso le domande poste e le vive discussioni che si sono aperte dopo la mia presentazione. L'interazione con i ragazzi mi ha fatto apprezzare ancora di più il mio lavoro di ricercatore e nello stesso tempo mi ha permesso di constatare il forte potenziale di apprendimento delle nuove generazioni. Infatti, molti ragazzi, mossi da curiosità e passione, proponevano quesiti che andavano oltre i temi esposti, poiché erano già ben documentati su alcuni argomenti grazie alla loro grande abilità nel consultare vari canali di informazione in rete.

Tuttavia, ho da fare una critica "benevola" a questo tipo di atteggiamento vorace di apprendimento (che in ogni caso considero formante): spesso non si hanno ancora le competenze necessarie per discernere tra notizie basate su fondamenti scientifici e quelle che partono da presupposti scientificamente validi ma finiscono poi per giungere a conclusioni fantasiose. Queste ultime risultano a volte più affascinanti perché permettono ad un ragazzo di evadere con la mente verso mondi lontani e bizzarri. Tuttavia, come ho spesso ribadito nei miei incontri, la Scienza è tutt'altra cosa, poiché si basa su robuste ed accurate conferme sperimentali fatte con estrema precisione.

A tal riguardo, ho cercato di evidenziare il carattere mutabile e di avanzamento della Scienza. Infatti, i modelli che usiamo per descrivere la realtà che ci circonda non sono

assoluti, ma hanno una prospettiva relativa rispetto al tempo in cui vengono proposti. Le nostre descrizioni del mondo diventano sempre più precise e chiare con l’avanzare delle conoscenze, aggiungendo nel tempo dettagli e caratterizzazioni sempre più peculiari. I precedenti modelli, se applicabili in determinati contesti spaziali e temporali (ossia sono ancora scientificamente validi), non sono abbandonati, ma vengono integrati in contesti più estesi. *Ma come si stabilisce se un modello è adatto a riprodurre un fenomeno fisico?* L’idea cruciale è che qualsiasi modello matematico assume una validità fisica, ogni qualvolta che le sue predizioni teoriche sono in accordo con i dati sperimentali. Grazie al continuo miglioramento della nostra capacità tecnologica, si ha la possibilità di acquisire dati sempre più accurati, i quali devono essere inevitabilmente spiegati da modelli altrettanto aggiornati e sempre più complessi. La Scienza, pertanto, è una disciplina dinamica e quindi in continuo cambiamento.

Un esempio di modello fisico-matematico di cui ci occuperemo in questo lavoro è rappresentato dalla teoria della Relatività Generale (RG) di Albert Einstein. Nonostante la fisica di Newton fosse utilizzata da circa 200 anni con estremo successo per spiegare gli eventi astronomici, nel 1915 Einstein propose le sue idee di rottura sulla gravità a scale astronomiche. Infatti, pur non avendo i dati sperimentali a disposizione, intuì teoricamente quali fossero gli aspetti della fisica di Newton da migliorare. Tuttavia, le grandi conferme sperimentali arrivarono solo circa cento anni dopo la pubblicazione della sua teoria, quando era disponibile la tecnologia necessaria per acquisire i dati osservativi per testarla. Per i motivi sopra esposti, Einstein è stato considerato

uno scienziato visionario e lungimirante. Con il tempo anche la RG è stata ampliata in quanto alcuni fenomeni astrofisici e cosmologici risultano non avere una chiara spiegazione all'interno della teoria di Einstein. [1]. Tuttavia, non esiste ancora un modello definitivo che estenda la RG, poiché non si hanno dati sufficientemente precisi per confermarla sperimentalmente.

In questo articolo, ripercorreremo le linee generali della presentazione di orientamento proposta nelle scuole, cercando anche in questo caso di non entrare troppo nei tecnicismi della materia, ma di comunicare le idee ed i concetti fondamentali. Tuttavia, daremo anche una serie di referenze che sono più tecniche qualora si vogliano approfondire degli argomenti su testi dedicati. Parleremo essenzialmente di astrofisica relativistica, dove gli attori principali sono i buchi neri. Questo lavoro non si prefigge né di essere esaustivo né di essere un manuale di studio, ma semplicemente un percorso che metta in luce degli argomenti interessanti da dover poi approfondire e studiare in dettaglio.

Il lavoro è diviso essenzialmente in tre parti: nella Sez. 2 daremo dei cenni di RG, che rappresenta la teoria relativistica della gravitazione maggiormente utilizzata e di vitale importanza per inquadrare i buchi neri; nella Sez. 3 introdurremo i buchi neri, esponendo le proprietà principali; nella Sez. 4 spiegheremo infine quali sono le idee e gli intenti che hanno portato a fotografare un buco nero insieme agli aspetti metodologici ed implicazioni scientifiche. Infine, il lavoro si chiude con la Sez. 5, dove vengono riportate le conclusioni e le prospettive future.

2 - Cenni di Relatività Generale

In questa sezione daremo dei cenni di RG strutturando questa parte come segue: nella Sez. 2.1 faremo capire come nasce questo modello; nella Sez. 2.2 illustreremo le idee fondamentali che mossero Einstein a formulare questa teoria; nella Sez. 2.3 enunceremo e spiegheremo i principi che sono alla base della RG; nella Sez. 2.4 spiegheremo cosa sono le geodetiche; infine, nella Sez. 2.5 presenteremo le equazioni di campo della RG, che rappresentano il fulcro del pensiero di Einstein sulla gravità.

2.1 - Come nasce la Relatività Generale

La fisica classica o fisica di Newton è quella comunemente studiata sin da liceo per descrivere la dinamica di un punto/i una volta assegnate le forze agenti su di esso/i. Essa è sintetizzata nella formula $F=ma$, dove F è la forza, m la massa dell’oggetto (trattato generalmente come un punto materiale) ed infine a è l’accelerazione. Ricordiamo che l’accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo t , ossia $a=x''(t)$. Questo significa che una volta stabilite le cause (ossia nota F) e le condizioni iniziali (posizione e velocità della particella) bisogna risolvere un’equazione differenziale del secondo ordine per determinare il conseguente moto. Questo è un problema non banale la maggior parte delle volte, in quanto la sua soluzione, ossia avere la funzione $x(t)$, può essere ottenuta solo in alcuni casi particolari in maniera analitica (e.g., oscillatore armonico), altrimenti bisogna ricorrere ad approcci numerici o analisi qualitative (e.g., pendolo soggetto a grosse oscillazioni).

Nel 1687 Newton pubblicò un'opera che è diventata una pietra miliare per la Scienza chiamata *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (anche noti come *Principia*), che consta di tre volumi. In esso vengono enunciati i tre principi della dinamica e fu lui ad introdurre anche la prima descrizione analitica della forza di gravità, definendo la *legge di gravitazione universale* [2]. La fisica Newtoniana funzionava molto bene per descrivere una serie di applicazioni quotidiane, così come per delineare il moto dei pianeti. Infatti, lo studio di Newton si basò sulle osservazioni astronomiche e deduzioni fatte da Keplero ed altri astronomi pregressi, che gli permisero di avere le idee chiare per poter elaborare la sua teoria. Inoltre, la sua opera costituisce una rappresentazione perfetta di come la trattazione geometrica presente nel testo sacro degli *Elementi* di Euclide possa essere utilizzata per modellare la realtà fisica quotidiana ed astronomica.

Tuttavia, agli inizi del 1900 cominciarono a svilupparsi sempre di più le cosiddette *geometrie non-euclidee* portate avanti da geometri come Gauss, Riemann, Lobačevskij, Beltrami, Poincaré etc. [3,4]. Costoro provvidero a sviluppare l'idea di assiomatizzare la geometria. In altre parole, assegnati degli assiomi coerenti e delle regole di inferenza è possibile dimostrare teoremi ed arrivare ad implicazioni diverse da quelle della geometria euclidea. Infatti, non si parlò più di geometria, ma di geometrie. Mettendo in discussione, per esempio, il *V postulato di Euclide* (i.e., data una retta ed un punto al di fuori di essa, esiste ed è unica la retta passante per il punto assegnato e parallela alla retta data) ha portato allo sviluppo della *geometria ellittica* (dove non è possibile trovare rette parallele, il cui modello è una sfera) e di quella *iperbolica*

(dove è possibile trovare molteplici rette parallele, il cui modello è una superficie a sella di cavallo).

Einstein aveva intuito che la fisica di Newton fosse adatta a descrivere eventi della vita quotidiana, mentre invece a livello astronomico ci fossero dei punti da rivedere. C’erano anche tutta una serie di indicazioni osservative (*e.g.*, spostamento del perielio di Mercurio) [5]. Einstein per formalizzare le sue idee con quelle delle geometrie non euclidee studiò per circa quindici anni l’algebra tensoriale, scambiando un’intensa attività epistolare con Levi Civita, Ricci Cubastro, Cattaneo. Questi matematici italiani furono importanti poiché lo aiutarono ad acquisire il retroterra matematico necessario per poter sviluppare le sue idee. Così nel 1915 pubblicò finalmente la RG. Quest’opera all’inizio non ebbe molto successo, poiché molti scienziati la ritennero una bella teoria matematica, ma non fisica per le sue implicazioni considerate strane e difficili da poter testare. Infatti, Einstein nel 1921 fu insignito del premio Nobel per la Fisica non per la sua teoria della RG, ma per l’effetto fotoelettrico. Questo fu una prova palese dello scetticismo degli scienziati dell’epoca. Tuttavia, le grandi conferme sperimentali arriveranno solo molti anni dopo.

2.2 – Idee fondamentali

La teoria di Newton descrive l’interazione gravitazionale intercorrente tra due corpi massivi in termini della sua famosa *legge di gravitazionale universale*

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2},$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due oggetti, $G=6.673 \times 10^{-11}$ N m² / kg è la costante di gravitazione universale e r è la

distanza che separa i due corpi. Einstein evidenziò due aspetti critici di questa formula: (1) perché due corpi dovrebbero risentire della forza gravitazionale reciproca? (2) perché questa forza dovrebbe avvenire istantaneamente? Questi interrogativi portarono a formulare i concetti fondanti che si celano dietro la RG. Infatti, Einstein concepì non più spazio e tempo come separati, ma unificati in quello che viene chiamato *spaziotempo*. Questa visione quadridimensionale è essenziale per poter spiegare una serie di fenomenologie che la fisica di Newton non è in grado di fare [6]. I corpi massivi deformano questo “telo elastico” tanto più quanto sono massivi. Quindi lo spazio è incurvato ed il tempo non fluisce più linearmente, ma inizia a rallentare muovendosi nelle vicinanze di questi oggetti se visti rispetto ad un osservatore lontano dalla sorgente gravitazionale [6,7]. Un corpo massivo fa sì che un altro oggetto vicino, ma meno massivo, risenta della curvatura del primo e sia forzato a muoversi verso di esso. Perciò la curvatura fa da tramite tra le leggi fisiche e la descrizione geometrica. Inoltre, nella teoria della RG, l’azione gravitazionale si propaga alla velocità finita di quella della luce [8]. Queste furono le intuizioni geniali di Einstein, che lo portarono poi a studiare e formulare gli aspetti matematici della sua teoria.

2.3 – I principi della Relatività Generale

La RG si fonda essenzialmente su tre principi fondamentali, che enunceremo e spiegheremo di seguito.

Principio di Relatività Generale. *Le equazioni che descrivono le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento ammissibili.*

Questo principio garantisce che le leggi della fisica non cambino quando ci si sposta da un punto ad un altro di uno spaziotempo curvo e cambiando sistema di riferimento. In altre parole, le leggi della fisica sono formulate in maniera *covariante* o *tensoriale*, cioè le equazioni che reggono i fenomeni fisici mantengono la loro forma funzionale, assicurando anche che la fisica non cambi (vedi [9] per una discussione approfondita).

In parole più semplici, consideriamo per esempio l’esperimento della caduta di un grave da una certa altezza effettuato con una pallina in ferro, utilizzando come strumenti di misura un righello ed un cronometro. Supponiamo che questo esperimento sia effettuato a Napoli e dia come risultato un secondo. Se questo stesso esperimento lo ripetiamo nelle stesse condizioni e con la stessa strumentazione di misura a New York (o qualsiasi altro posto lontano da noi) ritroveremo sempre lo stesso risultato. Questo principio è fondamentale perché per rendere la fisica generale e coerente c’è bisogno che la sua formulazione matematica avvenga in termini tensoriali.

Principio di Equivalenza. *Esiste sempre una regione piccola intorno ad un punto su uno spaziotempo dove gli effetti dell’accelerazione gravitazionale sono nulli.*

La formulazione di questo principio asserisce che data una regione curva, supponiamo per semplicità una sfera, esiste per

ogni punto su di essa il piano tangente. Questo significa che per piccole regioni di spazio è possibile considerare lo spaziotempo come piatto. Questo principio vuole salvare la fisica Newtoniana, ritrovandola quando ci si approccia a scale umane, mentre invece quando si considerano regioni di spazio più ampie (per esempio quando si ragiona a livello astrofisico) deve essere cambiata. Questo è un principio molto importante su cui sono stati scritti molti lavori e fatte molte considerazioni [10].

Principio metrico. *La metrica cattura tutta la struttura geometrica e causale dello spaziotempo. Essa è utilizzata per definire nozioni come: distanza, volume, curvatura, angolo, passato, presente e futuro.*

Quando si considerano regioni di spazio più ampie, la fisica Newtoniana non è più il modello capace di interpretare questa realtà, così la RG subentra in questa descrizione. Le misure vengono effettuate assegnando la *metrica* o anche detto *tensore metrico* $g_{\alpha\beta}$, il quale è simmetrico nei due indici. Quest'oggetto matematico definisce come poter compiere le misure di spazio e tempo su uno spaziotempo curvo [7]. Detto in termini più semplici, esso è una tabella che definisce delle regole da seguire per poter effettuare le misure. Nel caso in cui uno spaziotempo si riduce a quello piatto (o euclideo), otteniamo la *metrica di Minkowski* dove vale (globalmente) l'usuale fisica di Newton.

2.4 – Geodetiche

Un concetto molto importante della RG è quello di *geodetica*, che rappresenta la minima distanza tra due punti assegnati su uno spaziotempo curvo. Nella geometria euclidea (ossia in un piano), sappiamo che la minima distanza intercorrente tra due punti è il segmento di retta che unisce questi. Se per esempio consideriamo una sfera e due punti diversi su di essa sappiamo che la minima distanza tra essi non è più una retta, ma un arco di circonferenza che passa per questi. Ovviamente se consideriamo uno spaziotempo curvo diverso dalla sfera, le geodetiche saranno di tutt’altra forma. Il concetto di geodetica lo sperimentiamo per esempio quando prendiamo un aereo per andare da un punto A a B. Se la destinazione di arrivo è lontana, notiamo che le rotte aeree non sono rette ma curve geodetiche sul globo terrestre.

Per concludere, qualsiasi particella in caduta libera segue le geodetiche di genere materiale, mentre i fotoni (componenti elementari della luce) seguono le geodetiche di genere luce [7,9]. La natura materiale e della luce sono da distinguere, poiché essi rispettano delle leggi matematiche e fisiche diverse.

2.5 – Equazioni di Einstein

La teoria della RG è sintetizzata nella famosa frase “*lo spaziotempo dice alla materia come muoversi, e viceversa la materia dice allo spaziotempo come curvarsi*”. Per poter meglio comprendere quest’affermazione, ritorniamo alla Sez. 2.2, dove abbiamo appreso che un oggetto massivo curva lo spaziotempo, e quindi un altro corpo materiale risente di

questa curvatura e sa come deve muoversi. Questo concetto si deduce dalle equazioni di campo della RG, che riportiamo e non deriviamo [7,9]

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta},$$

dove $R_{\alpha\beta}$ è il tensore di Ricci, R lo scalare di curvatura, $G_{\alpha\beta}$ il tensore di Einstein incaricato di modellare la struttura geometrica dello spaziotempo, χ è una costante e $T_{\alpha\beta}$ è il tensore energia-impulso descrivente il contenuto di materia. Le equazioni di Einstein rappresentano dieci equazioni differenziali alle derivate parziali accoppiate di secondo ordine non lineari in termini della metrica, che risulta essere l'incognita da determinare [7,9]. Una volta assegnate le condizioni di simmetria dello spaziotempo ed altri tipi di richieste, si scrivono le equazioni di campo, le quali essendo altamente non lineari risulta essere molto difficile, in generale, determinare soluzioni analitiche [11].

Nelle equazioni di campo, la parte a sinistra dell'uguale rappresenta la geometria (ossia come lo spaziotempo si incurva), mentre la parte destra è la materia. Perciò, le equazioni di campo possono essere scritte nel seguente modo più concettuale

$$\text{CURVATURA} = \text{MATERIA}.$$

Tali equazioni, se risolte, conducono a spaziotempo aventi geometrie euclidee e non. I buchi neri rappresentano delle soluzioni analitiche interessanti a livello astrofisico.

3 - Buchi neri

In questa sezione presenteremo i buchi neri. Nelle Sez. 3.1 e 3.2 introdurremo i concetti di velocità di fuga e velocità della luce come velocità massimale raggiungibile in natura, i quali permettono poi di definire in Sez. 3.3 i buchi neri. Nella Sez. 3.4 spiegheremo come si forma un buco nero dal punto di vista astrofisico. Invece nella Sez. 3.5 enunceremo il teorema dell’essenzialità, il quale permette di definire un buco nero matematicamente. Infine, nella Sez. 3.6 presenteremo nello specifico due tipologie di buchi neri: statici e rotanti.

3.1 – Velocità di fuga

Supponiamo di considerare un pianeta di forma circolare di massa M e raggio R . Vi è una navicella di massa m su questo pianeta che vuole allontanarsi. Allora bisogna imporre che la sua energia cinetica (dove indicheremo con v la sua velocità) sia maggiore dell’energia potenziale del pianeta. Quindi abbiamo

$$\frac{1}{2}mv^2 > \frac{GMm}{R} \Rightarrow v^2 > \frac{2GM}{R} \equiv v_f^2,$$

dove v_f è detta velocità di fuga. Perciò la navicella per sfuggire all’attrazione gravitazionale del pianeta deve avere una velocità maggiore di v_f . Giusto per fare un esempio, la velocità di fuga dalla Luna è 2.4 km/h, dalla Terra 11.2 km/h, dal Sole 617.5 km/h. È importante notare che nella formula di v_f figura il rapporto M/R , che in gergo astrofisico è detto *compattezza*. Quindi quanto più un oggetto è compatto tanto più è elevata la velocità di fuga da esso. È importante notare

che questo discorso vale indipendentemente dalla massa della navicella e dipende solo dalla sua velocità.

3.2 – Velocità della luce

Sappiamo che in natura la massima velocità consentita è quella della luce nel vuoto, indicata con $c=299\,792\,458$ m/s, confermata attraverso *l'esperimento di Michelson e Morley* [12]. Ovviamente quando un oggetto si muove a velocità molte elevate non si utilizzano più le trasformazioni lineari di Galileo per la velocità. Supponiamo che un treno corra alla velocità v_1 e sopra di esso ci sia una persona che corre alla velocità v_2 . Un osservatore che si trova fuori dal treno vedrà la persona correre alla velocità v_1+v_2 . In altre parole, le due velocità si sommano in modo lineare attraverso le trasformazioni galileiane.

Questo ragionamento non vale quando si considera la velocità della luce, poiché le trasformazioni giuste da utilizzare sono quelle di Lorentz [9]. Riconsideriamo il caso precedente di un treno che corre alla velocità v_1 e supponiamo che la persona che si trovi sopra invii un segnale luminoso (che viaggia ovviamente alla velocità c). Un osservatore al di fuori del treno vedrà che il raggio luminoso non si propaga alla velocità di $c+v_1$, ma sempre alla velocità c . Per dimostrare questo, sappiamo che lo spazio percorso dalla luce rispetto alla persona che si trova sul treno è $x=c*t$; invece, riferito all'osservatore fuori dal treno abbiamo, sfruttando le trasformazioni di Lorentz, che

$$x' = \gamma(c * t - v_1 * t),$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v_1}{c^2} * c * t\right) = \gamma\left(t - \frac{v_1}{c} * t\right),$$

dove $\gamma = (1 - v_1/c)^{-1/2}$ è detto *fattore di Lorentz*. Prendendo il rapporto tra x' e t' abbiamo come si propaga la velocità della luce nel riferimento dell’osservatore posto al di fuori del treno

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\gamma * t(c - v_1)}{\gamma * t\left(1 - \frac{v_1}{c}\right)} = \frac{(c - v_1)c}{(c - v_1)} = c,$$

proprio come volevasi dimostrare.

3.3 – Definizione di un buco nero

I concetti di velocità di fuga e velocità della luce come velocità limite raggiungibile in natura permettono di poter definire in maniera semplice la nozione di buco nero. Prima dell’avvento della RG, il matematico e fisico francese Laplace intuì che ci potevano essere degli oggetti astrofisici, definiti da lui *stelle nere*, in cui la velocità di fuga fosse pari a quella della luce. Imponendo questa uguaglianza, otteniamo la seguente formula

$$c^2 = \frac{G M}{R} \Rightarrow R_s = \frac{G M}{c^2},$$

dove R_s è detto *raggio di Schwarzschild*, che è un buon modo per stimare il raggio di un buco nero [7], come vedremo.

Un *buco nero* è definito come un *buco* poiché contiene qualcosa e *nero* poiché da esso la luce non può sfuggire [13]. Il suo campo gravitazionale è talmente intenso che qualsiasi corpo materiale e luce vengono inghiottiti senza mai uscirne. Questi sono gli oggetti più compatti in natura. Per dare un’idea di quanto un buco nero sia compatto, se consideriamo un buco nero avente la massa del Sole, esso sarebbe concentrato in un’area di 7 km².

3.4 – Formazione di un buco nero

Normalmente i buchi neri, insieme alle stelle di neutroni e alle nane bianche, costituiscono il punto finale dell'evoluzione stellare. Per poter avere un buco nero, bisogna partire da una stella di massa maggior di 20 masse solari [7,14]. Una stella è un oggetto luminoso, al cui interno vi è un cuore duro che produce un forte campo gravitazionale che tende ad attrarre il materiale verso di sé. Questa forza di attrazione è bilanciata dalla pressione di radiazione originantesi dalle fusioni termonucleari che si verificano al suo interno [14]. Una stella ha una struttura a cipolla, dove lo strato più esterno è formato da materiali leggeri (come elio e idrogeno), poi nella parte centrale si trovano carbone e silicio, fino ad arrivare al centro che è costituito da ferro. La stella inizia a bruciare prima gli strati più esterni fino ad arrivare a quelli più interni quando il materiale da consumare inizia ad esaurirsi. Questo permette non solo di tenere la stella in vita poiché c'è un bilancio di forze, ma le consente anche di brillare. Quando tutto il combustibile termina, si arriva al *collasso gravitazionale*, dove la forza gravitazionale domina e la stella implode su sé stessa. In altre parole, la stella cade all'interno del suo raggio di Schwarzschild formando così il buco nero.

3.5 – Classificazione dei buchi neri

I buchi neri possono essere classificati in termini del teorema delle calvizie (*no hair theorem* in inglese) o anche teorema dell'essenzialità. Esso afferma che un buco nero non ha capelli, ossia esso è descritto solo da tre informazioni: massa, rotazione e carica elettrica [7,15]. Questo è un teorema

matematico che si dimostra nella RG, che ha anche importanti conseguenze astrofisiche. Infatti, esso garantisce una descrizione matematica relativamente semplice e più agevole dei buchi neri. Inoltre, provare sperimentalmente che questa cosa valga costituisce un test importante della RG. Le osservazioni sembrerebbero confermare il teorema, ma vengono sviluppate varie metodologie per trovare falsificazioni e possibili deviazioni [16].

Per il teorema dell’essenzialità, ci sono quattro possibili modelli. Quindi possiamo avere buchi neri:

- *statici o di Schwarzschild* caratterizzati solo da massa;
- *rotanti o di Kerr* dotati di massa e rotazione;
- *carici o di Reissner-Nordström* aventi massa e carica;
- *rotanti e carici o di Kerr-Neumann* aventi massa, rotazione e carica.

Di ogni buco nero sopra menzionato esistono soluzioni analitiche delle equazioni di Einstein. Dal punto di vista astrofisico non si riesce a misurare la carica elettrica di un buco nero. Inoltre, si pensa che se anche i buchi neri fossero dotati di una carica elettrica, questa si dovrebbe addensare sui suoi bordi per poi renderli subito scarichi e neutri. Per questo motivo vengono considerati solo buchi neri statici e rotanti.

3.6 – Buchi neri statici e rotanti

In questa sezione diamo una breve descrizione dei buchi neri statici (o di Schwarzschild) e rotanti (o di Kerr).

I buchi neri statici sono stati scoperti dal matematico e fisico tedesco Karl Schwarzschild, subito dopo che Einstein pubblicò la sua teoria della RG [17]. Essi sono caratterizzati da un bordo

esterno che è chiamato *orizzonte degli eventi* il cui raggio coincide proprio con quello di Schwarzschild. Esso è l'ultimo punto dove possiamo avere contatto con la realtà, poiché al suo interno vi è una perdita di informazioni. Un effetto fondamentale che si presenta è quello della *precessione delle orbite*, cioè un'orbita chiusa ed ellittica inizia a muoversi nel piano descrivendo una rosetta (vedi Figura 1). Questo è un effetto fondamentale introdotto dalla descrizione relativistica.

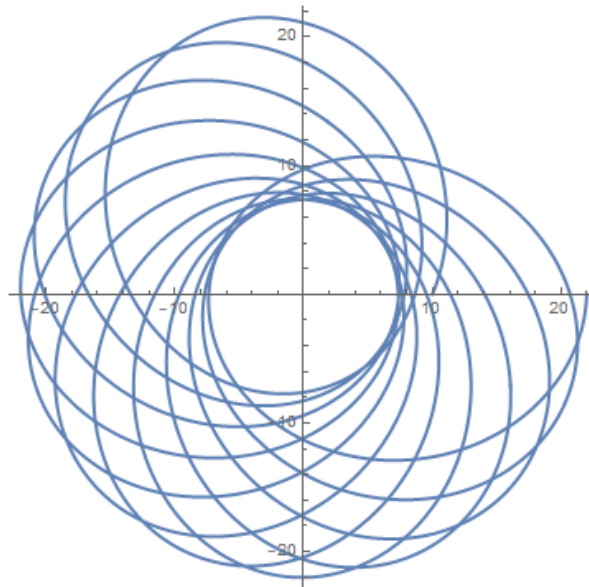


Figura 1: orbita a Rosetta nello spaziotempo di Schwarzschild.

Un buco nero rotante o di Kerr è caratterizzato sempre da un orizzonte degli eventi, il cui raggio non coincide propriamente con quello di Schwarzschild, ma ha una forma più complicata in cui un ruolo fondamentale è giocato anche dal parametro di spin che definisce la velocità di rotazione del

buco nero [7]. Inoltre, vi è una regione critica intorno a tali buchi neri che viene detta *ergosfera* (dal greco *ergon* che significa *lavoro*), perché in questa zona qualsiasi cosa (materia o luce) è costretta a co-ruotare violentemente con il buco nero. Un altro effetto relativistico importante è quello del *frame dragging*, ossia del trascinamento di tutto ciò che si muove attorno al buco nero. Per dare un esempio di ciò che accade astrofisicamente intorno a questi tipi di buchi neri, consideriamo un lavello riempito d’acqua e supponiamo che dopo un po’ rimuoviamo il tappo al suo interno. Questo evento genererà un vortice che inizierà a trascinare tutto ciò che c’è intorno fino a portarlo all’interno del buco del lavello.

4 - Immagine di un buco nero

Questa sezione presenta come costruire l’immagine di un buco nero. Nella Sez. 4.1 daremo le motivazioni astrofisiche che hanno portato al suo sviluppo; nella Sez. 4.2 spiegheremo la tecnica del tracciamento dei raggi luminosi che permette di realizzare teoricamente l’immagine di un buco nero; nella Sez. 4.3 menzioneremo la tecnica osservativa utilizzata per fotografare il buco nero; infine, nella Sez. 4.4 faremo un excursus storico che conduce dalle prime idee fino al giorno dell’immagine del buco nero, mettendo in luce la grossa impresa scientifica.

4.1 - Motivazioni astrofisiche

Se l’universo è nero, allora come è possibile individuare un buco nero? La risposta nasce dalle seguenti considerazioni: un buco

nero può attrarre attorno a sé una stella compagna. Prima di fagocitarla, le strappa via dai suoi strati esterni del materiale, il quale confluisce intorno al buco nero formando un *disco di accrescimento* [18]. Questa struttura è tanto più brillante, quanto più è massivo il buco nero. In questo modo esso funge da radar (in quanto la sua luminosità si differenzia da quelle delle stelle) e permette quindi di localizzare i buchi neri nell'Universo [18].

Così nel 1971 fu osservato Cygnus X-1, il primo buco nero, grazie all'opera di Giacconi ed altri scienziati che misero appunto delle tecniche per poter rilevare i fotoni provenienti da buchi neri ed altre sorgenti gravitazionali che emettono in banda energetica X. Questo fu un evento importante per lo studio dei buchi neri, dal momento che prima di quella data si pensava fossero solo oggetti matematici ed inoltre fu l'inizio dell'epoca dell'Astronomia X [19].



Figura 2: Simulazione numerica di un buco nero e della materia presente nel suo disco di accrescimento visto da un osservatore distante.

In Figura 2 riportiamo come il disco di accrescimento attorno ad un buco nero appare ad un osservatore collocato lontano attraverso le nostre simulazioni numeriche. Notiamo subito l’effetto di *lente gravitazionale* che ci permette di osservare cosa c’è dietro un buco nero facendolo assumere la caratteristica forma a sombrero come il cappello dei messicani. La materia calda emette fotoni che vengono rilevati dai nostri telescopi. L’ultimo anello sottile ed interno in questa immagine è detto *fotosfera*, la quale racchiude la parte nera al centro detta *ombra del buco nero* [20]. È importante non confonderla con il buco nero, il quale si trova all’interno di questa parte scura. Grazie ai nostri modelli, capendo com’è fatta la fotosfera riusciamo a dedurre dove è collocato il buco nero all’interno di quest’ombra.

4.2 – Metodo del tracciamento dei raggi luminosi

Per poter realizzare l’immagine che abbiamo mostrato in Figura 2 dobbiamo ricorrere al *metodo del tracciamento dei raggi luminosi* [21]. Esso è basato sul fatto che ogni punto del disco di accrescimento emette un fotone, il quale viaggia lungo geodetiche di tipo luce verso l’osservatore che è collocato lontano dalla sorgente gravitazionale. Dal momento che noi conosciamo la struttura geometrica del buco nero (con Schwarzschild o Kerr) sappiamo come tracciare analiticamente questi raggi luminosi dal punto di emissione fino al piano dell’osservatore. Facendo quest’operazione per tutti i punti con cui si vuole schematizzare il disco di accrescimento attorno al buco nero riusciamo a ricostruire l’immagine del buco nero al computer [21].

4.3 – Tecnica per fotografare un buco nero

Per poter fotografare un buco nero che si trova molto distante da noi è richiesto lo sviluppo di una lente con un forte potere risolutivo. Facendo alcune stime, la richiesta di cui sopra implicherebbe la costruzione di una grossa struttura intorno la Terra. Ovviamente questa sarebbe un'impresa molto complicata dal punto di vista sia ingegneristico che economico. Tuttavia, gli scienziati hanno cercato di ovviare a queste problematiche sfruttando le capacità di una serie di telescopi presenti sulla Terra (vedi Figura 3), che formano la collaborazione denominata *Event Horizon Telescope* (EHT) [22]. Lo scopo è quello di riuscire a fotografare il buco nero e la materia circostante andando a precisioni molto vicine a quelle dell'orizzonte degli eventi.

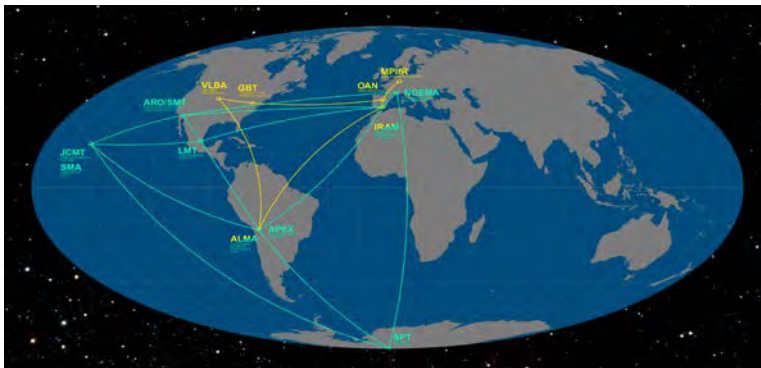


Figura 3: Telescopi sulla Terra che costituiscono la collaborazione EHT.

Per capire meglio come funziona EHT, in Figura 4 vediamo che utilizzando un solo telescopio l'immagine del buco nero è un po' sfocata, mentre già aggiungendone due si riesce a

migliorarla, così unendo sempre più telescopi si è in grado di ottenere una buona risoluzione e nitidezza dell’immagine. In altre parole, la procedura utilizzata consiste nel riuscire a prendere il meglio delle immagini scattate da ogni telescopio della collaborazione.

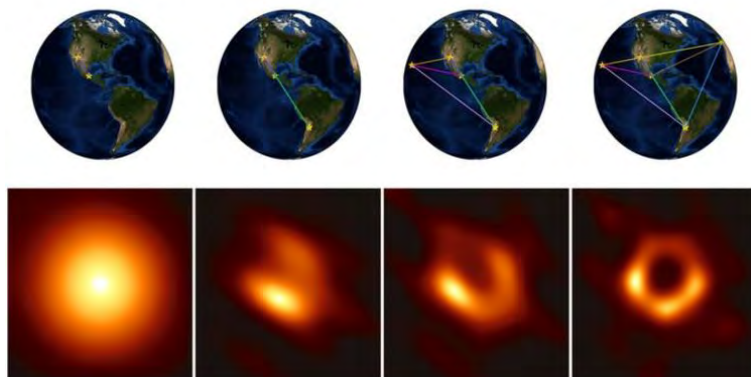


Figura 4: Come funziona EHT per generare la fotografia del buco nero.

Ovviamente assemblare le varie immagini insieme non è un processo alquanto semplice, poiché c’è bisogno di sincronizzare bene i diversi dati in modo da riprodurre in maniera fedele la realtà da osservare. Il potere di risoluzione di EHT, quando è stata scattata la prima foto, è paragonabile a vedere dalla Terra i particolari di un’arancia posta sulla Luna. Questo esempio fa comprendere in maniera semplice il livello di precisione e di accuratezza raggiunto dall’attuale sviluppo tecnologico.

4.4 - Excursus storico alla prima immagine del buco nero

Per capire un po' meglio come nasce la foto del buco nero faremo un breve excursus storico per evidenziare meglio le idee che hanno condotto a questa grande impresa scientifica.

Nel 1915 Einstein pubblicò la sua teoria della RG e già nel 1916 Schwarzschild fornì la prima soluzione di buco nero, mentre nel 1963 giunse poi quella di Kerr. Nel 1971 venne rilevato il primo buco nero, rendendo tali oggetti astrofisici. Ci fu così un vivo interesse nel loro studio e nel comprendere e testare con prove più solide la RG. Nel 1979 il matematico francese Luminet sviluppò il metodo del tracciamento dei raggi luminosi e fornì la prima immagine al computer di un buco nero [23] (vedi Figura 5).

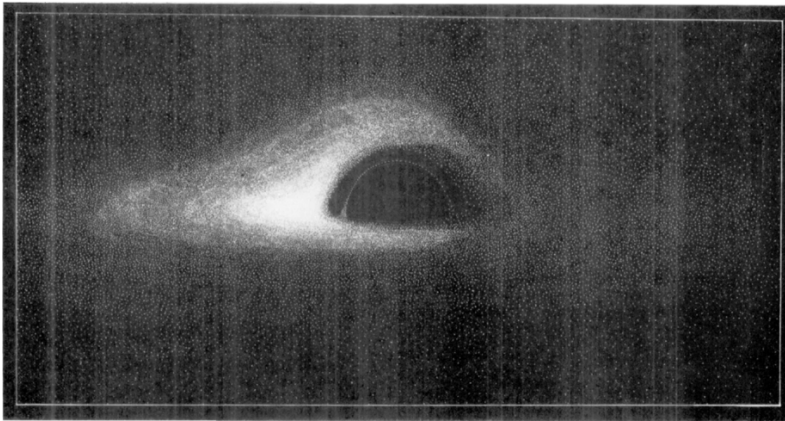


Figura 5: Immagine di un buco nero al computer realizzata da Luminet.

Questa simulazione fu importantissima (anche se in bianco e nero), poiché fece comprendere meglio gli effetti relativistici e come la materia si muovesse intorno ad un buco nero. Su

questa tecnica lavorarono molti altri scienziati di fama mondiale [24,25], i quali perfezionarono sempre più questo metodo fino a realizzare immagini a colori sempre più precise e realistiche. Il 10 aprile 2019, la collaborazione EHT annunciò la prima immagine del buco nero, la quale sovrapposta con le simulazioni numeriche confermava con grande precisione le previsioni della RG (vedi Figura 6 e consulta [22] per maggiori informazioni).

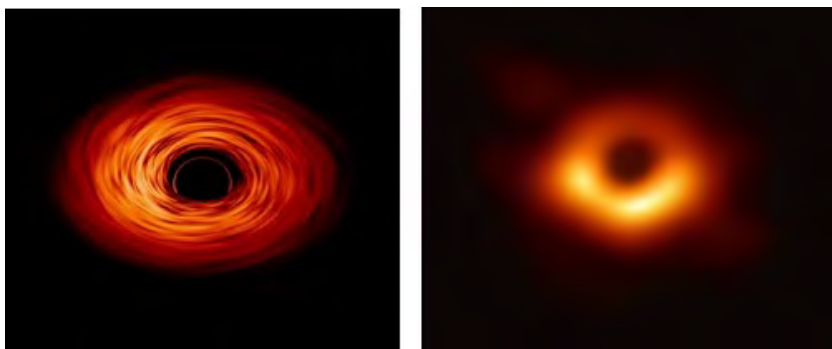


Figura 6: Pannello di destra. Immagine del buco nero realizzato con le attuali simulazioni numeriche avanzate. Pannello di sinistra. Prima immagine del buco nero realizzata dalla collaborazione EHT.

Il primo buco nero fotografato è quello al centro della galassia M87 che si trova a 1.65×10^{21} km da noi e la cui massa è pari a circa 6.6 miliardi di masse solari. Il suo orizzonte degli eventi è di circa 2×10^{10} km e ruota a velocità molto elevate [26].

5 - Conclusioni

In questo lavoro si è cercato di spiegare in maniera abbastanza semplice i concetti che si celano dietro il mondo dei buchi neri, spaziando dalla parte modellistica a quella

osservativa. Qualora il lettore fosse interessato a comprendere più a fondo alcuni argomenti è possibile consultare le referenze citate nel testo.

Per riassumere, nella Sez. 2 abbiamo fornito dei cenni di RG spiegando i motivi che hanno portato Einstein a formulare la sua teoria, insieme agli sforzi compiuti ed il lungo studio effettuato per poter concretizzare le sue idee fisiche in termini matematici. I concetti basilari sono: la massa che curva lo spaziotempo (entità unica e non più divisa come in fisica classica); la curvatura si fa portavoce della geometria e delle leggi fisiche dando un senso all'attrazione gravitazionale, la quale non diventa più un'azione a distanza, ma si propaga finitamente alla velocità della luce. Questo ha portato poi ad enunciare i principi di relatività generale, di equivalenza e metrico, che sono alla base della RG. Un concetto essenziale all'interno della teoria di Einstein è quello di geodetica (*i.e.*, la minima distanza che unisce due punti su uno spaziotempo) a cui sono soggetti sia corpi materiali che la luce. Infine, le equazioni di campo della RG descrivono un'equivalenza fra curvatura e materia, racchiudendo in sintesi analitica le sue idee. Queste equazioni, generalmente difficili da risolvere, consentono di ottenere geometrie diverse da quella euclidea.

Questo è il punto di partenza per parlare di buchi neri nella Sez. 3, che sono particolari soluzioni analitiche delle equazioni di Einstein. Un buco nero è un oggetto astrofisico molto compatto, caratterizzato dalla proprietà che la sua velocità di fuga coincide con quella della luce nel vuoto. Questo implica che qualsiasi cosa (materia o luce) che viene inghiottita dal buco nero non può sfuggire alla sua attrazione gravitazionale, portando così ad una perdita di informazioni. Essi

costituiscono il punto finale dell'evoluzione stellare, originantesi dal collasso gravitazionale (*i.e.*, quando non vi è più equilibrio tra la forza gravitazionale dominante e la pressione di radiazione che diminuisce). Matematicamente, i buchi neri possono essere caratterizzati dal teorema dell'essenzialità da massa, rotazione e carica elettrica. Esistono quattro modelli di buchi neri, ma generalmente in astrofisica sono considerati solo quelli statici e rotanti. I primi sono dotati solo dell'orizzonte degli eventi, mentre i secondi ammettono anche l'ergosfera (regione dello spaziotempo in cui la materia co-ruota violentemente con il buco nero).

La Sez. 4 si chiude con un argomento di astrofisica attuale riguardante l'immagine del buco nero. Questo è stato un evento fondamentale per comprendere meglio non solo questi oggetti misteriosi, ma anche la gravità. Per poter realizzare questa immagine al computer si ricorre al metodo del tracciamento dei raggi luminosi, che consiste nel seguire le geodetiche di tipo luce dal luogo di emissione fino al piano dove è collocato l'osservatore per ogni punto con cui si vuole schematizzare il disco di accrescimento. La prima fotografia del buco nero presente al centro della galassia M87 è stata realizzata dalla collaborazione internazionale EHT, la quale ha sfruttato una serie di telescopi presenti sulla Terra per realizzare un'immagine accurata. Tale lavoro ha confermato le predizioni teoriche della RG.

Questo è solo un piccolo tassello nel grande puzzle della ricerca scientifica. Ci sono molti altri approcci per studiare i buchi neri. Tra le tante tecniche va menzionata per esempio quella delle onde gravitazionali, le quali rappresentano un metodo complementare di studio, oltreché un mezzo

importante per esplorare alcuni aspetti dei buchi neri e della gravità che le metodologie in X non riescono a contemplare. La ricerca scientifica in astrofisica è molto vasta e ci sono vari aspetti che devono ancora essere compresi; molte domande sono ancora aperte e altrettante risposte vanno ricercate o confermate. Quest'articolo ha l'intento di motivare il lettore verso tali argomenti spronandolo ad approfondirli, con particolare riguardo allo studente liceale, che può raggiungere un'adeguata comprensione dei temi esposti attraverso gli studi universitari in matematica e fisica.

Bibliografia

Capozziello S., de Laurentis M. (2011). *Extended Theories of Gravity*, Phys. Rep., 509, 167-321, [doi: 10.1016/j.physrep.2011.09.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.09.003).

Newton, I., (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini, iussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater (<https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/13>).

Agazzi E., Palladino D. (1978). *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Milano: Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori. ISBN: 9788835094500.

Magnani L. (1978). *Le geometrie non euclidee*. Bologna: Zanichelli. [ISBN: 9788882921187](https://www.zanichelli.it/ISBN/9788882921187).

Will C. M. (1993). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, [doi: 10.1017/9781316338612](https://doi.org/10.1017/9781316338612).

Ellis G. F., Williams R. M. (1992). *Flat and curved space-times*, Oxford: Oxford University Press, [ISBN: 0-19-851164-7](https://www.oxfordup.com/ISBN/0-19-851164-7).

Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. (1973). *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, ISBN 0-7167-0334-3.

Maggiore M. (2007). *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford: Oxford University Press, [ISBN: 9780198570745](#).

Romano A., Furnari M. M. (2019). *The Physical and Mathematical Foundations of the Theory of Relativity: A Critical Analysis*, Birkhauser, ISBN: 978-3-030-27236-4.

Di Casola E., Liberati S., Sonego S. (2015). Nonequivalence of equivalence principles. «*American Journal of Physics*» 83, 39–46, [doi: 10.1119/1.4895342](#).

Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers, C.; Herlt, E. (2009). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations (2nd ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-46702-5.

Michelson A., Morley E. (1887). On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. «*American Journal of Science*», 34, 333–345, doi :10.2475/ajs.s3-34.203.333.

Shapiro S. L., Teukolsky S. A. (1983). *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. WILEY -VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, ISBN: 9783527617661.

Penrose R. (1965). Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. «*Physical Review Letters*», 14, 57–59, [doi: 10.1103/physrevlett.14.57](#).

Hawking S. W. (2005). *Information Loss in Black Holes*. *Phy. Rev. D*, 72, 084013, [doi: 10.1103/PhysRevD.72.084013](#).

Johannsen T., Dimitrios P. (2010). Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. II. Black hole images. «*The Astrophysical Journal*», 718, 446, [doi: 10.1088/0004-637X/718/1/446](#).

Schwarzschild K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 7: 189–196.

(http://old.phys.huji.ac.il/~barak_kol/Courses/Black-holes/reading-papers/Schwarzschild.pdf).

Frank J., King A., Raine D. (2002). *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge: Cambridge University Press, [ISBN: 0521620538](#).

Bowyer S., Byram E. T., Chubb T. A., Friedman H. (1965). Cosmic X-ray Sources. «*Science*», 147, 394-398, [doi: 10.1126/science.147.3656.394](#).

Bronzwaer T., Falcke H. (2021). The Nature of Black Hole Shadows. «*The Astrophysical Journal*», 920, 155, [doi: 10.3847/1538-4357/ac1738](#).

De Falco V., Falanga M., Stella L. (2016). Approximate analytical calculations of photon geodesics in the Schwarzschild metric, «*Astronomy & Astrophysics*», 595, A38, [doi: 10.1051/0004-6361/20162907](#).

The Event Horizon Telescope Collaboration, (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. «*The Astrophysical Journal Letters*», 875, L1, [doi: 10.3847/2041-8213/ab0ec7](#).

Luminet, J. P. (1979). Image of a spherical black hole with thin accretion disk. «*Astronomy & Astrophysics*», 75, 228-235, (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1979A&A....75..228L>).

Bardeen, J. M. (1970). Kerr Metric Black Holes. «*Nature*», 226, 64-65, [doi: 10.1038/226064a0](#).

[Cunningham](#), C. T., Bardeen, J. M. (1973). The Optical Appearance of a Star Orbiting an Extreme Kerr Black Hole. «*The Astrophysical Journal*», 183, 237-264, [doi: 10.1086/152223](https://doi.org/10.1086/152223).

Tamburini F., Thidé B., Della Valle M. (2019). Measurement of the spin of the M87 black hole from its observed twisted light. «*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Letters*», 492, L22–L27, [doi: 10.1093/mnrasl/slz176](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slz176)..

La proposta didattica dell'approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede (parte prima)

Luca Dragone * Antonella Palma **

*Università di Roma Tor Vergata; luca.dragone71@gmail.com

** Sapienza Università di Roma; antonella.palma@gmail.com



Sunto: *Nello studio dei problemi fisici vengono spesso trascurati gli aspetti squisitamente geometrici che si celano nella natura dei fenomeni. L'obiettivo del nostro intervento formativo è il recupero di questi aspetti legati alla sensibilità geometrica tanto cara ai matematici della Grecia ellenistica. Si considera il problema del galleggiamento presente nel Libro II Sui Galleggianti di Archimede. Dalla modellizzazione di uno scafo come paraboloide di rotazione, in base alla densità relativa del materiale di cui è costituito lo scafo, all'altezza e al parametro caratteristico del paraboloide, si ottengono le condizioni di stabilità e si giunge ad un risultato notevole di biforcazione. La sperimentazione si realizza in forma laboratoriale attraverso l'uso delle Classi GeoGebra.*

Parole Chiave: *Archimede, Galleggiamento, GeoGebra, Storia della matematica*

Abstract: *In the study of physical problems the purely geometrical aspects that are hidden in the nature of the phenomena are often neglected. The aim of our training intervention is the recovery of these aspects linked to the geometric sensibility so dear to the mathematicians of Hellenistic Greece. We consider the problem of buoyancy present in Book II of Archimedes' on Floating Bodies. Starting from the modeling of a hull as a paraboloid of rotation, on the basis of the relative density of the material of which the hull is made, the height and the characteristic parameter of the paraboloid, we obtain the conditions of stability and reach a remarkable result of bifurcation. The experimentation takes place in laboratory form through the use of GeoGebra Classes.*

Keywords: *Archimedes, Floatation, GeoGebra, History of mathematics.*

Premessa alla prima parte dell’articolo

Lo studio del Libro II *Sui Galleggianti* di Archimede e la sua rielaborazione in forma di percorso didattico vengono proposti in questo articolo suddiviso in due parti.

Nella prima, qui proposta, viene fornito l’inquadramento storico necessario a ricostruire il contesto culturale dell’età ellenistica nel quale sono nate e si sono sviluppate le conoscenze matematiche essenziali per la comprensione del fenomeno fisico del galleggiamento. Dopo aver delineato il quadro teorico, aver fornito le indicazioni metodologiche e le motivazioni della scelta di proporre un argomento così complesso, si descrive l’inizio del percorso didattico relativo alle coniche, con particolare riferimento alla definizione e alle prime proprietà della parabola nel contesto della geometria ellenistica. Questo studio preliminare è essenziale per la modellizzazione di uno scafo come paraboloide di rotazione immerso in un fluido, che sarà oggetto della seconda parte dell’articolo.

1 – Introduzione

Lo studio dei problemi fisici viene spesso affrontato nei percorsi scolastici formulando la risoluzione che privilegia il linguaggio algebrico; questo approccio induce i ragazzi a trascurare gli aspetti squisitamente geometrici che si celano nella natura dei fenomeni. Invece, come è stato più volte evidenziato in letteratura, la visualizzazione e l'immaginazione sono fondamentali per dare significato a tali concetti (Arzarello, Paola, Robutti, Sabena, 2009, pp. 97-109).

L'obiettivo del nostro intervento formativo è il recupero di questi aspetti legati alla sensibilità geometrica tanto cara ai matematici della Grecia ellenistica (Russo, 2019).

La modalità in cui proponiamo di affrontare i Galleggianti ha anche l'intento di indicare un modello di ricerca a studenti solitamente non abituati a percorrere i passi intermedi della fatica di una scoperta. Infatti, nell'insegnamento spesso i concetti matematici e fisici vengono presentati come se fossero sempre esistiti e vengono trattati senza riferimento alla loro origine. La storia ci ricorda che questi concetti non sono nati dal nulla ma hanno una genesi e una evoluzione.

L'approccio storico in questo caso non ha il solo fine di far conoscere un evento della storia o di enfatizzare il patrimonio della cultura in cui gli studenti apprendono, ma anche quello di invitare i ragazzi a pensare se stessi in altre persone, motivandoli così a riflettere sulle proprie opinioni (Jahnke, 2000, p. 298-299).

La convinzione che la storia possa essere una guida per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica trova fondamento nel metodo genetico di Toeplitz (Toeplitz, 1927) e si sviluppa con la reinvenzione guidata di Freudenthal; infatti

per quest’ultimo «i bambini dovrebbero ripetere il processo di apprendimento dell’umanità, non come effettivamente ha avuto luogo, ma piuttosto come avrebbe fatto se le persone avessero saputo in passato un po’ di quello che sappiamo noi oggi» (Freudenthal, 1991, p.48). Quindi la storia non dovrebbe essere usata senza modifiche. L’idea è quella di attingere ad «argomenti storici per scegliere una genesi di un concetto adatto all’uso nelle scuole e per costruire o inventare situazioni didattiche che possano fornire questa genesi» (Brousseau, 1997, p. 96).

Inoltre la storia può fungere da ponte tra la matematica e le altre materie (Tzanakis, Acavi, 2000, p. 25). Questo ponte interdisciplinare può avere una duplice funzione: portare la matematica all’interno di ambiti diversi del sapere, e attraverso questi motivare gli studenti ad apprendere la matematica coinvolta, oppure mostrare che le creazioni di questa disciplina sono figlie di problemi che si verificano in altri campi della scienza. La nostra proposta soddisfa entrambi questi aspetti con l’intento di proporre la storia come strumento e come fine (Jankvist, 2009, p. 241), in una prospettiva di didattica interdisciplinare, in cui la matematica è collante culturale nell’insegnamento (Capone, Rogora, Tortoriello, 2017, pp. 293-304).

2 - Metodologia e Strumenti

La sperimentazione si realizza sotto forma di “laboratorio didattico di matematica” in cui gli studenti lavorano insieme, confrontano idee e intuizioni, ipotizzano risultati in un clima

di apprendimento collaborativo. Non mancano però momenti di indagine individuale e riflessione personale.

Lo studente è guidato alla scoperta di inaspettate proprietà, attraverso la manipolazione di materiale concreto e simulazioni al computer.

Seguendo i suggerimenti di Archimede, si riproducono, attraverso disegni, le condizioni geometriche di stabilità e instabilità di un segmento di paraboloide di rotazione poggiato su un piano o immerso in un liquido. L'utilizzo del software GeoGebra 2D e 3D consente agli studenti di osservare dinamicamente tali condizioni, e l'uso del foglio Excel permette loro di tabulare ed elaborare i dati numerici ottenuti dal simulatore e verificare la bontà del modello.

I ragazzi sono guidati all'esplorazione attraverso le Classi Geogebra.

L'avvalersi di materiali concreti è fondamentale per favorire la comprensione dei modelli 3D. In questa prima fase di sperimentazione è stato impiegato materiale di facile reperimento, ma in prosieguo si intende aggiungere un momento di progettazione e realizzazione di paraboloidi pieni con stampante 3D. Questo consentirebbe anche un approccio sperimentale in un laboratorio di fisica, dove i diversi paraboloidi potrebbero essere immersi in liquidi di densità diversa. L'osservazione del comportamento di stabilità e instabilità potrebbe fornire dei dati quantitativi confrontabili con quelli ricavati attraverso la simulazione col software.

2.1 - Uso delle Classi GeoGebra

Le Classi GeoGebra sono costruite in modo che l'attività proposta inizialmente è guidata, sì da poter essere affrontata

dai ragazzi in maniera individuale e senza particolari indicazioni da parte dell’esperto adulto, ma evolve con componenti interattive.

I ragazzi tracciano le figure nelle finestre GeoGebra seguendo le indicazioni di costruzione, talvolta completando configurazioni parzialmente strutturate.

Domande mirate stimolano gli studenti all’esplorazione delle figure, che avviene attraverso la modifica di alcuni parametri e all’osservazione delle situazioni particolari ottenute. Inoltre, la scoperta di alcune proprietà ha luogo, sia attraverso la misurazione di grandezze, consentita dagli strumenti di GeoGebra, sia tramite dimostrazioni geometriche elementari.

Durante l’attività i ragazzi sono invitati a un confronto e ad uno scambio relativamente alle indagini effettuate.

Un sapiente bilanciamento tra le proposte guidate e l’esplorazione autonoma permette di conferire a questo percorso un elevato valore formativo, in una prospettiva costruttivista nella quale l’apprendimento per scoperta e l’utilizzo del problem solving sono parimenti protagonisti.

2.2 - Valutazione

La valutazione dell’intervento è di tipo qualitativo. I ragazzi vengono osservati mentre lavorano e interagiscono coi pari e con il docente o il ricercatore per cogliere sia i nodi concettuali sia i passaggi di scoperta e/o consolidamento di conoscenze. Particolare attenzione è rivolta al processo metacognitivo, infatti nelle Classi è sempre previsto un momento di riflessione personale, ossia campi aperti per

commentare le attività svolte e annotare conclusioni e considerazioni. È stato anche chiesto agli studenti di suggerire variazioni o miglioramenti del percorso proposto per incentivare il processo critico.

3 - Perché occuparsi di un'opera difficile come i Galleggianti di Archimede?

Il nostro lavoro considera il problema del galleggiamento, presentato nel libro *Sui Galleggianti* di Archimede, seguendo la traccia proposta da Lucio Russo, che ricostruisce il metodo del Siracusano, ossia illustrare, spiegare e dimostrare i principi fisici utilizzando la geometria.

L'opera *Αρχιμήδους Οχουμένων* si colloca quasi al termine della carriera dello scienziato, quando il collegamento con le meccaniche è ormai dato per acquisito e si sono da tempo conclusi gli esiti di studi fondamentali sui corpi quali *l'Equilibrio dei piani*, gli studi sugli *Sferoidi e Conoidi* e sulla *Quadratura della parabola*. Senza questi lavori il trattato *Sui Galleggianti* è incomprensibile. È quindi logico pensare che le conclusioni alle quali giunge Archimede non siano proponibili come oggetto di uno studio se prima non si risolvono i problemi legati all'equilibrio dei corpi, alla posizione del loro centro di gravità, alle dimostrazioni geometriche sulle proprietà dei segmenti di parabole e di paraboloidi di rotazione, sia retti che obliqui, e a tanti altri risultati matematici e fisici.

Quindi si dovrebbe concludere che questo argomento debba rimanere relegato ad una nicchia ristretta di specialisti del settore. Questo ostacolo apparente rischia di privare un

pubblico meno esperto, come quello formato da alunni di scuola secondaria, dell'opportunità di conoscere l'idea geniale di modellizzazione di uno scafo come paraboloide di rotazione e di trattare un fenomeno notevole di biforcazione con strumenti matematici di base.

Sarebbe davvero un peccato, considerando che le Indicazioni Nazionali sottolineano a più riprese l'importanza del concetto di modello matematico, della costruzione e analisi dei modelli e dell'acquisizione del linguaggio della fisica per modellizzare situazioni reali. Inoltre, la geometria euclidea del piano e dello spazio, le coniche e l'equilibrio dei corpi e dei fluidi sono presenti nelle linee guida.

Riteniamo che sia possibile proporre l'argomento sfruttando un felice connubio tra la Matematica, la Fisica, la Tecnologia e la Chimica, collegate con la Storia e le Lingue antiche, che permetta di cogliere la complessità dell'argomento nel suo insieme, senza perdersi nei tecnicismi propri di ciascuna disciplina, costruendo la conoscenza su reti di relazioni che consentono di giungere ad una visione, non solo più ampia, ma anche ricca di diverse prospettive. Questo approccio, che richiede di mantenere un quadro d'insieme e tenere conto di alcuni risultati non dimostrati in dettaglio bensì ottenuti attraverso osservazioni, esige anche la consapevolezza da parte dello studente che la conoscenza raggiunta reclama di colmare diverse lacune dimostrative. Tale modo di procedere anziché generare un disorientamento può, se ben gestito, divenire motivo di curiosità e ricerca personale.

Questo ardire è supportato dal fatto che anche in letteratura si afferma che: «lo studio delle fonti originali è il più

ambizioso dei modi in cui la storia potrebbe essere integrata nell'insegnamento della matematica, ma anche uno dei più gratificanti per gli studenti» (Jahnke, 2000, p. 291).

4 - La proposta didattica

Il percorso didattico, pensato per alunni a partire dal terzo anno della scuola secondaria di secondo grado, inizia con la modellizzazione di uno scafo come segmento di paraboloide di rotazione di cui si studia la stabilità, che al variare di alcuni parametri manifesta un fenomeno di biforcazione.

In funzione della densità relativa del materiale di cui è costituito lo scafo, dell'altezza e del parametro caratteristico del paraboloide, si ottengono le condizioni di stabilità o instabilità dell'imbarcazione.

4.1 - Piano didattico

Classe	Terzo liceo
Finalità	Sperimentare un percorso interdisciplinare che introduca lo studente alla modellizzazione attraverso la geometria, che consolidi la conoscenza delle caratteristiche della parabola e il concetto di disuguaglianza.
Obiettivo didattico	Far acquisire agli studenti le proprietà della parabola attraverso la costruzione alla maniera di Archimede; far acquisire loro, attraverso l'uso di un modello, il significato di disuguaglianza algebrica e, con l'utilizzo di GeoGebra, consentire esplorazioni critiche. Introdurre in modo semplice e operativo il concetto di biforcazione.

Prerequisiti	Proporzionalità tra grandezze, teorema di Talete, similitudine tra triangoli, concetto di baricentro. La parabola e la sua equazione. Utilizzo base di GeoGebra
Metodologia	Tecniche di argomentazione. Metodologia laboratoriale. Utilizzo di opportune schede fornite agli studenti. Uso delle Classi GeoGebra.
Durata	10 ore
Percorso didattico	-Introduzione storica. -La parabola con gli occhi dei matematici Greci: proprietà caratteristica, sottonormale, tangente. -Una dimostrazione alla maniera di Apollonio. -Segmento di parabola e di paraboloide. Vertice, altezza e asse. Baricentro. -Stabilità all’equilibrio di un paraboloide poggiato su un piano. -Equilibrio di un paraboloide immerso in un liquido. -Discussione e confronto

4.2 – Un racconto come innesco.

Per poter coinvolgere tutti gli alunni, anche quelli meno appassionati di storia, abbiamo utilizzato un aneddoto curioso: la storia del galeone Vasa, commissionato da Re Gustavo II Alfonso nel 1626 per blindare l’armata svedese. Si racconta delle prove di stabilità effettuate dal capitano della nave, Hannson, prima del viaggio inaugurale. Nel XVII secolo pare che non esistessero metodi per calcolare le principali grandezze statiche di una nave, per cui gli stessi capitani dovevano imparare a conoscere le caratteristiche operative dei loro vascelli andando per tentativi. Per avere una stima della

stabilità di una nave si effettuavano delle rudimentali prove di rollio. Nel caso del Vasa questa prova consisteva nel far correre trenta marinai da un bordo all'altro della nave per osservarne l'ampiezza dell'oscillazione.

Il 10 agosto 1628 il Vasa affonda nel porto di Stoccolma il giorno stesso del varo. Dal 1990 il galeone, recuperato e restaurato, si trova nel museo costruito appositamente per ospitarlo: il museo Vasa. Questo prezioso cimelio è considerato da alcuni il monumento alla stupidità umana.



Fig. 1- Il galeone Vasa e il museo omonimo

Dopo aver cercato informazioni (lunghezza, larghezza, altezza, dislocamento, pescaggio) di imbarcazioni famose del passato, si ricorre all'aiuto di Ateneo di Naucrati per raccontare un'altra storia, quella della più grande nave del mondo antico: La Συρακοσια.

Dalle informazioni estratte dal testo i ragazzi sono invitati a fare una stima delle sue dimensioni e a confrontarle poi con quelle riportate in letteratura. Infine si fa una riflessione paragonando le dimensioni di questa nave del III secolo a.C. con quelle che sono state precedentemente cercate sul web. Per svolgere questa attività sono state fornite agli studenti schede cartacee con il racconto di Ateneo, per poter

rintracciare in modo autonomo le informazioni utili per fare la stima delle dimensioni della nave che non sono esplicitamente riportate nel testo, e tabelle semistrutturate per facilitare il confronto dei dati. Nella sperimentazione, il racconto è stato fornito nella traduzione italiana, ma si prevede invece che parti opportunamente selezionate del testo vengano direttamente tradotte dal greco o dal latino dagli studenti stessi.

Dalla narrazione emerge che Archimede fornisce un contributo fondamentale per la costruzione di questa nave. Le conoscenze necessarie per la sua realizzazione si trovano nell’opera *Sui Galleggianti* che può essere considerata come il primo trattato di ingegneria navale. Tale sapere però, a quanto pare, si è perso nei 18 secoli a venire.

Archimede nel Libro I introduce il concetto di pressione del fluido, fondando le basi della scienza idrostatica, che dovrà attendere lo studio di Stevin, Galilei, Torricelli, Pascal e Newton per raggiungere una maturità tale da permettere di affrontare i concetti di equilibrio e stabilità presentati nel Libro II (Rorres, 2004).

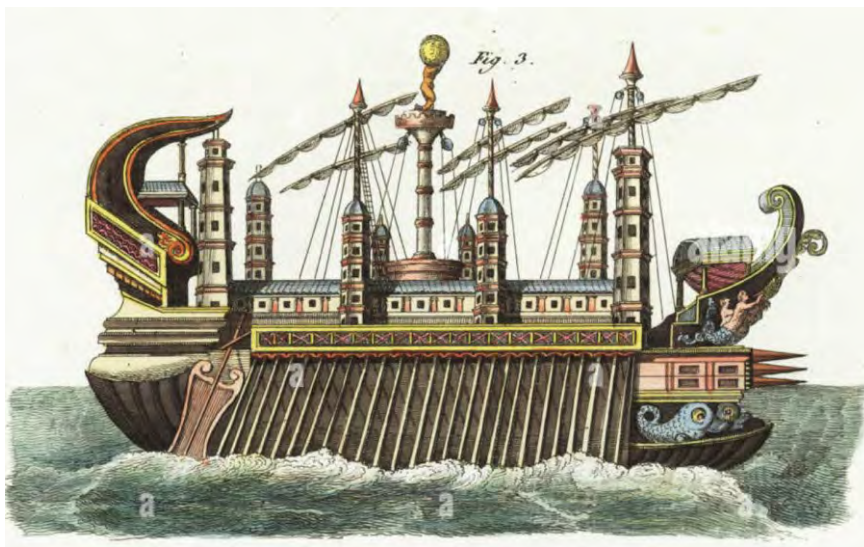


Fig. 2- Riproduzione artistica di Robert von Spalart della Συρακούσια, presente su Wikipedia.

Sia la Siracusia sia il Vasa vengono progettate e costruite per un'esigenza concreta: la prima per il trasporto del grano, la seconda per scopi bellici. Questa considerazione ci porta a riflettere su quali possano essere le spinte che muovono l'ingegno umano.

Nella cultura moderna la matematica è spesso considerata come una disciplina in gran parte scollegata dalle preoccupazioni e dalle influenze sociali e culturali. Invece, come in questo caso, la storia può mostrare come un vasto numero di aspetti matematici siano collegati ad altre discipline, e come l'ambiente sociale e culturale possa influenzarne lo sviluppo. La matematica è parte integrante del patrimonio intellettuale e ha un ruolo educativo attraverso l'insegnamento e la divulgazione. (Tzanakis, Arcavi, 2000, p. 212).

4.3 – La geometria ellenistica

Partendo da alcune delle proprietà della parabola e del paraboloide, ricavate con riga e compasso alla maniera degli antichi Greci, si guidano gli studenti ad osservare criticamente i parametri che caratterizzano la forma di una figura, fino ad ottenere l’equazione della parabola in modo costruttivo. Alcune proprietà vengono dimostrate, altre osservate attraverso l’uso del software Geogebra 2D e 3D.

Nel percorso storico proposto agli alunni si sottolinea che alcuni risultati relativi alla teoria delle coniche vengono usati da Archimede nel trattato *Sui Galleggianti* senza dimostrazione, sicuramente perché considerati noti al lettore dell’epoca. Sulla parabola non sono rimaste opere precedenti ad Archimede (287-212 a.C.), ma nel trattato *Le Coniche* di Apollonio di Perga (262-190 a.C.) si riferiscono risultati, a detta dello stesso Apollonio, già da tempo consolidati, quindi verosimilmente noti anche ad Archimede.

Il termine parabola fu introdotto proprio da Apollonio, Archimede usava il vocabolo *orthòtome* (dal verbo *ορθοτομew* che significa tagliare dritto). I termini ascissa e ordinata impiegati non devono indurci a pensare al familiare piano cartesiano, poiché per i Greci non esiste uno spazio di riferimento vuoto che contiene la figura, ma è la figura stessa che costituisce il riferimento.

Infatti ascissa=abscissa=tagliata è il segmento che viene “tagliato” sull’asse della parabola e l’ordinata è il segmento tracciato “ordinatamente” sulla perpendicolare a tale asse. Queste precisazioni servono per comprendere meglio l’uso di alcuni termini presenti nelle dimostrazioni di Archimede.

La parabola per i Greci nasce dalla definizione di cono, che troviamo negli opoi numero 18 del libro XI degli *Elementi* di Euclide: il cono è una figura che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo intorno ad un cateto.

Le sezioni coniche (ellisse, parabola e iperbole) si ottengono come sezioni con un piano perpendicolare al lato del cono, rispettivamente quando questo è acutangolo, rettangolo o ottusangolo. Quindi si ottengono sezioni diverse al variare del cono che viene tagliato.

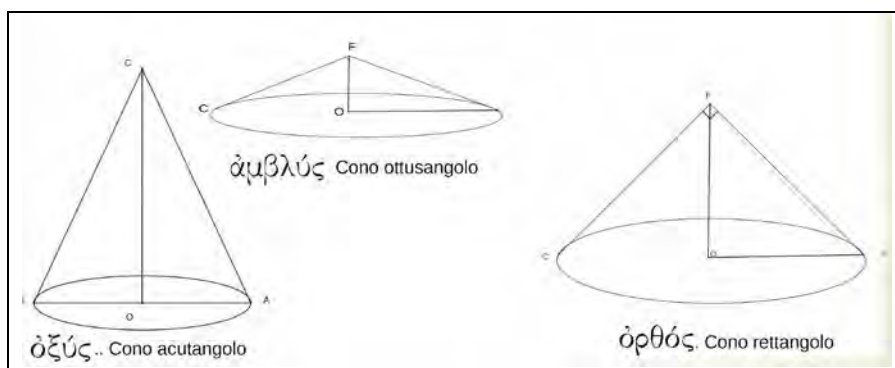


Fig. 3 – I tre tipi di coni secondo Euclide per generare le sezioni coniche

4.4 – La parabola secondo la geometria ellenistica con la Classe GeoGebra

Si introduce la parabola attraverso una costruzione nella finestra della Classe GeoGebra parzialmente riempita, come riportato in figura 4, fornendo le seguenti indicazioni (si omettono le istruzioni presenti nella classe relative all'uso degli strumenti Geogebra):

Indica con V il vertice della parabola, ossia l'intersezione della parabola col suo asse di simmetria. Posiziona un punto P

sulla parabola. Traccia la perpendicolare all'asse passante per P. Chiamata Q il punto di intersezione tra la perpendicolare e l'asse. Traccia il segmento PQ e nascondi la retta perpendicolare. Il punto Q è la proiezione di P sull’asse.

Nei testi di Archimede il segmento PQ è detto ordinata di P e il segmento VQ è la sua ascissa.

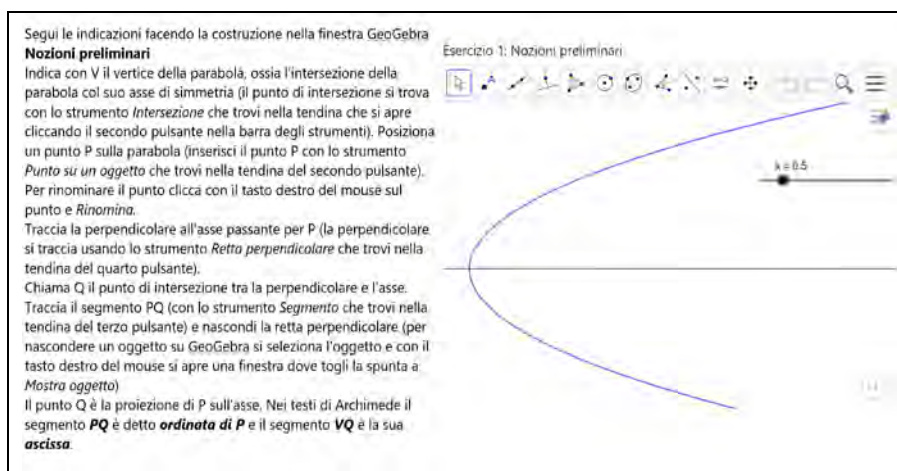


Fig. 4 – La Classe GeoGebra per introdurre la parabola

La costruzione consente di precisare i termini di ascissa e ordinata di un punto P qualunque sulla parabola, il cui uso può apparire anacronistico agli occhi degli studenti che sono abituati ad associarli alla cosiddetta geometria cartesiana. Le indicazioni fornite nell’attività evidenziano che per i matematici ellenistici è fondamentale il concetto di curva e la relazione è una proprietà caratteristica della curva stessa.

Una volta introdotta la specifica terminologia relativa alla parabola si passa a considerare la sua proprietà caratteristica, nota già prima di Archimede (Russo, 2019, p. 76):

I quadrati costruiti sulle ordinate di due punti della parabola stanno nello stesso rapporto delle ascisse di quei punti.

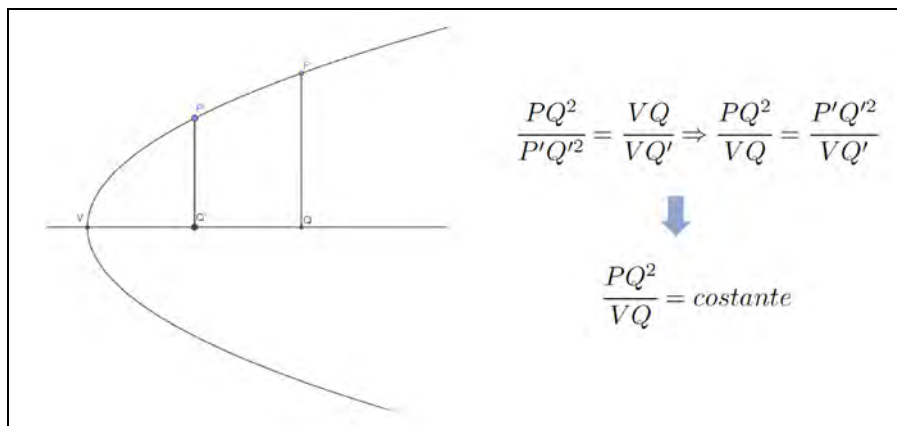


Fig. 5 - La proprietà caratteristica della parabola

Tale proprietà viene presentata attraverso la Classe GeoGebra, nella quale i ragazzi completano il disegno della parabola, interpretano la proposizione che enuncia la sua proprietà caratteristica e la traducono in termini di relazione matematica tra segmenti.

Il rapporto trovato si può ricondurre al concetto moderno di funzione $y=ax^2$. I Greci introducono la parabola partendo dalla figura e successivamente ricavano le sue caratteristiche, ribaltando la consueta sequenza del moderno insegnamento che parte dalla funzione per giungere al grafico.

La proprietà caratteristica della parabola

Indica con P e P' due punti sulla parabola e con Q e Q' le rispettive proiezioni sull'asse, nella finestra GeoGebra **La proprietà caratteristica della parabola**.

Esercizio 2: La proprietà caratteristica della parabola



Esercizio 3: La proprietà caratteristica della parabola

Secondo la definizione che si trova negli scritti di Archimede, e riportata sopra, individua i segmenti che rappresentano le **ordinate** dei punti P e P' nel disegno.

Esercizio 4: La proprietà caratteristica della parabola

Secondo la definizione che si trova negli scritti di Archimede, e riportata sopra, individua i segmenti che rappresentano le **ascisse** dei punti P e P' nel disegno.

Esercizio 5: La proprietà caratteristica della parabola

La **proprietà caratteristica della parabola**, nota già prima di Archimede, è:
I quadrati costruiti sulle ordinate di due punti della parabola stanno nello stesso rapporto delle ascisse di quei punti.

Come tradurresti in termini matematici questa proprietà?

Esercizio 6: La proprietà caratteristica della parabola

Quindi possiamo affermare che se la relazione che hai ricavato al punto precedente vale per qualunque punto P allora possiamo scriverla nella forma

$$\frac{PQ^2}{VQ} = \text{costante}$$

Come scriveresti questa proprietà in notazione moderna, collocando la parabola sul piano cartesiano con vertice nell'origine?

Fig. 6 – La Classe GeoGebra per studiare la proprietà caratteristica della parabola

Essendo il concetto di funzione uno dei principali ostacoli di carattere epistemologico riconosciuti sia nella storia della matematica sia nella didattica (Jankivist, 2009), questo ribaltamento può consentire agli studenti di osservare criticamente e in modo attento i parametri che caratterizzano la forma di una figura, e quindi arrivare all'equazione della parabola in modo creativo e consapevole.

Anteprima della seconda parte dell'articolo

Nella seconda parte verranno affrontate altre proprietà della parabola, si completerà l'apparato teorico per costruire un modello tridimensionale di scafo come paraboloide di rotazione e si studieranno le condizioni di stabilità di questo corpo immerso in un liquido.

Bibliografia

Archimede: *Sui corpi galleggianti*, a cura di H.F. Fleck pubblicazione elettronica, 2016.

Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2009). Gestures as semiotic resources in mathematics classroom, *Educ. Studies in Mathematics*, 70(2), pp 97-109.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Capone R., Rogora E., Tortoriello F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento, *Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 2(3), pp. 293-304.

Frajese A. (1974). *Opere di Archimede*. Torino: UTET.

Freudenthal H. (1991). *Revisiting mathematics education – China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Jahnke H.N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. J. Fauvel, J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education, the ICMI study* (pp. 291–328, Chapter 9). Dordrecht: Kluwer Academic.

Jankvist U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, *Educ Stud Math*. Springer Science.

Rorres C. (2004) Completing Book II of Archimedes’s On Floating Bodies. *The Mathematical Intelligencer* (Vol. 26, N.3, pp. 32-42)
Disponibile da
https://www.cs.drexel.edu/~crrorres/screw/Rorres_MI_2004.pdf

Russo L. (2019). *Archimede*. Roma: Carocci editore

Toeplitz O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, XXXVI, 88–100.

Tzanakis C., Arcavi A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201–240, Chapter 7). *The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Modelli Matematici: un potente strumento interdisciplinare trascurato nelle normali prassi didattiche

*Come rendere consapevoli gli studenti del
concetto di modello matematico e in grado di
costruirne dei semplici esempi?*

Antonella Moser*

* Liceo Scientifico Labriola, Roma,, Italia; moser_a@virgilio.it



Sunto: *nell'ambito della didattica della matematica, i modelli matematici sembrano continuare ad avere scarsa attenzione, ricorrendo al più a modelli già costruiti. Eppure sono un potente strumento interdisciplinare, d'interpretazione e rappresentazione matematica della realtà, sempre più utilizzato in molteplici ambiti. La relativa, approfondita conoscenza, la consapevolezza della loro efficacia, offre spunti di riflessione matematica trasversali. Affascina, amplia l'orizzonte matematico degli studenti, e offre l'opportunità di svelare competenze particolari che potrebbero non emergere in un approccio solo di tipo procedurale. Questa conoscenza, consapevolezza sembra svilupparsi meglio nella costruzione di un modello, nel realizzare i passi che lo determinano, tramite esempi didattici opportuni.*

Parole Chiave: *Modelli matematici, interdisciplinare, consapevolezza, costruzione di modelli.*

Abstract: *Mathematical models seem to continue to be poorly explored in mathematics teaching, using at most already constructed models. Yet they are a powerful interdisciplinary tool, also of the interpretation and mathematical representation of reality, increasingly used in multiple areas. The related, in-depth knowledge, awareness of their effectiveness, offers insights into transversal mathematical thinking. It broadens the students' mathematical horizon and fascinates. It offers the opportunity to reveal particular skills that might not emerge in a procedural-only approach. This knowledge, awareness seems to be best developed in the construction of a model, in the realization of the steps that determine it, by means of appropriate didactic examples.*

Keywords: *Mathematical Modelling, interdisciplinary, awareness, model construction.*

1 – Introduzione

Nell’ambito della didattica della matematica, i modelli matematici sembrano continuare ad avere scarsa attenzione, nonostante il loro crescente sviluppo e utilizzo nel mondo reale. Nella prassi didattica spesso si presenta un modello già costruito, chiedendo agli studenti di quantificare grandezze che vi compaiono per rispettare determinate condizioni. Rimane il dubbio che quest’unico approccio aiuti effettivamente a interiorizzare il concetto di modello e a capirne l’importanza e l’efficienza come strumento matematico.

In ambito educativo, anche le Indicazioni Nazionali Italiane (Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca [MIUR], 2010) richiamano il tema dei modelli matematici tra gli obiettivi specifici di apprendimento già al termine del primo biennio del liceo scientifico: «Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico,

distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto l'approccio della fisica classica» (MIUR,2010, p.340). Durante il secondo biennio, lo studente in relazione con le nuove conoscenze acquisite, «approfondirà il concetto di modello matematico» E, nel corso del quinto anno «in relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi» (MIUR,2010, p.341).

In alcuni libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado (Bergamini et al., 2017; Sasso & Zanone, 2019), vengono presentati diversi problemi del tipo *Realtà e Modelli* che si riferiscono a modelli matematici. Questo tipo di problemi viene inserito nelle sezioni pratiche relative agli strumenti matematici utilizzati per modellizzare una situazione reale (esponenziali, equazioni differenziali, ricerca di massimi e minimi), ma è assente una sezione teorica che riguardi esclusivamente la modellizzazione matematica.

Se consideriamo anche i recenti testi scolastici Zanichelli e DeA Scuola (due fra le più importanti case editrici scolastiche italiane) non troviamo ancora alcuna traccia di una sezione teorica a riguardo. Poiché le sezioni teoriche normalmente corrispondono ai temi affrontati nelle usuali programmazioni didattiche, può sembrare strano che tale sezione non sia presente. Nonostante il recente e notevole sviluppo dell'utilizzo dei modelli in molti campi della società moderna, sempre più orientata verso quelle che sono chiamate *STEM disciplines* (*Science, Technology, Engineering and Math*) or *STEAM* (con l'aggiunta di Arte) perché sembra esserci ancora

una certa reticenza a introdurre il tema della modellizzazione matematica nella programmazione di classe? Forse la maggior parte degli insegnanti non sono adeguatamente formati per trattare la disciplina dal punto di vista applicativo, in particolare mediante modelli matematici? Forse anche gli esperti delle case editrici che pubblicano le simulazioni per l’esame di stato manifestano una loro debolezza nel cercare di proporre modelli noti e forzatamente adattarli a un testo di un problema alla portata degli studenti (pensiamo anche solo alla simulazione Zanichelli del 9 Maggio 2023 contenente errori nella soluzione e nel testo-il modello presentato, continuo, non corrispondeva a quello descritto, discreto, neanche mediante passaggi algebrici opportuni, inoltre il tasso di natalità e mortalità venivano espressi con due unità di misura diverse non riconducibili alla stessa)?

Eppure i modelli rappresentano uno strumento trasversale, interdisciplinare, d’interpretazione e rappresentazione della realtà. Anche solo considerando la grande applicazione non solo nella fisica, ma anche nella biologia, medicina (basta pensare ad Alfio Quarteroni e al suo modello matematico del cuore umano), e nella chimica applicata all’arte (Roberto Natalini e il suo modello per la conservazione dei monumenti, inerente gli agenti chimici che interessano questo fenomeno), così come i molti modelli che si stanno sempre più sviluppando che riguardano la salvaguardia dell’ambiente. Sviluppare negli studenti la consapevolezza dell’efficacia di questo strumento, renderli in grado di costruire degli esempi di modelli descrittivi di fenomeni fisici, biologici, di artefatti tecnologici, non solo li aiuterebbe ad interiorizzare il concetto di modello matematico, ma anche in generale delle

applicazioni matematiche a realtà scientifiche. Potrebbe servire anche a smussare un poco l'idea che le scienze, la fisica, la matematica viaggino nelle aule su binari paralleli senza mai incontrarsi. La conoscenza di questo strumento offre spunti di riflessione matematica trasversali. Affascina, amplia l'orizzonte matematico degli studenti.

Il tema è avvincente ma anche molto delicato. Si dovrebbe forse cercare di incentivare la conoscenza e creatività degli studenti pensando a dei particolari modelli che li possano interessare e che contemporaneamente siano alla loro portata, nel senso sia di comprensione che di difficoltà di costruzione. Una proposta metodologica efficace potrebbe essere quella di stimolare gli studenti a costruire un modello matematico semplice, ponendo attenzione ai prerequisiti che agevolano l'autonomia degli studenti durante tale costruzione; in quest'ottica, un esempio interessante è il *modello descrittivo* come strumento per rappresentare e descrivere quantitativamente situazioni reali o fenomeni naturali a loro vicini. Il messaggio che si vuole lasciare agli allievi con queste esperienze didattiche è che ricorrere a un modello significa rispettarne una caratteristica che gli è peculiare (che lo rende fra l'altro estremamente versatile): la caratteristica di trovare una relazione fra i dati iniziali e finali del problema che sia applicabile per qualsiasi valore di detti dati; caratteristica che rappresenta una differenza sostanziale tra i passi che costituiscono un modello matematico rispetto a quelli relativi a un approccio risolutivo specifico per un determinato problema. Questa differenza è puntualizzata mediante un esempio pratico descritto nel paragrafo 5, che è stato proposto e discusso con gli allievi a conclusione dell'attività di

modellizzazione. L’esperienza è stata svolta in classi II e IV del liceo scientifico sia tradizionale che di scienze applicate. Seppur circoscritta a un certo tipo di modello matematico, l’esperienza evidenzia i passi fondamentali per realizzare un qualsiasi modello. In particolare, si pone una certa attenzione a far sì che gli studenti siano il più possibile autonomi proprio nella costruzione del modello, in modo che possano sviluppare un approccio consapevole e critico alla modellizzazione matematica.

Nei successivi paragrafi verranno dunque descritti due semplici esempi che dovrebbero interessare gli studenti. Un modello rappresentativo di una gara a staffetta fra studenti e un modello per la preservazione dei boschi dallo sfruttamento intensivo (tema ambientale caro ai giovani). Su quest’ultimo esempio verrà presentato in allegato un lavoro di gruppo svolto da studenti di una quarta liceo scientifico scienze applicate come modalità di espressione matematica creativa concernente proprio i modelli matematici.

2 - Costruzione di un modello matematico descrittivo di una gara a staffetta fra studenti

Una particolare esperienza didattica che stimola gli studenti a *costruire* un modello matematico molto semplice, intuibile, di un’attività reale potrebbe essere un caso studio che coinvolge facilmente gli studenti: una gara di corsa e abilità fra squadre. una gara di zucche che si svolge ad Halloween nei campus americani, la “pumpkin picking race”.



Si predispongono le zucche una dietro l'altra, in file parallele ad una certa distanza da una linea di start, in modo che lo spazio fra una zucca e l'altra sia identico per tutte le zucche.

I ragazzi si dividono in squadre, ciascuna posta in prossimità di una fila di zucche e della linea di start. La gara consiste nel raccogliere più zucche possibili in un certo tempo fissato. Considerato il peso e l'ingombro di ogni zucca, la regola da seguire è che, raccolta una zucca, si deve riportarla alla linea di start e poi andare a prendere la successiva. Ogni giocatore della squadra deve prendere almeno tre zucche prima di dare il cambio al giocatore successivo.

Dato che ogni anno il tempo disponibile per la gara può variare a causa delle condizioni atmosferiche e/o di esigenze organizzative, si registra la velocità media della squadra vincitrice (considerando dunque i metri percorsi in totale, nel tempo dato a disposizione per la gara). La squadra che vince la gara, può ottenere anche un premio speciale se sarà riuscita a migliorare il record di velocità precedente.

Si predispone un'attività didattica per gli studenti in cui sono invitati a sviluppare per gradi un modello matematico, rappresentativo della gara ed efficiente nel determinare

proprio i metri percorsi da una squadra che ha colto un certo numero di zucche e quindi la relativa velocità media.

Coerentemente con la caratteristica di versatilità dei modelli matematici, questo particolare modello può essere descrittivo di una qualsiasi gara a staffetta come del tipico esercizio, detto *suicidio*, di Scienze motorie e di allenamenti di giochi di squadre.

2.1 – Costruzione del modello

Iniziamo a costruire il modello: analisi delle caratteristiche della situazione reale. Si invitano gli studenti ad individuare le entità caratteristiche della situazione reale. In generale gli studenti propongono: distanza della prima zucca dallo start; tempo disponibile per ogni squadra, metri percorsi per arrivare a prendere una determinata zucca, posizione della zucca rispetto le altre (prima, seconda..); numero di concorrenti per squadra; estensione del campo di gioco; numero di zucche massimo che ogni concorrente può prendere.

L’obiettivo della costruzione del modello rappresentativo della gara è potersi calcolare la velocità media e quindi i metri percorsi dalla squadra vincitrice considerando il numero di zucche prese dalla squadra. Si selezionano dunque solo quelle indipendenti ed essenziali per l’obiettivo: le prime 5 dell’elenco.

Si passa poi a *matematizzare la situazione reale associando alle relative caratteristiche dei parametri e variabili matematiche.*

- la variabile n alla zucca n -esima;
- il parametro d alla distanza della prima zucca dallo start;
- il parametro l alla distanza fra una zucca e l’altra;

- il parametro T al tempo disponibile per la gara;
- la variabile a_n ai metri percorsi per prendere la zucca n -esima.

Si può considerare il percorso completo per riportarla allo start o solo il percorso per arrivare a prenderla senza riportarla allo start.

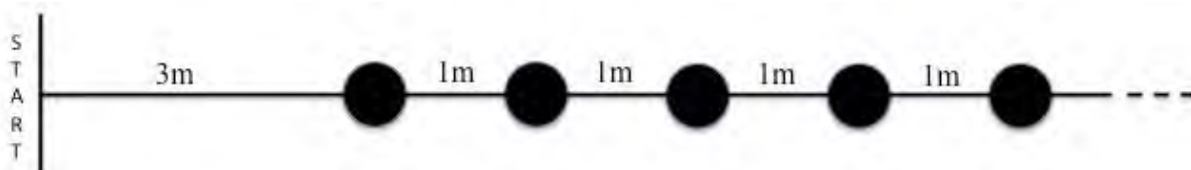
Per semplicità di costruzione del modello, è bene scegliere inizialmente la seconda ipotesi, lasciando in un secondo momento la costruzione del modello considerante la prima ipotesi.

Si passa poi a *semplificare e schematizzare la situazione reale*.

Le zucche diventano palle

Si pone $d = 3$ e $l = 1$, tutte le palle sono poste alla distanza di un metro l'una dall'altra e la prima posta alla distanza di 3 metri dallo start.

Schema grafico relativo:



Per far capire agli studenti l'efficacia di ricorrere ad un modello matematico si invitano prima a calcolarsi empiricamente i metri percorsi per prendere la prima, la seconda, la terza, la quarta zucca. Poi evidenziando i risultati ottenuti, si esortano a riconoscerne una sequenza numerica (la differenza di metri percorsi fra una l'altra, aumenta ogni volta di due). Agli studenti è a questo punto importante, far

notare, che, sebbene con la sequenza sia più rapido poi calcolarsi i metri percorsi per prendere le zucche successive, risulta sempre oneroso nel caso di un alto numero di zucche (dato che comunque occorre sempre calcolarsi tutti i termini precedenti). Molto più efficace ricorrere a una relazione diretta fra i metri percorsi e il numero di zucche prese come somma di 2 espressioni.

La prima, corrispondente ai metri percorsi solo per ripetere la distanza dallo start alla prima zucca (3 metri nel nostro caso, ripetuti per $2n$ volte, meno i 3 metri per riportare allo start la palla ennesima –decidendo di conteggiare inizialmente solo i metri percorsi per arrivare a prenderla).

$$3(2n - 1)$$

La seconda espressione, corrispondente ai metri percorsi ripetutamente dalla prima palla alla palla ennesima. 1 metro dalla prima palla alla seconda palla (avanti e indietro), 2 metri dalla prima palla alla terza palla (a/i) e così via

$$1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (n - 3) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 2) + (n - 1)$$

che, addizionando il primo termine con il penultimo, il secondo con il terzultimo ecc., risulta un’addizione ripetuta di $(n - 1)$ metri per $(n - 1)$ volte:

$$[1 + (n - 2)] + [1 + (n - 2)] + \dots + (n - 1) = (n - 1)^2.$$

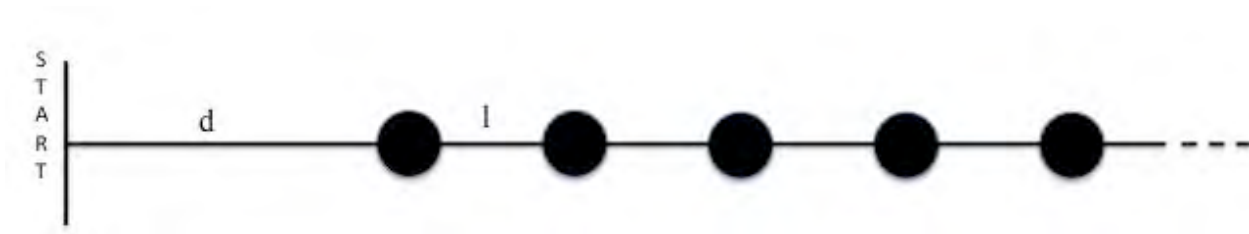
La relazione è molto semplice dunque esprimibile tramite un polinomio di secondo grado. *Modello quadratico*:

$$a_n = 3(2n - 1) + (n-1)^2 \quad \text{ossia} \quad a_n = n^2 + 4n - 2$$

Per completezza si individua sia la relazione per riportare anche l'ultima zucca allo start aggiungendo gli $n-1+3$ metri:

$$a_n = n^2 + 5n$$

sia la rappresentazione del caso generico, d e l qualsiasi:



$$a_n = (2n-1)d + (n-1)^2 l \quad \text{quindi} \quad a_n = n^2 + 2(d-l)n + 1-d$$

E considerando di riportare anche l'ultima zucca allo start, aggiungendo $d + (n-1)l$:

$$a_n = n^2 + (2d-l)n$$

Relazione che permette di calcolare facilmente il numero di metri percorsi in funzione del numero di zucche prese qualsiasi sia il numero di esse per qualsiasi distanza della prima zucca allo start e fra le altre zucche.

3 - Costruzione di un modello matematico di esigenza ambientalista: il taglio del bosco

Si stimola gli studenti a costruire un modello matematico che descriva una situazione reale e aiuti a risolvere dei punti all'interno di un problema legato ad una concessione di un bosco che deve garantire un certo rendimento grazie al

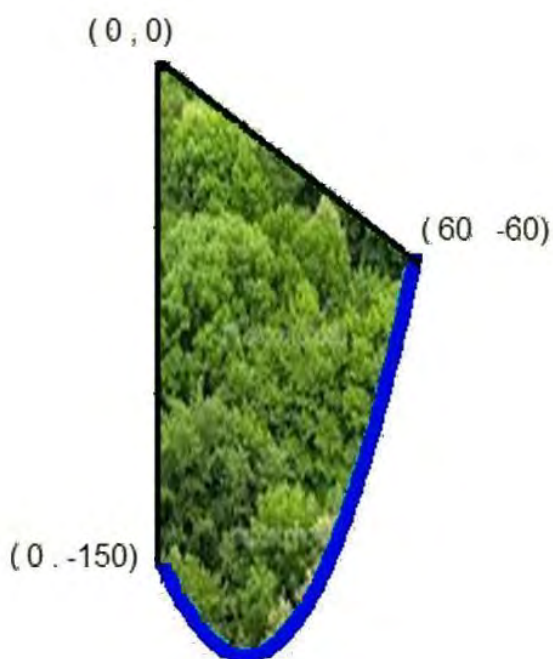
legname ottenuto dal taglio degli alberi ma che deve rispettare dei vincoli ambientali e mettere in conto anche la probabilità che alcune piante si possano ammalare, così come la possibilità di provvedere a rimboschire l'area mettendo a dimora delle piante giovani che però diventano adulte in tot anni e quindi possono rientrare nel computo di alberi da tagliare solo nel momento che sono adulte. Di seguito il problema in dettaglio.

Un'azienda di legname ha avuto in concessione per 20 anni un'area boschiva di conifere nelle vicinanze di Rovereto, per il taglio delle piante adulte.

L'area è delimitata a nord dalla ferrovia, ad ovest da una strada e a sud-sudest da un fiume con un percorso schematizzabile con arco di parabola di equazione:

$$y = \frac{3}{40}x^2 + bx + c$$

Le coordinate catastali dell'area sono indicate nella mappa:



a) Sapendo che la densità del bosco è di 30 piante ogni 120 mq di superficie, verifica che vi sono 1.800 conifere adulte.

b) La concessione prevede che ogni anno venga

tagliato il 5% delle piante adulte, fino al limite minimo del 50% della consistenza iniziale.

Per quanti anni si potrà procedere al taglio garantendo il limite imposto?

c) Dalle osservazioni condotte si ritiene di poter estrapolare un possibile modello matematico descrittivo deterministico per esprimere l'andamento della diminuzione di piante come una funzione del tempo.

Tracciare il grafico della funzione ottenuta come se fosse continua nel tempo e determinare lo scostamento rispetto al valore reale del 12° anno.

d) Una conifera diventa adulta dopo 10 anni.

Qual è il numero minimo di piante che l'azienda dovrà mettere a dimora il terzo anno per potersi garantire lo sfruttamento del bosco fino al termine della concessione (20 anni) rispettando il vincolo del limite minimo di consistenza (50% di quella iniziale)?

e) Da una rilevazione degli ultimi 50 anni risulta che ogni anno mediamente si ammalia il 2% delle piante.

Con quale probabilità, nel primo anno di concessione non si ammalia nessuna pianta?

Con quale probabilità si ammalano 120 piante?

Per capire per quanti anni si potranno tagliare le conifere senza contemporaneamente provvedere a rimboschire utilizziamo un modello matematico associando alle caratteristiche reali delle variabili matematiche. In particolare indichiamo con:

P_0 il numero di piante adulte presenti inizialmente nell’area.

P_n il numero di piante adulte presenti dopo l’ennesimo anno di concessione.

$$\begin{aligned}P_1 &= P_0 - 0,05 P_0 = (1-0,05) P_0 = (0,95) P_0 \\P_2 &= P_1 - 0,05 P_1 = (0,95) P_1 = (0,95)^2 P_0\end{aligned}$$

$P_n = (0,95)^n P_0$, relazione rappresentativa del modello. Per individuare per quanti anni si può continuare a tagliare rispettando il vincolo ambientale, basta risolvere la disequazione esponenziale:

$$0,95^n \leq 0,5 \text{ che ha come risultato } n=13,65$$

quindi al 14°anno la consistenza del bosco diventa minore della metà di quella iniziale, si può dunque continuare a tagliare conifere senza rimboscare solo per 13 anni.

Considerando la relazione rappresentativa del modello come funzione continua nel tempo si ha:

$$P(t) = P_0 0,95^t$$

4 - Conclusioni e spunti di riflessioni ulteriori.

La matematica è un ottimo strumento per interpretare la realtà in cui viviamo. Tentare di farlo intuire agli studenti, forse nel 2023 è quasi un obbligo. Almeno tentare. Offrendogli problemi contestualizzati su argomenti che potrebbero interessargli. Rendendoli consapevoli di cosa siano i modelli matematici e di come possano essere utilizzati proprio anche solo per rappresentare qualcosa di reale o utilizzati come

procedimenti risolutivi. Penso inoltre che migliori la consapevolezza se dopo un'esperienza laboratoriale si inquadrino concettualmente i modelli matematici descrivendone lo sviluppo, le varie tipologie esistenti e rimarcando i passi fondamentali che conducono alla costruzione di qualsiasi modello. Forse sarebbe opportuno anche farli riflettere sulla differenza fra utilizzare un procedimento risolutivo standard e ricorrere ad un modello matematico (allegato 1).

Vorrei anche porre attenzione su un particolare prerequisito che dall'esperienza si ritiene valido, didatticamente parlando, nel senso di sviluppo di una competenza trasversale. L'analisi delle caratteristiche reali come punto di forza in generale per sviluppare la capacità di analizzare variabili, raffina la sensibilità sull'importanza e influenza di certe caratteristiche sul raggiungimento di determinati obiettivi. Competenza fondamentale anche nei processi decisionali (come si insegna nella formazione professionale).

Partire dalla realtà stimola molto gli studenti che possono dare visibilità a competenze particolari che a volte non riescono ad esprimere in un approccio di tipo solo procedurale. In una classe quarta di liceo scientifico alcuni studenti hanno sviluppato una modalità espressiva comunicativa inerente i modelli matematici molto interessante e apprezzabile (allegato 2) che sarebbe stato un vero peccato inibire.

Un' altro spunto di riflessione potrebbe essere di offrire sempre diversi contenuti anche quando se ne sta trattando uno in particolare. Ad esempio nel secondo paragrafo si può

concentrare la lezione solo sulla costruzione del modello e della ricerca della relazione diretta fra metri percorsi e numero di zucche prese. Ma impegnare del tempo per far calcolare empiricamente i metri per le prime sei, sette zucche, evidenziare i risultati e fargli scoprire che costituiscono una sequenza, stimolarli a rappresentare matematicamente questa sequenza, anche tramite una formula ricorsiva offre agli studenti una visione più ampia della matematica. Tutto torna in tanti modi. Che se sono tutti corretti daranno lo stesso risultato. Quindi conoscenze pregresse possono essere utilizzate per risolvere un dubbio matematico, su una formula relativa ad altri contenuti o sulla correttezza di un procedimento risolutivo. Inoltre tutti i vari metodi possono essere confrontati fra loro in termini di versatilità ed efficacia (meno calcoli, meno probabilità di errore, meno risorse mentali e temporali utilizzate) sensibilizzando gli studenti all’ottimizzazione dei procedimenti.

5 - All 1_Esempio di soluzione di un problema di ottimizzazione tramite procedimento standard e tramite utilizzo di un modello matematico

Supponiamo di dover individuare il numero minimo di filtri da apporre ad una condotta di acqua per rispettare il vincolo di far pervenire nelle abitazioni l’acqua purificata di una certa percentuale di impurità. Supponiamo un filtro alla fine di ogni tratto che forma la condotta.

Dati: Ogni filtro filtra il 20% delle impurità contenute nell’acqua che lo attraversa.

Requisito di purezza: alle abitazioni deve pervenire un'acqua purificata almeno al 75% (contenente al massimo il 25% delle impurità iniziali).

Obiettivo: determinare il numero minimo di filtri da apporre all'interno della condotta in modo che questa soddisfi il requisito di purezza.

L'acqua che arriva nella condotta avrà un certo valore iniziale di impurità a cui associamo una variabile P_0 . Alla quantità di impurità contenute nell'acqua dopo il passaggio attraverso il primo filtro associamo una variabile P_1 , in generale definiamo con P_n la quantità di impurità dopo il filtro ennesimo.

Risolvere il problema significa determinare il minimo valore di n che soddisfi l'obiettivo che in termini matematici corrisponde:

$$P_n \leq 0,25 P_0$$

Dopo il primo filtro, l'acqua conterrà una quantità di impurità:

$P_1 = 0,8 P_0$ (è stato filtrato il 20% di impurità, ne rimane l'80% cioè $0,8 P_0$) che pervengono al secondo filtro. Dopo il secondo filtro saranno state filtrate il 20% dell'impurità P_1 , quindi l'acqua conterrà una quantità di impurità pari a:

$$P_2 = 0,8 P_1 \quad \text{ossia} \quad P_2 = 0,8 \times 0,8 P_0$$

Fino a questo passaggio non c'è differenza nell'utilizzare un modello matematico al posto di un procedimento standard.

Gli studenti tendono a utilizzare il procedimento standard e quindi proseguono con il seguente passaggio che consiste nel calcolare:

$$P_2 = 0,64 P_0 \quad \text{poi} \quad P_3 = 0,64 \times 0,8 P_0 = 0,512 P_0$$

Questo metodo li costringe a iterare il procedimento fino a che il decimale moltiplicativo di P_0 non risulti minore o uguale a 0,25.

In questo passaggio sta la differenza sostanziale rispetto quelli che portano a costruire un modello matematico.

Un modello matematico descrive un legame funzionale fra le variabili, non si costruisce esplicitando risultati di calcoli spiccioli, validi solo per determinati valori dei dati. Riferendoci sempre all’esempio dei filtri, per costruire un modello occorre determinare una relazione fra la n caratterizzante l’ennesimo filtro e le impurità P_n contenute nell’acqua dopo il passaggio attraverso l’ennesimo filtro. In termini matematici:

$$P_n = f(n)$$

Per determinare questa relazione non si deve effettuare il calcolo $0,8 \times 0,8$ ma lasciarlo indicato in termini esponenziali:

$P_2 = (0,8)^2 P_0$, $P_3 = (0,8)^3 P_0$ da cui è facile dedurre la relazione cercata:

$$P_n = (0,8)^n P_0$$

L’obiettivo $P_n \leq 0,25 P_0$ diventa $(0,8)^n P_0 \leq 0,25 P_0$ da cui semplificando P_0 , si perviene ad una semplice disequazione esponenziale nell’incognita n :

$$(0,8)^n \leq 0,25$$

$$\log_{0,8} 0,8^n \leq \log_{0,8} 0,25 \quad \text{da cui } n \geq \log_{0,8} 0,25 \quad \text{cioè}$$

$$n \geq 6,21.$$

Il numero minimo di filtri da apporre nella condotta è 7.

La versatilità del modello è data dalla facilità di utilizzo per qualsiasi percentuale di impurità i filtri eliminino e per qualsiasi obiettivo si ponga, in termini di percentuale, rispetto le impurità iniziali. Ed è questa caratteristica che lo differenzia sostanzialmente dai metodi risolutivi di un problema utilizzati nelle normali prassi didattiche.

Bibliografia

Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. (2017). *5 Matematica.Blu 2.0.*, Bologna: Zanichelli.

Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. (2015). *Verso la seconda prova di matematica*, Bologna: Zanichelli.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). Schema di regolamento recante *"Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali"*.

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

La probabilità, ancella e regina dell'analisi matematica

(Prendere sul serio Paul Lockhart, a ogni livello dell'insegnamento)

Paolo Gibilisco* Laura Tomassi**

*Dipartimento di Economia e Finanza, Università di Roma "Tor Vergata"; paolo.gibilisco@uniroma2.it

** Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"; tomassi@axp.mat.uniroma2.it; lauratomassi1@gmail.com



Sunto: *La probabilità svolge due differenti ruoli che possono apparire contraddittori. Da un lato essa matematizza una parte dell'esperienza empirica, specialmente con l'aiuto del calcolo. D'altro lato la probabilità porta nell'analisi matematica la forza inaspettata delle «leggi del caso» che in ultimo restituiscono al calcolo una varietà di nuove tecniche. Questa natura biface dovrebbe essere sfruttata nell'insegnamento della disciplina stessa, a tutti i livelli.*

Parole Chiave: *Probabilità, Calcolo, Lockhart.*

Abstract: *Probability plays two different roles which can appear contradictory. On one side it mathematizes a part of the empirical experience, especially with the help of calculus. On the other side probability brings in mathematical analysis the unexpected strength of the «law of chances» which finally give back to calculus a manifold of new techniques. These Janus type nature should be exploited in teaching probability at all levels.*

Keywords: *Probability, Calculus, Lockhart.*

1 - La ciliegina sulla torta o la goccia che fa traboccare il vaso? Una «terza via» per la probabilità nella scuola.

E' ormai da anni che la probabilità ha trovato il suo posto nella programmazione scolastica. Questo è sicuramente un bene ma è anche un rischio. In programmi già sovraccarichi di argomenti la probabilità rischia di essere di essere la goccia che fa traboccare il vaso dei contenuti che vengono «inflitti» agli studenti o semplicemente la ciliegina sulla torta di programmi che poggiano sulla solida ossatura data da altre discipline come la geometria e/o l'analisi. Che fare? Come in bicicletta l'equilibrio si trova guardando in avanti. Ad esempio l'insegnamento della fisica nella scuola non può affrontare pienamente la nuova fisica del novecento (relatività ristretta e generale, meccanica quantistica...) ma l'insegnante avveduto può sfruttare la stella polare della fisica contemporanea per tracciare, nei programmi, una rotta che vada a toccare quegli argomenti della fisica classica che verranno «smentiti» dalla rivoluzioni fisiche del secolo scorso. Una volta parlato di fenomeni ondulatori sarà breve il passo per «evocare» il dualismo onda-corpuscolo: lo scopo non è «fare tutto» o anticipare ciò che non può essere anticipato ma lasciare intravedere crisi ed evoluzioni che aspettano lo studente. Allo stesso modo dovremmo fare per la probabilità: fare i primi passi ma soprattutto lasciare intravedere la centralità assunta dal pensiero probabilistico.

2 - "Mathematics should be taught as art for art's sake." P. Lockhart

Nell'articolo «A Mathematician's Lament» (traduzione italiana in (Lockhart, 2010)) Paul Lockhart ha suggerito che il principale problema dell'insegnamento della matematica nella scuola sia l'errato approccio alla medesima: se la matematica è scienza essa è però essenzialmente «arte» e come tale va presentata alla popolazione scolastica, specialmente alla stragrande maggioranza degli studenti per i quali la matematica sarà solo un momento di formazione e non uno strumento professionale. Possiamo provare a dire che l'idea di Lockhart va «presa sul serio» a tutti i livelli, nella scuola così come all'università. In particolar modo in quei corsi dove la matematica è sostanzialmente strumento e non centro dei fondamenti teorici, per esempio nei corsi di biologia o economia. E' proprio dalla nostra esperienza di docenti in un corso di questo tipo (Mathematics per il Master of Sciences in Economics del Dipartimento di Economia e Finanza di Tor Vergata) che è nata l'idea della presente proposta. Anche e specialmente per gli studenti che frequentano corsi simili è necessaria una didattica «estetica» che punti a descrivere la «bellezza» dei risultati che vengono affrontati. Proprio in questi corsi bisognerebbe sfuggire alla tentazione di presentare la matematica come un'amara medicina che lo studente delle scienze empiriche (naturali o sociali) debba affrontare «perché la matematica è utile nelle applicazioni». Questo approccio è spesso inefficace proprio perché non tutti gli studenti, per esempio di un corso di economia, avranno veramente bisogno nella loro vita professionale della cultura matematica con la quale sono stati in contatto. Puntando

sull'«utilità» della matematica ci si mette in una posizione non sempre difendibile.

Se invece ci si propone «sfacciatamente» come guide in un giardino incantato colmo di stupefacenti creazioni umane l'atteggiamento degli studenti cambia totalmente: almeno questa è la nostra personale esperienza. L'utilità può essere cancellata dal progresso tecnico-scientifico: la bellezza è per sempre.

Al tempo stesso crediamo che, pur a diversi livelli, gli aspetti «estetici» della probabilità debbano essere posti in risalto allo stesso modo, nella scuola come nell'università. Questo è particolarmente fattibile per il liceo matematico e per quello scientifico. Ma quali sono questi aspetti estetici?

3 - La realtà empirica irrompe nella matematica: "Dio gioca a dadi" (Semicit.)

La filosofia [della natura] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi [sic] è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623), in Opere, vol. VI, p. 232.

Sappiamo adesso che la meravigliosa frase di Galileo, che fa da epigrafe al convegno, è solo in parte vera, come è nella natura di ogni paradigma scientifico o filosofico, anche del più efficace. Se è vero che il libro della natura è scritto «in lingua

matematica» (Wigner, 1960) è ormai chiaro che dobbiamo rinunciare al sogno di una fisica che si incarni nella geometria del cosmo, nella geometria dello spazio-tempo. Questo sogno trova forse il suo vertice nella spiegazione dell'anomalia del perielio di Mercurio da parte della relatività generale. Il più grande successo della visione geometrica della fisica si rivela essere anche il suo canto del cigno. La meccanica quantistica (ma anche tutte le scienze sperimentali) impone nel secolo scorso il paradigma probabilistico: non più come prima approssimazione a una dinamica «geometrica», e perciò deterministica, ma come il più vero e intimo aspetto dei microfenomeni come dei macrofenomeni.

I caratteri del libro della natura assumono le sembianze probabilistiche. Si tratta di una vera e propria rivoluzione filosofica di cui ancora non abbiamo colto completamente la portata.

Inoltre le conseguenze ultime della geometrizzazione del tempo raggiungono forse il loro estremo nel lavoro di Godel dove viene mostrata la possibilità di soluzioni cicliche delle equazioni di Einstein: tempo e divenire vengono ridotti al rango di illusioni soggettive prive di realtà fisica. Se Einstein stesso arretrò di fronte a una simile eventualità (Prigogine, 1997, pp. 176-178; Yorgrau, 2016) alcuni furono più drastici, come Pauli: "Dopotutto il sogno di una geometrizzazione totale della fisica non era neanche un bel sogno". Che fisica è quella che nega l'esperienza del soggetto rispetto al divenire e al tempo?

Ovviamente nel portare nell'insegnamento gli aspetti «drammatici» di questo conflitto scientifico ed epistemologico, perlomeno a livello universitario, l'insegnante può e deve

ricordare che la geometria si prende le sue segrete rivincite: il concetto di attesa condizionata tra variabili aleatorie resterebbe molto più opaco senza ricondurre la sua natura all'idea di proiezione ortogonale su un sottospazio. A un livello più alto abbiamo visto inoltre che le nozioni di entropia relativa e informazione di Fisher (che si trovano in quel meraviglioso intreccio esistente tra teoria dell'informazione, probabilità e statistica) possono essere realmente comprese solo tenendo presente i loro rispettivi aspetti geometrici; a tal punto che è in tumultuoso sviluppo una nuova disciplina nota come Geometria dell'Informazione (Ay et al. 2018; Gibilisco et al. 2010).

4 - La realtà empirica irrompe nella matematica: l'analisi matematica mette il turbodell'indipendenza. Il «caos del caso» diventa strumento di calcolo.

La frase di Einstein «Dio non gioca a dadi» oltre a dimostrarsi falsa nella fisica, a ogni scala (Accardi, 1997), dimostra una sorta di dispregio da parte del grande scienziato di una realtà dove il caso e l'indeterminatezza svolgano un ruolo (a dispetto degli epocali contributi di Einstein stesso, per esempio sull'uso del moto browniano). In effetti, la probabilità appare il regno del caso dove, principalmente attraverso l'analisi, la matematica getta una luce ordinatrice e chiarificatrice. Questa situazione però è solo la metà di una storia molto più articolata. Negli ultimi due secoli la probabilità ha progressivamente «restituito il favore»: attraverso le idee di indipendenza (e dipendenza) il mondo irrompe nell'analisi matematica. In numerosi casi abbiamo

dimostrazioni probabilistiche di fatti non probabilistici: tali dimostrazioni sono spesso più semplici delle dimostrazioni originali che nulla avevano a che fare con la probabilità. L'esempio più eclatante è forse la dimostrazione di Bernstein, attraverso la legge dei grandi numeri, di come ogni funzione continua possa essere approssimata da polinomi. Dato che parliamo di legge dei grandi numeri possiamo dire che il teorema viene dimostrato, letteralmente, «lanciando un dado». La dimostrazione probabilistica è immensamente più semplice di quella analitica (si veda, ad esempio (Giusti, 2003)). A un livello più semplice si collocano le formule aritmetiche che si ottengono calcolando media e varianza della distribuzione binomiale. Le suddette formule possono essere dimostrate, con un certa ingegnosità, attraverso l'induzione sui numeri naturali. Il contrasto non potrebbe essere più forte: la probabilità non si limita a dimostrare il «cosa» ma anche a svelare dei «perché» che sorprendono in quanto appartenenti al mondo del caso. Una situazione analoga riguarda il fatto che la funzione Gamma di Eulero in $\frac{1}{2}$ valga radice quadrata di pigreco: la via maestra per dimostrare questa notevole identità è quella probabilistica.

Come suggerisce Lockart:

By concentrating on what, and leaving out why, mathematics is reduced to an empty shell. The art is not in the "truth" but in the explanation, the argument. It is the argument itself which gives the truth its context, and determines what is really being said and meant. Mathematics is the art of explanation.

Ci sono dimostrazioni come quella del teorema dei quattro colori (o quella che fornisce la classificazione dei gruppi finiti) che richiedono migliaia di pagine o l'uso massiccio dell'elaboratore. Alla luce del commento di Lockart possiamo

dire, pur rispettando l'enorme sforzo per ottenere questi risultati, che è come se un oracolo ci comunicasse una verità: nulla apprenderemmo da questa notizia (Halmos, 1990). Nell'insegnamento questo è da evitarsi, per quanto possibile, a scuola come all'università: gli studenti devono essere esposti, principalmente, a «l'arte della spiegazione». Meglio fare meno ma introdurre ciò che può essere «manipolato» e perciò fatto proprio.

Accanto a questo va posto l'accento su «esperimenti» come quello dell'ago di Buffon che, nella loro semplicità, sono i prodromi del metodo Montecarlo: cosa può esserci di più sorprendente del fatto che si possa calcolare pigreco «lanciando un dado»?

5 - «L'ontogenesi ricapitola la filogenesi»: il dipanarsi storico come guida dell'insegnamento

E' ormai acquisito (o così dovrebbe essere ...) in ogni teorizzazione didattica o pedagogica che la storia di ogni disciplina deve svolgere un ruolo importante nell'insegnamento della disciplina medesima. Esiste però il rischio che la storia assuma il ruolo di contorno, abbellimento degli argomenti che formano il nucleo della disciplina; il rischio cioè che la storia si riduca a mero intrattenimento. Come evitare questo pericolo? Constatando che lo sviluppo storico di una disciplina non è semplicemente «accidente», serie fortuita di avvenimenti che si susseguono privi di ogni filo logico. Pur senza immaginare uno storicismo deterministico per lo sviluppo della scienza bisogna considerare che il modo in cui l'umanità acquisisce dei

contenuti teoretici è comunque in relazione con la struttura intrinseca di tali contenuti.

Nel nostro caso si tratta di partire dall'enorme iato che separa, per esempio, Euclide da «l'Euclide della probabilità» (Kolmogorov, 1995) cioè da Kolmogorov: bisogna far vivere agli studenti il vero e proprio abisso temporale che separa l'assiomatizzazione della geometria da quella della probabilità.

Ad esempio Tullio Viola osserva che (Dupont, 1985, p. 20):

Il fatto che dovettero passare millenni prima che l'umanità iniziasse una qualche riflessione di carattere matematico sul gioco d'azzardo, è un evento storicoestremamente singolare del quale non sono state ancora trovate delle spiegazioni veramente soddisfacenti.

Ma come sarebbe potuto essere diversamente? Dato che la probabilità è l'arte di scoprire le «leggi del caso» si tratta di studiare qualcosa che appare, a prima vista, contraddittorio o perlomeno una sorta di ossimoro: come può esserci legge dove c'è il caso? Perchè la matematica trovasse un posto per questo «ossimoro» sono stati necessari un lungo processo e una vera e propria rivoluzione epistemologica, la rivoluzione probabilistica.

6 - Educare l'intuizione probabilistica: «l'illusione di sapere»

Il percorso per districarsi nel mondo della probabilità richiede un impegno da non sottovalutare. Per esempio anche una persona che ha avuto una formazione matematica, da cui sia stata assente la probabilità, avrà il suo da fare per acquisire familiarità con l'argomento. Questo è un invito alla cautela con gli studenti, a non sottovalutare lo sforzo a loro richiesto per la medesima impresa.

Dal punto di vista motivazionale possono tornare molto utili i «paradossi» probabilistici come quello dei compleanni, quello di Monty Hall, quello delle malattie rare, quello della missione suicida ... Sappiamo che in molte situazioni possiamo essere vittime di illusioni cognitive. Questo fenomeno però appare con particolare evidenza quando iniziamo lo studio della probabilità: in questo caso la nostra intuizione ci porta fuori strada più frequentemente e in modo più netto di molti altri campi (Piattelli Palmarini, 1993).

In genere dove c'è un «paradosso» c'è un'opportunità cognitiva; in questo caso, data la natura «ludica» dei suddetti paradossi, c'è anche l'opportunità di intrappolare facilmente l'attenzione degli studenti mostrando loro la assoluta necessità di un approccio matematico che corregga, guidi e istruisca la nostra intuizione.

7 - Conclusione: il quinto stato della materia e il Cavalier De Méré ...

Nel 1654 Pascal risolve un problema postogli dal suo amico, il Cavalier De Méré: sembra che il lancio di tre dadi dia più frequentemente la somma 11 che 12 nonostante questi due risultati si ottengano ognuno a partire da sei combinazioni.

Pascal mostra l'errata classificazione delle possibili configurazioni che forniscono i due risultati, spiega il paradosso e, dopo Cardano, dà il via allo studio della probabilità.

Negli ultimi 30 anni la ricerca fisica ha mostrato (Aveline et al., 2020) che la materia può esistere nella forma di condensato di Bose-Einstein in cui un gran numero di atomi si comporta come un superatomo. Si tratta di un quinto stato della materia dopo quelli solido, liquido, gassoso e plasma. Prevista da Bose ed Einstein negli anni 20 dello scorso secolo l'esistenza di questo stato apre adesso prospettive che appaiono letteralmente fantascientifiche sia dal punto di vista teorico che applicativo. Ricordiamo che dietro l'intuizione di Bose-Einstein c'è esattamente la statistica che porta il loro nome e che valuta come indistinguibili microconfigurazioni che nella statistica Maxwell-Boltzmann reputiamo distinguibili. In sostanza, per le particelle bosoniche a bassa temperatura, avrebbe avuto ragione De Méré e non Pascal! (Kolmogorov, 1995, pp. VIII-IX).

Forse questo sarebbe il modo giusto per iniziare un corso di probabilità: far vedere quanta strada possa fare una domanda sul lancio di dadi ...

Bibliografia

- Accardi, L. (1997). *Urne e camaleonti*. Il Saggiatore.
- Aveline, D.C., Williams, J.R. Elliott, E.R. Dutenhoffer C., Kellogg, J.R., Kohel, J.M., Lay, N.E., Oudrhiri, K., Shotwell, R.F., Yu, N., Thompson, R.J.,(2020). Observation of Bose-Einstein condensate in an Earth-orbitingresearch lab. *Nature*, 582, 193-197.
- Ay, N., Gibilisco, P., Matus, F. (eds.) (2018). *Information Geometry and its Applications*. Springer.
- Dupont, P. (1985) *Primo incontro con la probabilità*. S.E.I.
- Gibilisco, P., Riccomagno, E., Rogantin, M.-P., H. Wynn, H. (eds.) (2010). *Algebraic and Geometric Methods in Statistics*. Cambridge University Press.
- Giusti E. (2003). *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri.
- Halmos, P. R. (1990). Has progress in mathematics slowed down? *The American Mathematical Monthly*, 97(7), pp. 561-588.
- Kolmogorov, A.N. (1995). *Teoria della probabilità* (a cura di L. Accardi), Teknos Edizioni. (Traduzione di Kolmogorov, A.N. (1933) *GrundbegriffederWahrscheinlichkeitsrechnung*.)
- Lockart, P. (2010). *Contro l'ora di matematica*. Rizzoli.
- Piattelli Palmarini, M. (1993). *L'illusione di sapere*. Mondadori.
- Prigogine I. (1997). *La fine delle certezze. Il tempo, il caos e le leggi di natura*. Bollati Boringhieri.
- Wigner, E. (1960). The unreasonableeffectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on pure and appliedmathematics*. 13(1), pp.1-14.
- Yorgrau, P. (2016). *Un mondo senza tempo. L'eredità dimentica di Godele Einstein*. Il Saggiatore

Esperimenti di Galileo con Arduino

Matteo Torre*

* Liceo Scientifico "G. Peano", Tortona (AL); matteo.torre1984@gmail.com



Sunto: *Gli esperimenti di Galileo sono ancora oggi esempi affascinanti di come funziona il metodo scientifico. Galileo aveva capito che bisognava interrogare la natura usando la matematica e che l'osservazione dei processi naturali doveva essere tradotta in quantità precise e misurabili. Nell'a.s. 2022-23 in una classe III Liceo Scientifico, affrontando il tema della fisica classica è stata proposta l'analisi di un documento originale che testimonia come lo stesso Galileo abbia davvero svolto un esperimento sul moto parabolico. Alcuni studenti hanno realizzato una sua rielaborazione in chiave moderna attraverso l'uso di Arduino e di materiali poveri.*

Parole Chiave: *Galileo Galilei, storia della scienza, laboratorio, Arduino.*

Abstract: *Galileo's experiments are still fascinating examples of how the scientific method works today. Galileo had understood that it was necessary to interrogate nature using mathematics and that the observation of natural processes had to be translated into precise and measurable quantities. In the school year 2022-23 in a III Liceo Scientifico, introducing the theme of classical physics, was proposed the analysis of an original document which testifies how Galileo himself really carried out an experiment on parabolic motion. Some students then prepared a modern reworking of it through the use of Arduino and poor materials.*

Keywords: *Galileo Galilei, history of science, laboratory, Arduino.*

1 - Introduzione

L’insegnamento della fisica tramite esclusivamente i libri di testo o esperimenti “tradizionali” si riduce spesso alla sola trasmissione dei risultati trovati e accettati dalla comunità scientifica. Con questo modo di procedere, l’aspetto più importante della scienza, la ricerca, viene completamente ignorato. La storia della scienza può costituire un utile correttivo: la lettura degli articoli originali e la ricostruzione di esperienze così come sono state storicamente effettuate ci mostra concretamente come sono stati affrontati e risolti complessi problemi, talvolta seguendo linee di ricerca contrapposte.

Il conoscere i contesti storico-culturali e le motivazioni dei dibattiti scientifici stimola inoltre, a mio giudizio, l’entusiasmo negli studenti verso l’apprendimento della scienza. La presentazione di questo percorso didattico su un “caso storico” delle opere di Galileo, che utilizza la lettura e il commento puntuale di memorie originali sia teoriche che sperimentali, non ha la presunzione di offrire nuove interpretazioni ma vuole far comprendere come l’analisi dei testi originali unita ai recenti risultati della ricerca in didattica della fisica possa costituire una valida alternativa alle “tradizionali” pratiche di classe, ancora troppo utilizzate nella scuola secondaria di secondo grado.

Molte difficoltà incontrate dagli studenti nell’apprendimento della meccanica sono, infatti, dovute perlopiù a preconcezioni di senso comune che compaiono anche nelle opere dei filosofi della natura pregalileiani. Affrontare il dibattito scientifico che ha caratterizzato il periodo di transizione tra la fisica aristotelica e quella

newtoniana potrebbe, quindi, aiutare a far emergere negli studenti tali preconcezioni e a confutarli efficacemente tramite l'uso del laboratorio e della riproduzione sperimentale di "casi storici".

Per provare a lavorare in questa direzione, durante l'anno scolastico 2022-23 in una III Liceo Scientifico (composta da 25 studenti, 9 femmine e 16 maschi), ho affrontato il tema del moto parabolico e di un proiettile lanciato orizzontalmente esaminando alcuni scritti originali di Galileo Galilei che non solo testimoniano come lo stesso Galileo abbia davvero svolto esperimenti, ma fanno emergere questioni logiche ed epistemologiche importanti perché la soluzione proposta da Galileo rappresenta uno dei primissimi esempi di uso cosciente del principio di sovrapposizione. Il progetto didattico ha avuto una durata complessiva di 7 ore curricolari durante le quali si sono alternati momenti di spiegazione e riflessione collettiva e momenti laboratoriali in cui alcuni studenti hanno ricostruito un apparato sperimentale sul moto parabolico con materiali poveri, mentre un altro gruppo ha rielaborato l'esperimento descritto nel Folio 116v arricchendolo di un'interpretazione moderna tramite l'utilizzo di Arduino. Nel seguito descriverò il percorso didattico e le fasi laboratoriali, riportando alcuni dettagli delle fasi costruttive così da rendere riproducibile l'esperienza da parte del lettore interessato.

2 - Il contesto storico del percorso

Una diffusa concezione, ponendo Galileo come il padre fondatore della fisica classica, sempre ne mette in rilievo il

ruolo di assoluta rottura rispetto alla fisica aristoteliana. Ancora oggi, infatti, in molti libri di fisica per le scuole secondarie superiori si comincia sempre con la messa in luce degli errori di Aristotele e si prosegue affermando che Galileo avrebbe costruito *ex novo*, sulle macerie della fisica aristoteliana, la cosiddetta fisica classica. Aristotele è diventato così, nell'immaginario scientifico, il simbolo negativo e l'immagine stessa del peso autoritario di una tradizione di pensiero puramente speculativa e aliena all'esperienza dall'esperienza che a lungo avrebbe ostacolato e ritardato il progresso scientifico con i suoi dogmi, mentre Galileo appare come un eroe che si scaglia contro una millenaria e obsoleta tradizione di pensiero fino ad abbatterla.

La condanna dell'aristotelismo è nata agli albori del pensiero moderno e quasi tutti i maggiori autori del pensiero moderno, Giordano Bruno, Campanella, Bacone, Cartesio, fino a Galileo, hanno condannato e combattuto l'aristotelismo. Tuttavia un simile giudizio, in parte comprensibile nell'epoca in cui nacque, si è cristallizzato e stratificato nel tempo fino a diventare una sorta di luogo comune.

Un simile giudizio non solo non rende giustizia ad Aristotele ma anche rende incomprensibile la stessa grandezza di Galileo. Scrive al riguardo Koyré:

La fisica aristotelica è falsa, lo sappiamo bene. Ha irrimediabilmente perduto ogni valore. Ma è tuttavia una fisica, cioè una teoria profondamente, benché non matematicamente, elaborata. Non è né un prolungamento rozzo e verbale del senso comune né una fantasia puerile, bensì è una teoria, cioè una dottrina che, partendo dai dati del senso comune, li sottomette ad un'elaborazione sistematica estremamente coerente e rigorosa

In realtà il cammino che portò da Aristotele a Galileo, lungi dall'essere una semplice contrapposizione tra la verità e l'errore, fu lungo e complesso. A Galileo va però dato il merito di aver riportato l'interesse per le opere della scienza ellenistica e, come ci ricorda Lucio Russo:

L'ambiziosissimo obiettivo di Galileo era stato quindi il recupero, dopo tanti secoli di abbandono, del metodo scientifico ellenistico, consistente nell'elaborazione di sistemi ipotetico-deduttivi in cui inquadrare i fenomeni naturali. Il suo spirito critico gli fa individuare con chiarezza i propri modelli nei grandi scienziati del periodo aureo (Archimede, Apollonio, Euclide), senza che la sua evidente ammirazione sconfini in reverenza per una "Antichità" indifferenziata. Galileo non esita a dissentire sia da Aristotele sia da Tolomeo. [...] Galileo riuscì in effetti a riprendere dai suoi lontani maestri sia l'idea del metodo sperimentale sia quella del metodo dimostrativo.

Questa è la permessa storica presentata agli studenti e discussa in classe, in 2 ore di lezione, con l'obiettivo di affrontare in maniera più critica e consapevole lo studio della fisica classica e, in particolare, il moto parabolico e la composizione dei moti.

3 – Il percorso didattico

Successivamente alla parte storica, il percorso didattico è proseguito in classe con la seguente scansione oraria:

- presentazione teorica del moto parabolico e del lancio orizzontale di un proiettile (2 ore curriculari);

- discussione dei contributi di Stillman Drake su Galileo, risultato fondamentale della ricerca storiografica contemporanea, e analisi di alcuni scritti originali di Galileo (2 ore curriculari);
- costruzione di alcuni esperimenti sul moto parabolico e sul lancio orizzontale di un proiettile con materiali poveri e con l’uso di Arduino. Questa parte è stata svolta a gruppi dagli studenti in orario pomeridiano;
- presentazione alla classe da parte dei vari gruppi degli esperimenti con commento critico sul processo costruttivo (1 ora curriculare).

Le ore dedicate alla costruzione dei vari esperimenti, seppur siano state svolte in orario pomeridiano, sono state supervisionate tramite videochiamata: in alcuni momenti della fase costruttiva i vari gruppi hanno approntato un Meet in cui mi illustravano i loro progressi e io davo loro eventuali consigli per migliorare o implementare i loro esperimenti. Questa prassi, oltre che per responsabilizzare i vari gruppi, è risultata decisiva per capire il grado di comprensione dell’argomento da parte dei vari studenti.

Nel seguito descriverò le varie fasi del percorso didattico, omettendo la descrizione teorica del moto parabolico e del lancio orizzontale di un proiettile poiché il lettore può facilmente reperirle in un qualsiasi libro di testo per la scuola secondaria di secondo grado e nel testo citato in bibliografia.

La discussione in classe sui contributi di Drake relativi agli esperimenti di Galileo è stata molto apprezzata dagli studenti perché è servita loro per capire meglio sia gli aspetti teorici, sia la profondità degli esperimenti di Galileo che hanno poi sfruttato quando sono diventati loro stessi dei “moderni

Galilei". Prima di Galileo, infatti, sono stati scritti molti volumi sul moto da studiosi che non avevano mai misurato realmente nessun movimento di corpi in caduta. Dopo Galileo, eseguire misurazioni con grande cura e assoggettare i risultati all'analisi matematica divennero l'attività principale degli scienziati. Fino agli anni '70 del XX secolo, in assenza di documenti su ciò che egli aveva fatto, gli storici della scienza che scrivevano su Galileo potevano unicamente speculare su ciò che aveva detto nei suoi ben noti scritti. Il più influente di questi storici, Alexandre Koyré, concluse che Galileo *non aveva fatto nulla, se non con il cannocchiale*; per il resto, inclusa tutta la sua fisica, aveva soltanto *pensato*. Koyré non biasimava Galileo per questo, anzi considerava ciò come il massimo contributo di Galileo alla scienza. Pensare matematicamente intorno ai fenomeni fisici andava contro il carattere aristotelico e Koyré attribuiva a Galileo il merito di aver posto la fisica sulla "giusta strada", segnata a suo tempo da Platone.

Allo stesso tempo, Koyré credeva di aver dimostrato che Galileo non poteva aver misurato i movimenti concreti così accuratamente da poter arrivare alla legge della caduta dei gravi. Drake dimostra, tramite un'accurata analisi linguistica e scientifica degli appunti di Galileo, che egli giunse alla legge dei quadrati dei tempi agli inizi del 1604 scoprendo dapprima la legge del pendolo, mettendola in relazione con la caduta dei gravi e alla proporzionalità tra la velocità e la radice quadrata delle verticali dall'origine. Tutti questi principi furono messi alla prova congiuntamente da nuovi esperimenti, come mostrato dal Folio 116v, documento chiave per il nostro percorso didattico.

Dopo una parentesi dedicata a problemi di astronomia, nel 1607 Galileo ritorna ai problemi del moto. È di questo periodo un manoscritto (Fig. 1) che presenta dei risultati sperimentali la cui interpretazione è del massimo interesse: Galileo suppone che la velocità è una quantità proporzionale al tempo e asserisce che le velocità dei corpi che cadono da una certa altezza sono nello stesso rapporto che le radici quadrate delle distanze percorse.

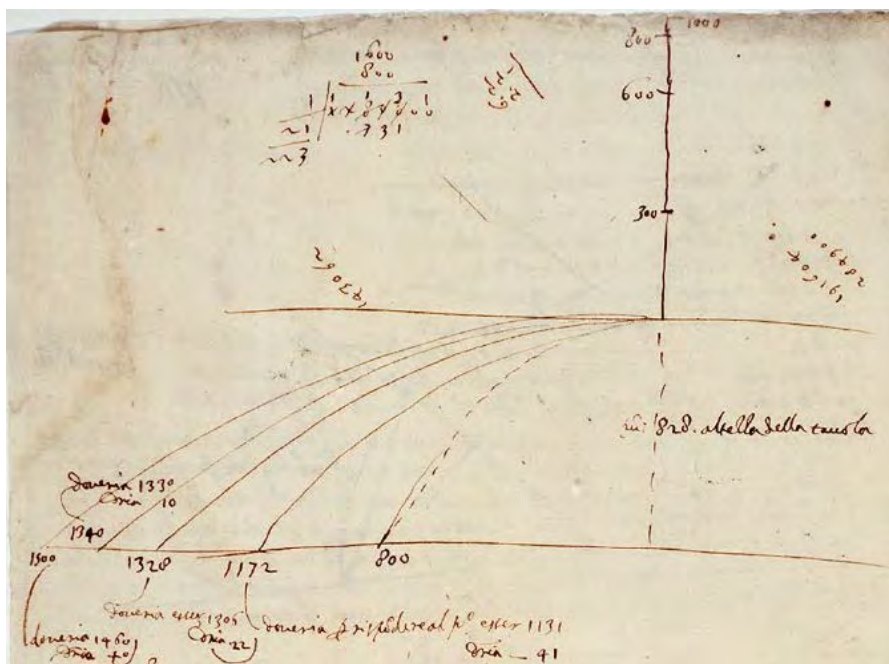


Figura 1: Folio 116v, vol. 72, mss galileiani, Biblioteca Nazionale Firenze

Giunti a questo risultato, fondamentale per la fisica classica, si è scelto di analizzare il manoscritto, suggerendo agli studenti un primo possibile sviluppo pratico-laboratoriale.

Il Folio 116v si può interpretare nel modo seguente: una pallina viene fatta rotolare su un piano inclinato a partire da

altezze H differenti. L'estremità inferiore del piano è curvata "a trampolino" per trasmettere alla pallina lungo una direzione orizzontale la velocità acquisita nel moto di caduta lungo il piano inclinato. La pallina inizia quindi un moto di caduta libera da un'altezza prefissata con velocità iniziale orizzontale. Si ottiene così la composizione di un moto verticale e di un moto orizzontale e si può misurare la distanza D (gittata) percorsa in direzione orizzontale tra l'istante di stacco e l'istante di impatto della pallina con il piano di riferimento.

Come prima suggestione è stato chiesto a un gruppo di studenti di verificare che la gittata è proporzionale al valore della velocità orizzontale iniziale, verificando anche così che la velocità di caduta di una biglia lungo il piano inclinato è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza del piano inclinato.

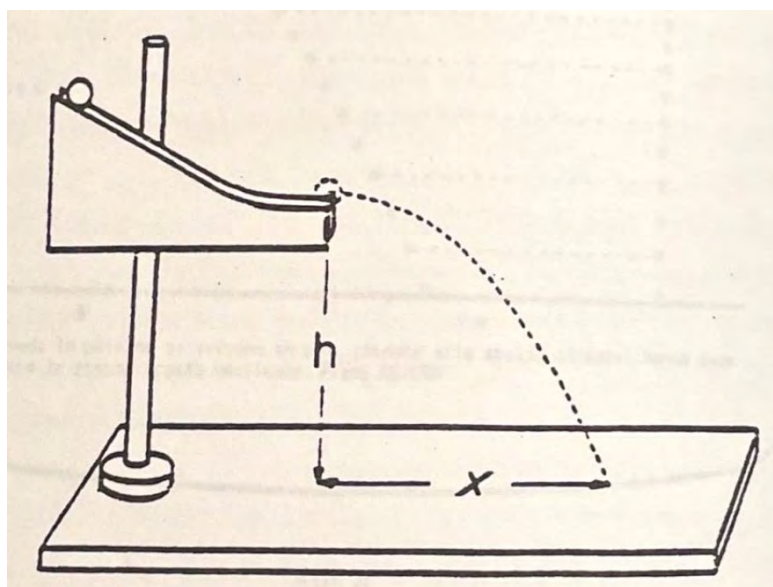


Figura 2: trampolino mobile per esperienza di laboratorio

Per verificare quanto detto, è stata suggerita la costruzione di un trampolino di lancio agganciato a un sostegno che permette di variare l'altezza h rispetto al piano d'appoggio (Fig. 2). La successiva presentazione in classe di questo esperimento e la discussione sui risultati ottenuti è stata di importanza chiave per fissare ancora una volta quanto già detto nella lezione teorica sul moto parabolico sul principio di composizione dei moti.

Infatti, se lasciamo cadere una biglia dal punto più alto del piano inclinato (si veda Fig. 2), essa acquista a fine corsa la stessa velocità orizzontale v_0 in ogni lancio e quindi la gittata ($x = v_0 \cdot t$) può essere utilizzata per misurare il tempo di caduta verticale dall'altezza h . Dall'analisi dei risultati ottenuti dagli studenti si vede, con discreta precisione, che la gittata x è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza h del trampolino.

Un secondo esperimento, svolto da un altro gruppo di studenti, che utilizza sempre il trampolino descritto in precedenza (Fig. 2) per valutare il legame tra la posizione di partenza della pallina e la velocità al termine del piano inclinato. Al gruppo è stato chiesto di fissare il trampolino a un'altezza H dal piano d'appoggio e di lasciare cadere la biglia da diverse posizioni lungo il trampolino. Tenendo fissa l'altezza del trampolino il tempo di caduta verticale sarà sempre lo stesso ($t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$). Agli studenti è stato quindi chiesto

di verificare la proporzionalità tra la gittata e la velocità raggiunta dalla biglia al termine della discesa lungo il trampolino e di confermare tale predizione al variare dell'altezza H del trampolino e al variare del punto di

partenza della biglia. Gli studenti hanno inoltre determinato, con la notazione moderna, la velocità di uscita della biglia dal trampolino e verificato con un altro trampolino di diversa inclinazione che essa, a parità di altezza di caduta, non dipende dall'inclinazione.

L'attenzione del gruppo classe è poi stata posta sull'analisi delle parabole di caduta riportate sul manoscritto di Galileo (Fig. 1) ed è stata proposta loro la duplice interpretazione che Drake suggerisce in merito ai dati riportati sul Folio 116v: i dati riportati potevano servire a Galileo per verificare l'ipotesi di un moto rettilineo uniforme in assenza di attriti, cioè di un moto inerziale (usando gli stessi ragionamenti che abbiamo fatto anche nel nostro percorso didattico); oppure l'esperimento poteva essere stato un tentativo di verificare il principio di composizione dei moti, grande novità concettuale rispetto alla fisica aristotelica.

Ho quindi chiesto a un gruppo di studenti di utilizzare i dati del manoscritto per ripercorrere le tappe storiche dell'esperimento di Galileo, sempre sfruttando un trampolino come quello descritto in precedenza (Fig. 2) e la trascrizione del Folio 116v ad opera di S. Drake (Fig. 3). In particolare, secondo le ricerche storiografiche di Drake, il dispositivo sperimentale utilizzato da Galileo era probabilmente simile al trampolino già descritto (Fig. 2) e avente un piano inclinato di circa 30° posto ad un'altezza di 828 punti (77,7 cm) rispetto al piano di riferimento. Sul Folio 116v Galileo aveva tracciato due rette orizzontali che rappresentavano il suolo e la superficie di una tavola. Sopra la tavola, lungo una linea verticale, segnò le altezze di 300, 600, 800 e 1000 punti. Dall'estremità della tavola al suolo disegnò delle curve

rappresentanti le traiettorie di una biglia, indicando il valore sia calcolato che misurato della gittata per ciascuna altezza. Ad eccezione del lancio dall’altezza di 300 punti (e conseguente gittata di 800 punti), gli altri dati sono contrassegnati sul manoscritto dall’annotazione “*doveria*” (*avrebbe dovuto essere*), che per Drake è sinonimo inequivocabile che Galileo aveva dapprima calcolato e poi misurato, ovvero che Galileo ha realmente svolto il procedimento sperimentale disegnato nel Folio 116v. Gli studenti hanno dunque provato a realizzare l’esperimento assegnando il valore di 9,38 cm al *punto* di Galileo, così come sostenuto da Drake.

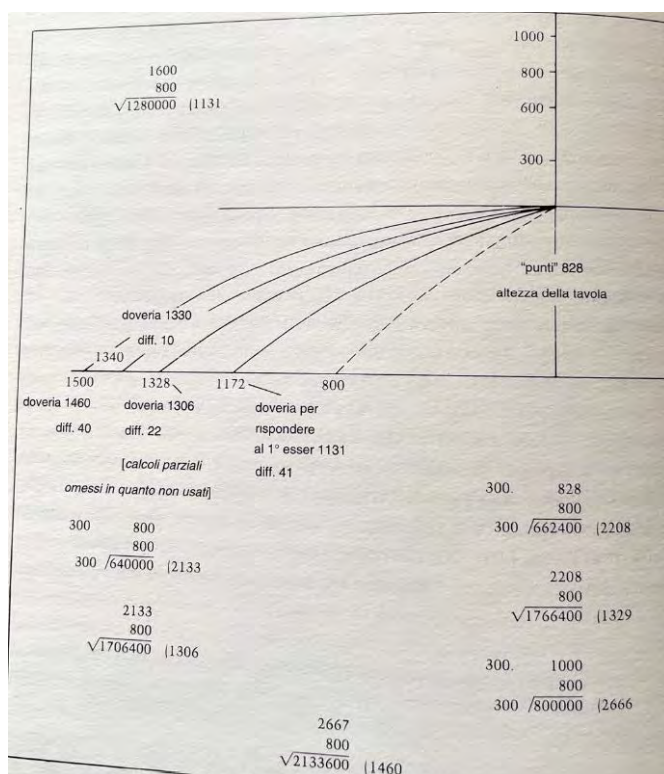


Figura 3: parziale trascrizione del Folio 116v fatta da S. Drake

Al quarto ed ultimo gruppo è stata assegnata lo studio della composizione dei moti e la loro verifica laboratoriale tramite la costruzione di altri trampolini che permettono di mostrare l'indipendenza del moto di caduta libera dal moto orizzontale e viceversa, nonché il moto parabolico come la composizione di questi due moti (Fig. 4).

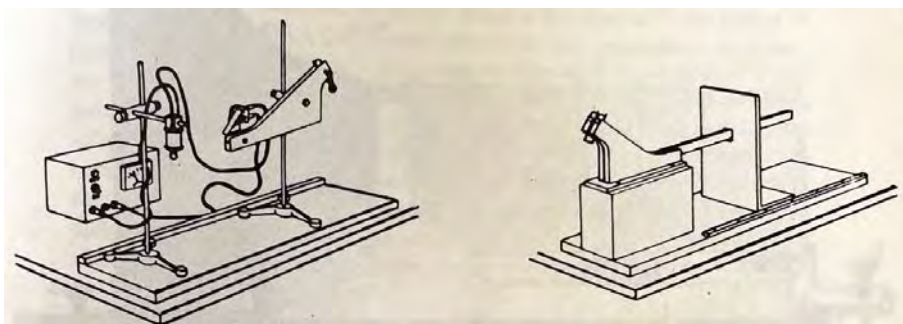


Figura 4: apparato per lo studio del principio di composizione dei moti

Per mostrare che la componente orizzontale è indipendente da quella verticale si usa il dispositivo in Fig. 4b: si lasciano cadere due biglie nello stesso istante dal punto più alto di due guide inclinate identiche; dopo un tratto orizzontale, una biglia inizia la caduta mentre l'altra prosegue il suo moto lungo un prolungamento orizzontale della guida. Entrambe le biglie hanno la possibilità di urtare contro un piano verticale che può essere spostato a distanze diverse dal punto in cui una delle biglie abbandona la guida. Nei vari tentativi realizzati dagli studenti per differenti posizioni del piano verticale, si è percepito un unico colpo per l'arrivo delle biglie contro la parete verticale. Gli studenti hanno quindi potuto dedurre che le biglie, pur percorrendo traiettorie differenti impiegano lo stesso tempo e si spostano in direzione

orizzontale con la stessa velocità, fatto che è stato poi anche ribadito dal gruppo durante la presentazione in classe dell’esperimento e che personalmente considero didatticamente centrale per la piena comprensione del moto parabolico.

Analogamente, per mostrare che la componente verticale del moto è indipendente da quella orizzontale il gruppo ha utilizzato il dispositivo in Figura 4a: la biglia di cui si studia il moto mentre esce dal tratto orizzontale disattiva un’elettrocalamita che tiene sospesa una seconda biglia alla stessa altezza cosicché entrambe inizino la loro caduta nello stesso istante. Nei vari tentativi realizzati dagli studenti essi hanno percepito un unico colpo per l’arrivo delle biglie sul piano orizzontale. Questo gruppo di studenti, unendo le forze con altri compagni di classe, ha fatto un passo in più e ha realizzato un dispositivo che combinava i due disegni in Fig. 4 in un unico solo aggiungendo ad esso l’automazione tramite Arduino.

Di questa evoluzione tecnico-pratica parlerò nel prossimo paragrafo, ora concludo riportando le fonti storiche lette e discusse in classe a proposito della composizione dei moti. Siamo partiti dai *Discorsi*:

Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento: già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all’infinito; se invece intendiamo [questo piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all’estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all’ingiù

dovuta alla propria gravità: ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile [uniforme] e di un moto deorsum [verso il basso] naturalmente accelerato, il quale [... moto composto] descrive una linea semiparabolica.

L'indipendenza del moto uniformemente accelerato di caduta libera dal moto orizzontale uniforme viene illustrato da Galileo nel *Dialogo* con un'esperienza successivamente realizzata con successo dai membri dell'Accademia del Cimento dalla torre del porto di Livorno:

[...] quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata, e con essa si tirassero tiri di punto bianco, cioè paralleli all'orizzonte, per poca o molta carica che si desse al pezzo, si che la palla andasse a cedere ora lontana mille braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila, etc., tutti questi tiri si spenderebbero in tempi eguali tra di loro, e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe a venir dalla bocca del pezzo sino a terra, lasciata, senz'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo. Or par meravigliosa cosa che nell'istesso breve tempo della caduta a piombo sino in terra dall'altezza, verbigrazia, di cento braccia, possa la medesima palla, cacciata dal fuoco, passare or quattrocento, or mille, or quattromila, ed or diecimila braccia, si che la palla in tutti i tiri di punto bianco [cioè orizzontali] si trattenga sempre in aria per tempi eguali.

SALV. La considerazione per la sua novità è bellissima, e quando l'effetto sia vero, è meraviglioso: e della sua verità io non ne dubito; e quando si lasciassero cadere un'altra dalla medesima altezza giù a piombo, ambedue arriverebbero in terra nel medesimo istante, ancorché quella avesse camminato diecimila braccia di distanza, e questa cento solamente intendendo che il piano della Terra fusse eguale, che per sicurezza si potrebbe tirare sopra qualche lago.

4 – Arduino: un nuovo approccio laboratoriale

Come detto nel precedente paragrafo, il quarto gruppo ha implementato i due dispositivi sperimentali (Fig. 4) unificandoli in un unico dispositivo e inserendo un’automazione con l’uso di Arduino (Fig. 5).



Figura 5: studio della composizione dei moti con Arduino

Arduino è una piattaforma hardware composta da una scheda elettronica dotata di un microcontrollore e di una serie di connessioni per poter comunicare con l’esterno, ideata e sviluppata nel 2003 da alcuni membri del Interaction Design Institute di Ivrea. Proprio grazie ai microcontrollori si può realizzare con Arduino una vasta gamma di progetti, come ad esempio raccogliere dati provenienti da dispositivi (sensori di temperatura, di movimento, di luce), pilotare motori elettrici o trasduttori di altro tipo, il tutto attraverso un ambiente di sviluppo integrato (IDE) che utilizza un linguaggio di

programmazione semplificato (molto simile al C++) appositamente creato per Arduino.

Il gruppo di studenti ha voluto sfruttare le numerose potenzialità e individualità presenti nella classe per realizzare un dispositivo in grado di unire in un unico artefatto tutti gli esperimenti del progetto in maniera automatica usando Arduino (Fig. 6), scrivendo un programma in grado calcolare teoricamente le gittate (per poi confrontarle con i risultati sperimentali) e riprodurre la situazione descritta da Galileo nel Folio 116v.



Figura 6: controllo automatico tramite Arduino

Posso ritenermi indubbiamente molto soddisfatto di avere il piacere di lavorare in una classe così didatticamente stimolante e, quando ho appreso della volontà di tale gruppo di realizzare un qualcosa di nuovo, ho incentivato e supportato i ragazzi nella realizzazione del dispositivo perché esso è in grado di coniugare la storia della scienza con le

nuove tecnologie, binomio che reputo fecondo e didatticamente molto efficace. Infatti, l’utilizzo di dispositivi elettronici interattivi come Arduino, permette agli studenti di vivere in prima persona un’esperienza attraverso cui mettere in pratica quanto studiato e averne al tempo stesso un riscontro pratico, verificando le leggi matematiche che regolano i fenomeni fisici. In questo modo gli studenti vengono resi partecipanti attivi del processo di apprendimento, costruendo la conoscenza e dandole un significato più profondo e, al tempo stesso, stimolando il potenziale creativo dei ragazzi.

Valore aggiunto del progetto è, a mio giudizio, l’uso consapevole di una nuova tecnologia ai fini di una pratica pedagogica ancora troppo poco utilizzata nella scuola secondaria italiana: l’integrazione della storia della scienza nella didattica della fisica. Se a ciò si aggiunge che, grazie anche ad Arduino che costituisce una nuova frontiera nel concepire il laboratorio di fisica, gli studenti hanno potuto approcciarsi agli esperimenti da protagonisti e non da spettatori, possiamo senza dubbio affermare che il progetto ha avuto una buona ricaduta didattica.

5 – Conclusioni e prospettive future

L’esigenza di un approccio storico nella didattica della fisica nasce dalla consapevolezza, sempre più avvertita, che i metodi tradizionali di insegnamento si sono rivelati spesso insufficienti e inadeguati. Le riflessioni epistemologiche, a partire quanto meno da quelle di Thomas Kuhn, hanno messo in evidenza che nemmeno la scienza, pur presentando

caratteristiche proprie (replicabilità degli esperimenti, ricerca di leggi e costanti atemporali), risulta pienamente comprensibile ove la si astragga dalla sua dimensione storica. Soltanto in questo modo infatti è possibile afferrare la dinamica che caratterizza la pratica scientifica, ossia l'intersoggettività dei risultati del dibattito scientifico e la natura complessa dei modelli in campo, piuttosto che la ricerca linearmente cumulativa di una "verità" finale.

L'aver affiancato alla storia della scienza l'uso di tecnologie informatiche come Arduino non ha portato però a un sovraccarico cognitivo, cioè non ha compromesso la corretta e completa acquisizione delle conoscenze obiettivo dell'attività, perché la sua introduzione è arrivata spontaneamente dagli studenti e quindi essi non hanno dovuto imparare a utilizzare Arduino, aspetto che probabilmente avrebbe compromesso la buona riuscita del progetto. Sono, infatti, concorde con Calvani quando sostiene che le nuove tecnologie siano da inserire come supporto didattico, purché utilizzate in maniera consapevole e con un preciso intento didattico.

Al tempo stesso penso come sostiene John Hattie che la lezione più efficace è quella interattiva e a feedback immediato: esperimenti laboratoriali con Arduino rientrano esattamente in questa categoria di lezione, in quanto lo studente ha la possibilità di interagire con l'oggetto di studio e sia lui sia l'insegnante possono avere immediatamente un ritorno di ciò che è stato fatto e in caso di errori o inesattezze l'allievo è messo in condizione di poter rivalutare le sue scelte e di correggersi attivando percorsi mentali duraturi.

Nel prossimo anno scolastico la mia intenzione è quella di continuare sulla strada tracciata proponendo nella stessa

classe un altro percorso didattico che sfrutti il proficuo connubio tra storia della scienza e Arduino anche al fine di offrire lezioni di fisica sempre più efficaci e didatticamente rilevanti.

Bibliografia

Amaldi U. (2020). *L'Amaldi per i licei scientifici.blu*, Vol. 1, Bologna: Zanichelli.

Bonera G. (1995). *Galileo oggi*, Pavia: Goliardica pavese.

Calvani A. (2013). Qual è il senso delle tecnologie nella scuola? Una "road map" per decisori ed educatori, *Italian Journal of Educational Technology*, vol. 21, n. 1. pp. 52-57, 2013

Drake S. (1981). *Galileo at work – His Scientific Biography*, Chicago: Chicago Press.

Drake S. (1992). *Galileo Galilei pioniere della scienza*, Padova: Franco Muzzio Editore.

Geymonat L. (1969). *Galileo Galilei*, Torino: Einaudi.

Koyré A. (1976). *Studi galileiani*, Torino: Einaudi.

Kuhn T. (2000). *Dogma contro critica. Mondi possibili nella storia della scienza*, a cura di S. Gattei, Milano: Raffaello Cortina Editore.

Russo L. (2021). *La Rivoluzione dimenticata*, Milano: Feltrinelli.

Matematica & AI

Una proposta didattica per comprendere il legame tra queste due discipline

Francesco Bevacqua*

* Opus Lab – Ricerca & Didattica francesco.bevacqua@opus-lab.it



Sunto: *L'Intelligenza Artificiale (AI) sarà sempre più presente nella nostra vita. Questo non deve creare disagio ma trasformare questa tecnologia del futuro in una opportunità di crescita per tutti. La scuola italiana si sta attrezzando per affrontare questa nuova sfida di conoscenza, infatti si accenna esplicitamente a questo argomento nell'Azione 2 del PNRR – Next Generation.Labs che prevede la creazione di laboratori per le professioni digitali del futuro in tutte le scuole secondarie di II grado. In questi ambienti didattici innovativi, gli studenti potranno acquisire competenze digitali specifiche e orientate al lavoro in settori come la robotica, l'economia digitale e, appunto, l'Intelligenza Artificiale. Oggetto di questo intervento è una proposta operativa su come matematica e Intelligenza Artificiale sono legate in maniera complementare: l'AI come tecnologia futuribile, la Matematica come parte integrante dell'ambiente di sviluppo. Dopo una breve digressione storica sulla nascita di questa disciplina, si continua con la presentazione degli strumenti algebrici di base (funzioni, matrici, sistemi lineari ...) e come questi possono essere implementati in un linguaggio informatico (C/C++); si passa poi ai legami tra Matematica, Informatica e Biologia con la presentazione di un modello di neurone artificiale frutto della sinergia tra questi saperi. Il percorso prevede l'introduzione del modello matematico per passare poi alla sua implementazione informatica e si conclude con la costruzione di un modello di AI che ripropone la regola stimolo – risposta (regola di Hebb) con la creazione di uno sketch che può apprendere e modellare un comportamento aderente allo stimolo.*

Parole Chiave: *AI, Intelligenza, Artificiale, Matematica*

Abstract: *Artificial Intelligence (AI) will be increasingly present in our lives. This shouldn't create discomfort but transform this technology of the future into an opportunity for growth for everyone. The Italian school is gearing up to face this new knowledge challenge, in fact this topic is explicitly mentioned in Action 2 of the PNRR – Next Generation.Labs which envisages the creation of laboratories for the digital professions of the future in all secondary schools of II degree, In these innovative educational environments, students will be able to acquire specific and job-oriented digital skills in sectors such as robotics, the digital economy and, precisely, Artificial Intelligence. The subject of this intervention is an operational proposal on how mathematics and Artificial Intelligence are linked in a complementary way: AI as a futuristic technology, mathematics as an integral part of the development environment. We start from the basic algebraic tools (functions, matrices, linear systems ...) and how these can be implemented in a computer language (C/C++); then we move on to the links between Mathematics, Computer Science and Biology with the presentation of a mathematical model of Neuron. From the mathematical model we move on to its IT implementation and conclude with the construction of an AI model that re-proposes the stimulus-response rule (Hebb's rule) with the creation of a Sketch that can learn and model behavior adhering to the stimulus.*

Keywords: *AI, Intelligence, Artificial, Mathematics.*

1 - Introduzione

Imparare attraverso l'esperienza è uno dei modi migliori per apprendere. La proposta di laboratorio didattico, oggetto di questo intervento, parte dall'ambito matematico coinvolgendo l'Informatica e la Biologia. Questo approccio dà centralità alla Matematica, migliorandone notevolmente il contesto di apprendimento, unendo la formalità del linguaggio specifico un ambito multidisciplinare (Informatica

e Biologia). Esplicita l'idea che i contenuti fondamentali delle teorie (matematiche) sono alla base della modellizzazione della realtà.

Ancora questo approccio aiuta ad acquisire i contenuti fondamentali delle scienze fisiche e delle scienze naturali (Biologia, Informatica Matematica), padroneggiandone le procedure e i metodi di indagine propri, finalizzandoli nel contesto delle scienze applicate.

Infine mette in grado di utilizzare gli strumenti di sviluppo informatici nelle attività di studio e di approfondimento in ambito scientifico.

La proposta si declina in un corso inseribile anche all'interno delle PCTO o Corsi PON rivolti agli studenti della durata di circa 30 ore complessive. Questo, lo possiamo immaginare come diviso in moduli che comprendono una introduzione generale alla AI ed al suo sviluppo storico; un modulo di presentazione degli strumenti algebrici di base; un modulo dedicato all'ambiente hardware/software utilizzato; un modulo dedicato al funzionamento del neurone in Biologia; un modulo dedicato alla implementazione software di questo con particolare attenzione a come le funzioni biologiche possono essere trasferite in un modello matematico (es: una matrice rappresenterà le connessioni sinaptiche con i relativi pesi); si concluderà con la realizzazione di un modello di neurone secondo le regole indicate da Hebb, nel secolo scorso.

2 - Fasi della possibile sperimentazione in aula

Un modulo introduttivo sarà dedicato alla nascita di questa disciplina. Si scoprirà che si tratta di una disciplina giovane con un futuro tutto da costruire.

Si partirà dagli anni cinquanta del secolo scorso con un esplicito riferimento al genio di A. Turing; si continuerà spiegando il concetto di IA forte ed IA debole. Si parlerà dei computer di V generazione, sul cui funzionamento si discusse molto negli anni ottanta, per arrivare alle applicazioni su WEB disponibili che stanno già facendo parlare di sé, nel bene o nel male.

Come passo successivo, come specificato nell’introduzione, si partirà da una rilettura finalizzata agli obiettivi del corso dei concetti base di Algebra, Informatica e Biologia. Questo approccio sarà tanto più produttivo quanto si riuscirà a coinvolgere il gruppo di discenti nel raggiungimento degli obiettivi del corso.

La comprensione del funzionamento di una rete neurale (che è la struttura di base di un programma di IA) ha come presupposto la finalizzazione delle conoscenze di Algebra, Informatica e Biologia per costruire un ponte tra il linguaggio utilizzato da queste classiche discipline curriculari ed i nuovi termini tipici della AI: Concetti come “neurone artificiale”, “automa di calcolo”, “rete neurale”, “interconnessione tra neuroni”, troveranno naturale collocazione tra i termini facenti parte delle discipline prima citate.

2.1 – La matematica (semplice) per la comprensione delle reti neurali

I concetti algebrici che saranno oggetto di approfondimento fanno quasi tutti parte, di un normale corso di Matematica in un Liceo Scientifico o Istituto Tecnico. Le regole che sottendono le operazioni algebriche con espressioni letterali sono la base del modulo di Algebra del percorso.

La novità potrebbe essere rappresentata dal calcolo (elementare) delle matrici. Questo argomento viene spesso sottovalutato nell'insegnamento anche se alcune sue regole vengono implicitamente utilizzate quando si affronta lo studio dei sistemi lineari. Durante il corso viene proposta la sistemazione autonoma di queste regole. La loro comprensione è assolutamente alla portata degli studenti di secondaria di secondo grado. Un esempio per comprendere l'importanza di queste regole è dato dalla definizione, ad esempio, di "memoria associativa" tra due insiemi di neuroni. Questa nel linguaggio matematico viene esplicitata da una relazione del tipo:

$$\Delta A \cdot f = \eta \cdot g$$

dove ΔA rappresenta la matrice dei pesi delle connessioni sinaptiche, mentre f e g sono dei vettori. Lo studio proposto nel corso dell'algebra delle matrici non va oltre le semplici regole di moltiplicazione riga per colonna (e viceversa) o prodotto di una matrice per una costante. Già da questa semplice considerazione emerge la funzione centrale della

Matematica nella comprensione delle reti neurali e, più in generale, della AI.

2.2 – L’Informatica (semplice) per la comprensione delle reti neurali

Il passo successivo consisterà nella implementazione dei concetti matematici utilizzando un linguaggio di programmazione abbastanza comune. La scelta è caduta sul linguaggio C/++. Questo linguaggio è ormai abbastanza diffuso nei laboratori di informatica presenti nelle scuole italiane.

Grazie alla diffusione di progetti STEM che utilizzano framework a basso costo come la scheda Arduino è diventato il linguaggio più utilizzato per progetti di Coding. In questo linguaggio i vettori e le matrici sono facilmente rappresentabili con espressioni del tipo:

```
int main() {  
    double f1[3]={1,0,1};  
    double g1[3]={1,1,0};  
    .....  
}
```

nel caso di vettori a tre componenti o, nel caso di vettori a quattro componenti:

```
int main() {  
  
    double f2[4]={1,0,-1, 0};  
    double g2[4]={1,0,1,1};
```

```

.....
}

```

dove i comandi riportati sono facilmente comprensibili. Nel caso delle procedure di moltiplicazione di vettori colonna per vettori riga la traduzione in C/++ si riduce alla seguente forma:

```

void vector_dot_Tvector
(double res[][3], double a[3], double Tb[3])
{
for(int i=0;i<3;i++){
for(int j=0;j<3;j++){
res [i] [j] =a[i]*Tb[j];
}
}
}

```

Si noter  che nel frammento di codice riportato operano in successione due cicli di *for*, uno dentro l'altro. Quindi in totale si eseguiranno 9 operazioni (3 x 3). Il codice ovviamente continua, con le istruzioni di output a video ecc...

Non ci dilungheremo oltre, questi brevi frammenti di programma vogliono solo dare un esempio di codice che sar  prodotto durante il corso.

2.3 – La Biologia (semplice) per la comprensione delle reti neurali

Abbiamo brevemente introdotto i legami tra Matematica e Informatica nei due paragrafi precedenti. Vediamo adesso come quanto detto si lega alla Biologia. Il modello di rete

neurale introdotto nel corso è quello classico (e semplice) stimolo/risposta, dove stimolo e risposta sono rappresentati sotto forma di vettori. Non è completamente errato supporre che nel cervello animale, l’associazione stimolo/risposta può essere “appresa” attraverso una procedura di Training. Questa procedura di “apprendimento” (Training), è il “modus operandi” della nostra rete neurale.

Nel nostro modello, viene costruito un “cervello” (semplificato) composto da un gruppo di neuroni che riceve stimoli ed un secondo gruppi di questi che generano output conseguenti.

La regola di Hebb, è stata una prima risposta alla comprensione del meccanismo di modifica delle connessioni sinaptiche. Sarà questo l’argomento più complesso che si affronterà nel corso.

A conclusione del percorso verrà prima definito e sviluppato il modello matematico della regola di Hebb, successivamente tradotto in C/++ e sottoposto a verifica.

3 - Utilizzo delle tecnologie informatiche hardware e software

L’ambiente di sviluppo consisterà in computer con precaricati i software necessari per eseguire tutte le esercitazioni ed implementazioni i frammenti di codice previsti. Questi saranno trasferiti nella memoria di una scheda Arduino che, attraverso opportuni componenti aggiuntivi, segnerà lo stato delle varie fasi dell’apprendimento del neurone artificiale. Sulla scheda Arduino ci sarebbe molto da dire; la sua introduzione nella didattica ha cambiato il

concetto di laboratorio informatico tradizionale permettendo l'avvicinamento di molti giovani studenti alle tecniche del Coding ed all'utilizzo di ambienti di sviluppo specifici.

L'obiettivo finale di questa proposta è di avvicinare gli studenti all'AI con un percorso che parte dai contenuti di materie curriculari quali Matematica, Informatica e Biologia, per arrivare alla comprensione dei meccanismi base di questa straordinaria tecnologia del futuro.

Bibliografia

Mitchell M. (2022). *L'Intelligenza Artificiale*, Torino: Einaudi.

Floridi L. (2022). *Etica dell'Intelligenza Artificiale*, Milano: Cortina Raffaello

Lipschutz S. (1975). *Algebra Lineare*, Milano: Gruppo Editoriale Fabbri.

Sisini F. (2022). *Introduzione alle reti neurali*, ED. Scuola Sisini

Zwirner G. (1976) *Analisi Matematica: funzioni di una variabile*, Padova: CEDAM

Le fractiones in gradibus in classe nel terzo millennio

Le frazioni dinamiche delle scuole d'abaco del XIII secolo

Silvia Cerasaro*

*Dipartimento di Matematica, Università Tor Vergata di Roma, Italia;
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it



Sunto: *La frazione multipla graduata è una frazione medievale usata dai mercanti per le operazioni di cambio, non espresse in maniera decimale. Le procedure descritte nel Liber Abaci di Fibonacci sono di una matematica elegante e trasformabile in algoritmo, tanto da dare l'idea che lui tratti di frazioni dinamiche, in movimento sulla retta dei numeri. Con lo studio di queste frazioni si comprende come scrivere una frazione come somma di frazioni e come approssimarsi ad un numero razionale. Tali concetti possono essere trattati con la programmazione di un file GeoGebra, che mostra l'aspetto dinamico della frazione, oltre ad impostare un foglio di calcolo che permette di studiare numericamente le quantità ottenute, per poter fare stime e dedurre regole, non descritte dal matematico pisano.*

Parole Chiave: *frazioni dinamiche, approssimazione, storia della matematica.*

Abstract: *The graduated multiple fraction is a medieval fraction used by merchants for exchange operations, not expressed in decimal. The procedures described in Fibonacci's Liber Abaci are elegant mathematics that can be transformed into an algorithm, so much so as to give the idea that he is dealing with dynamic fractions, moving along the number line. With the study of these*

fractions, we understand how to write a fraction as the sum of fractions and how to approximate a rational number. These concepts can be treated by programming a GeoGebra file, which shows the dynamic aspect of the fraction, as well as setting up a spreadsheet that allows you to numerically study the quantities obtained, in order to make estimates and deduce rules, not described by the Pisan mathematician.

Keywords: *history, proportional thought, reality, laboratory.*

1 - Introduzione

Dalla lettura del capitolo quinto del Liber Abaci di Leonardo Pisano Fibonacci (facendo riferimento alla traduzione dal latino presente sul sito www.progettofibonacci.it) si nota una classificazione dei tipi di frazioni esistenti ed utilizzati nella sua epoca.

Quelle che sono state portate in classe e di cui si parlerà in seguito sono classificate come *frazioni di secondo genere* da (Moyon & Spiesser, 2015), chiamate, invece, *frazioni graduate* (*fractiones.in gradibus*) da Fibonacci, di cui si parla in maniera più dettagliata nel settimo capitolo e che chiameremo *frazioni multiple graduate*.

Le attività ideate sono state presentate nella classe 1 B del Liceo Matematico dell’I.I.S. Marconi di Colleferro (RM), tenendo in considerazione gli studi in letteratura in merito alle difficoltà riscontrate sull’apprendimento delle frazioni (Lisarelli, Baccaglini-Frank, Poli, 2019), (Robotti, 2016), (Kieren, 1992), (Clark, Berenson, Cavey, 2003), (Robotti, Antonini, Baccaglini-Frank, 2015), (Castelnuovo, 1952), (Lucangeli, 2005). Per mettere in pratica quanto progettato, era necessario per gli studenti conoscere le tecniche di

fattorizzazione dei numeri naturali, oltre a saper confrontare ed operare con i numeri razionali.

L'aula è diventata un laboratorio, paragonabile ad una bottega del XIII secolo, dove ogni conoscenza è stata costruita gradualmente, come un oggetto creato da un artigiano, attraverso il ritorno alle fonti e incitando al corretto spirito di ricerca, con l'obiettivo di migliorare l'aspetto percettivo nell'apprendimento, mediante la manipolazione di artefatti (Arzarelli, Bartolini Bussi, 1998). La didattica ha trovato spunto nella storia, che ha permesso di giustificare l'evoluzione del pensiero scientifico, parallelo a quello dello sviluppo intellettuale di ogni singolo individuo. (Chorlay, Clark, Tzanakis, 2022), (Furinghetti, 2022). Inoltre, ha reso consapevole ogni studente che ciò che abbiamo oggi non è sempre esistito ed è il risultato di studi, modifiche ed adattamenti di concetti semplici da cui tutto è partito. Sotto questa prospettiva, la matematica e la sua storia sono elementi essenziali nell'educazione civica di ciascun alunno. L'interdisciplinarietà è, invece, un aspetto che ha permesso di raggiungere una forma di conoscenza completa, a vantaggio della costruzione della cultura personale, unica dalle molteplici sfaccettature.

Con le attività presentate, gli studenti hanno rappresentato una frazione sulla retta dei numeri come somma di frazioni "dinamiche", comprendendo gradualmente il concetto di approssimazione ad un dato numero razionale, oltre a trasformare in algoritmo determinate procedure, passando dal linguaggio "naturale" ai simboli algebrici. Le attività presentate erano finalizzate anche a rinforzare il pensiero logico, ad avere una consapevolezza storica e civica

dell’evoluzione del pensiero matematico e a costruire in maniera reticolare il sapere mediante l’interdisciplinarietà. Gli obiettivi prefissati sono in continuità con quanto previsto dalle Indicazioni Nazionali per la Scuola Secondaria di Secondo Grado.

2 – Le frazioni multiple graduate in classe

La prima versione del Liber Abaci è del 1202, quando i manoscritti erano miniati ed erano dei capolavori nell’estetica, con l’uso di capilettera e decorazioni. All’interno del testo i numeri, e quindi anche le frazioni multiple graduate, sono scritti in rosso.

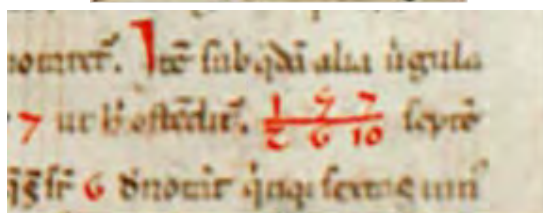


Fig. 1- Incipit del Liber Abaci e frazione multipla graduata.

Sfogliare la versione digitale di questo libro ha destato stupore negli studenti che spontaneamente si sono cimentati nella lettura, scoprendo che è scritto in latino e mostrando ovvie difficoltà di comprensione, causate anche dalla grafia utilizzata dal trascrittore. Solo dopo aver constatato la loro curiosità di scoprire di cosa si parla in questo libro, è stata mostrata l'edizione del Liber Abaci di Enrico Giusti (Fibonacci, Giusti 2020): gli studenti hanno compreso che avevano tra le mani un testo matematico, alquanto differente dal proprio, sotto tanti punti di vista. Ciò che li ha incuriositi maggiormente è stato vedere che non sono presenti formule, ma solo numeri e parole, e questa constatazione ha portato a spiegare loro che nel corso della storia l'uomo non ha avuto a disposizione sempre gli stessi strumenti, che si sono rivelati delle conquiste in momenti opportuni, per cui è stato compreso che il formalismo algebrico è molto recente nella storia della matematica. Così è iniziata la mia esperienza d'aula per constatare se l'uso delle frazioni multiple in una classe del terzo millennio possa aiutare o rinforzare la comprensione della frazione come numero, mediante la lettura diretta della fonte e della relativa traduzione in italiano.

Una *frazione multipla di grado n* è un'espressione in cui compaiono n numeratori ed n denominatori ed indica esattamente una somma di n frazioni (nel caso in cui i termini a_i siano tutti non nulli) il cui risultato è sempre quello che Leonardo Pisano definisce *numero rotto*, ovvero una frazione propria.

$$\frac{a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_2 \ a_1}{b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n}$$

Fig. 2- Significato matematico di una frazione multipla.

Risulta che $a_i < b_i$, per ogni i , e con $b_n < b_{n-1} < \dots < b_2 < b_1$, quindi, i denominatori sono ordinati in senso crescente da sinistra verso destra.

$$\frac{1 \ 1 \ 3 \ 4}{2 \ 2 \ 4 \ 9} = \frac{4}{9} + \frac{3}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{144} = \frac{79}{144} \text{ e } \frac{2 \ 4}{3 \ 5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$$

Fig. 3- Esempio di una frazione multipla di grado 4 e di una di grado 2.

Nel caso in cui i termini a_i sono tutti uguali ad 1, la frazione multipla graduata indica una somma di frazioni unitarie. Fibonacci chiama *disgregazione* le operazioni utili a scrivere una frazione propria come somma di frazioni unitarie e descrive accuratamente i procedimenti da utilizzare nell’ultima parte del settimo capitolo.

Le proprietà matematiche delle frazioni multiple graduate non sono enunciate all’interno del Liber Abaci ma vengono usate in maniera implicita nei numerosi esempi che Leonardo Pisano descrive, come se volesse aiutare l’apprendimento dell’utilizzo di tale frazione a coloro che avrebbero frequentato le scuole d’abaco, ovvero coloro il cui uso pratico della matematica diveniva utile per il proprio lavoro (artigiani, artisti, commercianti, mercanti...). Proprio per questa caratteristica sono stati sottoposti dei passi estrapolati dal libro, affinché gli studenti riuscissero a tradurre in linguaggio matematico quanto era scritto con le parole. Non è stato sempre facile farlo e solo dopo differenti esempi hanno provato a fare in maniera autonoma, chiedendo spesso

conferma, ma hanno compreso il significato matematico di quanto leggevano collaborando tra loro e chiedendo aiuto.

Solo dopo aver compreso il significato di quanto leggevano è stato chiesto di programmare un foglio di calcolo per passare da una frazione multipla graduata alla frazione propria che essa indica, andando a capire quali comandi usare sia per la formattazione del foglio che per impostare delle formule che restituiscano il significato matematico compreso.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1	1	2	3	=	3	+	2	+	1	+	1	=	47
2	2	2	3	5		5		15		30		60		60
3														

Fig. 4- La frazione multipla sul foglio di calcolo.

In un secondo momento, gli studenti sono stati invitati a riflettere sul significato geometrico di quanto stavano scrivendo: hanno riconosciuto che le frazioni che compaiono nello sviluppo sono sempre più piccole e ho chiesto loro se avessero potuto rappresentarle sulla retta dei numeri. Hanno lamentato una poca precisione nei loro disegni, così abbiamo scelto di usare GeoGebra, già utilizzato in classe con la loro insegnante. Quindi, in maniera altamente percettiva, è stato compreso che una frazione multipla permette di approssimarsi ad un numero razionale andando a sommare frazioni proprie sempre più piccole che conducono alla effettiva posizione del numero razionale sulla retta dei numeri. C'è stata, allora, l'esigenza di dare dei nomi alle quantità matematiche che venivano manipolate.

Sono stati definiti *incrementi* ciascuna delle frazioni che costituiscono gli addendi della somma a cui si riferisce la frazione multipla, mentre è stata definita *frazione intermedia* ciascuna delle frazioni ottenute a partire dalla prima

aggiungendo uno alla volta tutti gli incrementi. Una frazione multipla di grado n ha n incrementi ed n frazioni intermedie.

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_1 b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n}$$

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2}, \dots, \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n}$$

Fig. 5- Incrementi e frazioni intermedie.

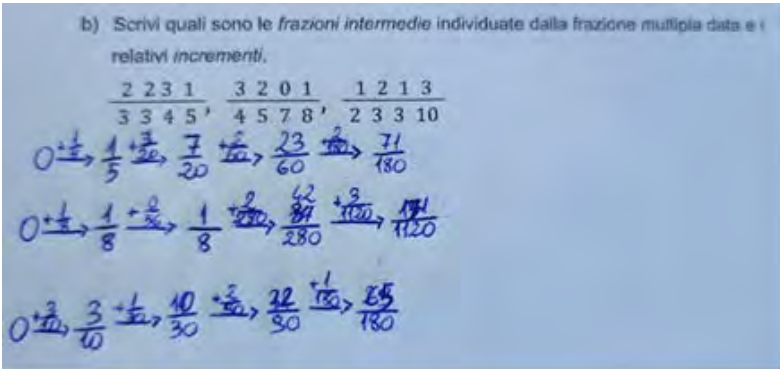


Fig. 6- Metodo scelto da uno studente per distinguere gli incrementi dalle frazioni intermedie.

Nella costruzione del file occorre utilizzare gli sliders, organizzati in coppie, tante quante i numeratori relativi a ciascun denominatore, oltre ad individuare i punti sull’asse delle x in cui si trovano le frazioni intermedie da raggiungere mediante la somma degli incrementi. Nell’inserimento dei testi utili ad indicare le frazioni considerate, si utilizzano alcune formule LaTeX nelle quali sono inseriti come oggetti gli sliders costruiti precedentemente.

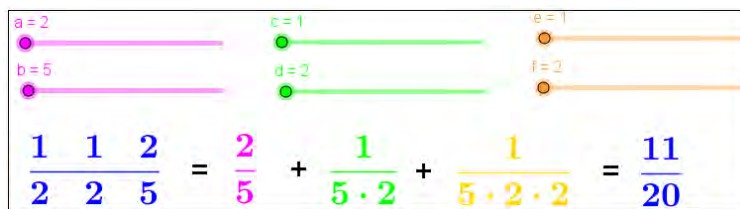


Fig. 7- File GeoGebra che mostra incrementi e frazioni intermedie per arrivare al numero razionale dato.

Nello stesso file è stata aggiunta una seconda parte, nella quale si riduce la frazione multipla di grado 3 data, in una di grado 2, dopo aver estrapolato la relativa proprietà per poterla ottenere. Con questa parte è possibile comprendere la relazione geometrica tra le frazioni intermedie precedenti e quelle appena ottenute.

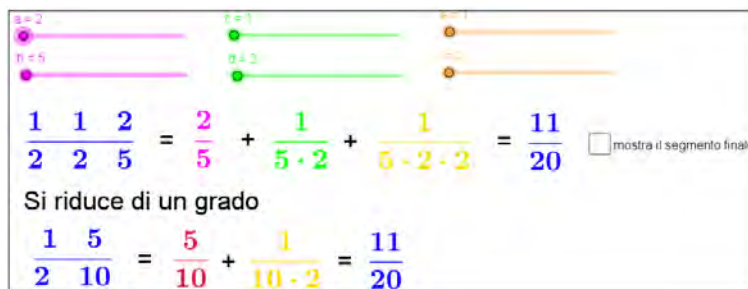


Fig. 8- Confronto tra frazioni intermedie relative a frazioni multiple di grado diverso relative alla stessa frazione propria.

Gli studenti hanno appreso anche come trasformare una frazione propria in frazione multipla, dopo aver dedotto dalla lettura diretta del Liber Abaci come avveniva la fattorizzazione di un numero nel periodo medievale.

Fibonacci definisce un numero primo come un numero *senza regola*, mentre definisce un numero composto come un *numero con regola*. Per passare da una frazione propria ad una frazione multipla occorre conoscere le regole dei numeri, qualora il denominatore sia un numero composto, mentre

bisogna utilizzare una frazione equivalente nel caso di un denominatore primo, solitamente moltiplicando numeratore e denominatore per un multiplo di 12 (gli studenti hanno preferito utilizzare un metodo che sfrutta il postulato di Eudosso-Archimede). La scomposizione di un numero composto nel Liber Abaci non è in fattori primi e viene scritta facendo uso della frazione multipla graduata, in quanto non esistevano i segni delle operazioni.

COMPOSITIONES NUMERORUM DUARUM FIGURARUM HEC QUE CUM II^{ma} FIGURIS SCRIBUNTUR.

12	$\frac{1}{2} \frac{0}{6}$	44	$\frac{1}{4} \frac{0}{11}$	74	$\frac{1}{2} \frac{0}{37}$
14	$\frac{1}{2} \frac{0}{7}$	45	$\frac{1}{5} \frac{0}{9}$	75	$\frac{1}{3} \frac{0}{25}$
15	$\frac{1}{3} \frac{0}{5}$	46	$\frac{1}{2} \frac{0}{23}$	76	$\frac{1}{4} \frac{0}{19}$
16	$\frac{1}{2} \frac{0}{8}$	48	$\frac{1}{6} \frac{0}{8}$	77	$\frac{1}{7} \frac{0}{11}$
18	$\frac{1}{3} \frac{0}{6}$	49	$\frac{1}{7} \frac{0}{7}$	78	$\frac{1}{6} \frac{0}{13}$
20	$\frac{1}{4} \frac{0}{5}$	50	$\frac{1}{2} \frac{0}{25}$	80	$\frac{1}{5} \frac{0}{16}$
21	$\frac{1}{3} \frac{0}{7}$	51	$\frac{1}{3} \frac{0}{17}$	81	$\frac{1}{9} \frac{0}{9}$
22	$\frac{1}{2} \frac{0}{11}$	52	$\frac{1}{4} \frac{0}{13}$	82	$\frac{1}{2} \frac{0}{41}$
24	$\frac{1}{3} \frac{0}{8}$	54	$\frac{1}{6} \frac{0}{9}$	84	$\frac{1}{3} \frac{0}{28}$
25	$\frac{1}{5} \frac{0}{5}$	55	$\frac{1}{5} \frac{0}{11}$	85	$\frac{1}{5} \frac{0}{17}$
26	$\frac{1}{2} \frac{0}{13}$	56	$\frac{1}{7} \frac{0}{8}$	86	$\frac{1}{2} \frac{0}{43}$
27	$\frac{1}{3} \frac{0}{9}$	57	$\frac{1}{3} \frac{0}{19}$	87	$\frac{1}{3} \frac{0}{29}$
28	$\frac{1}{4} \frac{0}{7}$	58	$\frac{1}{2} \frac{0}{29}$	88	$\frac{1}{4} \frac{0}{22}$
30	$\frac{1}{6} \frac{0}{5}$	60	$\frac{1}{6} \frac{0}{10}$	90	$\frac{1}{3} \frac{0}{30}$
32	$\frac{1}{4} \frac{0}{8}$	62	$\frac{1}{2} \frac{0}{31}$	91	$\frac{1}{7} \frac{0}{13}$
33	$\frac{1}{3} \frac{0}{11}$	63	$\frac{1}{3} \frac{0}{21}$	92	$\frac{1}{4} \frac{0}{23}$
34	$\frac{1}{2} \frac{0}{17}$	64	$\frac{1}{8} \frac{0}{8}$	93	$\frac{1}{3} \frac{0}{31}$
35	$\frac{1}{5} \frac{0}{7}$	65	$\frac{1}{5} \frac{0}{13}$	94	$\frac{1}{2} \frac{0}{47}$
36	$\frac{1}{3} \frac{0}{12}$	66	$\frac{1}{6} \frac{0}{11}$	95	$\frac{1}{5} \frac{0}{19}$
38	$\frac{1}{2} \frac{0}{19}$	68	$\frac{1}{4} \frac{0}{17}$	96	$\frac{1}{6} \frac{0}{24}$
39	$\frac{1}{3} \frac{0}{13}$	69	$\frac{1}{3} \frac{0}{23}$	98	$\frac{1}{2} \frac{0}{49}$
40	$\frac{1}{5} \frac{0}{8}$	70	$\frac{1}{7} \frac{0}{10}$	99	$\frac{1}{9} \frac{0}{11}$
42	$\frac{1}{6} \frac{0}{7}$	72	$\frac{1}{8} \frac{0}{9}$	100	$\frac{1}{10} \frac{0}{10}$

Fig. 8- Tavola della scomposizione dei numeri entro il 100.

Nel leggere le scomposizioni dalla tabella, gli studenti si sono chiesti perché il matematico abbia preso in

considerazione solo decomposizioni a due fattori, ed operato una scelta anche tra quelle possibili per un determinato numero. Per i numeri da 1 a 100 con regola, solo i numeri 96 e 98 compaiono con tre fattori: essendo 96 e 98 rispettivamente il doppio di 48 e 49, Fibonacci utilizza le scomposizioni di questi ultimi, aggiungendo il fattore 2 ad entrambe. Allora, gli studenti hanno cercato una risposta all'interno del Liber Abaci, trovando una descrizione sulla scelta all'interno del paragrafo VI.1.12, dove Fibonacci scrive "...E facciamo ciò per un'espressione più bella perché è più bello dire" che 20 è 2 per 10 "invece di" 4 per 5, "sebbene sia lo stesso." Le stesse considerazioni sono fatte anche per altri numeri: in generale, se il numero è pari, si preferisce sempre prendere come fattore più piccolo il numero 2, se invece è dispari, si considera il divisore dispari più piccolo. Quando si usa tale fattorizzazione, Fibonacci la chiama *più bella*, ma non si trova alcuna definizione esplicita al riguardo nel testo, ci sono solo numerosi esempi dai quali si può dedurre una risposta solo trasformando una frazione propria in più frazioni multiple, laddove sia possibile.

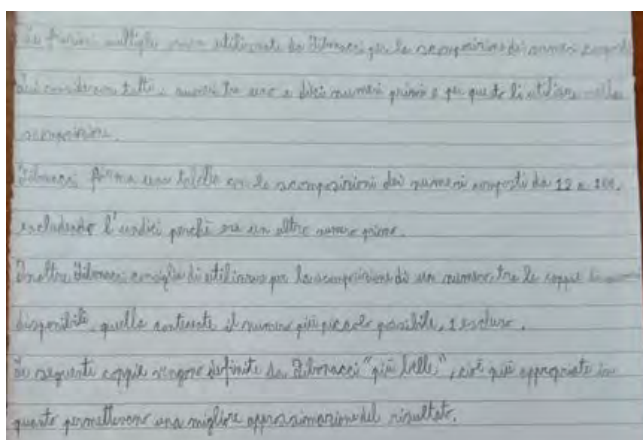


Fig. 10- Considerazioni di un alunno in merito alla fattorizzazione più bella.

Trasformare una frazione propria in frazione multipla graduata vuole dire *disgregare* o *traslare* una frazione, come scrivono i matematici del 1500. Se si procede a disgregare una frazione secondo regole diverse, si ottengono frazioni multiple equivalenti. Nel caso in cui un numero abbia una scomposizione con più di due fattori, tra le frazioni multiple equivalenti, quella di grado 2 è la più vicina alla frazione propria associata: gli studenti lo hanno scoperto mediante diversi esempi, traslando la stessa frazione con differenti scomposizioni e notando che il numero dei fattori è pari al grado della frazione multipla. Ovviamente, ciò è stato possibile solo dopo aver appreso l’algoritmo usato.

Sia $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$.

Poichè $a = b_1 q_1 + r_1$ con $r_1 < b_1$,

si ha $\frac{a}{b} = \frac{b_1 q_1 + r_1}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{q_1}{b_2 \dots b_n} + \frac{r_1}{b_1 b_2 \dots b_n}$.

Poichè $q_1 = b_2 q_2 + r_2$, si ha che

$\frac{a}{b} = \frac{q_2}{b_3 \dots b_n} + \frac{r_2}{b_1 b_3 \dots b_n} + \frac{r_1}{b_1 b_2 \dots b_n}$.

Proseguendo, si avrà sempre che $q_i = b_{i+1} q_{i+1} + r_{i+1}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, fin quando si arriverà ad avere $q_n = b_1 q_{n+1} + r_{n+1}$, che permetterà di arrivare ad avere

$\frac{a}{b} = \frac{r_1}{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \frac{r_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_n} + \frac{r_n}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{r_1}{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \frac{r_n}{b_1 b_2 \dots b_n} + \frac{r_{n+1}}{b_1 b_2 \dots b_n}$.

Fig. 11- Algoritmo per disgregare una frazione propria.

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{3 \cdot 4} = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{11} \Rightarrow 2 \cdot 6 = 11 + 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 6}{11} = 1 + \frac{1}{11} \Rightarrow \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

Fig. 12- Esempi di disgregazione di una frazione propria rispettivamente con denominatore con regola e senza regola

Anche in questo caso, è stato programmato un foglio di calcolo con l'algoritmo appreso, con il quale gli studenti hanno confrontato le frazioni multiple ottenute, in particolare la prima frazione intermedia, concludendo che *più bella* per Fibonacci significa *più vicina*, più prossima al valore iniziale, definendo *migliore approssimante* tale valore.



Fig. 13- Foglio elettronico per disgregare una frazione propria con denominatore con regola.

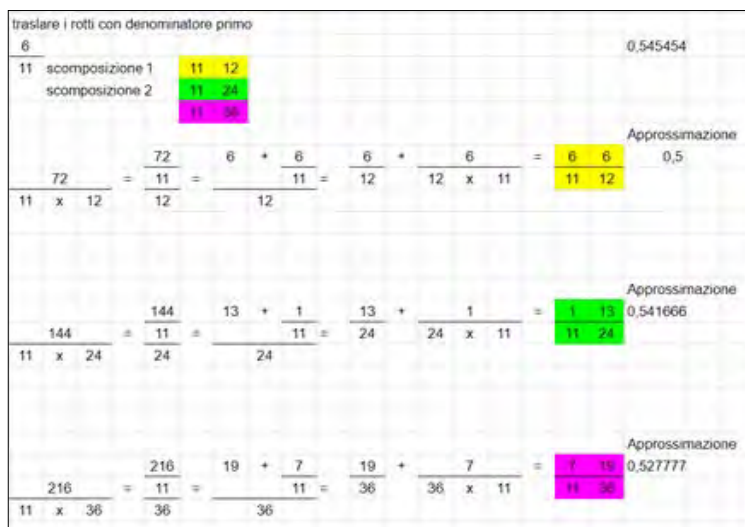


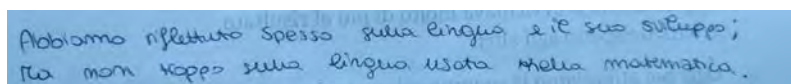
Fig. 14- Foglio elettronico per disgregare una frazione propria con denominatore senza regola.

3 – Matematica e Latino

Dalla lettura di alcuni paragrafi in latino, tratti anche dalla versione on line del testo di Baldassarre Boncompagni, presente sul sito www.progettofibonacci.it, e contando sulla preziosa collaborazione dell’insegnante di latino, gli studenti hanno compreso che alcuni termini matematici sono stati introdotti nel XIII secolo, alcuni ispirati alla vita quotidiana, come ad esempio *virgula*, che indica la linea di frazione, così chiamata come ad indicare un qualcosa che separa uno spazio da un altro, come può fare un bastone a terra oppure *numeri rupti* o *minuti*, cioè quei numeri molto piccoli, cioè minuti, ottenuti rompendo l’intero in parti uguali. Questi aspetti hanno reso consapevoli gli studenti che tutto evolve anche la nostra lingua. In particolare, è stato presentato il seguente passo, in cui Leonardo Pisano spiega cos’è un numero rotto, descrivendo come si ottiene e come si chiamano le parti che lo compongono (*denominans e denominato*).

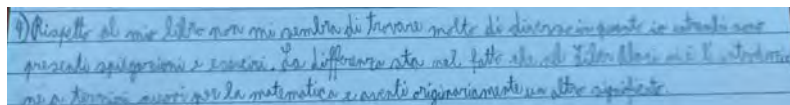
Cum super quemlibet numerum quedam virgula protracta fuerit, et super ipsam quilibet alius numerus descriptus fuerit, superior numerus partem vel partes inferioris numeri affirmat; nam inferior denominatus, et superior denominans appellatur. Vt si super binarium protracta fuerit virgula, et super ipsam unitas descripta sit ipsa unitas unam partem de duabus partibus unius integri affirmat, hoc est medietatem sic $\frac{1}{2}$ et super ternarium ipsa unitas posita fuerit sic $\frac{1}{3}$, denotat tertium; et si super septenarium sic $\frac{1}{7}$ septimam; et si super 10 decimam; et si super 19, nonamdecimam partem unius integri affirmat, et sic deinceps. Item si binarius super ternarium extiterit sic $\frac{2}{3}$, duas partes de tribus partibus unius integri affirmat, hoc est duas tertias. Et si super 7 duas septimas sic $\frac{2}{7}$ et si super 23 duas vigesimas tertias denotabunt, et sic deinceps. Item si septenarius super nouenarium positus fuerit sic $\frac{7}{9}$ septem, nouenas unius integri affirmat; et si 7 super 97, septem nonagesimas septimas denotabunt. Item 13 posita super 29, tredecim vigesimas nonas affirmant. Et si 13 sunt super 347, tredecim trecentasimas quadragimas septimas indicabunt, et sic de reliquis numeris est intelligendum.

Fig. 15- Paragrafo V.2, descrizione di un numero rotto.



Abbiamo riflettuto spesso sulla lingua e il suo sviluppo;
 ma non troppo sulla lingua usata nella matematica.

Fig. 16- Risposta alla domanda “Hai mai riflettuto sull’evoluzione della lingua, e in particolare della lingua usata dalla matematica?”



Rispetto al mio libro non mi sembra di trovare molte di differenze importanti se intendo
 parlarne di spiegazioni e esercizi. La differenza sta nel fatto che nel Liber Abaci mi è
 stata fornita una guida per la matematica e, anzi, originariamente un altro capitolo.

Fig. 17- Risposta alla domanda: “Il Liber Abaci è un testo di matematica rivolto a studenti, come te: cosa trovi di diverso rispetto al tuo libro?”

4 – Matematica, Fisica ed Inglese

Nel capitolo VIII le frazioni multiple compaiono come soluzioni ai problemi che Leonardo propone, risolubili con le proporzioni con un termine incognito (la cosiddetta “regola del tre”) perché esprimono con esattezza matematica il concetto di rapporto. In particolare, permettono di scrivere con semplicità i rapporti tra unità di misura diverse. Nel considerare i problemi delle merci e dei cambi di monete, occorre tenere presente delle relazioni tra grandezze, utilizzate nel Mediterraneo nel 1200, in cui il passaggio da una unità al suo sottomultiplo non avveniva con il sistema decimale. Questo aspetto ha fatto prendere in considerazione l’attuale Sistema Internazionale di Misura e le agevolazioni avute con l’introduzione del sistema decimale per misurare le stesse grandezze. È stato richiesto agli studenti di scrivere frazioni multiple che indicassero delle particolari quantità, tenendo in considerazione le tabelle di conversione. In seguito, è stato anche richiesto di scrivere in frazione multipla altre quantità, utilizzando i sistemi in uso oggi. È stato interessante vedere

come scrivere non solo il sistema decimale, ma anche quello sessagesimale sia per la misura del tempo che dell’ampiezza degli angoli.

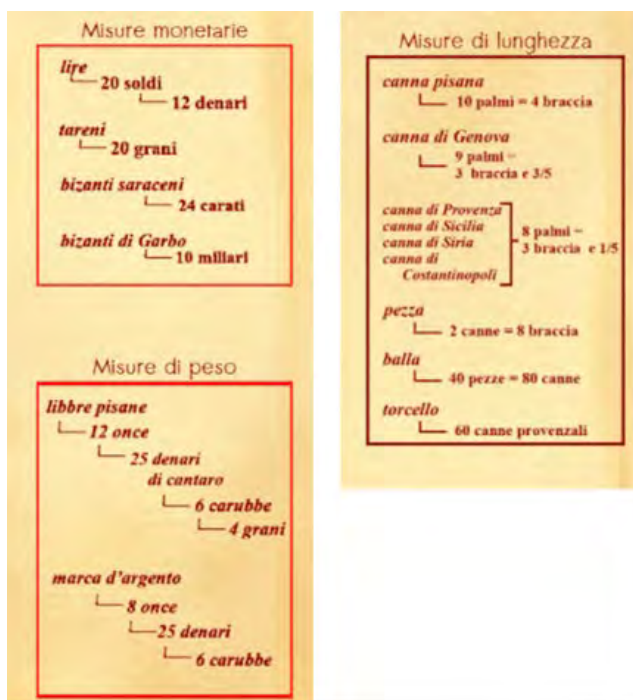


Fig. 18- Le principali unità di misura del XIII secolo.

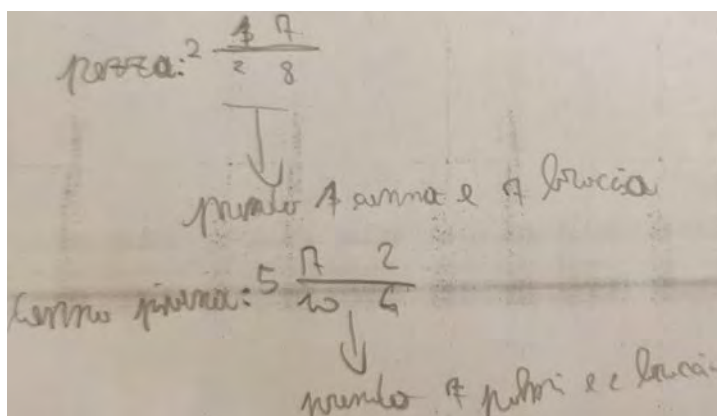


Fig. 19- Esempi di frazioni multiple con unità in uso nel 1200.

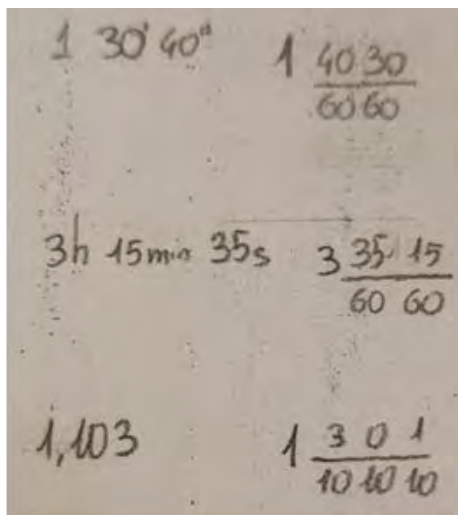


Fig. 20- Le frazioni multiple con unità di misura anche non decimali in uso oggi.

In particolare, è stato analizzato il sistema imperiale britannico in vigore fino al 1971, trattandolo in lingua inglese, e gli studenti hanno scoperto che la relazione tra Pound, Shillings e Penny è la stessa tra lira, soldi e denari del XIII secolo.

The old pre-decimal notation

In the past, the English monetary system didn't use the decimal notation. It use the pound, which was divided into 20 shillings, and each shilling into 12 pence, so a pound was 240 pence.

	Pound	Shillings	Penny
Pound	1	20	240
Shillings	1/20	1	12
Penny	1/240	1/12	1

The symbol for the shilling was "s." from the Latin "solidus".
The symbol for the penny was "d.", from the French "denier", from the Latin "denarius".

Fig. 21- Lavoro in inglese di una studentessa sulle frazioni multiple nel sistema monetario britannico prima del 1971.

5 – Conclusioni

Al termine di tale esperienza in aula, gli studenti hanno risposto ad una intervista semi strutturata, attraverso la tecnica di interazione del gruppo nominale, ovvero facendo scrivere sul foglio consegnato, in forma anonima, le proprie opinioni, raccolte, condivise e discusse, riguardante la metodologia usata, ovvero l’uso della storia della matematica e l’interdisciplinarietà. La maggioranza concorda nel fatto che diventa più stimolante “studiare così”, per usare i loro modi di esprimersi. Nella discussione è interessante il punto di vista di alcuni alunni che ritengono che “dalla lettura del Liber Abaci si possono capire altri aspetti oltre a quelli matematici e si capisce come vivevano in quell’epoca”. Questa affermazione concorda con quanto penso, cioè che il sapere si costruisce integralmente partendo dalla lettura diretta della fonte. Qualcun altro ha affermato di essere stato “interessato a vedere come un libro vecchio abbia scritto su in lettere cose da scrivere nel foglio di calcolo in formule”, dunque la matematica antica ha un linguaggio diverso da quella studiata oggi ma non è poi così diversa. Infine, c’è stato anche un commento in cui uno studente ha detto di non essere interessato alla metodologia usata perché “se si vuole studiare la matematica da un testo storico si imparano troppe cose”: l’autore di questo commento vuole semplicemente imparare la matematica ma è consapevole, comunque, del bagaglio di altre informazioni che potrebbe avere.

Bibliografia

Arzarello F., Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian trends in research in mathematical education: a national case study from an international perspective, in A. Sierpiska et al. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, pp 243-262.

Bartolini Bussi, M.G., Baccaglini-Frank, A., Ramploud, A. (2014). Intercultural dialogue and the geography and history of thought, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 34, No. 1, pp. 31-33.

Castelnuovo E. (1952). L'insegnamento delle frazioni, *La scuola secondaria ed i suoi problemi*, pp. 73-80.

Cerasaro, S. (2020). L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci, *Periodico di matematiche*, Numero 3, Volume 12 serie XIV anno CXXX, pp. 185-203.

Chorlay R., Clarke K.M., Tzanakis C. (2022). History of Mathematics in Mathematics Education: recent development in the field, *ZDM – Mathematics Education*, 54, 1407–1420, <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7>

Dematté, A., Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abacus problems, *ZDM – Mathematics Education*, 54, pp. 1521-1536.

Fibonacci, *Liber abbaci*, (2020) Enrico Giusti (a cura di), Paolo D'Alessandro (a cura di), Olschki.

Kieren, E.K. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction, in Leinhardt R., Putnam, R. & Hattrup, R.A. (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, pp. 323-371, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

Lisarelli, G., Baccaglini-Frank, A., Poli, F. (2019). Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni, *Ricercazione / Vol. 11, n. 1, pp. 169-189*.

Lucangeli, D. (2005). *National survey on learning disabilities*. Roma: Italian Institute of Research on Infancy.

Moyon, M., Spiesser, M. (2015). L’Aritmétique des fractions dans l’œuvre de Fibonacci: fondements & usage, *Archive for History of Exact Sciences*, 69(4), 391–427.

Robotti, O. (2016). Frazioni sul filo. Proposte e strategie per la scuola primaria, *Difficoltà di Apprendimento e Didattica Inclusiva*, vol. 3, n. 4, pp. 449-467.

Sitografia

Fibonacci (1202), codice custodito nella Biblioteca Nazionale di Firenze, presente on line all’indirizzo:

<https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=29>

Fibonacci, (1202), riproduzione integrale dell’edizione del Liber Abaci del 1857 curata da Baldassarre Boncompagni, presente nel sito www.progettofibonacci.it

Ghione, Frazioni multiple graduate e divisioni tra interi, scheda didattica di matematica presente sul sito www.progettofibonacci.it

Indicazioni Nazionali Scuola Secondaria di Secondo Grado in : <https://www.miur.gov.it/scuola-secondaria-di-secondo-grado>

SECONDA SESSIONE

**Interventi dedicati al ricordo della
prof.ssa Tonia Olivello**

Tonia Olivello

Una vita per l'insegnamento

*Nel primo anniversario della scomparsa della
prof.ssa Tonia Olivello*

Titti Olivello* Antonello Perillo**

*Già docente di Lingua Francese nella Scuola Secondaria

**Vice Direttore del Tgr RAI Nazionale; antonellopaolo.perillo@rai.it



1 - Titti Olivello: lettera ai convegnisti che partecipano al ricordo di Tonia

Cari colleghi e amici di mia sorella Tonia, finalmente sono riuscita ad essere con voi per ricordare la sua figura e la sua intensa e appassionata attività universitaria.

Sono veramente felice di rilevare quanto sia ancora tanto viva la presenza di Tonia nei vostri cuori e nella vostra mente.

Vi ringrazio per la vostra grande stima per il suo fruttuoso operato di ricercatrice didattica, di docente di Analisi Matematica alla facoltà di Ingegneria e docente della SICSI.

La sua lunga attività ha maturato da ambo le parti proficua collaborazione, sentimenti di stima e tanta amicizia.

Vi sono profondamente grata per tutto quello che avete fatto e per ciò che farete in suo ricordo.

Vi abbraccio affettuosamente, Titti

2 - Antonello Perillo, Una vita per l’insegnamento

Non potendo vantare trascorsi professionali in comune con la professoressa Tonia Olivello, mi è difficile, se non impossibile, tracciarne a dovere la figura, evidenziando le sue competenze e i tanti suoi meriti, notoriamente riconosciuti da un’infinita schiera di allievi e di colleghi e che hanno spinto gli organizzatori di questo prestigiosissimo evento a dedicarle i lavori in occasione del primo anniversario della sua prematura scomparsa. Ho però la fortuna di essere stato testimone diretto dell’immensa passione, della scrupolosa dedizione e del tanto, tantissimo, amore che ha sempre profuso nei suoi lunghi anni di insegnamento. Quella che per tutti era la Prof con la p maiuscola, per me è stata una meravigliosa parente, acquisita trent’anni fa, avendo sposato una sua cugina. Tonia era un vulcano di idee, di simpatia, la signorilità fattasi persona. E nei nostri incontri e nelle nostre bellissime telefonate della sera, non ha mai mancato di parlarmi dei suoi “ragazzi” e delle sue “ragazze”, incrociati nelle aule liceali e durante gli anni della sua docenza universitaria. Li seguiva con una dolcezza infinita, ben oltre gli aspetti strettamente didattici, ma regalando loro consigli di vita, raccogliendone le confidenze, accarezzandone le speranze, scacciandone le ansie, esortandoli a dare sempre il meglio per se stessi e per gli altri.

La sua è stata davvero una vita per l'insegnamento, oltre che per la famiglia, che adorava e dalla quale era adorata.

Giovanissima, iniziò ad insegnare matematica allo storico Istituto per Geometri "Giovanni Porzio" di Napoli, a Porta Nolana. Nel gruppo Facebook recentemente nato in suo onore e intitolato "Gli amici di Tonia Olivello", è in evidenza una bellissima foto che la ritrae a fine anno scolastico felice in classe, circondata dai suoi primi alunni.

Da lì, un lunghissimo percorso nel mondo della scuola napoletana, che l'avrebbe portata a diventare una delle docenti più apprezzate del famoso Liceo Scientifico Mercalli, per il quale, oltre ad essere stato di fatto la pioniera del piano informatico, ha ricoperto diversi incarichi di assoluto prestigio, come collaboratrice del Preside e consigliera d'istituto.

Per non parlare di un'altra sua passione: l'impegno al fianco dell'amministrazione scolastica del territorio, come ricercatrice didattica della matematica e formatrice di docenti.

Un motivo di orgoglio particolare, l'organizzazione delle Olimpiadi Nazionali di Matematica, nel suo ruolo di vice Presidente della sezione napoletana della Mathesis, l'associazione nazionale dei docenti di matematica e materie scientifiche.

Poi l'Università... Università Federico Secondo di Napoli, con il corso in Ingegneria elettronica e analisi matematica.

Un fantastico viaggio professionale iniziato sulla scia del suo Maestro, il celebre professor Aldo Morelli, che la spinse ad intraprendere anche questo cammino professionale.

Ma l'aspetto che più posso sottolineare è quello umano. Chi ha avuto la fortuna di averla incrociata nel proprio percorso di vita, non potrà che portarla nel cuore.

Sui Social, non a caso, nelle ore immediatamente successive alla sua scomparsa, e poi ancora oggi, giorno dopo giorno, si trovano tracce di quell'amore che Tonia Olivello ha seminato ovunque sia passata.

Vi leggo solo pochissimi, tra i tanti, messaggi di suoi ex alunni.

"Persona dolcissima di grande umanità ed empatia"...

"Sapeva unire competenza e umanità, tanto che ero rimasto sempre in rapporti con lei"...

"Maestra di logica e di vita, come oggi non se ne trovano più"...

"Ci ha amato e seguito come fossimo stati suoi figli"...

Non mancano parole piene di stime dei colleghi. Come questo post, che ora vi evidenzio:

"Tonia amica affettuosa e preziosa, mi hai donato per tanti anni come guida al Mercalli le parole più belle e i pensieri più accoglienti. La tua competenza e la tua disciplina sono stati un esempio per i docenti e per gli alunni".

Un patrimonio di valori e di rapporti umani puri, veri e sinceri, che Tonia ha saputo creare e che sarebbe davvero un peccato vedere dispersi.

Per questo, a nome della sorella Titti, di tutta la famiglia e degli amici più stretti, ringrazio tutti voi per averne voluto onorare la memoria.

Ve ne siamo davvero riconoscenti con tutto il cuore

Bibliografia

Amici di Tonia: la scomparsa di Tonia Olivello nelle parole dei suoi più cari amici: Loredana Biacino, Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Valeria Facchini, Francesca Gialanella, Andrea Lanzillo, Alessandra Rotunno, Maria Talamo, Roberto Tortora, Annalaura Trampetti. «*Periodico di Matematica*» n. 3 - settembre 2022, pagine 185-194.

Tonia Olivello tra Geometria e Didattica

*Note sul contributo scientifico-didattico
lasciato da Tonia Olivello*

Ferdinando Casolaro*

*Presidente ANFSU "R. Caccioppoli" – Direttore di Redazione Periodico
di Matematica - presidente.anfsu@liceocaccioppoli.edu.it



Sunto: Si propone una sintetica descrizione del contributo della prof.ssa Tonia Olivello all'insegnamento della matematica, attraverso alcuni lavori di carattere scientifico-didattico da lei pubblicati.

Parole Chiave: *Geometria, Analisi matematica, Probabilità e Statistica.*

Abstract: *A brief description of the contribution of Prof. Tonia Olevella to the teaching of mathematics is proposed, through some scientific-didactic works published by her.*

Keywords: *Geometry, mathematical Analysis, Probability and Statistics.*

1 - Introduzione

In un lavoro pubblicato sul Periodico di Matematica n. 3, settembre 2022, è descritta la figura professionale e umana della prof.ssa Tonia Olivello, nel ricordo degli amici e colleghi che si sono pregiati di una proficua frequentazione e collaborazione professionale.

Un anno dopo, ci ritroviamo a ricordarla per sottolinearne il contributo scientifico-didattico dato alla ricerca attraverso la testimonianza di alcuni suoi allievi, i cui lavori sono pubblicati nel presente volume.

Ovviamente, per quanto ci si può impegnare, non si riesce mai ad esprimere la valenza scientifica e didattica della produzione di una persona nella sua totalità.

Pertanto, nell’espletamento dei lavori del Convegno, i docenti che hanno relazionato nella sessione dedicata al ricordo di Tonia Olivello – tutti suoi allievi nel primo decennio degli anni 2000 nei corsi di formazione SISS al Dipartimento di Matematica dell’Università di Napoli “Federico II” - hanno scelto di trattare tematiche relative a tre diverse branche della Matematica (Geometria, Analisi, Probabilità e Statistica) al fine di fornire un quadro, il più esaustivo possibile, della duttilità degli studi di Tonia.

2 – Testimonianza di un compagno di lavoro

Senza dilungarmi sulla questione ma lasciando esprimere i suoi allievi ognuno nei lavori presentati, tengo a sottolineare il contributo dato da Tonia alla didattica attraverso alcune idee

innovative sull'insegnamento della matematica. Queste idee sono ben esposte

- nel lavoro Paladino-Rotunno in cui ai risultati specifici sulle Trasformazioni Geometriche esposti da Rotunno seguono alcune applicazioni di Paladino in ambito elettrico-elettronico, confermando la valenza della matematica nelle applicazioni interdisciplinari;
- nel contributo di Mariarosaria Cuomo che, nel riproporre un lavoro di Tonia presentato ad un Seminario didattico nel 2005 - *La Geometria e la fisica nello spazio tridimensionale. Il teorema di Pitagora nello spazio e la Sfera Galleggiante* - riprende temi di "fusionismo" (esposizione di problemi tridimensionali nel piano) che purtroppo oggi sono trascurati, pur riconoscendo la comunità scientifica la loro importanza sia nella Rappresentazione che nell'interpretazione dei fenomeni reali.
- nell'intervento di Ivano Casolaro che presenta alcune osservazioni su questioni didattiche di Analisi Matematica fatte da Tonia a conferma della sua esperienza di giovane assistente del prof. Amilcare Pozzi negli anni 'Settanta' nel corso di Analisi Matematica II. Anche in questo caso, Ivano Casolaro illustra un breve ma significativo percorso didattico da cui si evince l'importanza delle applicazioni della Matematica alla Fisica.

La giornata in ricordo di Tonia si chiude con le conferenze di due docenti, Manuela Condelli e Fabrizio Mancinelli, già

allievi di Tonia al Dipartimento di Matematica dell’Università di Napoli “Federico II”, oggi insegnanti di Matematica nella scuola secondaria di secondo grado in Toscana.

Condelli e Mancinelli hanno già precedentemente presentato e pubblicato nel Periodico di Matematica n. 1, marzo 2023, un’esperienza didattica proposta da Tonia dal titolo: *Dalla duplicazione del quadrato all’n-plicazione del d-politopo*.

Il contributo al convegno riguarda il riferimento della matematica ai problemi del mondo reale, tema che Tonia poneva alla base del proprio insegnamento.

Bibliografia

Per la bibliografia ci si limita al riferimento degli articoli citati e pubblicati in seguito nel presente volume.

Quante persone in piazza?

Manuela Condelli *, Fabrizio Mancinelli **

* Docente nel Liceo Scientifico “Amedeo di Savoia”, Pistoia;
manuela.condelli@posta.istruzione.it ** Affiliazione; e_mail

** Docente nel Liceo Statale “Niccolò Forteguerri”, Pistoia;
fabrizio.mancinelli@posta.istruzione.it



Sunto: *Nella vita quotidiana è importante effettuare stime corrette ed analizzare criticamente quelle fornite dai media. Tramite l'utilizzo di un servizio web di mappe satellitari e di un software di geometria dinamica, viene fornito un metodo per stimare la capienza di una piazza per confrontarla con quanto dichiarato.*

Parole Chiave: *Geometria dinamica, stima, mappa satellitare, scala.*

Abstract: *In everyday life it is important to estimate correctly and to analyze assessments provided by media in a critical way. By means of a satellite maps web service and a dynamical geometry software, we show a procedure to estimate the capacity of a city square to compare it to the claimed value.*

Keywords: *Dynamical geometry, esteem, satellite map, scale.*

1 - Introduzione

La capacità di interpretare l’enorme quantità di dati e di numeri con cui i media ci bombardano quotidianamente è senz’altro una delle più importanti abilità per una cittadinanza consapevole. Per acquisire tale abilità è però indispensabile saper costruire modelli che interpretino un problema reale basandosi soltanto su pochi fatti essenziali [Weinstein & Adam].

D’altra parte nei documenti “Matematica 2003” e “Matematica 2004”, redatti dall’Unione Matematica Italiana, dalla Società Italiana di Statistica e da Mathesis con il patrocinio del Ministero dell’Istruzione, dell’Università e della Ricerca, sono stati individuati all’interno dei nuclei fondanti l’insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola superiore diverse competenze in tal senso. All’interno del nucleo “Numeri e algoritmi” troviamo ad esempio lo sviluppo della capacità di usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica; in quello “Spazio e figure” l’abilità di usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica. [Anichini et al. (1), (2)].

Nell’ambito delle scienze matematiche, la geometria è quella che meglio si presta ad un approccio “estensivo”, ovvero che metta in rilievo i collegamenti mirando a un approfondimento concettuale, prima che tecnico, delle conoscenze matematiche. [De Marchis et al.]. Nell’insegnamento estensivo della matematica si propone di dare più spazio ad attività che permettano di sperimentare la

logica della scoperta, riducendo quello dedicato all'esposizione assiomatica della teoria [Brigaglia et al.].

Questa visione metodologica dell'insegnamento-apprendimento della geometria, "down-top" per così dire, ovvero che parte da un problema concreto per giungere alla sistematizzazione assiomatica, era discussa fin dal '700, nell'opera di Clairaut, il quale sosteneva che si dovesse iniziare dalla misurazione della terra, secondo l'etimologia stessa del termine "geometria" [Clairaut].

Nel presente lavoro abbiamo considerato le indicazioni metodologiche esposte tenendo conto del progresso tecnologico che ha consentito, da un lato, di disporre di mappe satellitari di praticamente ogni parte del mondo, dall'altro di utilizzare il calcolatore per manipolare le figure geometriche dinamicamente, grazie a software ormai disponibili anche sulle calcolatrici grafiche di ultima generazione. Per i contenuti trattati, si presta ad essere introdotta nel primo biennio della scuola secondaria superiore.

2 - La battaglia delle stime

La nostra attività parte da una circostanza molto comune quando i media diffondono la notizia di una manifestazione di piazza: quando vengono forniti i numeri dei partecipanti, si assistono a discrepanze piuttosto vistose tra la stima fornita dagli organizzatori della manifestazione stessa e quella diffusa invece dalle istituzioni che si occupano dell'ordine pubblico oppure dai gruppi contrari alla piattaforma della manifestazione. Naturalmente ciascuna fazione ha interesse a

comunicare dati che supportino la propria posizione; ma quanto sono attendibili queste stime?

Per esprimere un valore rappresentativo che sia equidistante tra due o più stime molto distanti in termini di ordini di grandezza, più che la media aritmetica, è più opportuno effettuarne una media geometrica [Weinstein & Adam]. Questo calcolo fornisce tuttavia un risultato significativo se è chiaro il processo che ha portato alle stime; ed esattamente ciò che ci proponiamo con questa attività. Disporre di una procedura per una stima attendibile fornisce anche un importante strumento per il “fact checking”, attività che senz’altro rientra nell’ambito della cittadinanza consapevole. Per il suo svolgimento abbiamo utilizzato il servizio Google© Maps per la generazione di mappe satellitari e la calcolatrice grafica Casio© fx-GC50 per il software di geometria dinamica, ma può essere realizzata con analoghi servizi di mappatura satellitare e software; nessun dispositivo o sponsorizzazione sono stati in ogni caso forniti dalle aziende citate.

Come case study abbiamo considerato una manifestazione che si è svolta il 20 marzo del 2011 a Piazza S. Giovanni in Laterano, che gli organizzatori hanno stimato essere partecipata da oltre un milione di persone.

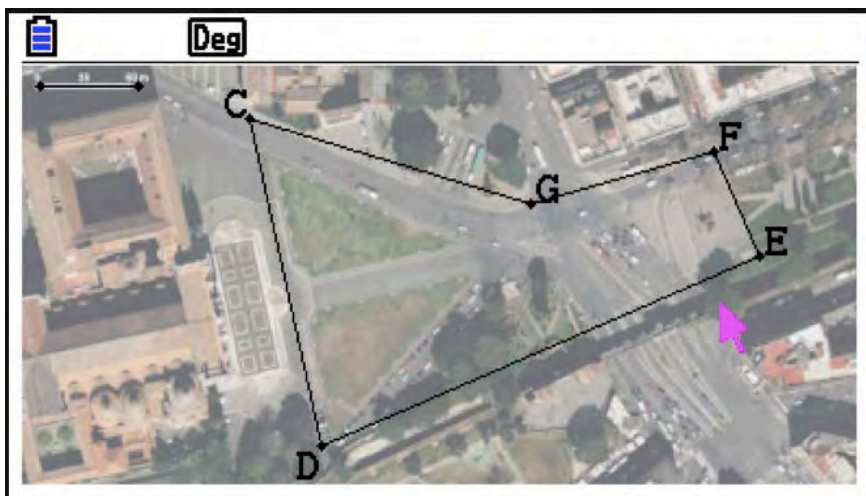
3 - Creazione di un modello geometrico

Come prima attività va localizzata la piazza tramite il servizio di mappe satellitari; è importante che nella mappa sia indicata anche la scala, in modo da disporre di un riferimento

per la stima delle dimensioni. La mappa va successivamente caricata nel software di geometria dinamica.

Tramite gli strumenti del software si misura la lunghezza del segmento corrispondente alla scala e poi, tramite semplice proporzione, si calcola la lunghezza di un metro in unità interne (ovvero del software); elevando al quadrato, si calcola l'area della superficie di un metro quadrato, sempre in unità interne. Nel nostro caso un metro quadrato corrisponde circa a $1.3 \cdot 10^{-3}$.

A questo punto si può effettuare una stima dell'area della piazza delimitandola con un poligono, utilizzando l'apposito strumento all'interno del software di geometria dinamica. Il software dovrebbe calcolare automaticamente l'area della superficie in unità interne (nel nostro caso circa 29); naturalmente dividendo tale valore per il fattore di scala trovato precedentemente, si converte la misura in metri quadrati: nel caso in studio, l'area delimitata è stimata essere circa $2.3 \cdot 10^4 \text{ m}^2$.



Per stimare la capienza, basta considerare quante persone possono occupare un metro quadrato; anche considerando situazioni di grande ammassamento, difficile pensare che in un metro quadrato ci possano entrare più di 6 persone. Pertanto, nella piazza in questione si stima ci possano entrare, ammassate, circa 140000 persone; una cifra di un ordine di grandezza inferiore a quanto dichiarato dagli organizzatori della manifestazione: un milione di persone corrisponderebbe infatti ad un ammassamento di oltre 40 persone al metro quadrato.

4 - Conclusioni

Una corretta stima delle grandezze relative a situazioni reali ed una analisi critica dei dati forniti dai media costituiscono competenze essenziali per esercitare una cittadinanza consapevole. L’insegnamento-apprendimento della matematica a scuola, se impostato sulla creazione di modelli algebrici e/o geometrici applicabili a situazioni reali, forniscono un potente strumento per il conseguimento di tali competenze [Bartolini et al.]. Nell’ambito della geometria, in particolare, un apporto imprescindibile è fornito dall’utilizzo di software di geometria dinamica e da dispositivi di calcolo numerico.

Trattandosi di un’attività che ricade nell’ambito dei cosiddetti “problemi alla Fermi”, non è stata effettuata un’analisi dell’incertezza legata alle stime effettuate, poiché lo scopo dell’attività è individuare l’ordine di grandezza della capienza di una piazza (che, come indicato, può essere molto

differente da quanto dichiarato) e quindi una stima credibile, più che un valore puntuale.

Desideriamo ringraziare la scomparsa prof.ssa Tonia Olivello che, in diversi momenti della nostra esistenza, ci ha trasmesso con la sua carica inesauribile la passione per la matematica, e in particolare per la geometria, e che ha costituito per noi una guida ed un esempio da seguire nell'insegnamento.

Bibliografia

Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico F., Robutti O. (2003). *MATEMATICA 2003 - Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica, Ciclo secondario. Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca.*

Anichini G., Arzarello F., Bartolotti C., Ciarrapico F., Robutti O. (2004). *MATEMATICA 2004 - Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica, Ciclo secondario: Quinta classe. Liceo Scientifico Statale "G. Ricci Curbastro, Lugo di Romagna.*

Brigaglia A., Raspanti M.A., Rogora E. (2020). *Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. arXiv:2012.05881.*

Clairaut, A. C. (1741). *Éléments de Geometrie* (2006). Editions Jacques Gabay.

Bartolini Bussi M.G., Taimina D., Isoda M. (2009). *Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. ZDM Mathematics Education, 42(1), pp. 19-31*

De Marchis M., Menghini M., Rogora E. (2020). The importance of “Extensive teaching” in the education of prospective teachers of Mathematics. *Proceedings of 19th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2020. Bratislava : Slovak University of Technology. pp. 344-353.*

Weinstein L, Adam J.A. (2008). *GUESSTIMATION: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton University Press.

Una rappresentazione elementare dei concetti di Analisi Matematica nelle applicazioni fisiche

*Osservazioni didattiche sul concetto di
infinito e su errori storici emersi dalla
rappresentazione analitica di fenomeni fisici*

Ivano Casolaro*

* Docente di Matematica e Fisica al Liceo Manzoni di Latina e Professore a
contratto di Analisi Matematica II al DIARC_Università di Napoli;
ivano.casolaro@unina.it



Sunto: Si presentano alcuni esempi elementari per l'introduzione dei concetti fondamentali di Analisi Matematica, partendo da esperienze di carattere fisico. Il lavoro prende spunto da un articolo pubblicato nel 2005 agli Atti del protocollo di intesa Mathesis-MIUR sul tema "Le competenze matematiche tra la Scuola e l'Università" (Casolaro F., Olivello A. e altri, 2005).

Parole Chiave: Limite, derivata, integrale, carica elettrica

Abstract: Some elementary examples are presented for the introduction of the fundamental concepts of Mathematical Analysis, starting from experiences of a physical nature. The work takes its cue from an article published in 2005 in the Proceedings of the Mathesis-MIUR Memorandum of Understanding on the topic

"Mathematical skills between schools and universities" (Casolaro F., Olivello A. and others, 2005).

Keywords: *Limit, derivative, integral, electric charge*

1 - Introduzione

È mia convinzione che l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola secondaria di secondo grado vada affrontato in modo meno formale rispetto alle proposte che teniamo nei corsi universitari.

In particolare, ritengo che si debba sempre partire da riferimenti su problemi di Fisica e di Scienze applicate.

Infatti, un Modello per il controllo di eventi (nell'Universo fisico ed economico) - o di processi di comunicazione - richiede una riflessione che va ben oltre la risoluzione di un sistema di equazioni che rappresenta l'evento. Del resto, nei Modelli di oggi, la stessa costruzione delle equazioni nasce dalla conoscenza statistica dei fenomeni antecedenti e si basa sulla probabilità che l'evento possa verificarsi.

A tal proposito, ho approfondito le tematiche poste nell'articolo (Casolaro F., Olivello T. ed altri, 2005), cercando di sottolineare, anche con esempi riferiti al reale, le perturbazioni che avvengono in un qualsiasi Modello dinamico se cambia una delle grandezze analitiche, anche in un solo punto, nella funzione che lo rappresenta.

In particolare, mi soffermerò su un errore storico relativo all'evoluzione della Fisica, che si ritrova nei libri di testo fino alla metà del secolo scorso. In passato, infatti, le analogie tra campo magnetico e campo elettrico (che a livello sperimentale

facevano visualizzare effetti più o meno simili) e la simmetria delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico rispetto ad $\vec{E}$ e rispetto a $\vec{B}$, facevano pensare all'esistenza di una carica magnetica legata al campo magnetico $\vec{B}$ da una relazione analoga a quella che lega il campo elettrico $\vec{E}$ alla carica q (ipotetica legge di Coulomb per il magnetismo). Di tale congettura, smentita già da circa un secolo, darò una giustificazione di carattere matematico, attraverso il calcolo integrale, che ne dimostra l'assurdità.

2 - Il limite in un punto di $\mathbb{R}$

Uno dei problemi che incuteva timore agli studiosi nel periodo ellenico era l'impossibilità della divisione per zero. I greci cercavano di capirci qualcosa operando per ricorrenza, cercando di valutare i risultati di una semplice divisione di un numero intero per valori del divisore che si avvicinano sempre di più allo zero.

Pur rischiando di sembrare banali, riteniamo che ancora oggi sia questo l'approccio didattico più significativo, perché conduce automaticamente a riflessioni sul concetto di infinito. Inoltre, avendo a disposizione le conoscenze di geometria analitica, permette di valutarne gli aspetti grafici e, quindi, l'eventuale esistenza dell'asintoto verticale.

Proviamo ad analizzare con gli studenti la tabella che costruiamo con i risultati della seguente divisione:

Partiamo dal "numero" intero che Dante considerava "perfetto", e lo utilizziamo come NUMERATORE di

riferimento; rendiamo variabile il DENOMINATORE randomizzandone i valori, e costruiamo il seguente algoritmo:

$$\begin{aligned}3 : 9 &= 0,33333.... \\3 : 6 &= 0,5 \\3 : 3 &= 1 \\3 : 1 &= 3 \\3 : 0,5 &= 6 \\3 : 0,1 &= 30 \\3 : 0,01 &= 300 \\3 : 0,001 &= 3000 \\..... \\3 : 0,0000000... &= 300000000...\end{aligned}$$

(“0” significa “zero” virgola infiniti zeri; così il risultato della divisione $3 : 0$ genererà un valore con prima cifra “3” seguita da infiniti zeri!)

3 – Il limite all’infinito

Il concetto di infinito riferito alla variabile indipendente x (t nel caso del tempo), per i fenomeni reali, è utilizzato spesso in modo improprio. Ad esempio, in alcuni testi di Fisica per la Scuola Secondaria di secondo grado, relativamente allo studio di fenomeni reali del mondo fisico, si utilizza l’*“infinito”* per indicare *l’insieme dei punti di una determinata regione di spazio in cui non si sente l’influenza di una determinata grandezza*; è il caso del campo elettrico o del campo gravitazionale.

Consideriamo, ad esempio, il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q in un punto a distanza r da essa nel vuoto.

L'enunciato viene formulato nella seguente forma: dicesi "Dicesi Campo Elettrostatico di una carica pilota Q , l'area d'influenza (o raggio d'interazione) che esercita la stessa su una carica mobile q posta ad una distanza da Q che va da zero all'infinito".

Siamo sufficientemente al corrente dei "limiti" di una tale definizione; in particolar modo, è noto che OLTRE UNA CERTA DISTANZA L'INTERAZIONE ELETTROSTATICA DI UNA CARICA È UGUALE A ZERO. Per questa ovvia ragione, per molti matematici, scomodare l'"infinito" sembra quanto meno inopportuno se non addirittura errato.

4 - Legge di Gay Lussac sulla dilatazione cubica

La relazione

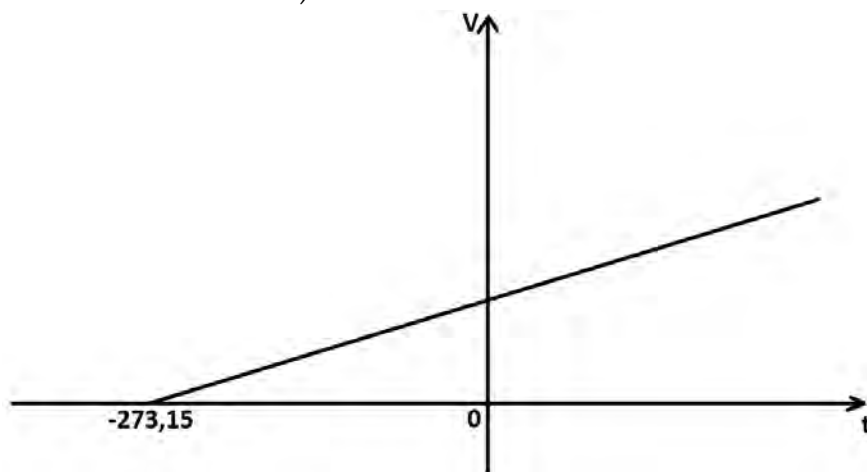
$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

che esprime la variazione di Volume di un gas in funzione della variazione di temperatura, offre spunti molto interessanti per discutere di infinitamente grande o infinitamente piccolo in un contesto anche sperimentale di fenomeni fisici e naturali.

Quando si fa notare che il coefficiente di dilatazione cubica β dell'ARIA (intesa come gas) corrisponde al valore di 0,003661, che non è altro che il RISULTATO DELLA DIVISIONE $1/273,15$, si può mostrare agli studenti il perché di alcune fondamentali leggi della fisica, come ad esempio:

- l’impossibilità di scendere al di sotto della temperatura zero Kelvin (equivalente del valore $-273,15$ C), quindi la temperatura del vuoto assoluto;

- l’importanza di “accelerare” le particelle elementari (con massa a riposo pari a zero) a temperature necessariamente vicine allo zero Kelvin (senza aria sparisce anche l’attrito e ogni forma di resistenza).



Dalla rappresentazione grafica della prima legge di Gay-Lussac (semplice equazione della retta con variabili t e V e coefficiente angolare α) si può far notare come tale retta intersechi l’asse t proprio nel punto di ascissa $-273,15$.

5 – Il campo magnetico B come vettore

Dalla seconda legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, si deduce che, entro i limiti in cui si può ritenere costante la massa, le forze sono grandezze vettoriali.

Ciò avviene, orientativamente, per velocità $\vec{v}$ non superiori ad $1/10$ della velocità della luce c , in quanto, per tali valori nell'espressione

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (m_0 = \text{massa a riposo})$$

si può trascurare l'elemento v^2/c^2 e ritenere costantemente $m = m_0$.

Se $\vec{v}$ varia con valori più vicini a c , varia anche m e quindi, nella seconda legge della dinamica, non c'è più dipendenza lineare tra $\vec{F}$ e $\vec{a}$ in quanto risulta:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

Anche il campo elettrico $\vec{E}$ definito come forza agente su una carica unitaria, è un vettore.

Per il campo magnetico $\vec{B}$, a causa della mancanza di una sorgente di campo analoga a q per il campo elettrico $\vec{E}$, il discorso è diverso.

Che $\vec{B}$ sia un vettore, è dimostrato esclusivamente dall'esperienza; è noto, infatti, che l'effetto complessivo di due campi magnetici $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ che agiscono contemporaneamente è equivalente all'effetto di un unico campo magnetico $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (somma vettoriale).

In passato, le analogie tra campo magnetico e campo elettrico (che a livello sperimentale facevano visualizzare effetti

più o meno simili) e la simmetria delle equazioni fondamentali del campo elettromagnetico rispetto ad $\vec{E}$ e rispetto a $\vec{B}$, facevano pensare all’esistenza di una carica magnetica legata al campo magnetico $\vec{B}$ da una relazione analoga a quella che lega il campo elettrico $\vec{E}$ alla carica q (ipotetica legge di Coulomb per il magnetismo).

Pur non dilungandoci su altre incongruenze che presentava questa legge, possiamo osservare che, se vera, la simmetria delle equazioni fondamentali esisterebbe anche rispetto alle sorgenti di campo, per cui, indicato con ρ la densità di carica elettrica e con ρ_1 l’ipotetica densità di carica magnetica, le equazioni di Maxwell sarebbero:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi \rho_1$$

mentre sappiamo che risulta

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (*)$$

relazione che, confrontata con le precedenti, impone $\rho = 0$.

Ciò giustifica matematicamente la nullità (non esistenza) della carica magnetica (Casolaro F., 1995).

Le espressioni succitate, in forma più semplice, si possono esprimere mediante il teorema di Gauss per $\vec{E}$ e per $\vec{B}$, con le seguenti:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0 \quad (**)$$

nelle quali, se ipotizzassimo l'esistenza di una carica magnetica q_1 , per quanto detto sopra, si avrebbe:

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{q_1}{\mu_0}$$

per cui la relazione $\Phi(\vec{B}) = 0$ imporrebbe $q_1 = 0$.

La relazione che lega il flusso (*) alla divergenza (**) del campo elettrico $\vec{E}$ è conseguenza del significato fisico delle due stesse grandezze espresso dal teorema della divergenza che afferma:

"Il flusso di un campo vettoriale, come per esempio il campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa, è uguale all'integrale della divergenza del campo vettoriale ($\text{div } \vec{E}$), esteso al volume dV racchiuso dalla superficie".

Bibliografia

Olivello A., Casolaro F., Giovine P., Isernia G. (2005). "Formazione umana del cittadino ed integrazioni con la Fisica, l'Economia e le Scienze Applicate: Aspetti intuitivi propedeutici al rigore delle conoscenze scientifiche". *Atti del protocollo di intesa Mathesis-MIUR sul tema "Le competenze matematiche tra la scuola e l'Università"*, Barletta 5, 6 e 7 maggio 2005, pag. 47-83.

Casolaro F., (1995). La Matematica nell'insegnamento della Fisica in atti del Convegno nazionale Mathesis "Cento anni di Matematica". Palombi Editori- Roma 1995. Pagine 363-368.

Purcell E. M., *La Fisica di Berkeley, Eletticità e magnetismo* – Vol.2 - Ed. Zanichelli

Risoluzione dei problemi algebrici con le trasformazioni geometriche

Applicazioni elettriche ed elettroniche delle trasformazioni geometriche

Luca Paladino* Alessandra Rotunno**

*Docente di Tecnologie e Progettazione di Sistemi Elettrici ed Elettronici
ITIS "Galileo Ferraris", Napoli , prof.paladino.luca@ferraris.org

**Docente di Matematica e Fisica al liceo Scientifico "Labriola" di Napoli e
Professore a contratto di Geometria DIARC'Università "Federico II"
alessandra.rotunno@unina.it



Sunto: *Dopo aver richiamato alcuni esempi sulle interrelazioni tra equazioni algebriche e Trasformazioni geometriche, estratti da una proposta didattica pubblicata in un Quaderno Mathesis nel 2005 [Casolaro F., Olivello T. ed altri, 2005], si presentano alcune applicazioni con l'utilizzo delle Trasformazioni geometriche nella didattica delle discipline elettriche ed elettroniche come strumento globale/visuale da affiancare al tradizionale metodo analitico.*

Parole Chiave: *Traslazione, Rotazione, Generatore di tensione, Amplificazione*

Abstract: *After having recalled some examples on the interrelationships between algebraic equations and geometric transformations, extracted from a didactic proposal published in a Quaderno Mathesis in 2005 [Casolaro F., Olevel T. and others, 2005], applications are presented with the use of geometric transformations*

in the teaching of electrical and electronic disciplines as a global/visual tool to complement the traditional analytical method.

Keywords: *Translation, Rotation, Voltage generator, Amplification*

1 - Introduzione

Fino al 1962, l’insegnamento della geometria si basava esclusivamente sul Modello euclideo, coerentemente con la riforma Gentile del 1923.

Precedentemente, però, negli anni a cavallo del XIX e del XX secolo, l’insegnamento della geometria prevedeva l’ampliamento euclideo alla Geometria Proiettiva che, di fatto includeva trasformazioni che andavano oltre le isometrie e le similitudini.

Nei primi anni del dopoguerra, con l’evoluzione non solo della Fisica moderna, ma anche dello sviluppo che avevano avuto le scienze applicate, si pose fortemente il problema di rivedere i programmi di insegnamento nelle scuole superiori (oggi secondarie di secondo grado).

Ciò ha condotto, nella seconda metà del secolo scorso, la comunità matematica ad introdurre, nei programmi di insegnamento, modelli di geometria dinamica da affiancare allo studio statico della geometria euclidea (Casolaro, 2014).

In particolare si fa riferimento alle Trasformazioni geometriche che trovano applicazioni nello studio dei vari fenomeni

In questo lavoro, riprendendo una proposta didattica pubblicata in un Quaderno Mathesis nel 2005 [Casolaro F., Olivello T. ed altri, 2005] e presenteremo alcune semplici

trasformazioni con successiva applicazione allo studio dell'elettrotecnica e dell'elettronica.

2 - Il grafico di una funzione attraverso "il metodo delle operazioni"

L'attività si propone di guidare lo studente alla costruzione di grafici di funzioni in modo alternativo a quello classico dell'analisi, attraverso trasformazioni di grafici elementari.

Sia data la funzione $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$, si considerino i grafici delle funzioni $y_1=x$, $y_2=x-1$, $y_3=x-2$, $y_4=x-3$,

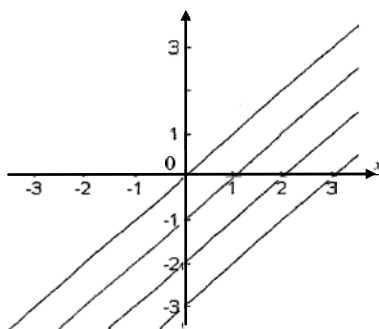


Fig.1

nei cui secondi membri compaiono i singoli fattori dell'espressione analitica della funzione assegnata.

È immediato osservare che per la legge di annullamento del prodotto la funzione si annulla nei punti $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, zeri rispettivamente delle funzioni y_1 , y_2 , y_3 , y_4 .

Negli altri punti il prodotto sarà diverso da zero e avrà un segno che può essere facilmente determinato in base ai segni dei singoli fattori.

Alla destra del punto di ascissa 3 tutti i fattori sono positivi; nell’intervallo $(2; 3)$ tre fattori sono positivi ed uno è negativo quindi $y < 0$; nell’intervallo $(1; 2)$ due fattori sono positivi e due negativi, quindi $y > 0$; nell’intervallo $(0; 1)$ un fattore è positivo e tre sono negativi, perciò risulta $y < 0$; nell’intervallo $(-\infty, 0)$ i fattori sono tutti negativi, per cui risulta $y > 0$.

In tal modo riassumendo i risultati le parti di piano in cui si trova la funzione sono quelle ombreggiate:

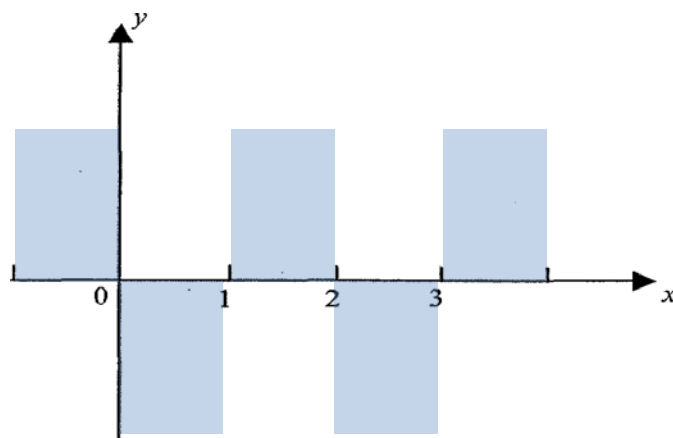


Fig. 2

Prima di disegnare il grafico osserviamo che alla destra del punto 3 ogni fattore aumenta al crescere delle x ; conformemente il prodotto aumenterà molto rapidamente. Alla sinistra di zero ogni fattore aumenta in valore assoluto ed il prodotto (che è positivo) crescerà a sua volta molto rapidamente.

Tale procedimento, pur dando un'idea chiara dell'andamento grafico, non risolve in maniera capillare il suo tracciato, perché non vengono individuati i punti di massimo o di minimo.

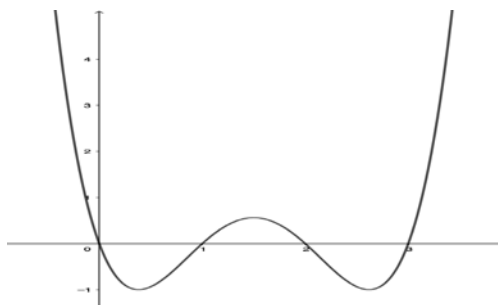


Fig.3

2.1 - Grafico con il metodo della divisione

Sia data la funzione $y = \frac{1}{x}$

Si rappresentino le funzioni relative al numeratore e al denominatore

Posto $y_1=1$, $y_2=x$, i cui secondi membri sono rispettivamente il numeratore ed il denominatore della funzione data, si osservi il grafico

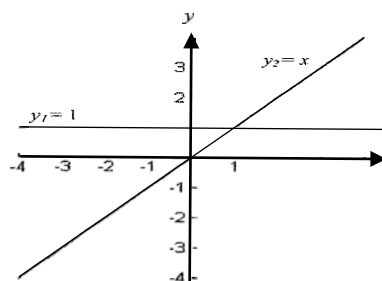


Fig. 4

Posto $y = \frac{y_1}{y_2}$ si evidenzia che, per $x=1$, risulta $y_1 = y_2$ e

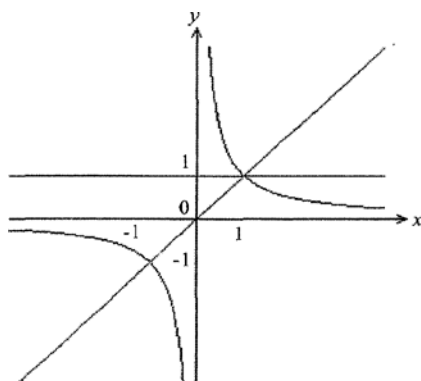


Fig.5

quindi $y = 1$

Per $x > 1$, $y_1 < y_2$ e quindi $y < 1$. Al crescere di x , y tende a 0.

Per $0 < x < 1$, il grafico mostra che la funzione decresce rapidamente. Per $x < 0$, $y_1 = 1$ e $y_2 < 0$, quindi la funzione assume valori negativi, crescenti quanto si vuole, in valore assoluto.

3 - Il grafico delle funzioni attraverso "il metodo delle trasformazioni"

Di seguito si propongono alcuni esempi di grafici ottenuti dalla variazione, nella rappresentazione analitica, di un termine additivo o di un fattore moltiplicativo.

Nel primo caso si tratta di operare con una traslazione, nel secondo caso con un'omotetia, che sarà una contrazione o una dilatazione a seconda che il termine moltiplicativo sia un fattore minore di 1 (contrazione) o maggiore di 1 (dilatazione).

3.1 - Le trasformazioni lungo l'asse delle ascisse: traslazione, contrazione e dilatazione

3.1.a Traslazione

Il grafico della funzione $g(x) = f(x + k)$ è ottenuto (fig. 6),
traslando di $|k|$ il grafico della $f(x)$:

- verso sinistra se $k > 0$,
- verso destra se $k < 0$.

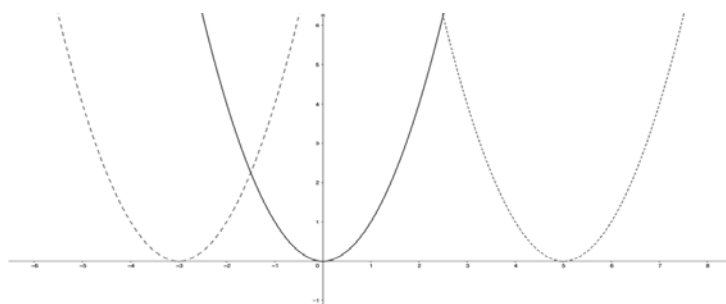


Fig.6

L'utilizzo di software didattici agevolano il processo di apprendimento, rendendo l'intuizione più immediata, accelerando le operazioni di calcolo, offrendo la possibilità di effettuare molteplici applicazioni e di verificare immediatamente congetture e affermazioni.

È possibile, ad esempio, osservare come varia il grafico della funzione $y = (x + k)^2$ al variare del parametro k spostando semplicemente un regolo a destra o a sinistra (fig. 7).

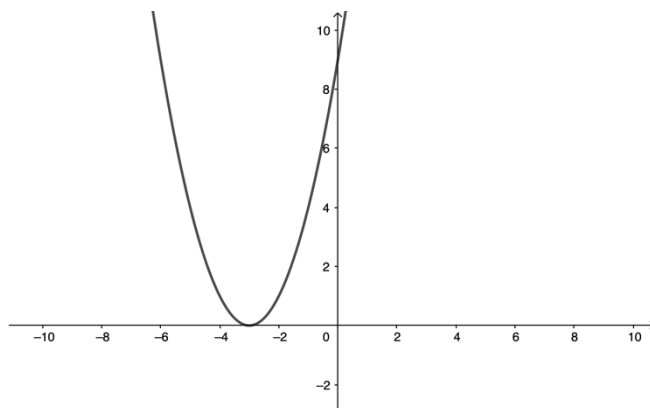


Fig.7

3.1.b - Contrazione o dilatazione (il cambiamento di scala)

Il grafico della funzione $g(x) = f(k \cdot x)$, con $k > 0$, si ottiene (fig. 8) dal grafico della $f(x)$ dividendo le ascisse per k e cioè contraendo le ascisse se $k > 1$, dilatandole se $k < 1$. Le intersezioni del grafico della $f(k \cdot x)$ con l'asse delle ordinate sono le stesse della $f(x)$. La g assume in c/k il valore della f in c .

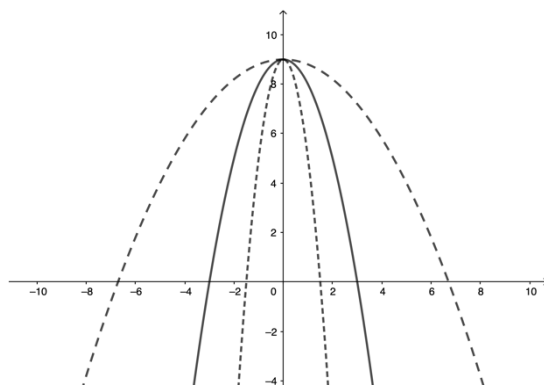


Fig.8

3.2 - Le trasformazioni lungo l'asse delle ordinate: traslazione, contrazione e dilatazione

3.2.a - Traslazione.

Il grafico della funzione $g(x) = f(x) + k$ è ottenuto (fig. 9) traslando di $|k|$ il grafico della $f(x)$:

verso l'alto se $k > 0$,

verso il basso se $k < 0$.

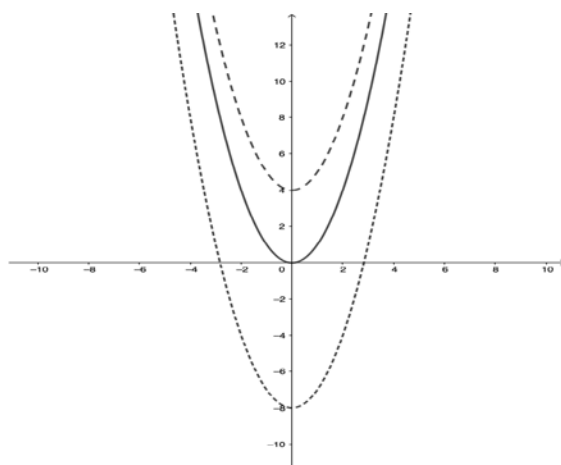


Fig.9

3.2.b - Contrazione o dilatazione (il cambiamento di scala)

Il grafico della funzione $g(x) = k \cdot f(x)$, con $k > 0$, si ottiene dal grafico della $f(x)$ moltiplicando le ascisse per k e cioè dilatando le ordinate se $k > 1$, contraendole se $k < 1$. Le

intersezioni del grafico della $g(x)$ con l'asse delle ascisse sono le stesse della $f(x)$ (fig. 10).

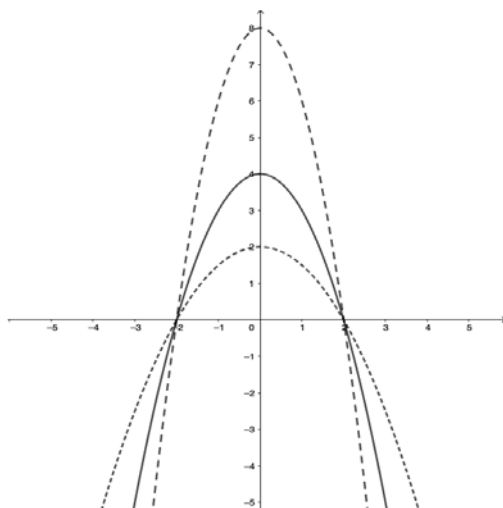


Fig. 10

4 – Le simmetrie

Il grafico della funzione $g(x) = -f(x)$, si ottiene tracciando il grafico simmetrico, rispetto all'asse delle ascisse, di quello della $f(x)$. Le intersezioni del grafico della $g(x)$ con l'asse delle ascisse sono le stesse della $f(x)$. (fig. 11)

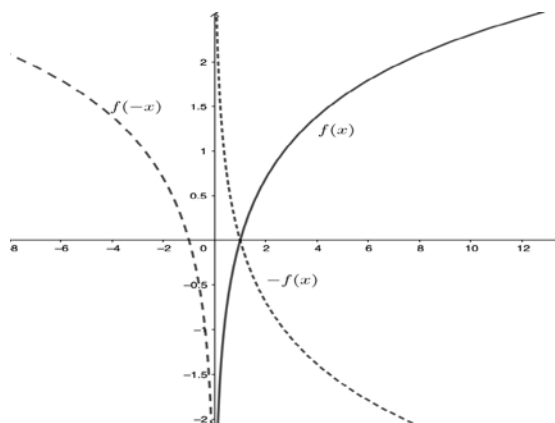


Fig 11

5 - Valore assoluto di una funzione

Il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$, si ottiene da quello della $f(x)$ sostituendo la parte ricadente nel semipiano delle ordinate negative con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse (Fig. 12).

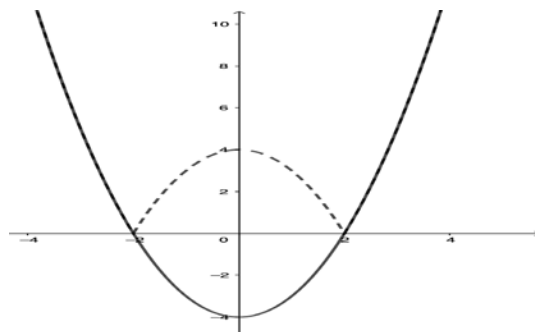


Fig. 12

La funzione $g(x) = f(|x|)$ è una funzione pari che coincide con $f(x)$ per $x > 0$, per cui il grafico della $g(x)$ si ottiene da quello della $f(x)$ sostituendo la parte ricadente nel semipiano delle ascisse negative con la simmetrica, rispetto all'asse delle ordinate, di quella ricadente nel semipiano delle ascisse positive (fig. 13).

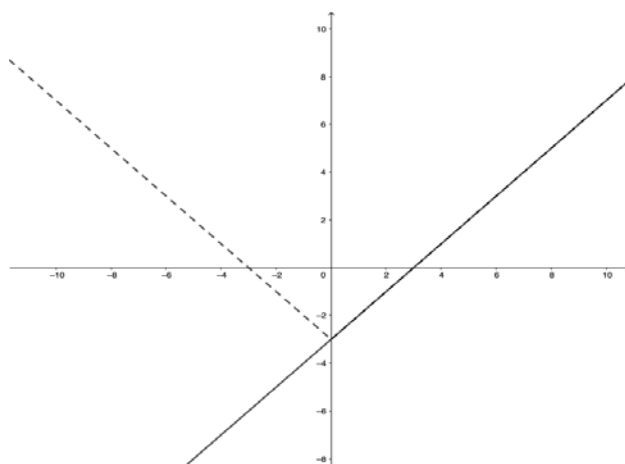


Fig.13

Applicando le suddette trasformazioni è possibile tracciare il grafico di alcune particolari funzioni.

4 - Applicazioni in ambito elettrico/elettronico

È possibile ritrovare applicazioni del metodo delle trasformazioni, pubblicato nell’interessante lavoro della prof. Tonia Olivello, in discipline diverse dalla matematica e nelle quali forse risulta più evidente la sua utilità. Utilità che si

manifesta offrendo allo studente uno strumento visuale per accompagnare lo studio analitico di sistemi complessi. Negli Istituti Tecnici a indirizzo elettrico (elettronico, elettrotecnico, automazione) si incontra un'ampia varietà di fenomeni - principalmente elettrici ed elettronici, ma anche magnetici o termici - descrivibili sia in forma grafica che analitica o schematica.

Le trasformazioni geometriche trovano ampia applicazione in questo campo.

Infatti, proprio alla complessità di tali sistemi si sovrappone quella matematica, intrinseca nella descrizione analitica dei fenomeni esaminati, alle volte confondendo lo studente e disperdendone inutilmente l'attenzione.

Di seguito verranno illustrate le seguenti applicazioni:

- Raddrizzatore a doppia semionda (*ribaltamento semipiano negativo*)
- Punto di lavoro del generatore reale di tensione (*cambiamento di scala asse ascisse*)
- Condizionamento del segnale (*traslazione su y e cambiamento di scala asse ordinate*)

4.1 - Raddrizzatore a doppia semionda (o Ponte di Graetz)

Si tratta del secondo stadio dell'alimentatore stabilizzato, il primo essendo il trasformatore. Ha il compito di rendere non negativa la tensione sinusoidale prelevata al suo ingresso, prima di inviarla agli stadi a valle.

Si realizza attraverso il circuito a ponte di diodi seguente, detto anche ponte di *Graetz*.

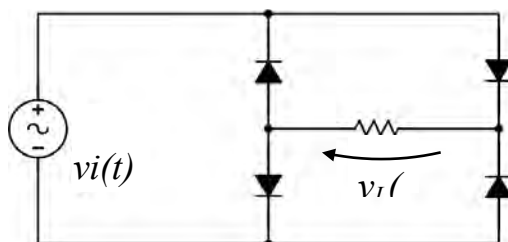


Fig. 14 - Circuito raddrizzatore a ponte di diodi

Tale circuito preleva l’onda sinusoidale in ingresso $v_i(t)$ e ne ribalta le semionde negative per ottenere la tensione di uscita $v_L(t)$.

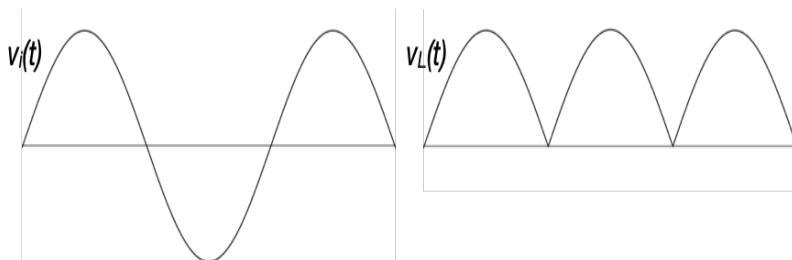


Fig. 15 - Forme d’onda delle tensioni di ingresso e uscita al raddrizzatore

L’espressione analitica delle due tensioni, $v_i(t)$ in ingresso e $v_L(t)$ sul carico, è la seguente:

$$v_i(t) = V_M \cdot \sin(\omega t)$$

$$v_L(t) = | V_M \cdot \sin(\omega t) |$$

Lavorare con le grandezze sinusoidali è da sempre un freno nello studio dei sistemi elettrici ed elettronici, per tale ragione

infatti è stato introdotto il cosiddetto metodo simbolico, che permette di sostituire tali grandezze con vettori nel piano di Gauss (introdotto da Charles Steinmetz alla fine del XIX secolo). Quando però si tratta di tracciare il diagramma di tali funzioni è necessario tornare al formalismo della trigonometria.

Il grafico della tensione di uscita si ottiene da quella di ingresso semplicemente ribaltando le semionde negative.

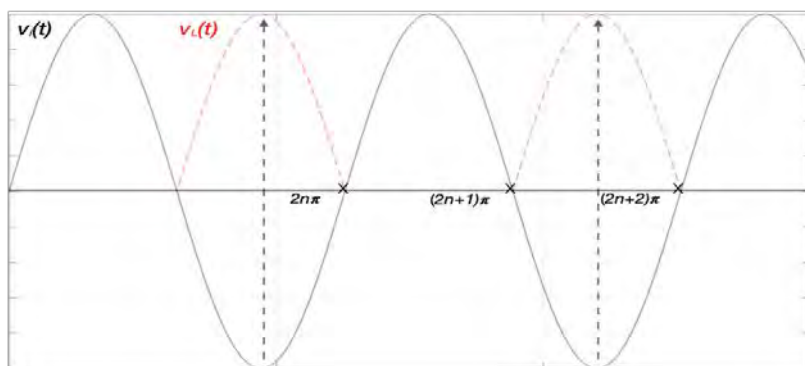


Fig. 16 - Forme d'onda con ribaltamento

5.2 – Punto di lavoro di un generatore reale di tensione

Un generatore ideale di tensione fornisce in uscita una grandezza costante sempre, per qualunque condizione di funzionamento del circuito. Come tutti i modelli ideali, esso non esiste.

Nella realtà si deve tener conto degli effetti dissipativi della corrente e pertanto si schematizza questo fenomeno attraverso

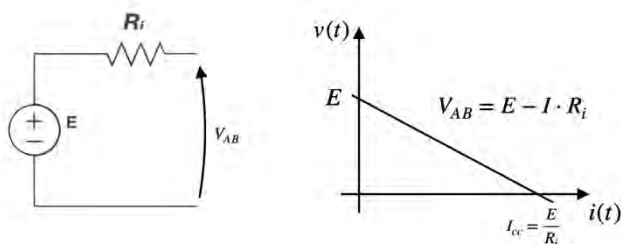


Fig. 17 - Schema circuitale e caratteristica del generatore reale di tensione

l’inserimento di una resistenza in serie al generatore stesso

Applicando le leggi dell’elettrotecnica di base, si ottiene l’equazione della caratteristica volt-amperometrica del generatore reale:

$$V_{AB} = E - I \cdot R_i.$$

Tale caratteristica si discosta dal caso ideale, che è una retta orizzontale, mostrando una pendenza negativa, pari a $-R_i$.

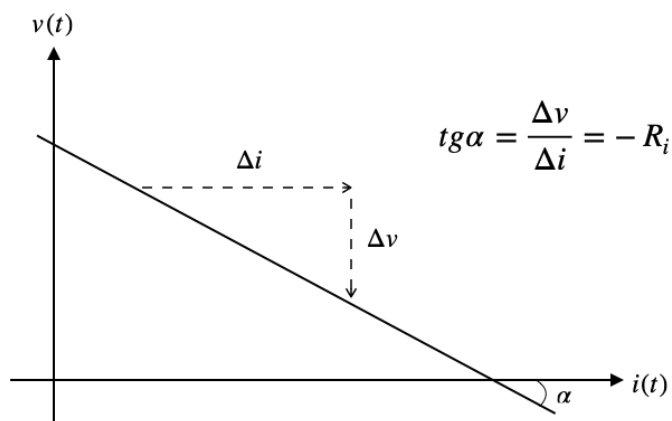


Fig. 18 - Coefficiente angolare di una retta con pendenza negativa

Il valore di R_i rappresenta la pendenza della retta, essendo $tg \alpha = -R_i$, e agendo su tale valore si rende possibile

modificarne l'inclinazione. Per $R_i = 0 \Omega$ si ottiene il caso del generatore ideale. Per $R_i > 0$ si hanno inclinazioni sempre maggiori.

Per differenti valori di R_i si ottiene il cambiamento di scala sull'asse delle ascisse: $g(x) = f(k \cdot x)$

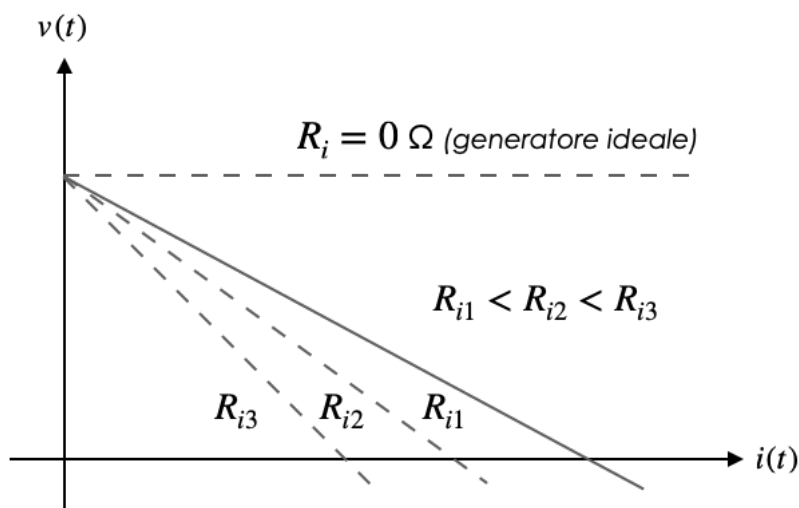


Fig. 19 - Caratteristiche a pendenza decrescente

Collegando una resistenza di carico R_L al generatore reale si ottiene il seguente circuito:

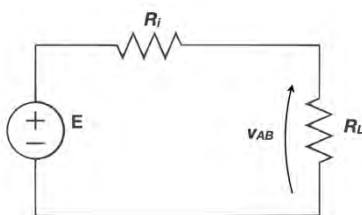


Fig. 20 - Schema circuitale del generatore reale con carico

La resistenza R_L esibisce una caratteristica volt-amperometrica anch’essa rettilinea ma con pendenza positiva e passante per l’origine. Dall’incrocio delle due rette si ricava il punto di lavoro del generatore.

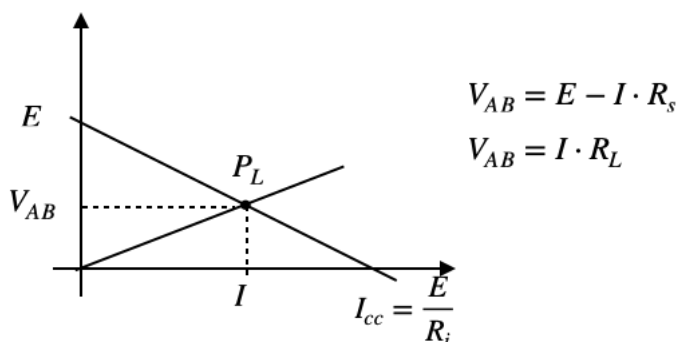


Fig. 21 - Punto di lavoro del generatore reale sul carico

La possibilità di *ruotare* le due rette agendo sul valore delle resistenze R_i e R_L favorisce l’apprendimento del concetto matematico ma anche di quello elettrico. Una piccola applet sviluppata con Geogebra permette, tramite il controllo di due cursori, di visualizzare dinamicamente questa situazione.

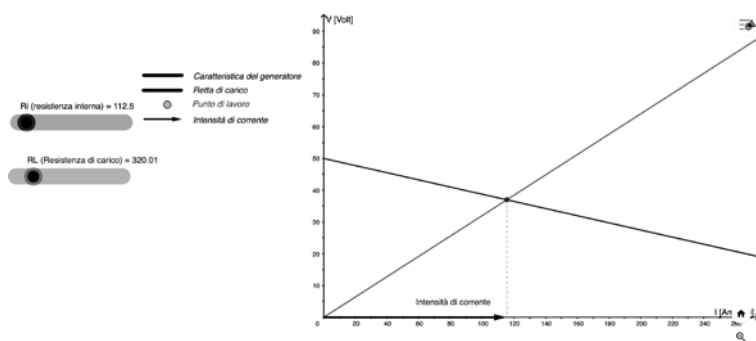


Fig. 22 - Simulazione del punto di lavoro con Geogebra

5.3 – Condizionamento di un segnale.

Un interessante caso di applicazione delle trasformazioni geometriche è il condizionamento di un segnale.

Spesso capita che il segnale analogico proveniente da un trasduttore debba essere convertito in una sequenza di bit, attraverso un convertitore analogico-digitale (ADC), come ad esempio l'uscita di un trasduttore di temperatura in ingresso a un PLC, in un impianto di automazione.

Ciascun ADC possiede dei requisiti di ingresso e perciò ammette solamente certi valori, per cui nasce il problema di adattare le caratteristiche del segnale di uscita del trasduttore a quelle richieste dall'ingresso del convertitore. Questa procedura prende il nome di *condizionamento del segnale*.

Si supponga di voler misurare la temperatura di un ambiente, compresa nel range $[+30\text{ }^{\circ}\text{C}; +80\text{ }^{\circ}\text{C}]$ e a tal scopo si utilizzi un trasduttore con uscita in tensione.

In tale intervallo, si ipotizzi che la tensione del dispositivo sia compresa in $[2\text{ mV}; 5\text{ mV}]$.

Si vuole progettare un blocco di condizionamento per raccordare tale trasduttore allo stadio successivo, con un ingresso ammissibile compreso in $[0\text{ V}; 10\text{ V}]$.

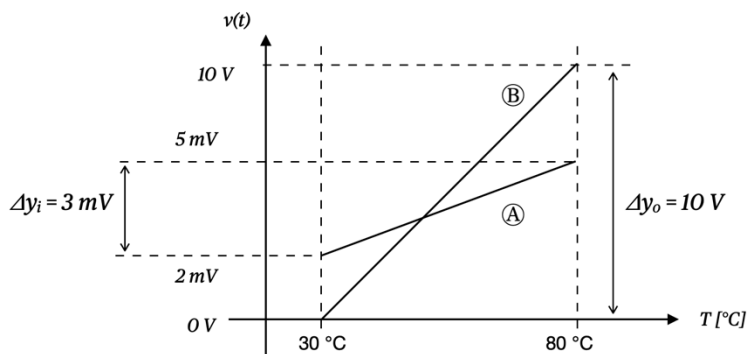


Fig. 23 - (A)Caratteristica del trasduttore - (B)caratteristica di ingresso dell'adc

Come si vede dal grafico, le due rette hanno una diversa ampiezza del codominio e un diverso punto di applicazione, pertanto occorre effettuare le opportune trasformazioni della retta (A) affinché coincida con quella (B) cioè:

- una **amplificazione** (cambiamento di scala sulle ordinate)
- una **traslazione** (anch'essa sulle ordinate).

Amplificazione

Si calcoli il *guadagno* di condizionamento come rapporto fra l'ampiezza dell'intervallo di ingresso e quella di uscita:

$$A_v = \frac{\Delta y_o}{\Delta y_i} = \frac{10V}{3mV} = 3,3 \cdot 10^3$$

Questo numero (adimensionale, dato che è il rapporto di due tensioni) rappresenta il coefficiente di scala delle ordinate richiesto.

Traslazione

I due codomini adesso hanno la stessa ampiezza ma risultano traslati l'uno rispetto all'altro della quantità $\Delta y_{off} = A_v \cdot 2 \text{ mV} - 0 \text{ V} \simeq 6,6 \text{ V}$. Pertanto, è necessario applicare un termine correttivo pari a $-6,6 \text{ V}$.

Il segnale finalmente condizionato è il seguente:

$$v_{cond}(t) = A_v \cdot v_1(t) - \Delta y_{off}$$

$$v_{cond}(t) = 3,3 \cdot 10^3 \cdot v_1(t) - 6,6 \text{ V}$$

rappresentabile tramite il seguente schema a blocchi:

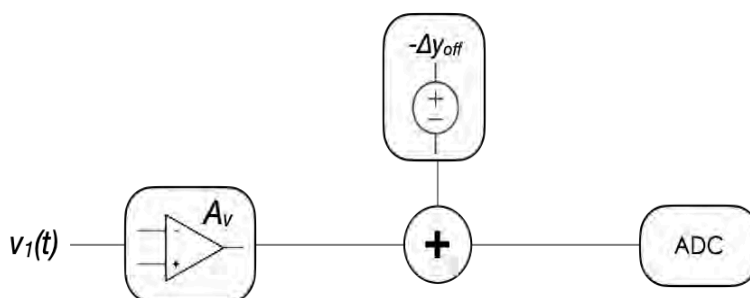


Fig. 24 – Schema a blocchi dello stadio di condizionamento

Bibliografia

Casolaro F. (1995), La matematica nell'insegnamento della fisica. *Convegno nazionale Mathesis "Cento anni di Matematica"*, Palombi Editori, Roma 1995. Pagine 363-368.

Casolaro F. (2001), L'insegnamento dell'analisi matematica nella Scuola secondaria superiore. *Appunti del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica 2001-2002*. Dipartimento di Matematica Università di Napoli "Federico II".

Casolaro F. (2003), Un percorso di geometria per la Scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un Modello analitico su uno spazio curvo. *Congresso nazionale Mathesis* ", Bergamo 2003. *Pagine* 185-198.

Olivello A. (1998). Appunti del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica, A.A. 1998-1999. *Dipartimento di Matematica Università di Napoli "Federico II"*.

Olivello A. (2004), Appunti del Corso CAD (Congetturare-Argomentare-Dimostrare) tenuto nella *Scuola di Specializzazione per l'insegnamento della Matematica*, A.A. 2004-2005. *Dipartimento di Matematica Università di Napoli "Federico II"*.

Casolaro F. (2014), La Geometria oltre Euclide: l'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola? *Journal of Science & Philosophy Divulgation J-DiSciPhil - Fascicolo 1* (2014), *pagine* 46-52.

La geometria e la fisica nello spazio tridimensionale

Il teorema di Pitagora nello spazio e la sfera galleggiante

Lavori pubblicati dalla prof.ssa Tonia Olivello nell'ambito della Formazione SICSI

Mariarosaria Cuomo*

*Liceo "E. Pascal", Pompei; mari.cuomo@yahoo.it



Sunto: La prima attività si propone di guidare lo studente nel riconoscimento di analogie e differenze fra enti geometrici nel piano e nello spazio; la seconda attività ha lo scopo di guidare lo studente nella formalizzazione algebrica di una esperienza sperimentale di fisica.

Parole Chiave: Geometria, fisica, teorema di Pitagora, formalizzazione algebrica

Abstract: The first activity aims to guide the student in recognizing similarities and differences between geometric entities on the plane and in space; the second activity aims to guide the student in the algebraic formalization of an experimental physics experience.

Keywords: Geometry, physics, Pythagoras theorem, algebraic formalization

1 – Il teorema di Pitagora in geometria solida

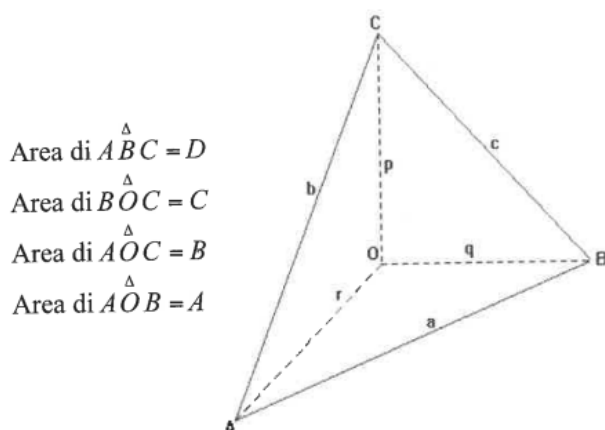
L'attività si propone di guidare lo studente a riconoscere analogie e differenze fra enti geometrici del piano e dello spazio.

Si tratta di stabilire se sia possibile formulare in geometria solida una proposizione analoga al teorema di Pitagora formulato per la geometria piana.

Il teorema di Pitagora risolve il seguente problema: in un triangolo rettangolo nell'angolo di vertice O sono date le lunghezze a e b dei due lati che si intersecano in O (cateti). Trovare la lunghezza c del lato opposto al vertice O (ipotenusa).

Poniamo il problema analogo: in un tetraedro che ha un triedro trirettangolo di vertice O , sono date le aree A , B e C delle tre facce che si intersecano in O . Trovare l'area D della faccia opposta ad O .

Si chiede di esprimere D in funzione di A , B e C .



Si potrebbe pensare ad una formula analoga a quella che si deduce direttamente dal Teorema di Pitagora e che risolve il problema corrispondente di geometria piana:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Si potrebbe allora congetturare:

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3 \quad (*)$$

dove il cambio dell'esponente è giustificato dal fatto che si è passati dalla seconda alla terza dimensione.

Sulla base delle conoscenze pregresse è possibile stabilire una strategia di soluzione che ci porti alla determinazione di D, A, B e C.

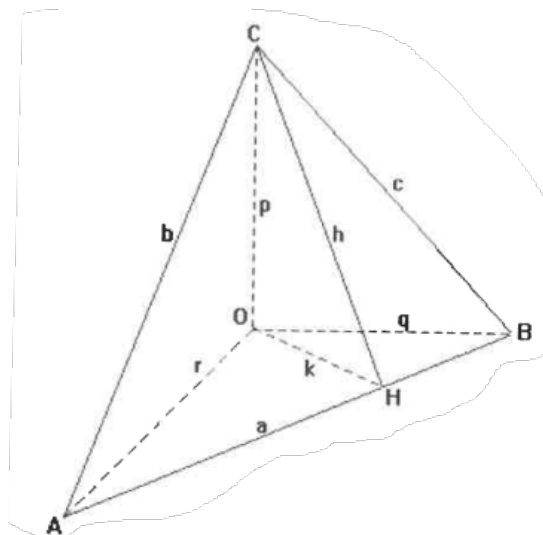
Può essere utile servirsi della formula di Erone; posto pertanto

$$P = \frac{a+b+c}{2},$$

possiamo scrivere

$$D = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}, \quad A = \frac{1}{2}qr, B = \frac{1}{2}rp, C = \frac{1}{2}pq.$$

Per vedere se è vera la (*) occorre però esprimere a, b e c in funzione di r, p e q, attraverso le relazioni pitagoriche. Con opportuni calcoli si può quindi procedere alla verifica della relazione (*). Tale verifica è però ardua per la complessità della formula di Erone e ci si accorge subito che il procedimento utilizzato non conduce facilmente a stabilire la verità o falsità della congettura. Occorre pertanto utilizzare un'altra strategia risolutiva.



Sia h altezza del triangolo di vertici A,B,C, risulterà:

$$D = \frac{a \cdot h}{2} \rightarrow 4 \cdot D^2 = a^2 \cdot h^2,$$

$$h = \sqrt{k^2 + p^2} \rightarrow h^2 = k^2 + p^2,$$

$$A = \frac{1}{2}ak \rightarrow 4A^2 = a^2k^2,$$

$$B = \frac{1}{2}rp \rightarrow 4B^2 = r^2p^2,$$

$$C = \frac{1}{2}qp \rightarrow 4C^2 = q^2r^2$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot D^2 &= a^2 \cdot h^2 = a^2 \cdot (k^2 + p^2) = a^2 \cdot k^2 + a^2 \cdot p^2 = 4A^2 + a^2 \cdot p^2 = \\ &= 4A^2 + (r^2 + q^2) \cdot p^2 = 4A^2 + r^2 \cdot p^2 + q^2 \cdot p^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2. \end{aligned}$$

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Il risultato ottenuto è effettivamente analogo al teorema di Pitagora per la geometria solida e mostra che l'uguaglianza

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$$

è errata.

1.1 - Osservazioni

La proposta di questa attività ad una classe seconda oppure terza del Liceo Scientifico offre agli studenti la possibilità di ricontestualizzare un teorema della geometria piana nell'ambito della geometria solida, conferendo al teorema stesso un valore che va al di là di formula da imparare a memoria e da applicare, dal momento che la sua rivisitazione comporta una riflessione attenta che implica un apprendimento più efficace e duraturo.

2 - La sfera galleggiante

L'attività si propone di guidare lo studente alla formalizzazione algebrica di una esperienza sperimentale di Fisica, attraverso il confronto di due diverse situazioni, la formulazione di una congettura e quindi di una strategia risolutiva che conduce alla soluzione di un sistema lineare.

IL PROBLEMA - Una sfera di ferro galleggia nel mercurio. Si versa dell'acqua sopra il mercurio in modo da coprire la sfera. La sfera sprofonderà, galleggerà o rimarrà allo stesso livello?

Si confrontano due diverse situazioni.

(Prima di versare l'acqua) La parte superiore della sfera è circondata da aria (o vuoto).

(Dopo aver versato l'acqua) La parte superiore della sfera è circondata da acqua.

In entrambi i casi la parte inferiore della sfera di ferro è immersa nel mercurio.

In quale delle due situazioni la sfera emergerà maggiormente dal mercurio? O meglio, esprimendo la richiesta in altra forma, si calcolino le frazioni di volume della sfera che emergono dal mercurio in entrambi i casi.

LA CONGETTURA - Attraverso un ragionamento puramente intuitivo è possibile dare una risposta plausibile, anche se non quantitativamente esaustiva. Immaginiamo che il liquido versato sopra il mercurio e che circonda la parte superiore della sfera di ferro cambi continuamente la sua densità. Possiamo addirittura pensare che il liquido abbia densità 0 (vuoto). Si pensi poi che siffatto liquido possa aumentare la sua densità, raggiungendo prima la densità dell'aria e poi quella dell'acqua. In che modo questo cambiamento influenza la sfera? Possiamo pensare che, quando la densità del liquido immaginario raggiungerà la densità del ferro, la sfera si innalzerà completamente al di fuori del mercurio?

È naturale supporre che al variare della densità del liquido che viene versato, la posizione della sfera galleggiante cambi sempre nella stessa direzione; quanto più il liquido è denso, tanto più la sfera emergerà dal mercurio. Si può così concludere che nel passaggio dall'aria all'acqua che la copre, la sfera si innalzerà.

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA - La risposta appena formulata deve essere supportata da considerazioni di carattere quantitativo pertinenti.

A questo proposito occorre ricordare le densità dell'acqua, del mercurio e del ferro:

densità dell'acqua $= 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$,

densità del mercurio $= 13,60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$,

densità del ferro $= 7,84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Sarebbe opportuno però generalizzare il problema, pertanto, detti:

a la densità del fluido superiore (acqua),

b la densità del fluido inferiore (mercurio),

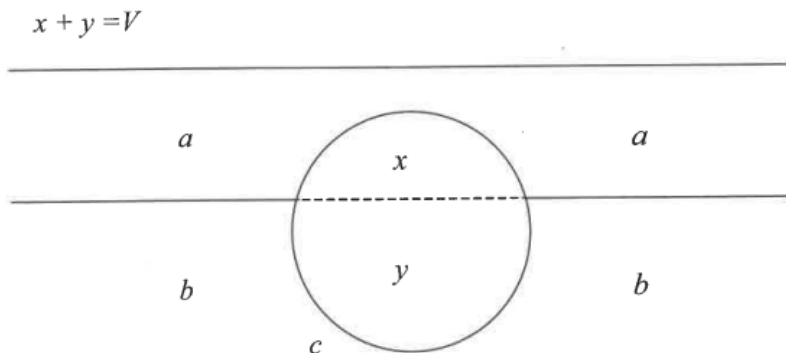
c la densità del solido galleggiante, con $a < c < b$,

V il volume del corpo,

x la frazione di V che è al di sopra del livello che separa i due liquidi,

y la frazione di V che è al di sotto del livello che separa i due liquidi,

posso scrivere il volume totale del corpo galleggiante in due modi diversi.



Ora non possiamo procedere oltre, a meno che non conosciamo fatti fisici pertinenti.

Un corpo, immerso in un fluido in equilibrio, subisce una spinta diretta dal basso verso l'alto ed uguale in grandezza al peso del liquido spostato.

La sfera considerata sposta il liquido in due strati. I pesi delle quantità spostate sono:

$a \cdot g \cdot x$ nello strato superiore,

$b \cdot g \cdot y$ nello strato inferiore.

Queste forze verticali verso l'alto, devono equilibrare il peso della sfera galleggiante, pertanto:

$$a \cdot g \cdot x + b \cdot g \cdot y = c \cdot g \cdot V.$$

$$\begin{cases} x + y = V \\ ax + by = cV \end{cases}$$

$$x = \frac{b-c}{b-a} V; \quad y = \frac{c-a}{b-a} V.$$

Ritornando all'enunciato del problema:

1° caso:

$$a = 0 \text{ kg/m}^3; \quad b = 13,60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad c = 7,84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad x = 0,423 V.$$

2° caso:

$$a = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad b = 13,60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad c = 7,84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad x = 0,457 \cdot V.$$

La seconda frazione è maggiore della prima e ciò coincide con la conclusione del ragionamento intuitivo.

Mantenendo b , c , e V costanti e facendo crescere a (densità dello strato superiore) da 0 a c , la porzione di volume della sferetta al di sopra del livello di mercurio cresce da

$$x = \frac{b-c}{b}V \text{ a } x = V.$$

2.1 - Osservazioni

Ho sperimentato questa attività in una classe prima del Liceo Scientifico alla fine della trattazione della statica dei fluidi in fisica. I vantaggi sono stati molteplici, innanzitutto perché gli studenti hanno compreso che la matematica e la fisica non sono materie distinte, ma bensì interdisciplinari. Inoltre hanno assunto una visione unitaria di realtà e teoria, con conseguenti ricadute positive sull'apprendimento sia della matematica che della fisica.

Bibliografia

F. Casolaro, M.P. Giovine, G. Isernia, A. Olivello. L'intuizione e il ragionamento matematico: aspetti propedeutici al rigore del metodo ipotetico deduttivo, pp 65-71.

A. Olivello. Appunti del corso CAD (Congetturare-Argomentare-Dimostrare) tenuto nella Scuola di Specializzazione per l'insegnamento della Matematica a.a. 2004/2005, Università di Napoli.

