

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVIII - Serie IV – volume V(3)
Suplemento settembre 2023**

**A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

**Atti III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola**

14-17 settembre 2023

PARTE SECONDA



MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

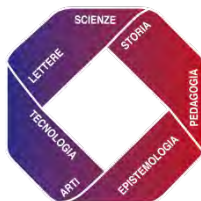
**Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXVIII - Serie IV - Volume V (3)
Supplemento Settembre 2023**

**Atti III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
14-17 settembre 2023**

PARTE SECONDA



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2023 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-705-3

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2023 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

Atti
III Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
14-17 settembre 2023



Le relazioni presentate nelle precedenti edizioni del *Convegno Matematica, Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana* di Agerola sono state pubblicate come articoli nei numeri di settembre 2021 e 2022 del Periodico. Da quest'anno, invece, vengono raccolte negli Atti del Convegno, inseriti come supplemento del fascicolo di settembre del Periodico.

Tale scelta è motivata dal cospicuo numero di interventi del Convegno, che dimostra il successo a livello nazionale di questa iniziativa, testimoniato dalla provenienza di relatori provenienti da diverse regioni d'Italia. L'acquisto degli Atti non è compreso nell'abbonamento annuale del Periodico.

La pubblicazione di questi Atti è stata finanziata, dall'Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU) nell'ambito del Progetto "*Renato Caccioppoli ed Enrico Caruso, simboli eccelsi del primo Novecento*", approvato dalla Direzione Generale per le politiche culturali e turismo della regione Campania, nel Piano per la Promozione Culturale 2023

La Direzione

TERZA SESSIONE

**Matematica, Fisica e Scienze Naturali
per la Secondaria di I grado**

La matematica e le scienze a fumetti

Un'attività interdisciplinare

Floriana D'Antonio *, Martina Moccaldi **

* Scuola secondaria di I grado "Galvani-Opromolla" di Angri (SA), Italia;

florianadantonio@gmail.com

** Scuola secondaria di I grado "Galvani-Opromolla" di Angri (SA), Italia;

martinamoccaldi@gmail.com



Sunto: *Il percorso didattico è volto a promuovere negli alunni un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, ritenuta generalmente una disciplina ostica e lontana dalla realtà, e a stimolare l'interesse per le scienze, in cui gli allievi mostrano numerose difficoltà, nonché per far riflettere gli studenti su temi cruciali di educazione civica come le disuguaglianze e la cittadinanza digitale. Alla luce del crescente interesse da parte degli studenti per i fumetti, si propongono attività didattiche che, a partire dalla lettura di alcuni di essi, mostrino agli allievi quanto la matematica e le scienze siano necessarie per diventare cittadini critici e consapevoli.*

Parole Chiave: *innovazione, interdisciplinarietà, fumetti, applicazioni*

Abstract: *The educational path aims for encouraging students to be more positive with respect to mathematics, often considered a difficult and far-from-reality subject. Moreover, it has the purpose of motivating pupils in the study of sciences, despite their difficulties. Finally, it aspires to make students think about crucial civics topics such as disparities and digital citizenship. Due to students'*

increasing interest in comics, we propose activities that begin with the reading of selected comics and show how mathematics and sciences can be necessary to become incisive and aware citizens.

Keywords: *innovation, interdisciplinarity, comics, applications*

1 - Introduzione

Il percorso didattico presentato nasce dall’esigenza di sviluppare negli alunni un atteggiamento più positivo nei confronti della matematica, troppo spesso vista come una disciplina fredda, ostica, riservata a pochi “eletti”. Spesso gli allievi manifestano nei confronti della disciplina disinteresse e rifiuto a-priori perché la ritengono avulsa dalla realtà e la associano all’utilizzo meccanico di regole e formule. Diventa pertanto fondamentale progettare interventi didattici volti a sottolineare il valore che nel corso della storia è stato riconosciuto alla matematica, sia per la risoluzione dei problemi e per la descrizione dell’universo e della natura, sia per la formazione del cittadino, nonché per la realizzazione di opere d’arte. È chiaro che sia necessario superare l’insegnamento prescrittivo e mnemonico della matematica, che la priva del suo naturale fascino, a favore di una presentazione della disciplina come anello fondamentale della costruzione del sapere, come un patrimonio culturale antico, variegato e universale (come ribadito anche nelle Indicazioni Nazionali), come una predisposizione, cruciale nella formazione del cittadino consapevole, “a porsi dei problemi” e ad essere critici nei confronti della realtà circostante, come una “cassetta degli attrezzi” in continua evoluzione e

necessaria per comprendere la realtà che ci circonda e le sfide globali. Questo aspetto diventa fondamentale in una società in cui le sfide sono sempre più complesse e un approccio critico e consapevole sempre meno praticato. «La libertà di pensiero ce l'abbiamo. Adesso ci vorrebbe il pensiero» affermava Karl Kraus all'inizio dello scorso secolo. Il percorso, inoltre, mira ad evidenziare lo stretto legame tra matematica e scienze, stimolando l'interesse degli alunni nei confronti di discipline quali la fisica, la chimica e la biologia in cui spesso riscontrano difficoltà.

L'attività proposta è stata ispirata, oltre che dalle criticità che spesso si incontrano nella pratica didattica, anche dagli obiettivi della Giornata Internazionale della Matematica, istituita dall'UNESCO nel 2019 nel giorno del 14 marzo, già nominato *Pi Greco Day* dal 1988. In particolare, essa è stata influenzata notevolmente dal tema di quest'anno della Giornata Internazionale della matematica: *La matematica per tutte le persone*. Il percorso didattico elaborato mira, infatti, ad evidenziare che la matematica non è una disciplina riservata ai "dotati", ma è intorno a noi e dobbiamo solo darle la possibilità di meravigliarci e di farci divertire.

L'idea alla base del percorso didattico presentato è l'utilizzo del fumetto come strumento didattico. Nella pratica didattica quotidiana, si è infatti appreso che gli alunni leggono molto volentieri i fumetti e, in particolare, i manga giapponesi. Questo dato è confermato dalla ricerca *Chi è il lettore di fumetti in Italia?* realizzata dall'Associazione Italiana Editori (AIE), in collaborazione con Aldus Up ed Eudicom, entrambi finanziati dalla Commissione Europea attraverso il programma Europa Creativa e Lucca Comics&Games. La ricerca ha evidenziato

un netto incremento di lettori di fumetti rispetto ai dati emersi da precedenti indagini: erano 3,96 milioni di lettori nel 1996 in una ricerca condotta su maggiori di 6 anni, 7,28 milioni e 8,3 milioni rispettivamente nel 2019 e nel 2021 in indagini svolte da Ipsos sui maggiori di 15 anni, 8,7 milioni nel 2021 nella ricerca dell’AIE su un campione di popolazione sugli over 14.

Ricorrere al fumetto come strumento didattico è sembrata quindi una strategia efficace per stimolare l’interesse degli allievi verso la matematica e le scienze, anche alla luce della presenza di molteplici piattaforme digitali, visitate e apprezzate dagli allievi, in cui argomenti matematici e scientifici sono presentati ricorrendo ad immagini, video e animazioni ma spesso presentano imprecisioni o informazioni errate.

I fumetti sono stati ampiamente studiati come strumenti didattici (Aleixo & Norris, 2010; Hosler & Boomer, 2011; Short, Randolph-Seng & McKenny, 2013; Spiegel, A. N., Mcquillan J., Halpin P. & Matuk C., 2013) e, in particolare, come mezzi efficaci per la comunicazione scientifica (Farinella, 2018; Tatalovic, 2009). Molti insegnanti ed educatori hanno sperimentato l’utilizzo dei fumetti nelle loro classi (Frey & Fisher, 2008; Schwarz, 2006). I fumetti sembrano essere molto efficaci perché rappresentano argomenti anche complessi tramite immagini, che possono facilitarne l’apprendimento ed evidenziarne gli aspetti fondamentali (McCloud, 1994; Mayer & Gallini, 1990). Inoltre, organizzano i vari aspetti del tema trattato in una composizione di pannelli significativa, attraverso il processo che Thierry Groensteen definisce “braiding (tressage)” (Groensteen, 2007): il contenuto di ogni pannello acquisisce significato non solo dal testo e dalle

immagini in esso contenute ma anche dalla relazione con il resto dei pannelli, offrendo al lettore la possibilità di individuare le connessioni tra le informazioni rappresentate. Nei fumetti, i suddetti vantaggi della rappresentazione grafica sono combinati con quelli dello storytelling, forma ampiamente studiata di comunicazione di cui sono stati riconosciuti i vantaggi per l'apprendimento, per la memoria e per l'attenzione (Green & Brock, 2000, Bruner, 1986; Schank & Abelson, 1977; Zacks, J. M., Speer N.K., Swallow K.M., Braver T.S. & Reynolds J. R., 2007). Infine, i fumetti sembrano molto efficaci anche per l'ampio utilizzo di metafore, considerate come un utile strumento cognitivo che permette di comprendere meglio un concetto, soprattutto in ambito scientifico perché fornisce modelli mentali per entità invisibili (Collins & Gentner, 1983). Nei fumetti i concetti scientifici sono spesso rappresentati con oggetti o esperienze della vita quotidiana, aiutando i lettori nell'apprendimento e coinvolgendoli maggiormente.

Esistono molteplici esempi di utilizzo del fumetto nella divulgazione scientifica. Il prof. Alberto Saracco dell'Università di Parma, cura la rubrica *Un matematico prestato alla Disney* sul sito di divulgazione matematica MaddMaths e ha collaborato alla realizzazione della storia a fumetti *Paperino e i ponti di Quackenberg* comparsa su Topolino 3232.

Il percorso didattico proposto consiste nell'elaborazione di attività didattiche ispirate ai fumetti della collana *Comics&Science*, edita da CNR Edizioni dal 2013 e curata da Roberto Natalini e Andrea Plazzi. La collana prende il nome dall'omonima sezione della programmazione culturale del

Lucca Comics & Games e si propone di promuovere il rapporto tra scienza e intrattenimento, ritenuti entrambi fondamentali per la crescita dell’individuo e del cittadino. Il progetto ha coinvolto alcuni dei migliori fumettisti italiani come Leo Ortolani, Michele Rech (Zerocalcare) e Andra Paggiaro (Tuono Pettinato), che, immergendosi in attività e luoghi scientifici, hanno creato storie uniche e avvincenti in cui sono rappresentati con precisione e rigore argomenti scientifici (Natalini, Plazzi, 2022). Nel percorso didattico, si selezionano alcuni fumetti della collana *Comics&Science* e a partire da essi si elaborano attività didattiche volte a presentare o a consolidare alcuni argomenti di carattere matematico e scientifico.

2 - Struttura e finalità della proposta didattica

Il percorso didattico proposto si articola nelle seguenti fasi:

- I. Attivazione: lettura in piccoli gruppi di 3-4 alunni del fumetto scelto.
- II. Esplorazione: discussione del fumetto.
- III. Produzione: realizzazione di un lavoro ispirato alla lettura del fumetto o alla successiva discussione.
- IV. Presentazione: presentazione del lavoro realizzato.
- V. Valutazione e autovalutazione: la valutazione avviene durante tutta l’attività tramite schede di osservazione durante le attività di gruppo e griglie di valutazione per i lavori presentati; l’autovalutazione viene effettuata somministrando un test su Google Forms.

2.1 – The Fibonacci issue – Il libro di Leonardo

Questo percorso è stato elaborato a partire dal fumetto Il libro di Leonardo (The Fibonacci Issue 2/2020) di Claudia Flandoli ed è stato proposto per il primo e il terzo anno della scuola secondaria di I grado. Il fumetto ha come protagonista Leonardo Pisano, noto come Fibonacci, e racconta di come, grazie ai suoi viaggi, ai suoi studi e alle sue letture, egli abbia portato in Occidente le cifre indo-arabiche, la notazione decimale posizionale e le operazioni tra numeri. Narra, inoltre, di come, a partire da problemi reali come l'evoluzione di una popolazione di conigli, egli abbia elaborato strumenti matematici molto importanti come la celebre successione.

Per entrambe le classi, si propone di leggere il fumetto nella prima parte dell'anno scolastico. La fase di lettura in piccoli gruppi può essere realizzata anche nei primi giorni di scuola come attività di accoglienza. Infatti, essa permette di stimolare l'interesse degli alunni, accrescerne la motivazione per le discipline scientifiche e osservarli nelle attività di gruppo, per individuarne le competenze sociali e relazionali, nonché quelle linguistiche.

Per la classe prima, in seguito alla lettura del fumetto, nella fase di esplorazione, si può introdurre il sistema di numerazione decimale e posizionale e le cifre indo-arabiche. Nella fase di produzione gli alunni possono realizzare una ricerca relativa ai diversi sistemi di numerazione. Il fumetto può essere poi ripreso nel corso dell'anno per introdurre le potenze riferendosi alla filastrocca "sette vecchiette in viaggio per Roma" proposta da Fibonacci nel suo Liber Abbaci e in una seconda fase di produzione gli alunni possono elaborare una filastrocca con un indovinello ispirandosi a quella letta in

classe e utilizzando le potenze per risolvere l’indovinello. A fine anno, il fumetto può essere nuovamente ripreso per introdurre gli esseri viventi. Si può infatti indirizzare l’attenzione della classe sul problema dei conigli, introdurre la successione di Fibonacci e, attraverso il brainstorming, invitarli a riflettere sulla relazione tra i numeri nella successione per poi guidarli nella ricerca della spirale aurea in natura e arte. In questo modo, gli alunni possono avvicinarsi allo studio della biologia (ad esempio, allo studio delle parti di un fiore o all’evoluzione negli esseri viventi) e possono trovare un collegamento con l’arte greca e, in particolare, con lo studio del Partenone.

Anche per la classe terza, la lettura del fumetto può essere utile a inizio anno scolastico per richiamare il calcolo proporzionale. Nella fase di esplorazione, infatti, si possono invitare gli alunni a dedurre gli strumenti matematici utilizzati da Leonardo nel fumetto. Nella fase di produzione, si può richiedere agli alunni di ricercare la spirale aurea nelle opere d’arte studiate nei primi due anni e incrementare questo archivio artistico nel corso dell’anno scolastico. Inoltre, il fumetto può essere ripreso successivamente per introdurre la genetica con il problema dei conigli e l’astronomia con la forma della Via Lattea che richiama la spirale aurea.

2.2 – The periodic Issue

Questo percorso è stato elaborato a partire dal fumetto L’Accademia del professor M per elementi dotati (The periodic issue 2/2019) di Giovanni Eccher e Sergio Ponchione ed è stato proposto come attività di consolidamento degli argomenti di chimica trattati con gli studenti del secondo

anno di scuola secondaria di I grado. Il fumetto, infatti, si ispira alla tavola periodica, elaborata dal chimico russo Dmitrij Mendeleev, presentando in modo accattivante le caratteristiche di alcuni elementi e i legami chimici che possono generarsi. Il fumetto permette, inoltre, di far conoscere alcuni importanti chimici della storia, facendo riferimento anche alle difficoltà che alcuni di essi hanno riscontrato nel corso della propria vita a causa delle discriminazioni di razza (ad es. Emilio Segré) e di genere (ad es. Marie Curie) e all'utilizzo di alcuni elementi durante le guerre, fornendo quindi interessanti spunti di Educazione Civica. Nella fase di produzione gli allievi possono individuare uno o più elementi nella storia e studiarne caratteristiche fisiche e chimiche, nonché le applicazioni. Inoltre, si può riproporre il fumetto a fine anno scolastico e presentare alcune attività in cui il calcolo proporzionale viene combinato con problemi di chimica.

2.3 – The AI Issue

In questo percorso, viene utilizzato il fumetto *La seduta di N3well* (The AI Issue 1/2020) di Diego Cajelli e Andrea Scoppetta ed è proposto per gli studenti del secondo anno della scuola secondaria di I grado. Il fumetto permette, infatti, di introdurre il concetto di Intelligenza Artificiale, permettendo quindi di affrontare un tema cruciale di cittadinanza digitale. Grazie al fumetto, si può presentare il concetto di algoritmo ed evidenziare il ruolo cruciale rivestito dalla matematica per l'apprendimento automatico. Si può utilizzare il fumetto per introdurre la robotica nella didattica curricolare e nelle fasi di esplorazione e produzione si possono invitare gli alunni ad elaborare un codice per programmare i movimenti di un robot (ad es. il robot mBot

fornito da MakeBlock). Durante queste attività gli alunni potranno utilizzare naturalmente il calcolo proporzionale e i concetti di moto rettilineo uniforme e moto circolare uniforme.

2.4 - The Mirzakhani Issue

Questo percorso può essere proposto a tutti gli studenti della scuola secondaria di I grado e si basa sulla lettura dei fumetti *Sotto il segno del Toro* (Comics&Science 1/22) di Davide La Rosa e Silvia Ziche e *Operazione panino* (Comics&Science vol. 2) di Claudia Flandoli. L’obiettivo delle attività didattiche proposte è far riflettere gli allievi sulle discriminazioni di genere che tante matematiche hanno subito nel corso della storia e continuano a subire in alcune parti del mondo e in alcuni contesti. Per secoli, infatti, alle donne è stato negato quasi sempre l’accesso allo studio superiore, ritenendole adatte solo alla cura della prole e della casa. Oggi, nonostante le numerose iscrizioni di donne ai corsi di studio in matematica, solo pochissime studentesse continuano la carriera accademica. Con la lettura del fumetto, si vuole incrementare la consapevolezza degli studenti su quanto siano fortunati ad avere preservato il proprio diritto all’istruzione e su quanto ancora occorre lottare per eliminare tutte le disuguaglianze di genere e non, come indicato nelle Linee guida per l’insegnamento dell’Educazione Civica (L. 92/2019) e nell’Agenda 2030 per lo Sviluppo Sostenibile (SDG 5 parità di genere e SDG 10 ridurre le disuguaglianze). Il primo fumetto ha come protagonista Maryam Mirzakhani, la prima donna a vincere la medaglia Fields e prima ragazza iraniana ad aver partecipato alle Olimpiadi di matematica, vincendo per due volte la medaglia d’oro. Il fumetto è

disponibile anche in inglese quindi potrebbe essere inserito anche in una progettazione con la metodologia CLIL (Content and Language Integrated Learning) in collaborazione con l'insegnante di inglese. Il secondo fumetto narra l'avventura improbabile di quattro matematiche (Ipazia, Ada Lovelace, Sofja Kovalevskaja e Emmy Noether) fornendo così l'occasione di presentare agli allievi le suddette studiose e invitare ad una riflessione sulle loro ricerche e sui loro notevoli risultati, ma anche sulle difficoltà personali che hanno affrontato per poter coltivare la propria passione per la matematica.

Ricorrendo ai due fumetti, il docente ha la possibilità di mostrare quanto la matematica possa essere affascinante, ma anche che questa disciplina richieda tempo, fatica, pazienza, tenacia e auto-indulgenza. Spesso, infatti, gli allievi ritengono l'errore fonte di vergogna. Pertanto, è utile ricordare loro che la matematica è basata su lunghi processi in cui si sbaglia e si torna indietro sui propri passi più volte ma che dona, quando si raggiunge la meta, un appagamento per cui vale la pena continuare ad insistere. Inoltre, i fumetti forniscono spunti di discussione su alcuni aspetti della matematica e, in particolare, sulle sue applicazioni (es. gioco del biliardo).

3 – Attuazione della proposta

L'attività proposta ha riscosso notevole successo nelle classi, coinvolgendo anche gli allievi che hanno maggiori difficoltà nel mantenere costante l'attenzione e nell'interessarsi alla matematica e alle scienze.

In particolare, dall’analisi del test di autovalutazione somministrato alle classi¹ e dalla discussione in classe è emerso che gli studenti hanno trovato molto interessante l’attività perché il fumetto ha permesso loro di apprendere i concetti in modo più coinvolgente e divertente, rafforzando l’approccio positivo nei confronti della matematica, come specificato nelle seguenti risposte alla domanda del test «Dopo la lettura del fumetto, che idea hai della matematica?»:

1. Che sia utile e divertente.
2. È una bella materia se spiegata con parole semplici.
3. Che ci circonda ed è molto utile.
4. La matematica per me è una materia tutta da scoprire, ogni volta che si parla di vita quotidiana la matematica è sempre presente.
5. Che la matematica si trova intorno a noi e necessitiamo della matematica.
6. Ho un’idea diversa rispetto a qualche tempo fa, visto che, con il giusto metodo, essa può essere accessibile e interessante.
7. Dal punto di vista del fumetto di Leonardo Pisano, la matematica sembra più facile.

Dall’analisi delle risposte alla domanda del test di autovalutazione «*Scrivi 3 cose che hai imparato e che ti sono rimaste impresse*», è emerso che, ricorrendo al fumetto, è stato possibile veicolare concetti delicati come la spirale aurea, mantenendo alto l’interesse degli alunni e permettendo loro di fare esperienza di una attività didattica che ha lasciato, anche

¹ <https://forms.gle/NXhzT89PE4cSG6KM8>.

a distanza di tempo, un ricordo significativo. Inoltre, il fumetto ha permesso di utilizzare un approccio storico, al punto da focalizzare l'attenzione degli alunni sull'opera realizzata da Fibonacci e sulla sua importanza per la storia della matematica. Questo approccio è fondamentale per trasmettere l'idea di una matematica viva, frutto del lavoro e dei sacrifici di tanti studiosi, ben lontana dall'insieme sterile di formule con cui molto spesso questa disciplina è descritta.

È stato, inoltre, molto utile evidenziare ancora una volta come le varie branche della matematica siano interconnesse: infatti, nei commenti gli studenti hanno elencato i vari concetti appresi senza cadere nel malinteso della netta separazione tra aritmetica e geometria, rispettando così la visione pitagorica della matematica.

4- Conclusioni

Ricorrere al fumetto è stato molto efficace nel far comprendere agli allievi che la matematica è ben altro che l'utilizzo meccanico di regole e formule. La matematica è, infatti, presente nella vita quotidiana, come sottolineato da Pitagora che affermava che «il numero è l'essenza di tutte le cose» e da molti altri, come, ad esempio, Charles Baudelaire che sosteneva che «Tout est nombre. Le nombre est dans tout». La matematica ci fornisce gli strumenti e l'approccio per risolvere problemi di diversa natura e prendere decisioni in base ai risultati ottenuti. Inoltre, l'astrazione che spesso crea disagi e difficoltà è tuttavia necessaria per poter risolvere un'ampia classe di problemi simili tra loro. Il matematico, infatti, parte da problemi di natura pratica, come l'evoluzione di una

popolazione di conigli per Fibonacci, ma riesce a descriverli in maniera sintetica e generale in modo da risolvere una classe più ampia di problemi e trovare applicazioni molto lontane dal punto di partenza.

Bibliografia

Aleixo, P. e Norris, C. (2010). The Comic Book Textbook. «*Education and Health*» 28 (4).

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, MA, U.S.A.: Harvard Univ. Press.

Collins, A. and Gentner, D. (1983). *Multiple Models of Evaporation Processes*. Cambridge, MA, U.S.A.: Bolt Beranek and Newman.

Farinella, M. (2018). The potential of comics in science communication. «*Journal of Science Communication*» 17(01).

Frey, N. e Fisher, D. B. (2008). *Teaching Visual Literacy: Using Comic Books, Graphic Novels, Anime, Cartoons, and More to Develop Comprehension and Thinking Skills*. Thousand Oaks, CA, U.S.A.: Corwin.

Green, M. C. and Brock, T. C. (2000). The role of transportation in the persuasiveness of public narratives. «*Journal of Personality and Social Psychology*» 79 (5).

Groensteen, T. (2007). *The System of Comics*. U.S.A.: Univ. Press of Mississippi.

Hosler, J. (2000). *Clan Apis*. U.S.A.: Active Synapse.

Mayer, R. E. e Gallini, J. K. (1990). When is an illustration worth ten thousand words? «*Journal of Educational Psychology*» 82 (4).

McCloud, S. (1994). *Understanding Comics: The Invisible Art. (Reprint edition)*. New York, NY, U.S.A.: William Morrow Paperbacks.

Natalini R. e Plazzi A. (2022), *Comics & Science*, voll. 1 e 2. Milano: Feltrinelli Comics.

Natalini R. e Plazzi A. (2022), *Sotto il segno del Toro*, CNR Edizioni.

Schank, R. C. e Abelson, R. P. (1977). *Scripts, Plans, Goals, and Understanding: An Inquiry Into Human Knowledge Structures*. U.K.: Psychology Press.

Schwarz, G. (2006). Expanding Literacies through Graphic Novels. «*English Journal*» 95 (6).

Short, J. C., Randolph-Seng B. e Mckenny A. (2013). Graphic Presentation. «*Business Communication Quarterly*» 76 (3).

Spiegel, A. N., Mcquillan J., Halpin P. e Matuk C. (2013). Engaging Teenagers with Science Through Comics. «*Research in Science Education*» 43 (6).

Tatalovic, M. (2009). Science comics as tools for science education and communication: a brief, exploratory study. «*Journal of Science Communication*» 8 (4).

Zacks, J. M., Speer N.K., Swallow K.M., Braver T.S., Reynolds J. R. (2007). Event perception: A mind-brain perspective. «*Psychological Bulletin*» 133 (2).

Geologia e geometria

Marco D'Errico* Emanuela Petruccione**

*IC Nino Cortese (Casoria – NA); marcoderrico@icninocortese.edu.it

** IC Pertini – 87° D.Guanella (Napoli);
emanuela.petruccione@istitutopertiniguanelia.it



Sunto: *Il percorso descritto in questo articolo si inquadra nell' ambito di alcune tematiche delle scienze della terra e le lega alla geometria.*

In particolare sarà strutturata una prima parte di lettura delle carte geologiche. Nella seconda parte si vedrà la relazione tra strutture geologiche (pieghe e faglie) e topografia.

Parole Chiave: *Geologia, geometria, carte geologiche.*

Abstract: *Themes of earth science and geometry are described. In particular is described the reading of a geological map. In the second part of the article is described the relationship between the construction and interpretation of a geological map and relative geometry skills.*

Keywords: *Geology, geometry, geological map.*

1 – Geologia e geometria

Dalle indicazioni nazionali per i licei: «Al termine del percorso liceale lo studente possiede le conoscenze disciplinari e le metodologie tipiche delle scienze della natura, in particolare delle scienze della Terra, della chimica e della biologia. Queste diverse aree disciplinari sono caratterizzate da concetti e da metodi di indagine propri, ma si basano tutte sulla stessa strategia dell’indagine scientifica che fa riferimento anche alla dimensione di «osservazione e sperimentazione». L’acquisizione di questo metodo, secondo le particolari declinazioni che esso ha nei vari ambiti, unitamente al possesso dei contenuti disciplinari fondamentali, costituisce l’aspetto formativo e orientativo dell’apprendimento/insegnamento delle scienze. Questo è il contributo specifico che il sapere scientifico può dare all’acquisizione di “strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà» (Indicazioni nazionali per i licei, 2010).

In questo articolo viene proposto un percorso per la scuola secondaria di II grado che si prefigge di intrecciare concetti di geologia e di geometria. L’obiettivo è quello di avvicinare l’alunno alla cartografia geologica usando conoscenze ed abilità geometriche fondamentali.

Come prima cosa occorre precisare che una carta geologica raccoglie informazioni di un determinato territorio e quindi costituisce un elemento essenziale per lo studio e la conoscenza dello stesso.

Nel libro “La mappa che cambiò il mondo” Simon Winchester racconta le vicende di un visionario della scienza: William Smith. Il tenace e caparbio proprietario dell'Oxfordshire scelse di investire energie e denaro per realizzare la (prima) carta geologica moderna dell'intero sottosuolo inglese. Non di rado nella storia della scienza sovvenzionamenti economici privati hanno portato a nuove scoperte o addirittura a nuove teorie. La carta di Smith infatti ha fatto sì che l'Inghilterra potesse avere a disposizione una banca dati sugli affioramenti di carbone. E questo, in piena rivoluzione industriale, ha chiaramente avvantaggiato lo sviluppo economico del paese.

Una carta geologica ha lo scopo di rappresentare, su una carta topografica, le informazioni circa la geometria, la struttura, la composizione e l'età delle rocce affioranti in un determinato territorio. Una carta geologica, quindi, prima di tutto restituisce dati sulle rocce e sulle strutture geologiche in relazione alle forme della superficie terrestre. Il geologo ricava queste informazioni facendo un lavoro di rilevamento geologico delle rocce affioranti e dei loro rapporti reciproci.

Restituisce quanto ricavato su una carta topografica dove le forme della superficie terrestre sono rappresentate da isoipse (curve che raccolgono punti con la stessa quota topografica); in una carta geologica avremo quindi sia la topografia rappresentata prevalentemente da curve di livello, sia la natura e l'età delle rocce che invece sono rappresentate da colori diversi. Queste informazioni che sono la restituzione di quanto affiora in superficie rappresentano anche la chiave di accesso per l'interpretazione del sottosuolo.

Le diverse rocce vengono indicate con colori diversi. I colori però sono anche abbinati all’età del corpo roccioso considerato. Secondo una scala stratigrafica internazionale, ogni periodo geologico è contraddistinto da un colori diverso.

I dati geometrici dei corpi rocciosi sono indicati con simboli oppure direttamente interpretabili dalle intersezioni tra i limiti delle formazioni rocciose diverse e le isoipse. Tali informazioni geometriche circa la posizione spaziale delle rocce vanno sotto il nome di giacitura.

La giacitura di un piano (strato, limite tra due formazioni, frattura etc.) è definita da tre parametri: direzione, immersione e inclinazione.

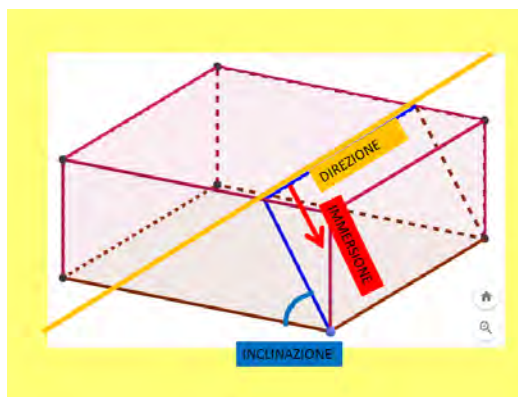
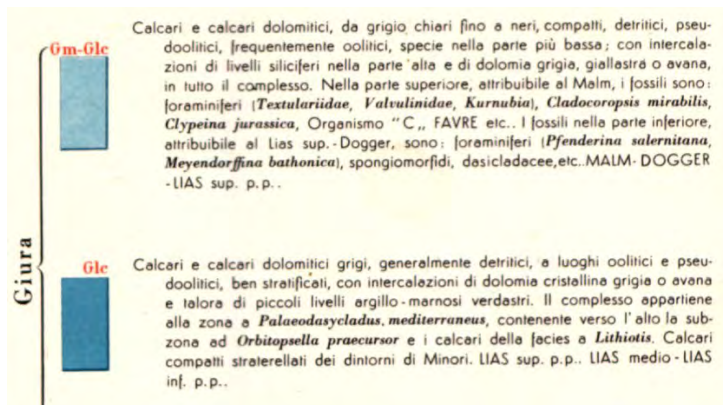
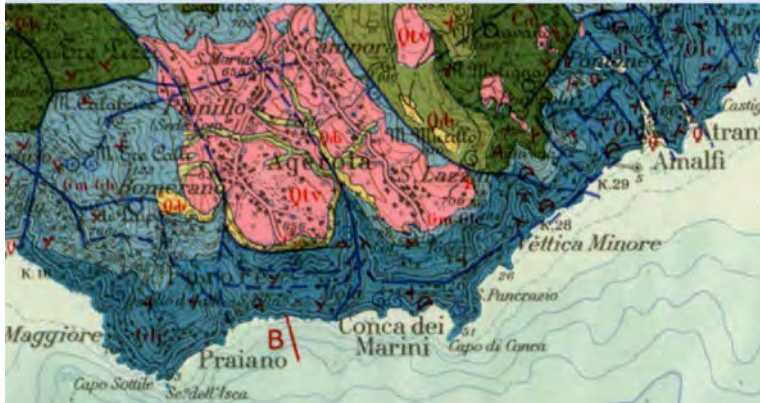


Fig. 1 Giaciture

La carta geologica è inoltre accompagnata da una legenda che descrive la natura e l’età dei corpi rocciosi affioranti nell’area rilevata e da sezioni geologiche che mostrano, lungo

allineamenti specifici, l'andamento dei corpi rocciosi nel sottosuolo.



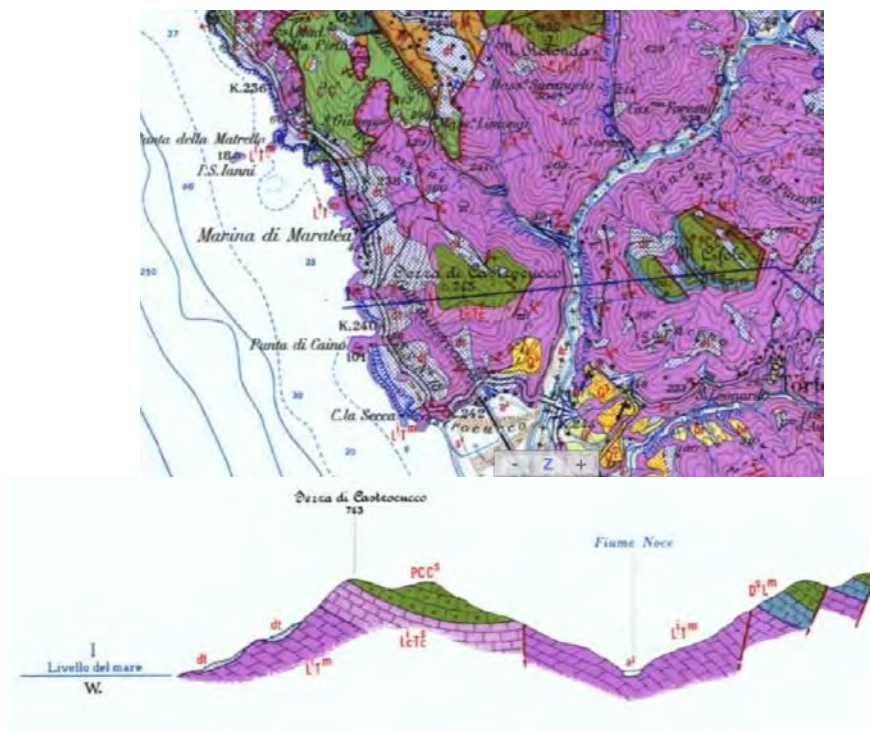


Fig. 2 Stralcio dei fogli geologici Amalfi e Verbicaro in scala 1:100.000 – Servizio Geologico Nazionale

Riassumendo: i corpi rocciosi diversi sono indicati sulla carta con differenti colori. La separazione stratigrafica tra due corpi rocciosi è un piano nella realtà tridimensionale (o una superficie curva) che diventa una linea sulla carta o in una sezione geologica.

La rilevanza dell’argomento nella scuola secondaria è deducibile dal fatto che in una prova invalsi del 2011 per la

scuola secondaria di I grado, è stata posta una domanda proprio sulla lettura delle isoipse di una carta topografica.

D10a. La figura che vedi riporta una rappresentazione semplificata delle linee di livello di una montagna. Le linee di livello uniscono tutti i punti che si trovano alla stessa altitudine. Nella figura il punto A è a 1 000 metri di altitudine e la vetta S della montagna è a 1600 metri.
Un escursionista va dal punto A al punto S seguendo il percorso indicato nel disegno dal segmento AS.
Tra i tratti AB, BC, CD, DE, qual è il più ripido?

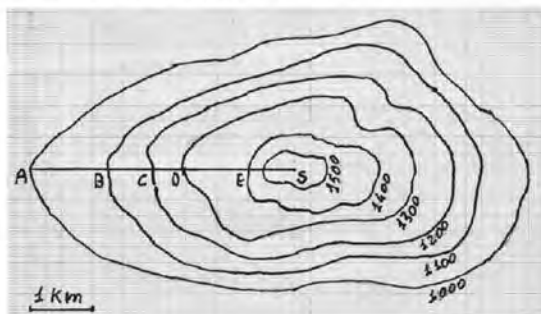
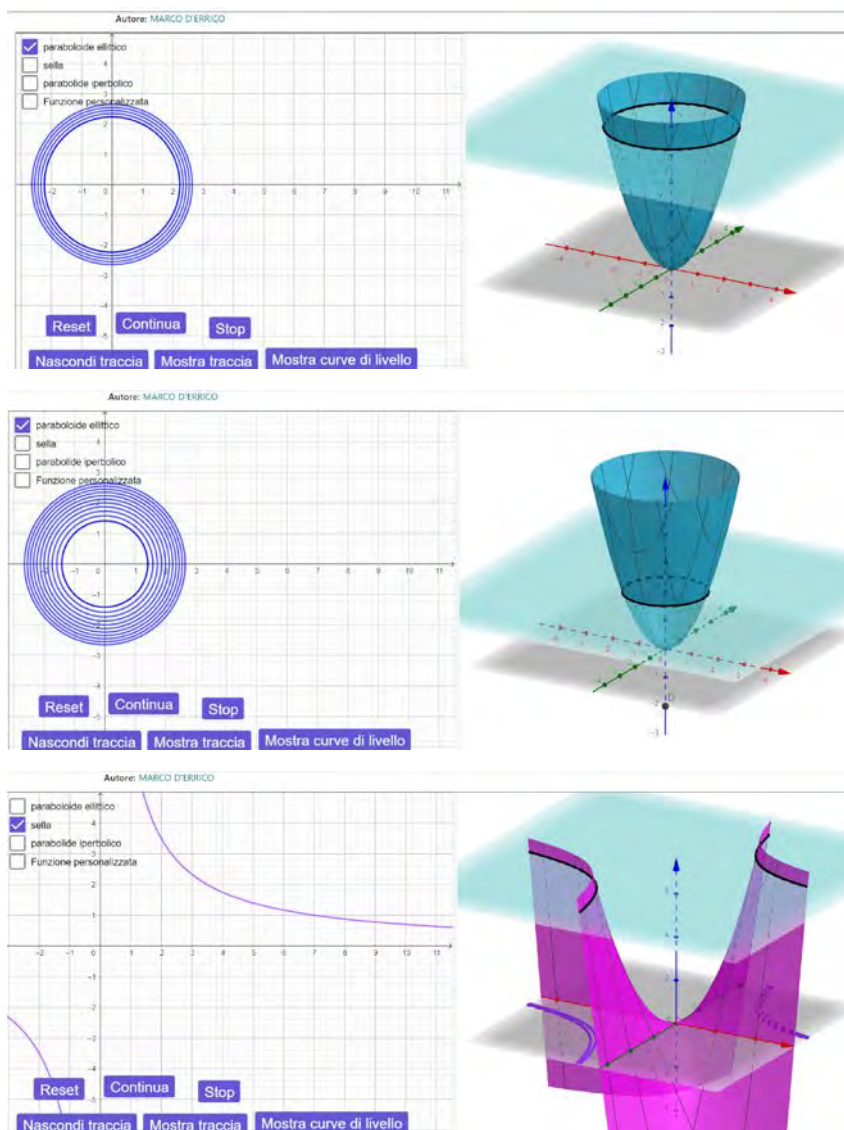


Fig. 3 Prova Invalsi 2011 secondaria di I grado

In una prima fase di lavoro possiamo assumere un rilievo montuoso come un cono ed i limiti tra corpi rocciosi diversi come dei piani che intersecano tali coni (possiamo farlo usando geogebra). In pratica, faremo riferimento alle coniche.

Per quanto riguarda le isoipse si può lavorare con geogebra. Di seguito (fig. 4) riportiamo alcuni esempi delle animazioni che si possono trovare al seguente link: <https://www.geogebra.org/m/suw53ufn>.



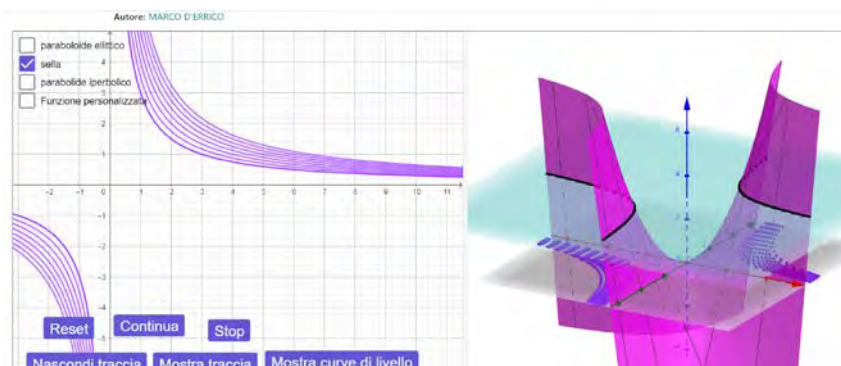


Fig. 4 Isoipse realizzate con animazioni in geogebra.

Due piani identificano un corpo roccioso che ha le stesse caratteristiche (fig. 5).

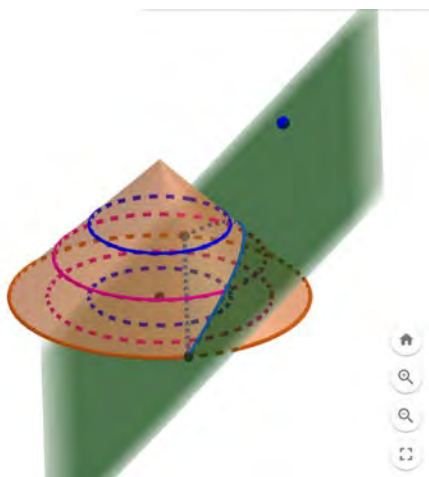
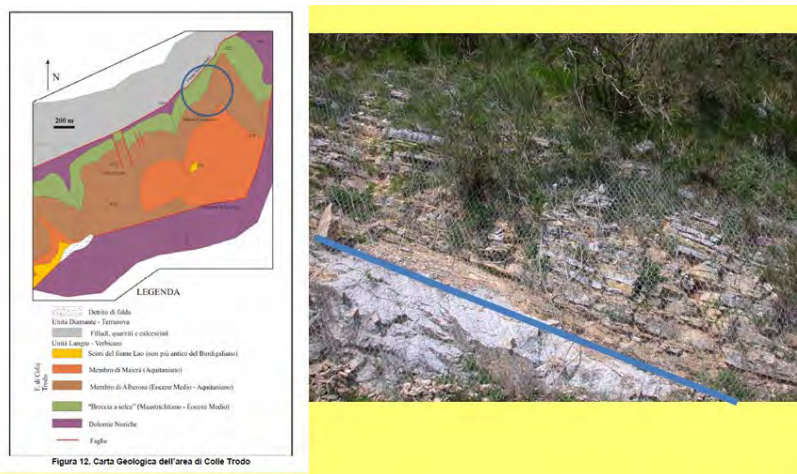
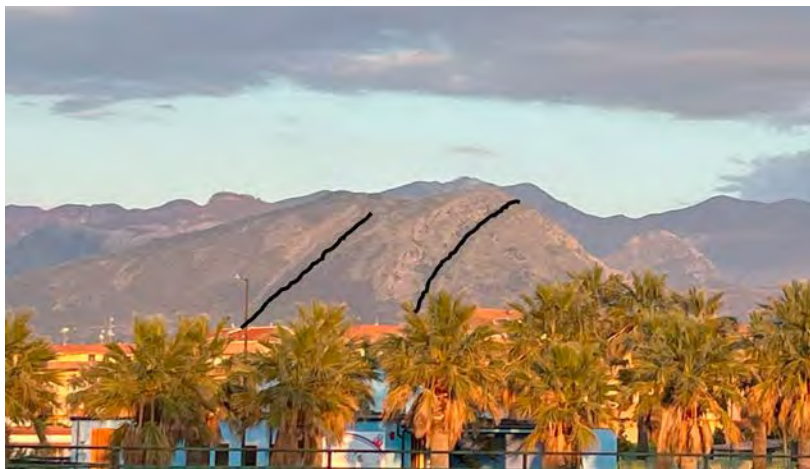


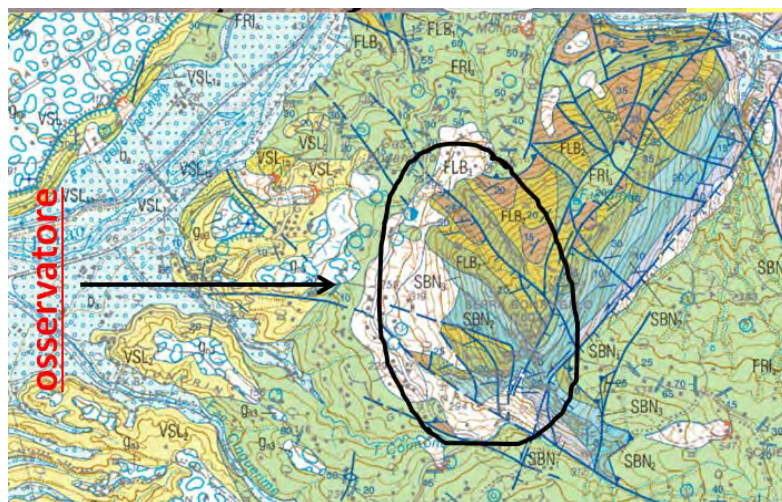
Fig. 5 Traccia lasciata da un piano che interseca un cono



a



b



C

Fig. 6 Relazioni tra stratificazione e topografia: a: carta geologica dell'area di Colle Trodo (Mormanno) e foto del passaggio tra le formazioni indicate in carta come Breccia a selce e Membro di Alberosa; b: veduta di Serra Bonangelo (Verbicaro) con la stratificazione ben evidente e la trasposizione su carta 1:50000 (D'Errico, 2003; Ispra, 2009)

A questo punto si dovrà vedere come queste situazioni tridimensionali possono essere riportate in piano (ovvero su una carta topografica):

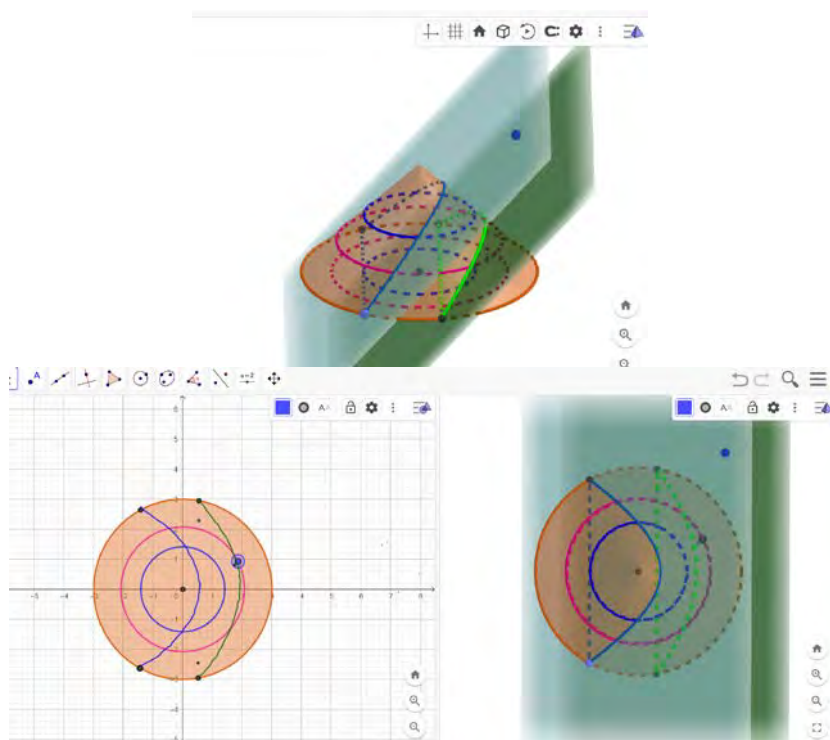


Fig. 7 Modello di rappresentazione dei limiti geologici sulla topografia

In base a quanto osservato è già chiaro che esistono due casi limite: quello di uno strato orizzontale rappresentato da una curva concentrica con le isoipse (in giallo) e quella di uno strato verticale rappresentato da una linea retta che taglia le isoipse (in verde).

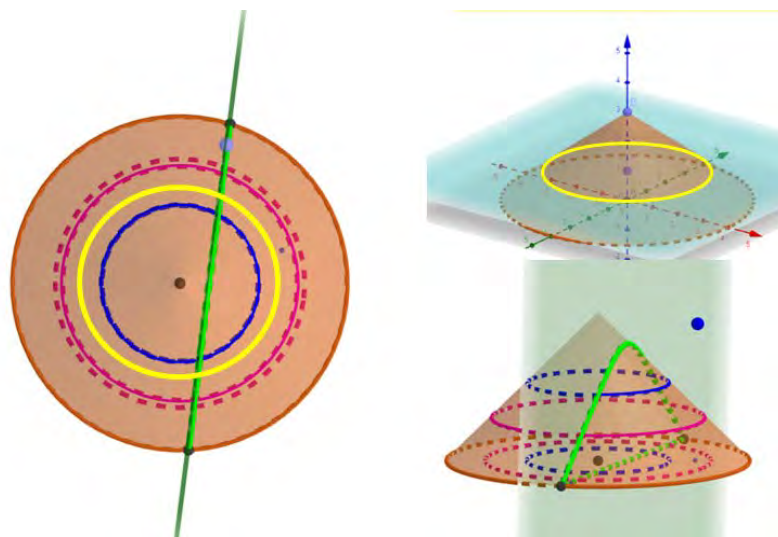


Fig. 8 Caso limite di un limite verticale (in verde) e di uno orizzontale (in giallo)

Allora proviamo a far variare la posizione del piano nello spazio mantenendo fissi i punti di intersezione con la circonferenza di base del cono (in pratica ruotiamo il piano intorno ad un asse):

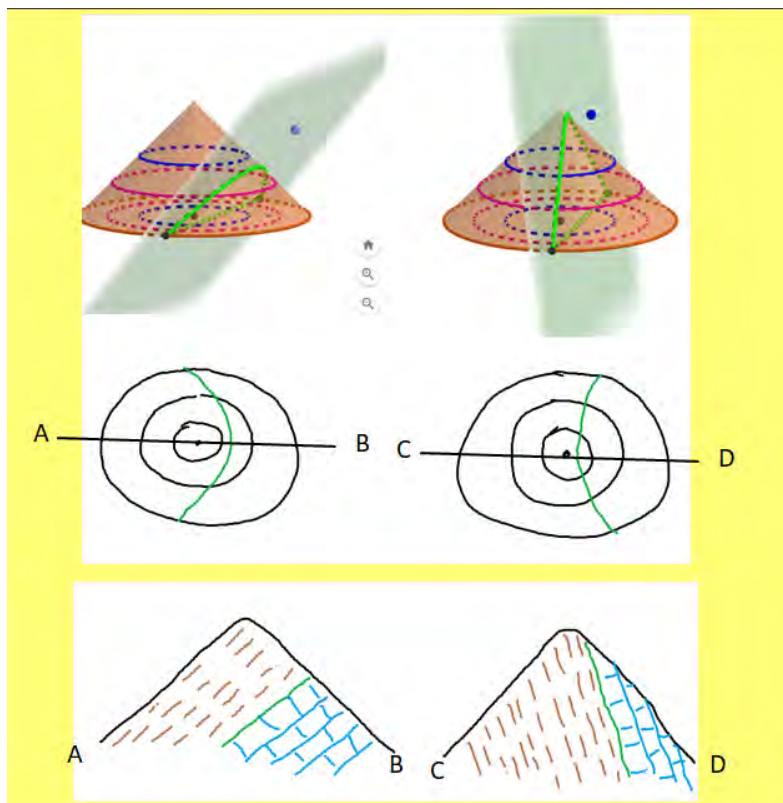


Fig. 9 Diversa posizione dei limiti geologici

Come si vede nel primo caso, il limite geologico segue le curve di livello “addolcendole”. Nel secondo caso la linea che marca il limite geologico ha una forma opposta alle curve di livello.

Va tenuto conto del fatto che questi per ora sono solo modelli. Infatti:

1. non è detto che un'area abbia rilievi montuosi. Potrebbe essere pianeggiante.
2. nella realtà i rilievi montuosi spesso sono ben lontani dall'essere assimilabili a coni.
3. le separazioni tra i corpi rocciosi non sempre sono piani ma possono essere delle superfici curve.
4. i corpi rocciosi possono essere fagliati o piegati.

Anche in questo caso per simulare situazioni più complesse si può fare riferimento a geogebra¹

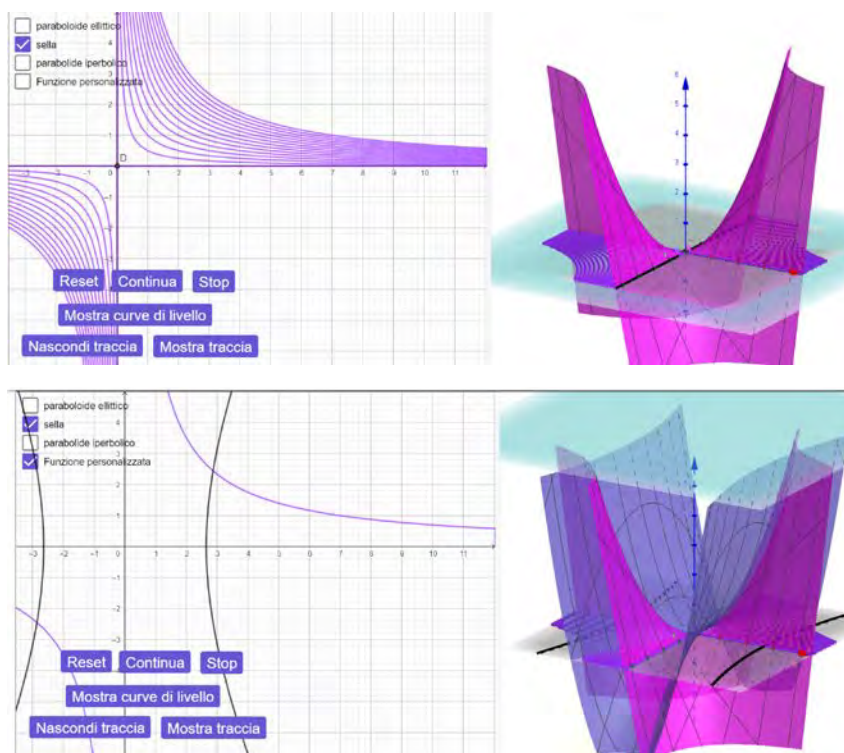


Fig. 10 Animazione con geogebra. La sella rappresenta la topografia mentre la “funzione personalizzata” un limite geologico.

¹ <https://www.geogebra.org/m/zddjjdm7>.

Durante il rilevamento alcune informazioni possono essere dedotte. Ad esempio, facendo riferimento alla figura che segue, se un geologo camminando su una superficie trova uno strato (blu) di una certa litologia ed una certa età e poi un altro strato (verde) di altra litologia ed età e poi camminando ritrova simmetricamente rispetto ad un asse immaginario gli stessi strati, può dedurre che gli stessi facevano parte di una struttura piegata la cui sommità è stata erosa nel tempo.

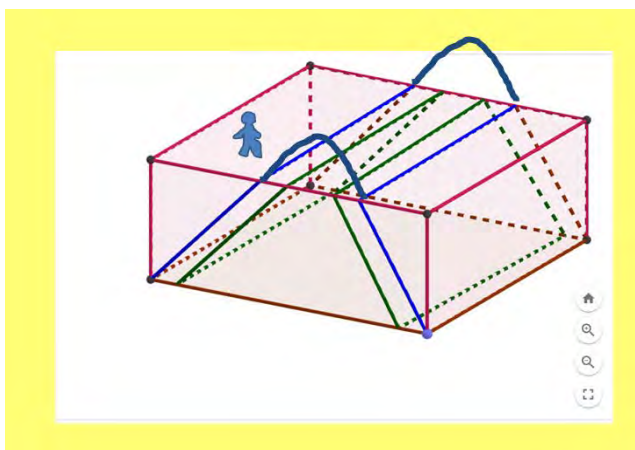


Fig. 11 Come riconoscere una struttura piegata

A seconda del tipo di piega che coinvolge il corpo roccioso il limite geologico da riportare sulla carta topografica seguirà andamenti diversi da quelli che abbiamo visto per i modelli con limiti planari.

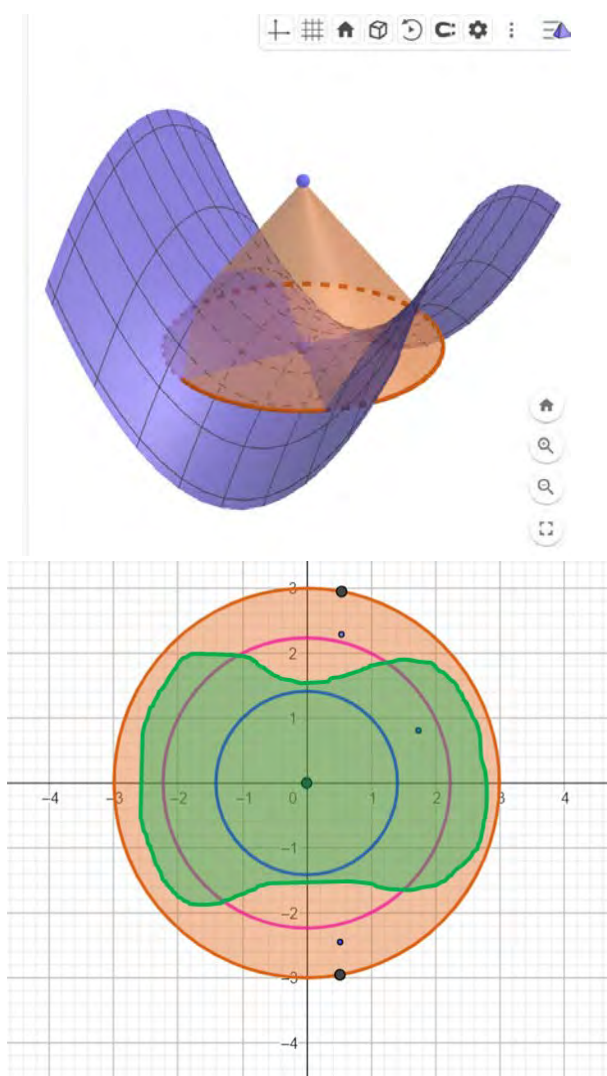


Fig. 12 Relazioni tra struttura piegata e la topografia

Ma i corpi rocciosi possono anche essere interrotti da faglie (frattura con conseguente movimento delle parti). Queste strutture saranno piani o superfici curve nella realtà e quindi linee sulla carta geologica.

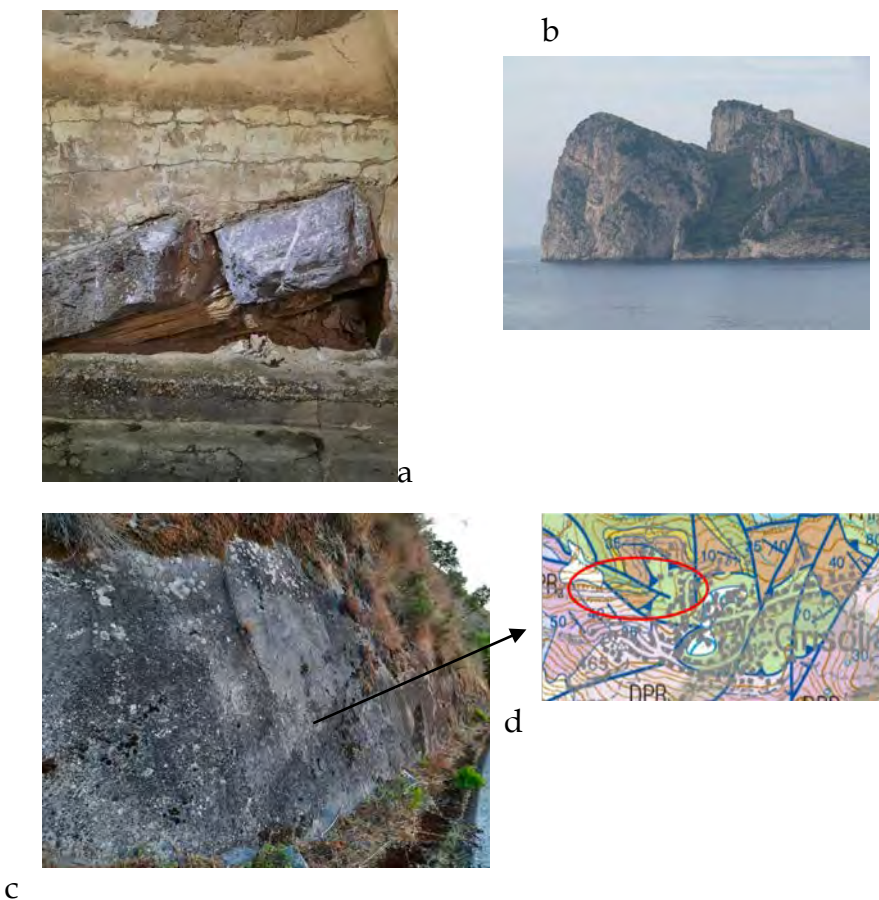


Fig. 13 Tipi di faglie e rappresentazione su un carta geologica. a: faglia in alternanze calcareo-marnose presso Santa Domenica Talao (Calabria); b: faglia presso Sorrento; c: faglia e sua rappresentazione su carta (d) presso Grisolia (Carta geologica Verbicaro 1:50000 Ispra, 2009)

2 - Come determinare attraverso la trigonometria lo spessore delle formazioni rocciose.

La trigonometria viene in soccorso del geologo quando occorre ricavare lo spessore degli strati indirettamente.

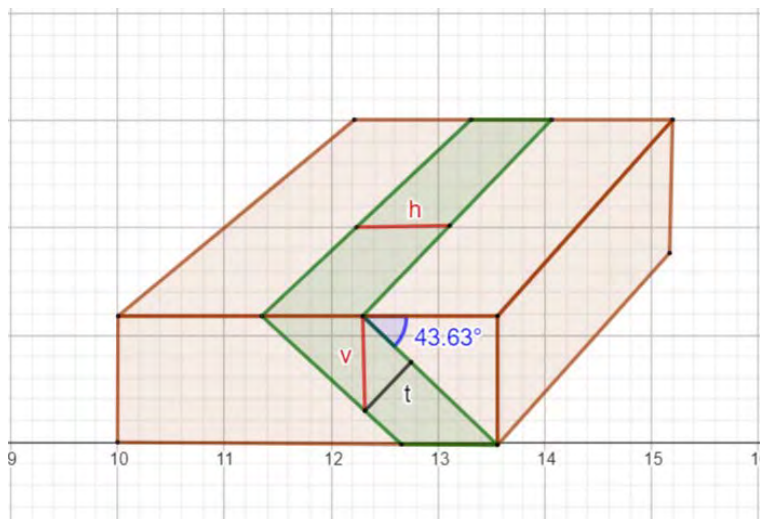


Fig. 14 Rapporto tra spessore apparente e reale di uno strato

In questo caso lo spessore reale dello strato è indicato con t . h e v sono gli spessori apparenti rispettivamente su un piano orizzontale e un piano verticale. Conoscendo l'angolo di inclinazione dello strato, possiamo ricavare facilmente lo spessore reale usando le relazioni:

$$t = v \cos \alpha = h \sin \alpha$$

3 - Conclusioni

Lo scopo di questo articolo è stato quello di fornire agli insegnanti di matematica e di scienze della scuola secondaria di II grado un input per un percorso didattico inerente le scienze della Terra e la geometria. Partendo da considerazioni storico-economiche sull'importanza delle carte geologiche e di

quanto esse rappresentino un patrimonio culturale per il territorio, si è cercato di fornire elementi geometrici per una loro prima interpretazione basandosi soprattutto su esempi concreti e realizzabili con software di geometria dinamica. In linea con le indicazioni nazionali per i licei, ci sembra una proposta che possa aiutare l’allievo «all’acquisizione di “strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà»

Bibliografia

D’Errico M. (2004). L’evoluzione tettono-stratigrafica dell’Unità di Verbicaro Auct. tra il Giurassico ed il Miocene e sue relazioni con le unità interne appenniniche, *Tesi di dottorato*.

Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui *all’articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all’articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento (2010)*.

Invalsi (2011). Prova secondaria di I grado.

Ispira - Servizio Geologico d’Italia (2009). *Foglio Verbicaro n. 220*, Litografia Artistica Cartografica Firenze.

Palmieri E. L., Parotto M. (2008). *Il globo terrestre e la sua evoluzione*, Zanichelli.

Servizio Geologico d’Italia (1965). *Foglio Amalfi n. 197*, Firenze: E.I.R.A.

Servizio Geologico d’Italia (1970). *Foglio Verbicaro n. 220*, Napoli: Poligrafica e Cartevalori Ercolano.

Winchester S. (2003). *La mappa che cambiò il mondo*, TEA.

Un'attività interdisciplinare tra geometria e botanica per le classi della scuola primaria: piante allo specchio e caccia alla fillotassi

Giovanna Angelucci *

* Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano, giovanna.angelucci@unimi.it; Mathesis Bergamo APS.



Sunto: *questo lavoro presenta due laboratori del progetto Laboratori Itineranti STEM di Mathesis Bergamo da me condotti in alcune scuole primarie della provincia di Bergamo durante l'a. s. 2022-2023. Questo lavoro mi ha dato modo di avviare l'adattamento di alcune attività legate al kit "Simmetria: matematica in giardino" (<http://specchi.mat.unimi.it/>) destinato alla scuola secondaria di primo grado. Il kit fa parte delle proposte didattiche del Dipartimento di Matematica "F. Enriques". I due laboratori, che vertono sui concetti di isometria nel piano e nello spazio, propongono attività di scoperta della matematica celata nelle piante.*

Le due attività laboratoriali sono state proposte anche a studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Bergamo.

Parole Chiave: *simmetrie, piante, fillotassi, laboratorio.*

Abstract: *this work presents two laboratories of the STEM Itinerant Laboratories project of Mathesis Bergamo which I conducted in some primary*

schools in the province of Bergamo during the academic year 2022-2023. This work gave me the opportunity to start the adaptation of some activities related to the kit "Symmetry: mathematics in the garden" (<http://specchi.mat.unimi.it/>) intended for lower secondary school. The kit is part of the teaching proposals of the Department of Mathematics “F. Enriques”. The two laboratories, which focus on the concepts of isometry in the plane and in space, offer activities for the discovery of the mathematics hidden in plants.

The two laboratory activities have also been proposed to students of the degree course in Primary Education of the University of Bergamo.

Keywords: *symmetry, plants, phyllotaxis, laboratory.*

1 – Introduzione

Durante l’anno scolastico 2022-2023 ho proposto due attività ad alcune classi del primo ciclo della scuola primaria utilizzando il materiale contenuto nel kit di laboratorio “Simmetria, matematica in giardino” che fa parte di una più ampia gamma di proposte di materiali didattici che il Dipartimento di Matematica “F. Enriques” dell’Università degli Studi di Milano offre alle scuole di ogni ordine e grado per permettere agli insegnanti di condurre direttamente in classe attività di matematica (le proposte sono consultabili al sito <http://specchi.mat.unimi.it/>).

Il lavoro ha coinvolto in totale 10 classi, dalla terza alla quinta, di scuole primarie della provincia di Bergamo. Ciascuna attività ha avuto una durata di circa 2 ore e ha previsto la suddivisione della classe in piccoli gruppi di lavoro di 4/5 bambini ciascuno, a cui veniva fornito il materiale didattico necessario allo svolgimento. Questa modalità permette agli studenti di avere un ruolo attivo e di aiutarsi a vicenda, in modo che «non abbiano solo la parte di ascoltatori,

ma debbano concretamente operare, lavorando a piccoli gruppi e discutendo fra di loro, per costruire le proprie conoscenze» (Dedò & Di Sieno, 2013, pag.3).



Fig. 1- Gli oggetti del kit “Simmetria, matematica in giardino”,
http://specchi.mat.unimi.it/matematica/matematica_in_giardino.html

Inoltre l’insegnamento attraverso i laboratori oltre a motivare gli studenti e a consentire loro di divertirsi facendo matematica «permette un dialogo tra gli studenti e l’insegnante» (De Tommaso & Di Sieno, 2014).

1.1 – La matematica celata nelle piante

I due laboratori propongono attività di scoperta della matematica celata nelle piante.

Il laboratorio non prevede una trattazione formale dei concetti utilizzati né per la parte matematica né per quella botanica. L’idea è quella di lasciare liberi i bambini di esplorare, tentare e sbagliare e utilizzare anche un linguaggio “improprio”. Intento del laboratorio è quello di condurre gli alunni a «esemplificare l’astratto e di costruire un modello a partire da un esempio concreto» (Dedò, 2001).

Gli argomenti non vengono introdotti in una lezione iniziale poiché la modalità di laboratorio proposta prevede che siano gli alunni stessi ad arrivare alla costruzione del proprio sapere (Bertolini, Bini, Cereda, Locatelli, 2012).

Le trasformazioni del piano che si utilizzano nel laboratorio sono riflessioni e rotazioni mentre nello spazio si considera solo la riflessione rispetto a un piano. Un riferimento per l’insegnante che desiderasse approfondire il tema delle isometrie nel piano e nello spazio è il libro *Galleria di metamorfosi* (Dedò, 2010), volume particolarmente adatto agli insegnanti della scuola primaria essendo nato da un’esperienza pluriennale dell’autrice nei corsi di Geometria per il Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria.

2 – Attività: piante allo specchio

2.1 – Cerca gli assi di simmetria.

Argomento di questa prima attività sono le isometrie nel piano e in particolare le riflessioni; l’intento è quello di ricercare la simmetria nei vegetali utilizzando le “regole” della matematica mediante l’impiego di particolari strumenti didattici: gli specchi.

Ad ogni gruppo si fornisce uno specchio e alcune immagini (realizzate *ad hoc*¹) utilizzabili con lo specchio, i disegni con le tracce da colorare e ritagliare e altro materiale didattico: goniometro, riga, squadretta. Gli specchi proposti in questa

¹ Autore e detentore dei diritti delle immagini è il biologo e fotografo scientifico Franco Valoti.

prima attività sono stati: 1 specchio singolo di legno e plexiglass dotato di una fessura, 3 coppie di specchi incidenti di differente ampiezza con angoli rispettivamente di 36° , 60° e 90° (vedi figura 1).

Si chiede ai bambini di porre le immagini intere stampate sotto la fessura dello specchio (o tra gli specchi) fino al raggiungimento della posizione in cui una parte di immagine, riflettendosi nello specchio (o tra gli specchi), ricrea l'immagine intera di partenza con una certa approssimazione in caso si tratti di figure reali. Le immagini intere sono messe a disposizione in un raccoglitore e ogni esemplare ritratto riporta il nome scientifico.

Più precisamente nel caso dello specchio singolo i bambini sono invitati a inserire l'immagine e farla scorrere sotto la fessura fino al raggiungimento della posizione in cui metà immagine ricrea l'immagine intera di partenza.

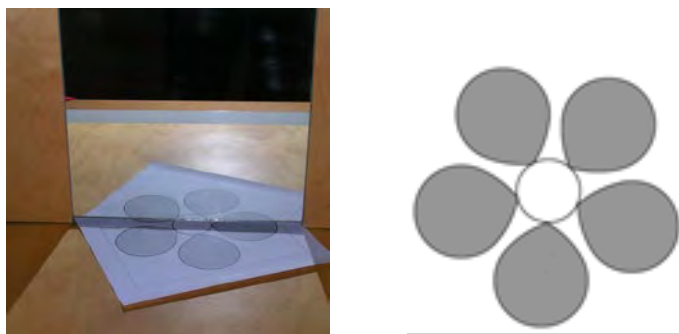


Fig. 2- Disegno di fiore di pero posizionato sotto la fessura dello specchio singolo in corrispondenza di uno dei 5 assi di riflessione e a destra immagine intera di confronto.

Nel caso degli specchi incidenti gli alunni sono invitati a porre uno "spicchio" di immagine tra due specchi e verificare

se l’immagine complessiva (reale e virtuale) che si genera così corrisponde (o quasi) a una delle immagini intere messe a disposizione.

Nella prima fase (mezz’ora circa) i bambini sono liberi di agire e di interagire con i compagni di gruppo e il ruolo dell’insegnante è prevalentemente quello di osservare e dare indicazioni su come usare il materiale a disposizione.



Fig. 3- Specchio incidente a 90° con gli “spicchi” delle immagini da inserire e il raccoglitore con le immagini intere.



Fig. 4- “Spicchio” di fotografia di fiore di pero ottenuto dal ritaglio della figura intera lungo le linee che rappresentano parte dei 5 assi di riflessione da inserire negli specchi a 36° .

Lo spicchio di pero in figura 4 rappresenta il “modulo” che ripetendosi secondo certe “regole” genera la figura intera di partenza. Infatti «tutte le figure che al nostro occhio appaiono simmetriche hanno una caratteristica in comune: sono costituite dalla ripetizione di un “modulo” secondo certe “regole”, regole che in generale sono diverse da figura a figura» (Bellingeri, Dedò, Di Sieno, Turrini, 2001, p. 34). In questo caso, visto che le ripetizioni sono generate dalle riflessioni tra specchi incidenti che formano un angolo sottomultiplo dell'angolo piatto, la figura che si genera è un rosone.



Fig. 5- Fotografia di fiore di pero posizionato tra 2 specchi incidenti a 36° in cui si possono “vedere” tutti i 5 assi di riflessione.

2.1.1 – Osservazioni

Questa attività si è dimostrata estremamente coinvolgente e affascinante per la maggior parte degli alunni attirati sia dagli insoliti oggetti portati in classe (gli specchi) ma anche dalle immagini di vegetali (fiori, foglie, pollini, frutti, etc.) a loro sconosciuti. Durante la prima fase in cui i bambini sono stati

liberi di agire e di interagire con i compagni di gruppo ho potuto annotare diverse osservazioni di seguito riportate.

Nell’ utilizzo dello specchio singolo la maggior parte degli alunni tende a fermarsi una volta trovato uno degli “n assi” della figura; l’insegnante in tal caso può intervenire chiedendo se ci sono altre posizioni di inserimento.

Alcuni bambini individuano facilmente l’asse di simmetria (indicandolo con un dito), altri invece hanno difficoltà e introducono le immagini in una posizione qualsiasi (e quello che vedono risulta sì simmetrico, ma l’immagine complessiva non riproduce la figura di partenza). In questi casi è utile ricordare loro di usare la doppia immagine in modo da lasciare quella intera sul banco vicino allo specchio come promemoria per la successiva fase di confronto e verifica.

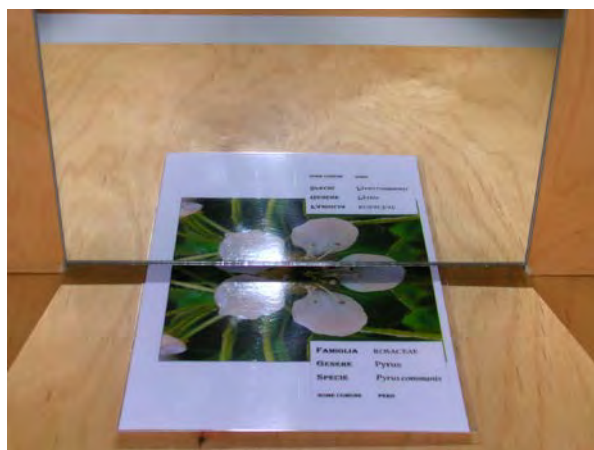


Fig. 6- Fotografia di fiore di pero posizionato sotto la fessura dello specchio singolo in corrispondenza di uno dei possibili 5 assi di riflessione.

Se l'immagine utilizzata ritrae un vegetale reale (come il fiore di clematide in figura 7) lo specchio ricreerà l'immagine intera di partenza con una certa approssimazione.



Fig. 7- Fiore di clematide “ricostruito” tra specchi incidenti.

A questo punto può succedere che alcuni bambini notino che l'immagine ricostruita nello specchio non corrisponde esattamente all'immagine intera di partenza, questo perché hanno utilizzato lo “spicchio” ritagliato della foto del fiore (che ritrae elementi del mondo vegetale reale) e non lo “spicchio” del disegno (immagine geometrica che riproduce una condizione ideale)!

Molti alunni giungono in autonomia a questa osservazione e riescono con parole semplici a esprimere il concetto che «in natura nulla è perfettamente simmetrico e che se vogliamo parlare di simmetria senza gradi di approssimazione» (Angelucci, 2019) dobbiamo cercare un espediente e utilizzare un disegno schematico.



Fig. 8- Alunno che inserisce tra due specchi ad apertura 90° una porzione ($\frac{1}{4}$) di immagine di fiore di clematide.

2.2 - Disegna la simmetria

La seconda parte dell’attività prevede la realizzazione un disegno di un fiore seguendo alcune tracce proposte (le immagini di rodonea - dal greco $\rho\acute{o}\delta\omicron\nu$, “rosa” - riportate in figura 9) e dopo aver disegnato gli assi di simmetria della figura si chiede di ritagliare con un paio di forbici uno degli “spicchi” ottenuto dall’incrocio degli assi.

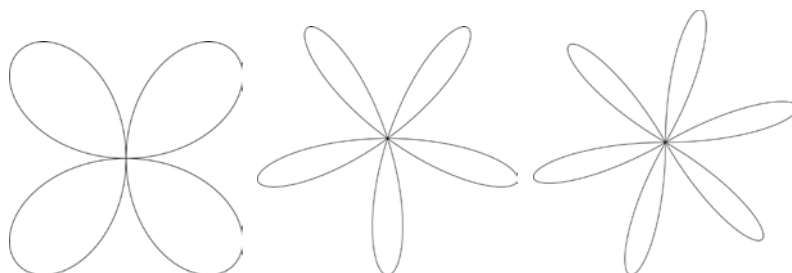


Fig. 9- Le tre curve scelte (rodonee) proposte per l’attività di disegno del fiore.

Dopo aver consegnato a ciascun alunno un foglio formato A5 con il disegno di una delle 3 rodonee proposte, si chiede di raffigurare un fiore immaginario tratteggiando e colorando i petali in corrispondenza dei “petali” delle curve prestampate.

Una volta terminato il disegno si fornisce l'indicazione di tracciare gli assi di simmetria (utilizzando righello e squadrette) e poi di ritagliare uno degli spicchi che risultano dall'incrocio degli assi. Infine si chiede loro di indovinare in quale degli specchi a disposizione è possibile ricreare il fiore intero.



Fig. 10- Esempio di disegno realizzato sulla traccia della rodonea a 4 “petali” e ricostruzione del disegno tra gli specchi incidenti a 90° .

L'oggetto da utilizzare sarà quello che permetterà loro di riprodurre l'immagine intera di partenza! Trovato l'oggetto, si può chiedere poi di calcolare l'ampiezza dell'angolo formato dagli specchi incidenti.

2.2.1 – Osservazioni

La maggior parte dei bambini realizza il disegno seguendo le istruzioni fornite. Alcune difficoltà possono sorgere: alcuni bambini individuano facilmente gli assi della figura, altri invece hanno maggiori difficoltà. Si può intervenire proponendo loro di cercare gli assi sulla figura utilizzando lo specchio singolo (a questo proposito è utile portare in classe anche degli specchi piccoli formato 15 cm x 15 cm da utilizzare appoggiandoli direttamente sul foglio da disegno) oppure chiedendo loro se riescono a individuare “una linea che taglia a metà la figura²” e, una volta trovata, chiedere se è l’unica possibile o se ne vedono altre. Nella fase di ricerca della coppia di specchi in cui creare un’immagine del fiore intero, solo alcuni alunni agiscono osservando gli oggetti e riflettendo sul numero di ripetizioni necessarie mentre la maggioranza inserisce lo “spicchio” ritagliato a caso cercando la soluzione per tentativi. In tale circostanza è utile porre delle domande sul numero di petali di partenza e il numero di ripetizioni necessarie allo scopo. Si noti che per alcuni bambini è tutt’altro che facile visualizzare la figura completa costituita dall’oggetto reale e dalle sue ripetizioni virtuali e contare così il numero di parti di piano riflesse dagli specchi. Per facilitare questa operazione si può inserire tra gli specchi un piccolo oggetto per esempio una pallina di gomma o di altro materiale.

² L’espressione “una linea che taglia a metà la figura”, chiaramente molto imprecisa, può servire in fase iniziale per introdurre il concetto di asse di simmetria che in un secondo momento l’insegnante potrà trattare.



Fig. 11- Pallina posta tra gli specchi incidenti a 90°.

Una volta determinato tale numero si può condurre ulteriormente la maggior parte degli alunni (delle ultime classi della primaria) a comprendere che tale numero può essere ottenuto dividendo l'ampiezza dell'angolo giro con l'ampiezza dell'angolo di incidenza.

3 – Attività: fillotassi, la conosci?

Questa attività coniuga geometria e botanica partendo dall'osservazione della forma delle foglie per arrivare a scoprire le "regole" con cui le foglie si dispongono sul fusto nei vegetali. Si introduce quindi il concetto di fillotassi che è la disciplina che si occupa dello studio della disposizione delle foglie su un fusto.

Il laboratorio viene svolto in parte in classe e in parte nel giardino della scuola. Le attività in classe vengono gestite con il metodo del lavoro a piccoli gruppi e con la consegna di una scheda di lavoro. La scheda contiene delle immagini di una pianta di menta (in figura sotto) e chiede, a partire

dall’osservazione di queste, di scoprire come si dispongono le foglie sul fusto nella pianta proposta, rispondendo a tre quesiti:

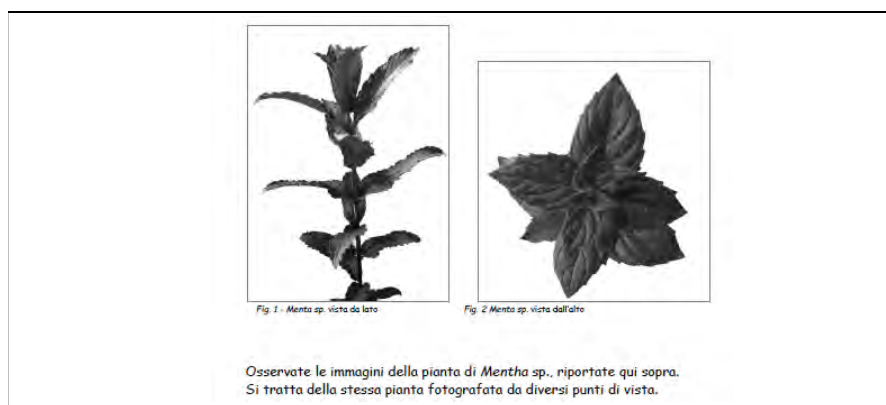


Fig. 12- Estratto della scheda di lavoro.

1. Quante foglie escono da ogni singolo nodo³?
2. Riesci a dire come sono disposte le foglie rispetto al fusto?
3. Come sono disposte le foglie della pianta di menta uscenti da un singolo nodo? E rispetto a quelle uscenti dal nodo superiore e dal nodo inferiore a quello considerato?

Con le domande proposte si intende portare gli alunni a comprendere come sono disposte le foglie rispetto al fusto, ovvero che formano un angolo molto vicino a 90°, e come sono disposte le une rispetto altre in corrispondenza del nodo. Da ciascun nodo escono 2 foglie una opposta all'altra che

³ I termini botanici essenziali per la comprensione vengono brevemente introdotti a inizio attività sia mostrandoli sul campione vegetale che schematizzandoli alla lavagna.

risultano simmetriche rispetto a un piano di riflessione che seziona longitudinalmente il fusto.

Al termine della compilazione della scheda ciascun studente è invitato a costruire un modello tridimensionale di pianta (come mostrato in figura 13) che abbia le foglie disposte nello stesso modo della pianta reale. Per questo lavoro ogni gruppo trova sul tavolo tutto il materiale necessario: cannucce, colla, forbici, nettapipe, foratore e cartoncini con immagini della sagoma delle foglie.

La seconda attività, da svolgersi all'aperto, prevede una "caccia alla fillotassi" in cui a ciascun bambino viene consegnata una scheda provvista di biadesivo su cui attaccare campioni di foglie e piantine (per lo più erbacee) raccolte nel giardino/cortile della scuola o anche in uno spazio verde vicino.

3.1 - Osservazioni

La maggior parte degli alunni tende a rispondere di getto alle domande sulla disposizione delle foglie senza un'attenta riflessione che dovrebbe invece scaturire dall'osservazione delle immagini proposte. Per facilitare l'analisi delle caratteristiche botaniche e geometriche è utile portare in classe una pianta di menta in vaso e passare tra i gruppi stimolando l'esame dell'esemplare e la discussione tra i membri del gruppo. I quesiti proposti vorrebbero essere un'introduzione semplice al concetto di angolo di fillotassi, ossia "l'angolo tra i punti di inserzione di due foglie successive e avente come vertice il fusto" (Bell, 1993).

Chiaramente a livello di scuola primaria sarebbe poco opportuno rivolgere una domanda su questo argomento in

termini scientifici. Tuttavia l’osservazione ragionata delle immagini e del modello porta la maggior parte degli studenti a comprenderne il significato e a riuscire a valutare l’ampiezza di questo angolo.

Per portare a scoprire che da ogni singolo nodo escono 2 elementi fogliari uno opposto all’altro è efficace posizionare due matite parallelamente alla lamina e chiedere ad un membro del gruppo di fare lo stesso sulle foglie di un altro nodo (immediatamente sotto o sopra quello osservato). Si può poi chiedere di indovinare l’ampiezza degli angoli formati dall’incrocio delle matite. La maggior parte degli studenti risponde correttamente (90° o angolo retto) dimostrando di aver compreso che coppie opposte di foglie si dispongono rispetto ai nodi immediatamente sotto o sopra quello osservato lungo le bisettrici dell’angolo piatto formato dalle foglie del primo.

Stimolati dalle domande la maggior parte degli alunni arriva in autonomia a fornire il valore corretto della misura degli angoli di fillotassi. La maggior parte dei bambini arriva a costruire correttamente il modello di pianta intera dimostrando così di aver interiorizzato i concetti matematici che governano il fenomeno. Uno degli aspetti che suscita maggior stupore e gioia tra i bambini è proprio quello di giungere da soli a realizzare il modello corretto senza la necessità di suggerimenti o aiuto da parte dell’insegnante.



Fig. 13- Alcuni alunni mostrano il modello di menta che mostra la fillotassi della pianta.

Mediante l'osservazione del modello si introduce il concetto di simmetria nello spazio, fin ora trattato solo in maniera intuitiva. L'insegnante può a questo punto chiedere agli studenti di indicare il piano (o i piani) di simmetria presenti nel modello da loro realizzato. Viene utile portare in classe un modellino che riproduce $\frac{1}{2}$ della pianta tridimensionale ottenuto dal taglio delle foglie lungo uno dei piani di simmetria (si veda la figura 14). L'insegnante potrebbe a questo punto chiedere agli studenti di verificare la correttezza delle risposte utilizzando lo specchio singolo.

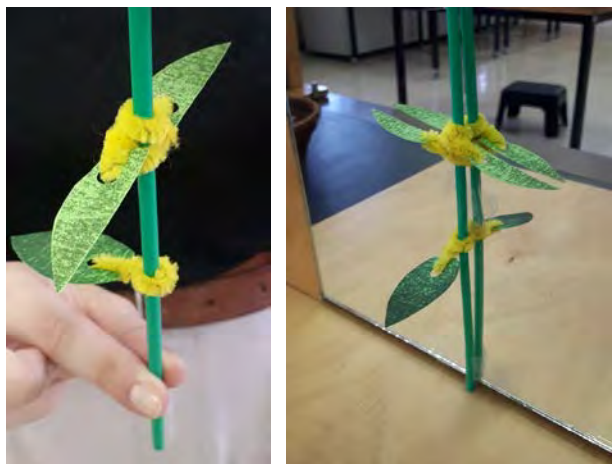


Fig. 14- Modello che riproduce $\frac{1}{2}$ della pianta tridimensionale ottenuto dal taglio delle foglie lungo uno dei due piani di simmetria individuabili sul modello della pianta intera (a sinistra) e ricostruzione allo specchio singolo del modello intero mediante riflessione (a destra).

La seconda attività è accolta con entusiasmo da tutti i partecipanti per la possibilità di agire in un contesto esterno all’aula. Anche in questo secondo momento la maggior parte dei bambini dimostra di aver compreso i concetti geometrici di fillotassi visti sul campione di menta.

Nonostante questa parte sia di tipo individuale, in alcune classi i bambini esplorano le aree aperte in modo aggregato, mantenendo le divisioni in gruppi stabilita in aula cercando di aiutarsi l’un l’altro e discutendo i risultati della “caccia”.

4 – La valutazione

L’analisi delle osservazioni sul campo e la valutazione qualitativa delle schede di lavoro a posteriori ha permesso di

dare un primo giudizio positivo sulle modalità di laboratorio proposte.

La sperimentazione basata su protocolli verrà avviata il prossimo anno scolastico in alcune classi della provincia di Bergamo che parteciperanno al progetto “Laboratori STEM Itineranti 2023-2024”, con l'intenzione di ampliare il numero di classi coinvolte rispetto all'anno passato, in modo da arrivare ad un numero statisticamente significativo con almeno 20 classi per un totale di 400 alunni circa.

Per la valutazione delle attività si intende analizzare tanto i giudizi degli insegnanti quanto la ricaduta sugli studenti. Per quanto riguarda gli insegnanti verrà somministrata una scheda di valutazione sotto forma di questionario chiedendo loro di compilarla al termine del laboratorio. Il questionario per gli insegnanti, di cui si propone una prima stesura in figura 15, prende spunto dal modello proposto dal Centro “matematita” per la valutazione di diversi laboratori tenutisi in diversi anni presso la mostra “Simmetria, giochi di specchi”. In aggiunta, per le domande relative al lavoro di gruppo, si è tratto suggerimento dai questionari per la valutazione di giochi matematici proposti dai ricercatori del Centro in collaborazione con l'Accademia dei Lincei (De Tommaso & Di Sieno, 2014).

AI DOCENTI CHE HANNO SCELTO DI FAR PARTECIPARE
GLI STUDENTI A UN LABORATORIO

SCUOLA, CLASSE, NOME, INDIRIZZO E-MAIL

1. Le attività sono state stimolanti per i suoi studenti?

☐ Sì ☐ No ☐ Parzialmente

• Gli studenti hanno avuto un ruolo attivo?

☐ Sì ☐ No ☐ Parzialmente

2. Crede che siano emersi aspetti legati alle dinamiche della classe e alla partecipazione dei suoi studenti diversi dal solito?

.....
.....
.....

3. Secondo Lei il materiale fornito agli studenti per lo svolgimento dell’attività è stato adeguato?

☐ Sì ☐ No ☐ Parzialmente

Pensa che il lavoro avrebbe potuto essere svolto in maniera altrettanto utile per l’apprendimento anche senza il materiale?

☐ Sì ☐ No ☐ Parzialmente

4. Secondo Lei Le schede di lavoro sono state adeguate?

☐ Sì ☐ No ☐ Parzialmente

5. Pensa di riprendere l’argomento del laboratorio in classe?

.....

6. Ritiene che i contenuti fossero accessibili, rispetto alle conoscenze degli studenti?

.....

7. Ci può segnalare quali aspetti dell'attività si sono dimostrati a suo avviso più efficaci e quali meno?

.....
.....

8. Osservazione del lavoro a piccoli gruppi.

a. Come si è svolto il lavoro dei gruppi? Sono stati scelti (o si sono autoimposti) dei leader? Qual è stato il criterio di scelta?

b. Ci sono stati bambini solitamente meno brillanti che hanno provato a portare contributi? Ci sono riusciti? Erano indicazioni utili?

- c. Quanto hanno pesato i “ruoli” (il “bravo”, il “buffone”,...) che talvolta i bambini si assegnano vicendevolmente? Sono riusciti a spezzare gli schemi abituali?
- d. I bambini solitamente più brillanti hanno accettato consigli e suggerimenti dagli altri?

Fig. 15 Bozza del questionario da sottoporre ai docenti.

Per valutare la ricaduta didattica del laboratorio si proporrà la somministrazione agli alunni di un questionario in ingresso e di uno in uscita. Si tratterà di questionario con domande principalmente volte a evidenziare l'atteggiamento dei bambini nei confronti della matematica (Di Martino & Zan, 2011).

Il questionario privilegerà la stesura di testi brevi narrativi (*self-report*) al fine ottenere informazioni sulla motivazione degli studenti. I questionari di questo tipo sembrano essere più efficaci in quanto quelli a risposta chiusa “obbligano” la persona a dover prendere posizione su aspetti considerati rilevanti dal ricercatore, ma non necessariamente dal soggetto, impedendo inoltre l'emergere di idee personali.

Di seguito si riporta una prima ipotesi di questionario ottenuto dall'adattamento delle domande proposte da Capozio in “Io e la matematica” (Capozio, Passaro, Di Martino, 2018). Le domande da 1 a 5 sono a risposta aperta, il linguaggio è stato semplificato per adattarlo alla fascia di età interessata alla sperimentazione. Si è scelto di lasciare una domanda chiusa, la numero 6, perché coinvolge un concetto di difficile comprensione per alcuni bambini ossia quello di “interdisciplinarietà”.

1. Qual è la tua età?
2. Con quali parole (da 1 a 3) descriveresti la matematica?
3. Prova a dire come ti senti quando pensi alla matematica?
4. Di questo laboratorio cosa ti è piaciuto di più?
5. Di questo laboratorio cosa ti è piaciuto di meno?
6. L’attività di oggi è stata utile per capire il legame che c’è tra la natura e la matematica?
 - o Sì, grazie all’attività ho potuto cogliere il legame tra natura e matematica
 - o No, anche dopo l’attività a me continuano a sembrare due cose slegate

Fig. 16- Questionario da sottoporre agli alunni.

Bibliografia

Angelucci G. (2019). Maths in the Botanical Garden. What do we mean when we talk about plants geometry? *Proceedings of the 1st International Scientific Conference Advances and Perspectives of Biodiversity Research and Conservation in Georgia*, ISBN:978-9941-8-1337-5.

Bell D. A. (1993). *La forma delle piante. Guida illustrata alla morfologia delle angiosperme*. Ed. Zanichelli.

Bellingeri P., Dedò M., Di Sieno S., Turrini C. (2001). *Il ritmo delle forme*. Milano: Ed. Mimesis.

Bertolini M., Bini G., Cereda P., Locatelli O. (2012). *Passeggiare tra le superfici*. Collana Quaderni di laboratorio. Milano: Ed. Mimesis.

Capozio A., Passaro D., Di Martino P. (2018). "Io e la matematica": un'indagine sull'esperienza matematica. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (4), pp. 9 - 26.

Dedò M., Di Sieno S. (2013). Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuto e metodologie da: *La Matematica nella Società e nella Cultura (I)*, VI, Agosto 2013, pp. 321-342.

Dedò M. (2010). *Galleria di metamorfosi*. Milano: Ed. Mimesis.

Dedò M. (2001). Più matematica per chi insegna matematica. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* (8) 4-A, agosto 2001, pp. 247-275.

De Tommaso D., Di Sieno S. (2014). Playing with mathematics can be a successful way to teach it. *ATEE Annual Conference "Transitions in teacher education and professional identities" | Proceedings*.

Di Martino P., Zan R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), pp. 471-482.

La meraviglia degli alberi monumentali italiani

*Un'attività interdisciplinare di avvio alla
scienza dei dati*

Mangiarotti Maria Aurora*

*Officine Scuola; mangiarotti.aurora@gmail.com



Sunto: *L'attività didattica presentata introduce alla scienza dei dati e è adatta a una classe terza di scuola secondaria di primo grado; l'analisi e l'elaborazione di un dataset aperto, relativo agli alberi monumentali della Sicilia, è effettuata con Codap (Common Online Data Analysis Platform), un applicativo open source che promuove un approccio investigativo ai dati. Grazie alla sua interfaccia intuitiva, gli studenti lavorando a coppie, esplorano, rappresentano grafici, si confrontano, scoprono relazioni tra variabili e imparano a comunicare i risultati delle loro ricerche.*

Parole Chiave: *scienza dei dati, open data, esplorazione, investigazione,*

Abstract: *The activity introduces students in grade 8 to data science: they analyze and process an open dataset of monumental trees in Sicily using Codap (Common Online Data Analysis Platform), a web-based tool with an intuitive interface for data investigation. Students in pairs, explore, summarize, visualize, interpret data and enhance their data processing skills.*

Keywords: *data science, open data, processing, investigation*

1 - Introduzione e contesto

Una visita all’orto botanico dell’Università di Pavia mi ha fornito lo spunto per progettare la seguente attività didattica interdisciplinare che può essere sperimentata in classi terze di secondaria di primo grado o in un biennio di secondaria di secondo grado.

Il platano di Scopoli, simbolo indiscusso dell’Orto Botanico del Sistema Museale di Ateneo dell’Università di Pavia, è un gigante seminato nel 1778 dal naturalista Giovanni Scopoli in occasione della morte di Carlo Linneo, il padre della classificazione degli organismi viventi. La recente indagine sul suo stato di salute ha messo in evidenza la sua stabilità. I dati raccolti consentono all’Orto Botanico di procedere con la richiesta d’iscrizione dell’esemplare all’elenco degli alberi monumentali d’Italia del Ministero delle politiche agricole alimentari e forestali. Sparsi in tutta Italia, gli alberi monumentali sono infatti riconosciuti per la loro insolita bellezza e maestosità; essi sono protetti per il notevole valore storico, ma anche per i benefici ambientali in quanto contribuiscono alla biodiversità e forniscono habitat per molte specie di animali.

2 - Gli alberi monumentali in Italia

Con Decreto dipartimentale prot. n. 5450 del 19/12/2017, pubblicato in G.U. n. 35 del 12/02/2018, è stato approvato l’elenco degli alberi monumentali d’Italia. Essi sono presenti in ogni regione italiana, come si evince dalla banca dati del

Ministero dell'agricoltura della sovranità alimentare e delle foreste.

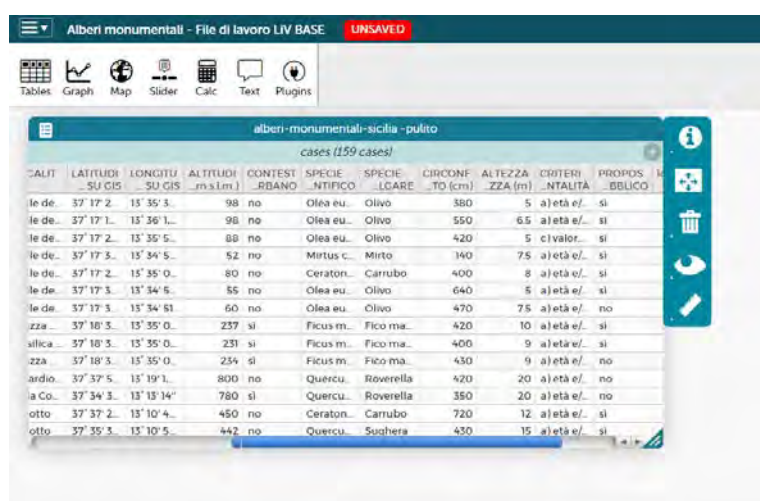
Distribuiti su tutto il territorio nazionale, sono poche migliaia di esemplari, spesso situati all'interno di aree soggette a tutela particolare (riserve, parchi, foreste demaniali, ville storiche, ecc.). Gli alberi monumentali sono oggetto di studio da parte della comunità scientifica e di tutela e salvaguardia da parte del legislatore. È importante farli conoscere ai giovani e sensibilizzare la società in merito alla loro conservazione e al loro valore storico-scientifico.

3 – L'attività didattica

L'unità didattica intende sensibilizzare gli alunni a una maggiore responsabilità e interesse verso l'ambiente e sviluppare competenze di analisi dei dati.

Si tratta di un percorso piuttosto articolato e ricco di esperienze, dall'uscita didattica in un parco, all'elaborazione di dati aperti, alla ricerca in rete da fonti primarie, alla comunicazione dei risultati. Le discipline coinvolte sono la statistica, le scienze ed elementi di storia e geografia. Attraverso l'analisi di un dataset rilasciato dalla regione Sicilia, si introducono alcuni elementi di scienza dei dati nel curriculum di matematica, quali l'utilizzo di dati aperti fruibili online da fonti istituzionali, un approccio investigativo ai dati e la comunicazione dei risultati attraverso infografiche. La scelta del dataset "Alberi monumentali della Sicilia" è dovuta al fatto che il file originale, scaricabile dal sito <https://cutt.ly/S5FCPAL>, è costituito da dati aperti ben inseriti e è stato semplice procedere alla loro pulizia.

L’elaborazione dei dati è realizzata con l’applicativo open source Codap (Common online data platform), un progetto realizzato dal Concord Consortium e finanziato dalla National Science Foundation. Creato per l'uso nelle scuole, Codap è un ambiente per l’analisi statistica che promuove negli studenti capacità di porsi domande, di interrogare, interpretare i dati e comunicare i risultati. Per la facilità di manipolazione dei dati, Codap si presta molto alla ricerca, al problem solving, all’investigazione.



alberi-monumentali-sicilia-pulito
cases (159 cases)

CALIT	LATITUD	LONGITU	ALTITUD	CONTEST	SPECIE	SPECIE	CIRCONF	ALTEZZA	COTER	PROPOS
SU GIS	SU GIS	SU GIS	msl(m)	_RBANO	_NTIFICO	_LGARE	_TO (cm)	_ZZA (m)	_NTALITÀ	_BBLICO
le de	37° 17' 2	15° 35' 3	98	no	Olea eu.	Olivo	380	5	aletà e/	si
le de	37° 17' 1	15° 36' 1	98	no	Olea eu.	Olivo	550	6.5	aletà e/	si
le de	37° 17' 2	15° 36' 5	88	no	Olea eu.	Olivo	420	5	civalor	si
le de	37° 17' 3	15° 34' 5	52	no	Mirtus c.	Mirto	140	7.5	aletà e/	si
le de	37° 17' 2	15° 35' 0	80	no	Ceraton	Carrubo	400	8	aletà e/	si
le de	37° 17' 3	15° 34' 6	55	no	Olea eu.	Olivo	640	5	aletà e/	si
le de	37° 17' 3	15° 34' 6	60	no	Olea eu.	Olivo	470	7.5	aletà e/	no
zza	37° 18' 3	15° 35' 0	237	si	Ficus m.	Fico ma.	420	10	aletà e/	si
silica	37° 18' 3	15° 35' 0	231	si	Ficus m.	Fico ma.	400	9	aletà e/	si
zza	37° 18' 3	15° 35' 0	254	si	Ficus m.	Fico ma.	430	9	aletà e/	no
ardio	37° 37' 5	15° 19' 1	800	no	Quercu	Roverella	420	20	aletà e/	no
ia Co.	37° 34' 3	15° 15' 14	780	si	Quercu	Roverella	350	20	aletà e/	no
otto	37° 37' 2	15° 10' 4	450	no	Ceraton	Carrubo	720	12	aletà e/	si
otto	37° 35' 3	15° 10' 5	442	no	Quercu	Sughera	430	15	aletà e/	si

Figura 1: la scrivania di Codap

3.1 - Breve descrizione del percorso

Il percorso progettato prevede le seguenti fasi:

F.1 Visita guidata a un parco, dove gli studenti hanno l'opportunità di interagire con gli alberi. Se possibile andrà selezionata una meta dove ci siano alberi monumentali. Durante la visita, gli studenti sono coinvolti in attività pratiche

come la raccolta di campioni di foglie, corteccia o semi da diversi alberi. Si chiede loro di osservare attentamente le caratteristiche degli alberi e di annotare differenze e somiglianze tra di loro.

F.2 Discussione: tornati in classe l'insegnante avvia una discussione basata sull'esperienza della visita. Chiede agli studenti di condividere le loro osservazioni, impressioni e curiosità. L'insegnante sintetizza quanto emerso e mette in evidenza l'importanza degli alberi per l'ambiente, per la qualità dell'aria, la conservazione del suolo e la biodiversità.

F.3 Attività laboratoriale a coppie con il software online CODAP: gli studenti procedono all'analisi, all'elaborazioni dei dati e alla sintesi dei risultati ottenuti

F.4 Ricerca e raccolta di ulteriori informazioni sugli alberi monumentali da fonti attendibili

F.5 Creazione di infografiche: i gruppi combinano le loro elaborazioni, le informazioni scientifiche e alcuni aspetti storici riguardanti gli alberi monumentali studiati, per comunicare in modo chiaro ed efficace i risultati delle loro ricerche. La costruzione delle infografiche può essere realizzata con web app quali Infogram o Canva o con un software per presentazioni.

F.6 Presentazione e confronto in classe: ogni gruppo presenta la propria infografica ai compagni. In seguito, il docente incoraggia una discussione sulle connessioni tra scienza, storia e l'importanza degli alberi monumentali per l'ambiente e la cultura.

L'attività prevede una valutazione di processo (osservazione degli studenti e raccolta di evidenze da parte del docente in forma di appunti, per una valutazione

formativa), una valutazione di prodotto tramite indicatori condivisi con la classe e l’autovalutazione degli studenti.

Con gli artefatti creati, si potrebbe pensare di far realizzare agli alunni un sito web a documentazione del lavoro svolto.

4 – Attività laboratoriale con CODAP

Per l’attività sono necessari pc o tablet con collegamento a internet.

Il file Codap prodotto per il lavoro degli studenti, contiene il dataset “Alberi monumentali”, e le indicazioni operative per svolgere il lavoro. Il dataset così preparato è una sorta di modello: condividendo il link con gli studenti, Codap genera per ciascun gruppo una copia di lavoro online che potrà essere in seguito salvato in locale o nel proprio Drive

Sul file gli studenti lavorano a coppie trovando indicazioni e stimoli per proseguire in modo autonomo nell’attività, per esempio:

Esplorate la tabella e cercate di comprendere le caratteristiche dei vari campi

Rappresentate tramite il comando "Map" la mappa geografica.

Quali sono le province in cui sono si trovano gli alberi?
Cosa osservate?

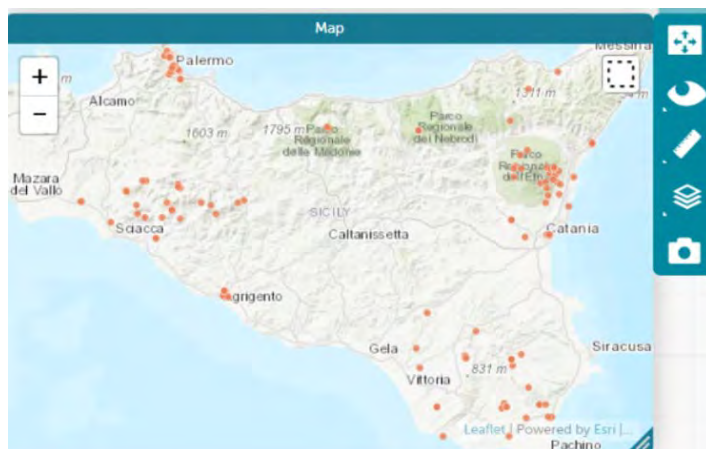


Figura 2: la mappa geografica

4.1 – La creazione di grafici ed il calcolo di indici statistici

Gli studenti, avendo analizzato la struttura dei dati, iniziano le loro simulazioni creando grafici che rappresentano la distribuzione di singole variabili (per esempio la provincia in cui si trovano gli alberi, la circonferenza dei fusti, l'altezza, ...). I grafici in Codap sono predefiniti: cliccando sul comando “Graph”, i punti si distribuiscono in modo casuale sul piano, fino a quando non vengono organizzati dagli studenti per trascinamento delle variabili sugli assi.

Utilizzando le funzioni di Codap, gli studenti calcolano indici di posizione e di variabilità. Gli studenti riportano sul file le loro osservazioni e i risultati ottenuti. L'insegnante durante la lezione supervisiona il lavoro dei gruppi, indirizza e stimola gli studenti in difficoltà, annota evidenze, contributi individuali significativi, al fine di una valutazione formativa. I gruppi, una volta concluso il loro lavoro, salvano il file e lo condividono con il docente.

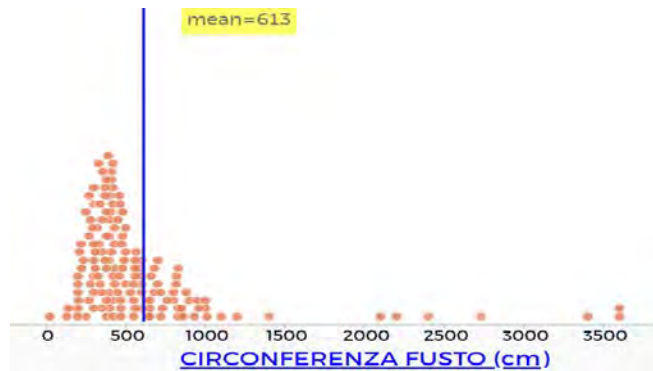


Figura 3: distribuzione delle circonferenze dei fusti

4.2 - Le domande investigative e l’elaborazione dati

L’insegnante propone di approfondire le ricerche utilizzando alcuni comandi avanzati di Codap, quali la “gerarchizzazione della tabella” che consiste nella riorganizzazione dell’intera tabella per trascinamento sul lato sinistro di uno o più campi. Nell’immagine seguente i dati sono aggregati per specie.

alberi-monumentali-sicilia - pulito

cases (157 cases, 2 set)

in- dex	SPECIE _LGARE	in- dex	PROGR	REGIONE	ID SCHEDA	PROVINC IA
1	Olivo	1	1	SICILIA	01/A089_	Agrigen..
2	Mirto	2	2	SICILIA	02/A08_	Agrigen..
3	Carrubo	3	3	SICILIA	03/A08_	Agrigen..
4	Fico ma...	4	6	SICILIA	06/A08_	Agrigen..
5	Roverella	5	7	SICILIA	07/A08_	Agrigen..
6	Sughera	6	17	SICILIA	02/F126_	Agrigen..
7	Mandor...	7	47	SICILIA	01/F781/_	Catania
8	Pino d'...	8	82	SICILIA	02/G263_	Palermo
9	Quercia...	9	83	SICILIA	03/G263_	Palermo
10	Farnia	10	84	SICILIA	04/G26_	Palermo
11	Pero do...	11	90	SICILIA	02/G273_	Palermo
12	Olivastro	12	107	SICILIA	20/G273_	Palermo
13	Platano...	13	108	SICILIA	21/G273/_	Palermo
14	Pino lari...	14	134	SICILIA	47/G273_	Palermo
15	Betulla ...	15	135	SICILIA	01/A014_	Ragusa
16	Cedro d...	16	137	SICILIA	02/C612_	Ragusa

Figura 4: la tabella riorganizzata per specie

Con la nuova struttura la tabella può mostrare caratteristiche dei dati prima nascoste (per es. la numerosità degli alberi per specie).

Gli studenti sono stimolati a scoprire eventuali relazioni tra i dati e a motivare le loro conclusioni.

Per esempio gli studenti possono studiare la relazione tra le circonferenze dei fusti e le loro altezze, come mostra il grafico seguente:



Figura 5: Altezze e circonferenze

La nuvola di punti relativa all'intero database non suggerisce l'esistenza di particolari legami tra le due variabili. Spingendo l'investigazione per singole specie, (es. ulivi), si nota come all'aumentare della circonferenza del fusto cresca anche l'altezza. Gli studenti producono le loro osservazioni e le sostengono grazie ai risultati ottenuti.

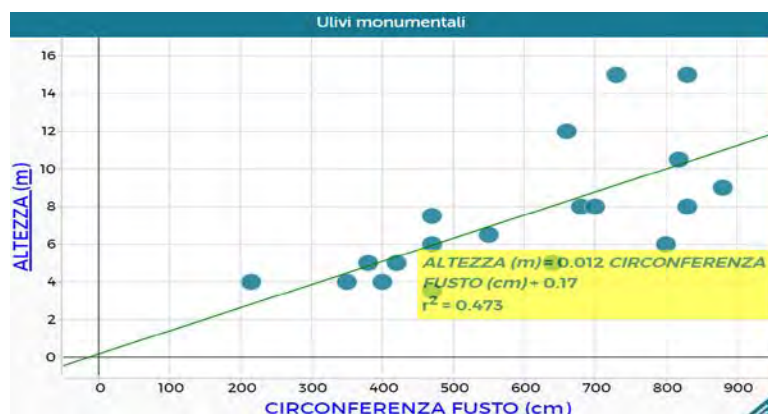


Figura 6: Relazione fra circonferenza e altezza degli ulivi

Completata l’attività, i gruppi salvano files e li condividono con l’insegnante per la valutazione.

Dopo aver incoraggiato la partecipazione attiva degli studenti e facilitato il processo di ricerca, il docente svolge un'importante funzione nell'organizzare, sintetizzare le conclusioni emerse e sistematizzare i concetti. Questo processo di sintesi da parte del docente contribuisce a consolidare l'apprendimento degli studenti, offrendo loro una visione d'insieme e una comprensione più completa del lavoro svolto.

5 - Conclusioni

Grazie a un approccio laboratoriale e interattivo, l’attività permette agli studenti di acquisire concetti di statistica e competenze di analisi dei dati, a partire da contesti reali e impiegando dati aperti. Gli strumenti utilizzati avviano alla

comprensione critica, insegnano a estrarre valore dai dati digitali.

Bibliografia e Sitografia

C.N. Knafllic, (2015), *Storytelling with data*. New Jersey: Wiley

<https://concord.org/our-work/research-projects/codap/>

<https://shorturl.at/dly24>

<https://www.monumentaltrees.com/en/europe/>

<https://screencast-o-matic.com/watch/c3iwqMVZvf8>

<https://codap.concord.org/help/how-to>

<https://www.youtube.com/@enhancingstatisticsteacher8423>

Embodied Design basato sull'azione per insegnare le proporzioni

Dario Gasparo*, Maria Antonietta Lepellere**

** Scuola secondaria di I grado "G. Caprin" Trieste;

dario.gasparo@gmail.com

** Università di Udine; maria.lepellere@uniud.it



Sunto: *Le proporzioni rappresentano l'argomento più importante dell'aritmetica in seconda media, utilissime in molte situazioni concrete. Risultano ostiche ai giovani perché hanno a che fare con le divisioni. In questo lavoro presentiamo tre diversi approcci concreti nei quali sono richiesti partecipazione attiva, inventiva, movimento, anche in ambiente outdoor. Il coinvolgimento diretto, la condivisione, la sfida, il gioco e la collaborazione sono elementi che facilitano la scoperta di proprietà e la memorizzazione dei termini. Abbiamo valutato la comprensione dell'unità didattica con un test dopo una sola ora di lezione pratica ottenendo risultati molto confortanti. L'uso di una telecamera 360 ha consentito di osservare l'atteggiamento e la reazione di ogni singolo studente durante l'attività.*

Parole Chiave: *storia, pensiero proporzionale, compito di realtà, laboratoriale.*

Abstract: *Proportions represent the most important topic of arithmetic in seventh grade, very useful in many concrete situations. They are difficult for young people because they have to do with divisions. In this work we present three different concrete approaches in which active participation, inventiveness, movement are required, even in an outdoor environment. Direct involvement, sharing, challenging, playing and collaborating are elements that facilitate the*

discovery of properties and the memorization of terms. We evaluated the understanding of the didactic unit with a test after only one hour of practical lesson obtaining very comforting results. The use of a 360 camera made it possible to observe the attitude and reaction of each individual student during the activity.

Keywords: *history, proportional thought, reality, laboratory.*

1 - Introduzione

Le divisioni: un tormento per tanti giovani! E poi le proporzioni, tanto utili quanto oscure per alcuni studenti delle scuole medie. Da anni cerco delle strategie per permettere a tutti i miei allievi di accedere al mondo che ti apre la possibilità di accedere ad un mutuo, investire in borsa, farsi fare uno sconto, preparare una cena per un numero diverso di amici rispetto a quello previsto nella ricetta. Ho imparato che la pratica e l’esperienza possono aiutare.

Nella prima classe spiego ai miei studenti l’origine del sistema numerico in base 10. Ipotizzo che se fossimo nati tritoni intelligenti avremmo inventato un sistema su base 8, perché le mani dei tritoni portano 4 dita. E uno scimpanzè userebbe un sistema in base 20, tanto è disinvolto nell’uso delle dita dei piedi. Un cavallo avrebbe una base 4 e un pinguino userebbe la base 2 come il computer, se usasse solo le ali per contare.

È facile e “naturale” introdurre il concetto di addizione nei numeri naturali, ai quali siamo abituati fin da bambini. Tutto sommato anche la sottrazione risulta facile da comprendere. Le cose diventano più complicate con la moltiplicazione e ancor di più con la divisione, spesso utilizzata dai giovani in

modo artigianale. Dopo 5 anni di scuola primaria sono pochi quelli che effettivamente usano la divisione mentre la maggior parte “scopre” un quoziente (uso apposta questo termine invece di “calcola”) procedendo per tentativi con la moltiplicazione. Se propongo un $24 : 8 =$ “...mi rispondono “3” perché usano la tabellina dell’8, ma non capiscono che stanno in realtà dividendo: provano 1×8 , 2×8 , 3×8 ... fino ad arrivare al risultato ricercato.

Assodato che la divisione è una moltiplicazione al contrario e che la moltiplicazione è una addizione ripetuta, avverto i miei giovani che nel corso dei tre anni della scuola media chiameremo questa complessa operazione in vari modi. In seconda classe introdurremo le frazioni, i rapporti e le proporzioni: questo fiorir di termini deriva dalla fantasia sfrenata (e perfida) dei matematici, perché in realtà stiamo usando sempre la stessa operazione. Al posto del simbolo “:” usiamo una barretta / (“frazione”), al posto della frazione possiamo usare un numero decimale che è il quoziente, cioè il risultato di quella divisione (“rapporto”) e quando cerchiamo rapporti che diano lo stesso risultato chiamiamo questa ricerca “proporzioni”.

Insomma, per procedimenti successivi e analogie, a 12 anni gli studenti si avvicinano all’argomento a mio parere tra i più importanti che si affrontano alle medie: proporzioni, sconti, percentuali, tassi di interesse... tutti utilissimi nella vita.

La carenza di prerequisiti cognitivi basati sul vissuto personale, la privazione sensoriale e la mancanza di esperienze dirette sono elementi di rischio che si rilevano nei giovani di oggi e che li portano ad avere difficoltà anche quando essi hanno la necessità di analizzare, dedurre,

astrarre. Il movimento può rappresentare uno stimolo all'apprendimento se esercitato in serenità e ancor di più se in ambiente aperto. La ricerca esistente sull'attività all'aperto in matematica indica risultati positivi e benefici nell'apprendimento. Inoltre, gli ambienti esterni sono contesti di vita reale che consentono ai ragazzi di interiorizzare, trasferire e applicare idee matematiche e forniscono esperienza diretta; gli studenti devono inoltre essere attivi e partecipi nel processo di apprendimento. La proposta che presentiamo per l'apprendimento delle proporzioni si presta all'approccio basato sull'inquiry: gli studenti osservano i fenomeni, pongono domande, cercano metodi matematici e scientifici per rispondere, interpretare e valutare le soluzioni e spiegarle in modo efficace ai compagni. L'apprendimento cooperativo all'aperto offre inoltre la possibilità di osservare che un compito può essere risolto in più modi e che può esistere più di una soluzione "giusta" al problema.

Molte teorie attuali in didattica della matematica mettono in evidenza l'importanza delle attività sensoriali e cinestetiche del corpo (azioni, gesti, movimento corporeo ecc.) per l'acquisizione matematica (Arzarello, Paola, Robutti, Sabena, 2009). Fra queste ricordiamo la teoria dell'embodiment cognition secondo la quale gli esseri umani concettualizzano i pensieri astratti matematici in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati sul sistema sensorio-motorio che interagisce con il mondo esterno. La percezione e il funzionamento della memoria sono influenzati dal modo in cui le persone muovono il loro corpo. La premessa centrale di tutti i progetti basati sull'azione è che tutto l'apprendimento, che si tratti di gioco, di suonare il piano o di ragionamento

proporzionale, è “imparare a muoversi in modi nuovi”. (Varela, Thompson, Rosch, 1991, p. 173) spiegano così l'enattivismo: "(1) la percezione consiste in un'azione percettivamente guidata e (2) le strutture cognitive emergono dai pattern sensomotori ricorrenti che consentono all'azione di essere percettivamente guidata".

Il ragionamento proporzionale è un contesto matematico quotidiano che sostiene importanti relazioni strutturali in matematica e scienze così come nella vita di tutti i giorni. Ad esempio, è richiesto per valori economici, distribuzioni spaziali, temperature, densità, concentrazioni, velocità, composizioni chimiche e ricette. Mette inoltre in primo piano domini complessi della matematica per le operazioni sui numeri razionali e l'algebra di base. Nonostante l'importanza del ragionamento proporzionale, gli studenti hanno difficoltà pervasive ad acquisire queste complesse capacità di ragionamento. Ci sono almeno due motivi per cui gli studenti incontrano difficoltà.

In primo luogo, il ragionamento proporzionale evidenzia uno dei primi cambiamenti concettuali nell'apprendimento della matematica. In contesti matematici meno sofisticati, gli studenti si impegnano nel pensiero additivo mentre il ragionamento proporzionale richiede agli studenti di passare a una mentalità relazionale che utilizza il pensiero moltiplicativo (Fuson & Abrahamson, 2005).

In secondo luogo, gli studenti hanno difficoltà a passare da relazioni di numeri interi con rapporto di base (ad esempio, $3:7 = ?:14$) a problemi non divisibili di media difficoltà (ad esempio, $6:14 = ?:35$; Fuson & Abrahamson, 2005). Ciò è in parte dovuto alla difficoltà procedurale della divisione e della

moltiplicazione decimale e in parte alla crescente richiesta di memoria di lavoro necessaria per manipolare tutte le parti del problema. Questo articolo descrive alcuni esempi di insegnamento basati sull'azione per aiutare gli studenti a comprendere le proporzioni. Nel progettarli, sono stati presi in considerazione la cognizione incarnata e l'enattivismo, nonché l'apprendimento all'aperto e cooperativo.

Nella prima proposta si parte da fogli di carta su ciascuno dei quali viene riportato un numero che gli studenti terranno visibile in mano. Ogni numero fa parte di una proporzione che gli allievi dovranno "costruire" spostandosi e sistemandosi velocemente nella giusta posizione. Si rimanda al capitolo "attività" per i dettagli.

La seconda proposta parte dall'uomo vitruviano di Leonardo Da Vinci e si svolge in due fasi: 1) prendere le misure di specifiche parti di una persona; 2) calcolare i rapporti di queste misure scoprendo l'armonia del nostro corpo.

La terza proposta rappresenta un esempio di applicazione delle proporzioni: gli studenti sono invitati a misurare l'altezza dell'albero del giardino (ma potrebbe essere una casa, una gru, un palo...) usando una cordella metrica per le misure e il teorema di Talete per il calcolo.

Queste attività hanno un benefico effetto sulle capacità di ragionamento proporzionale degli studenti di seconda media.

Abbiamo cercato di rispondere alle seguenti domande:

1. Quale effetto può avere un'attività concreta, in movimento, sulla comprensione delle proporzioni da parte degli studenti?

2. Ci sono relazioni tra le difficoltà incontrate nei movimenti e la risoluzione degli esercizi?

2 – Metodologia

L'attività ha coinvolto 13 studenti di 14 anni, 8 maschi e 5 femmine di una scuola media di Trieste. Le attività sono state videoregistrate utilizzando una telecamera Ricoh Theta che ha permesso di riprendere a 360 gradi ciò che accadeva tutt'attorno così da poter osservare a posteriori tutti gli studenti in tutti i loro movimenti. L'effetto dell'attività è stato testato proponendo, subito dopo l'attività all'aperto, 4 esercizi sui concetti principali delle proporzioni. È stato infine utilizzato MimioStudio per indagare il livello d'ansia degli studenti durante il test.

2.1 – L'attività con i fogli di carta

Iniziamo scrivendo una proporzione composta da 4 numeri riportati su altrettanti fogli A4. Il primo approccio è dare un nome ai numeri, lavorando tutti assieme. Gli elementi della proporzione $a:b=c:d$ sono 7, perché dobbiamo rappresentare anche i due ":" e l'uguale (=).

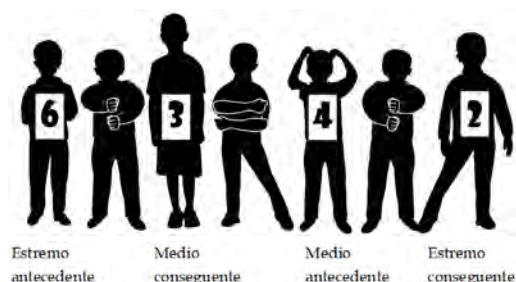
Due studenti rappresentano il simbolo della divisione (un foglio in mano con il ":" oppure le mani raccolte in due pugni posti verticalmente a rappresentare il simbolo ":"). Un altro studente rappresenta l'uguaglianza (il simbolo = può essere riportato su un foglio o indicato con gli avambracci disposti paralleli e orizzontali).



In sequenza, i simboli $:$, $=$, $+$, $-$ e $\times$ per rappresentare con le braccia le operazioni aritmetiche.

I quattro studenti muniti di numeri si dispongono tra i compagni precedenti ($:$ e $=$) in modo da formare la proporzione $a:b=c:d$ mostrando al “pubblico” il foglio con ben evidente il numero in loro possesso. Naturalmente si fa in modo che il risultato delle due divisioni sia uguale, cioè che la proporzione sia valida. In questa fase gli studenti apprendono che possiamo rappresentare una proporzione con una uguaglianza di rapporti: $6:3=4:2$, ma anche $6:4=3:2$ oppure $2:3=4:6$ che però risultano meno intuitive.

Si fa notare che i termini attribuiti ai numeri sono facili da memorizzare perché quelli in mezzo si chiamano “medi”, quelli alle estremità “estremi”, quelli prima del “diviso” si chiamano “antecedenti” e quelli dopo “consequenti”.



A questo punto gli studenti vengono invitati a dimostrare di sapere quale elemento essi rappresentano in base alla posizione occupata. Chiediamo: “si inginocchi l’estremo

conseguente” oppure “alzi le braccia il “medio antecedente”, o ancora, facciano un salto i “medi”, e così via

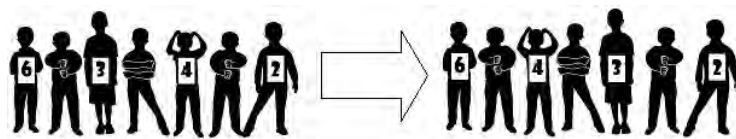


”Alzi le braccia l’estremo conseguente!”

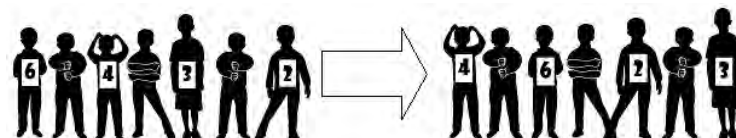
Si fa notare che possiamo spostare i ragazzi in altre posizioni mantenendo valida la proporzione: in questo modo scopriamo le regole (proprietà) giocando in movimento. Invertendo gli studenti antecedenti e conseguenti o permutando, cioè, scambiando di posizione estremi con estremi e medi con medi, formiamo proporzioni ancora valide. Ad ogni passaggio gli alunni devono dichiarare quale nuovo elemento rappresentano dopo aver cambiato posizione, rinforzando così, anche con il suggerimento dei compagni, l’acquisizione dei termini corretti.



PERMUTARE I MEDI



INVERTIRE



Per consolidare le conoscenze possiamo anche procedere con la bandierina dei termini. Due squadre-proporzioni vengono disposte ai lati opposti del campo di gioco e il direttore di gara chiama “medio antecedente”, “estremo conseguente”, “medi” ... cambiando spesso la posizione degli allievi nella proporzione. I ragazzi di ogni squadra si confrontano e si aiutano per individuare rapidamente a quale termine essi corrispondono, e corrono a prendere la bandierina. Una variante è data dal predisporre una proporzione con soli 3 termini e gli studenti ai quali è stato assegnato un numero devono capire dove sistemarsi affinché la proporzione sia corretta.

Una volta acquisita la terminologia (bastano 5 minuti di gioco), il docente prepara 3 proporzioni riportando un numero su ognuno di 12 fogli A4. In seguito, i fogli vengono caoticamente lanciati in aria e gli studenti devono correre velocemente a raccogliarli, organizzandoli in “frasi matematiche” che abbiano un senso, sfruttando la proprietà fondamentale delle proporzioni. Essi devono capire da soli a quale gruppo aggregarsi; in alternativa è possibile che il

docente formi preventivamente squadre composte da 4 alunni. Dopo il lancio si permette ai giovani di scambiare i fogli con gli avversari così da poter costruire al più presto una proporzione valida.

Superata questa fase, con le squadre disposte in proporzione, il direttore chiama le proprietà: “invertire”! Gli studenti devono correre a sistemarsi nella nuova posizione. In questo modo giocano a muoversi al comando della proprietà e verificano di volta in volta l'esattezza della proporzione sia utilizzando la proprietà fondamentale che quelle ad essa collegate. Per ogni richiesta viene assegnato un punteggio alla squadra che ha risposto correttamente per prima e al termine dell'attività viene decretata la squadra vincitrice.

Uno sviluppo ulteriore del gioco di apprendimento è dato dal calcolo del numero mancante, anche decimale: si nota che possiamo disporre a caso 3 numeri e calcolare sempre il quarto. Sempre? Attenti allo zero!

Video: <https://tinyurl.com/gasparo-proporzioni>

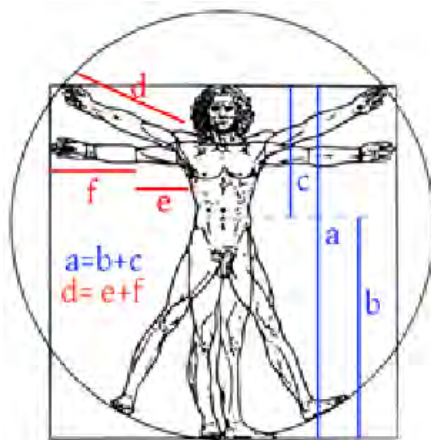


2.2 – L'attività dell'uomo vitruviano

Per approfondire l'uso delle proporzioni abbiamo rispolverato uno studio di più di 2 mila anni fa, quando l'architetto e scrittore romano Marco Vitruvio Pollione scrisse il trattato “De Architectura” nel quale propose uno studio sulle proporzioni del corpo umano. Da lì prese spunto un eclettico fiorentino, artista, ingegnere, pittore, filosofo, scienziato che a cavallo del 1500 arricchì la storia dell'uomo lasciandoci eredi di statue meravigliose o di quadri oggi tra i

più celebri al mondo, come la Gioconda. Sì, stiamo parlando di Leonardo da Vinci. Nel 1490 disegnò l'uomo vitruviano a penna e inchiostro su carta che oggi è presente sulle nostre monete da 1 euro, ma dobbiamo a Vitruvio e all'amico di Leonardo, l'architetto Martini, l'esistenza di quel famoso disegno. Infatti, Leonardo non conosceva il latino (si definiva per questo "omo senza lettere", pensate un po') e il lavoro di Vitruvio gli fu spiegato dall'amico.

L'opera rappresenta un'occasione per parlare anche di geometria e del significato di quelle figure "perfette", cerchio e quadrato, nel disegno di Leonardo: Il cerchio simboleggia il Cielo, la perfezione divina, contrapposto al quadrato, il mondo terreno.



Tutti hanno in mente il disegno ma pochi sanno che lo stesso è accompagnato da una scritta a rovescio, come usava Leonardo.

Egli corregge l'architetto romano secondo il quale il rapporto fra altezza e piede di una persona era pari a 6 mentre

per il genio rinascimentale il rapporto corretto è 7. A questo punto, tra arte, storia, educazione fisica e anatomia iniziamo a verificare se è proprio vero che «Tanto apre l'omo nelle braccia, quanto ella sua altezza” ed altre caratteristiche, quali l’ombelico, baricentro del corpo. Aggiungo un po’ di suggestione introducendo il concetto del numero aureo, il rapporto perfetto, e la serie di Fibonacci, la cui sequenza alcuni studenti più intuitivi non tardano a scoprire. Il modello proporzionale di Leonardo rappresentava il più alto segno dell'armonia divina, e ogni studente vuol verificare se anche il suo corpo si avvicina a questa perfezione.

Il pretesto per introdurre le proporzioni è quello di analizzare gli sport praticati abbinandoli alla struttura fisica dell'alunno. Abbiamo appreso il significato dei termini brachitipo, normotipo, longitipo, nei quali prevale rispettivamente lo sviluppo del tronco su quello degli arti (brachilineo), oppure vi è una proporzione “normale” fra la lunghezza degli arti e quella del tronco (normolineo) o infine la lunghezza degli arti prevale su quella del tronco (longilineo).

Poiché nella seconda classe si tratta il corpo umano, approfittiamo per approfondire la struttura scheletrica e muscolare e facciamo notare che riconosciamo un individuo come bambino o adulto, al di là delle dimensioni, in base al rapporto delle parti corporee. Una testa grande (un quarto dell'altezza) indica un neonato, una testa grande un ottavo caratterizza un adulto.

Così passiamo a misurare la distanza tra il vertice della testa ed il piano di appoggio della sedia sulla quale si è seduti (ischio), appoggiando i piedi a terra e tenendo collo e busto

eretti, perpendicolari alle cosce (altro concetto geometrico non scontato e acquisito da tutti). Lunghezza di braccio, avambraccio, gambe, posizione dell'ombelico sono tutte misure che, messe in rapporto, permettono di individuare la forma armonica.

Il collega di educazione artistica insegna questi rapporti per rappresentare correttamente bambini, adolescenti e adulti, la giusta posizione degli occhi rispetto a mento e naso e così via, mentre il professore di educazione fisica fa notare come ci sia un risvolto pratico nel prevalere di una parte o dell'altra nella proporzione corporea. Infatti, in campo sportivo, pugili e ginnasti sono perlopiù brachitipi mentre pallavolo e basket richiedono longilinei, il che non vuol dire necessariamente che un giocatore di basket debba essere alto (certo, è meglio). In genere un brachilineo riesce bene negli sport di forza, come sollevamento pesi, un normotipo è bravo nelle discipline di velocità e mezzofondo e un longitipo eccelle nel salto e nelle corse di resistenza.

In questa fase gli studenti si osservano con occhi diversi e imparano a comprendere che un ragazzo ancora basso (a questa età crescono anche di 20 cm in un anno) può essere longitipo pur essendo più basso di un brachitipo. Insomma, capite che stiamo parlando di proporzioni.

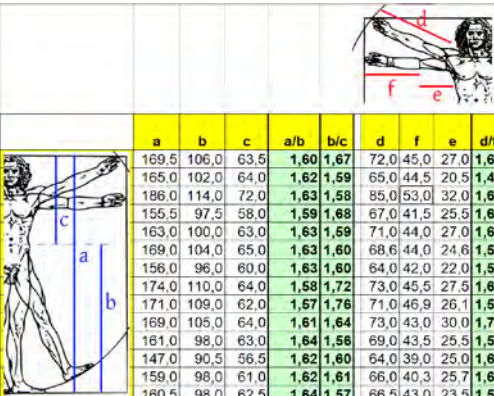
Si parte perciò dalle misure dell'altezza dello studente, dell'avambraccio, del braccio completo, della distanza tra ombelico e base dei piedi. In questa fase è utile aiutare i giovani - sempre meno abituati a misurare e a usare strumenti che non siano lo smartphone - a prendere correttamente le misure, utilizzando ad esempio un grosso dizionario appoggiato sulla testa perpendicolarmente alla base

d'appoggio per determinare la corretta lunghezza. Piegare il gomito è un altro suggerimento utile per misurare esattamente la lunghezza dell'avambraccio dal gomito alla punta delle dita, per metterlo poi in rapporto con la lunghezza intera del braccio, a partire dall'acromion, tra scapola e clavicola.

Notiamo che non è necessario prendere la misura da gomito ad acromion: se abbiamo già le altre due misure basta una differenza (nel nostro disegno dell'uomo vitruviano $e = d - f$). Meditiamo però sul fatto che quella terza misura può rappresentare una conferma o la scoperta di un errore di misura e perciò, per essere sicuri, è meglio abbondare con le misure.



Contestualmente al lavoro di misura meticolosamente eseguito da un gruppo di studenti, un altro (a rotazione) riporta i dati su un foglio di calcolo, imparando ad usare le operazioni base. Ad esempio, abbiamo impostato una funzione per ottenere la misura dall'ombelico ai piedi conoscendo solo le misure dell'altezza e della distanza tra ombelico e vertice della testa e abbiamo impostato un'operazione che mette in rapporto l'altezza (a) di una persona con la distanza tra ombelico e punta dei piedi (b). a/b è risultato per tutti molto vicino a 1,61, cioè il rapporto aureo.



	a	b	c	a/b	b/c	d	f	e	d/f	f/e	piede	Corpo/ piede
Aaron	169.5	106.0	63.5	1,60	1,67	72.0	45.0	27.0	1,60	1,67	25.6	6.6
Alessia	165.0	102.0	64.0	1,62	1,59	65.0	44.5	20.5	1,46	2,17	26.1	6.3
Dario	186.0	114.0	72.0	1,63	1,58	85.0	53.0	32.0	1,60	1,66	28.5	6.5
Emanuele	155.5	97.5	58.0	1,59	1,68	67.0	41.5	25.5	1,61	1,63	24.6	6.3
Emma	163.0	100.0	63.0	1,63	1,59	71.0	44.0	27.0	1,61	1,63	23.5	6.9
Francesco	169.0	104.0	65.0	1,63	1,60	68.6	44.0	24.6	1,56	1,79	25.2	6.7
Giada	156.0	96.0	60.0	1,63	1,60	64.0	42.0	22.0	1,52	1,91	25.2	6.2
Ilaria	174.0	110.0	64.0	1,58	1,72	73.0	45.5	27.5	1,60	1,65	25.0	7.0
Lisa	171.0	109.0	62.0	1,67	1,76	71.0	46.9	26.1	1,51	1,80	25.5	6.7
Luca	169.0	105.0	64.0	1,61	1,64	73.0	43.0	30.0	1,70	1,43	25.5	6.6
Matteo	161.0	98.0	63.0	1,64	1,56	69.0	43.5	25.5	1,59	1,71	25.5	6.3
Samuel	147.0	90.5	56.5	1,62	1,80	64.0	39.0	25.0	1,64	1,56	24.6	6.0
Simone	159.0	98.0	61.0	1,62	1,61	66.0	40.3	25.7	1,64	1,57	24.7	6.4
Zoe	160.5	98.0	62.5	1,64	1,57	66.5	43.0	23.5	1,55	1,83	25.0	6.4
MEDIA	164,7	102,0	62,8	1,61	1,63	69,7	43,9	25,9	1,59	1,70	25,3	6,5

Nella tabella sono riportate le misure come indicate nei disegni dell’uomo vitruviano. a/b e b/c esprimono il rapporto relativo all’altezza mentre d/f e f/e riguardano la parte delle braccia. Il rapporto dovrebbe il più possibile avvicinarsi a quello aureo pari a 1,61. Le celle barrate indicano le situazioni nelle quali il valore si discosta più del 10%: errore nella misura o proporzioni del corpo diverse dalla norma? Guardando le medie notiamo che sono tutte molto vicine a 1,61.

Mettiamo in rapporto anche le misure relative alle parti delle braccia ed è stupefacente quanto anche questi rapporti siano vicini al numero 1,61, seppure con qualche anomalia, che sarà motivo di discussione.

Sulla tabella c’è molto da discutere; elaboriamo medie, scarti, valutiamo eventuali differenze tra maschi e femmina, commentiamo l’appartenenza al gruppo dei brachi- normo- o longitipi, calcoliamo in base alla grandezza dei piedi quale altezza potrebbe essere raggiunta da un compagno una volta terminato lo sviluppo. Ancora, per esercitarci sul calcolo del termine incognito, data la misura dall’ombelico ai piedi ci chiediamo quale dovrebbe essere l’altezza per rispettare il

numero aureo. Insomma, utilizziamo rapporti e proporzioni in tutti i modi per ipotizzare, verificare, prevedere.

Un ulteriore sviluppo del nostro lavoro dinamico e divertente è stato quello di misurare la lunghezza del piede per verificare se aveva ragione Vitruvio o Leonardo. La realtà, per noi, sta nel mezzo, nel senso che siamo tra il rapporto 7 di Leonardo e il rapporto 6 di Vitruvio mettendo in rapporto altezza e lunghezza del piede.

È stato interessante notare che alcuni studenti hanno individuato degli errori di misura perché i rapporti erano anomali e anche la misura delle scarpe europea (il classico 39 delle femmine e il 44 dei maschi) è stato discusso dai ragazzi comparandolo con le misure in centimetri e individuando alcune incongruenze nelle misure.

Alcuni dati che abbiamo messo in evidenza sono abbastanza discosti dal numero aureo (parliamo sempre di percentuali di scostamento inferiori al 10%) e questo diventa un argomento utile per discutere del margine di errore, della distrazione ma anche di studenti che hanno un rapporto tra le parti ancora effettivamente lontano da quello aureo.

Video: <https://tinyurl.com/uomovitruviano>



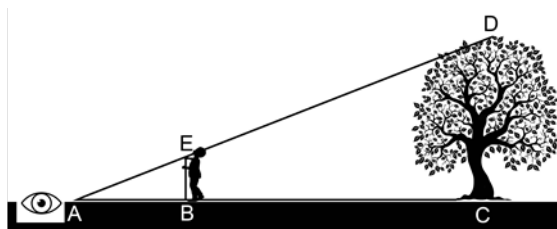
2.3 - L'attività del teorema di Talete per misurare l'altezza dell'albero

Ancora una volta si esce nell'aula sotto il cielo, per una attività dinamica di matematica! Oramai abbastanza pratici

sulle proporzioni, decidiamo di utilizzarle per calcolare l’altezza del nostro acero senza doverci arrampicare sopra.

Disegniamo sulla lavagna all’aperto un triangolo rettangolo appoggiato su un cateto ed un segmento ad esso interno, parallelo all’altezza (cioè, all’altro cateto).

Ci rendiamo conto che è possibile creare una situazione analoga a questo schema tracciando un triangolo rettangolo che ha un vertice sulla cima dell’albero (D), uno alla base (C) ed uno nel punto di vista dal quale uno studente osserverà (A).



La prima misura, facile da prendere, è quella del segmento AC, cioè la distanza tra il punto di vista di uno studente disteso a terra e la base del tronco dell’albero. L’altezza CD è quella che dobbiamo calcolare.

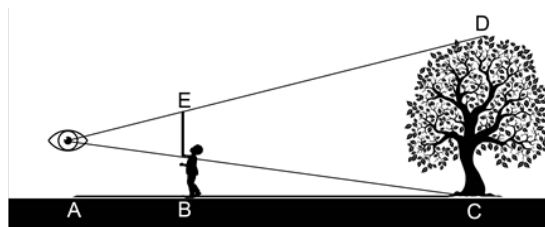
Osservando lo schema gli studenti scoprono che dobbiamo “inventarci” un segmento BE, per realizzare la proporzione:

$$AB: AC = BE: CD$$

Si decide di usare un manico di scopa. Qualcuno propone di tagliarlo esattamente di lunghezza 1 metro, ma le bidelle non sarebbero contente. Una studentessa comprende che non è necessario usare un bastone di 1 metro ma che va bene qualsiasi misura, anche se il calcolo sarà un po’ più difficile. Qualcuno propone di tendere una corda per realizzare il segmento AD, ma bisognerebbe volare...

Per approssimazioni si arriva ad intuire che basta distendersi a terra sul punto A e far spostare il compagno con il bastone BE finché si traguarda il punto E con il punto D.

In queste fasi pratiche si scoprono una serie di situazioni che possiamo chiamare “regole” o “proprietà” che in classe, con un semplice disegno, non verrebbero scoperte. Vediamo ad esempio che è necessario che il bastone sia tenuto perpendicolarmente al suolo, e non inclinato. Scopriamo che l’occhio di chi osserva dev’essere il più vicino possibile al suolo e ci chiediamo se questo lavoro potrebbe anche essere svolto stando in piedi, anziché sdraiati a terra. A quel punto il triangolo non sarebbe più rettangolo; funzionerebbe ugualmente?



Si discute delle unità di misura. Infatti, non avendo a disposizione un metro, il primo tentativo l’abbiamo fatto utilizzando i piedi di un compagno come unità di misura, notando che l’unità di misura inglese della lunghezza è proprio il piede. In questa fase vediamo anche che è necessario usare i decimali (“mezzo piede”, “otto decimi di piede”) per essere più precisi.

Insomma, questo lavoro all’aperto ha molti risvolti positivi e utili, primo fra tutti il fatto che si lavora assieme, in collaborazione, tutti concentrati e partecipi per risolvere il nostro problema, senza competizione ed ansia di giudizio. Il

fatto di vedere quello che si sta facendo è di grande aiuto per scoprire importanti proprietà.

Il passaggio finale, rientrati in classe, è quello di convertire i “piedi” in centimetri e risolvere la proporzione:

$$CD = AC \times BE : AB$$

$$CD = 30 \text{ piedi} \times 3,8 \text{ piedi} / 4,6 \text{ piedi} = 24,8 \text{ piedi}$$

Siccome il piede di Luca misura 28,4 cm, l’altezza dell’albero è $24,8 \times 28,4 = 704$ cm

Il nostro albero misura poco più di 7 metri. Avremo modo nei prossimi anni di verificare quanto rapidamente crescerà. Concludiamo osservando che anche la rapidità di crescita può essere espressa in percentuale, cioè con un rapporto tra il valore attuale e quello precedente. Lo chiamiamo “tasso di crescita”.



Video: <https://tinyurl.com/talete-prop>



3 – Il test

La prima attività proposta per un approccio alle proporzioni e per imparare i termini è stata quella dei fogli di carta con il numero.

Appena terminata l'attività all'aperto (circa un'ora) abbiamo subito verificato l'apprendimento, impedendo ai ragazzi di studiare o di ripassare l'argomento a casa. Abbiamo immediatamente somministrato un test contenente 4 esercizi:

- il primo prevedeva il calcolo dell'elemento mancante in una proporzione in 3 diverse situazioni (massimo 6 punti, 2 per ogni situazione);
- il secondo richiedeva la definizione di proporzione (massimo 4 punti);
- il terzo, data una proporzione, chiedeva di applicare le proprietà dell'invertire, del permutare i medi e gli estremi e scrivere la proprietà fondamentale (massimo 4 punti uno per ogni richiesta).

4 – Risultati

I risultati del Test sono stati raccolti nella Tabella 1. Nella prima colonna ci sono i nomi degli studenti, dalla seconda alla quinta ci sono i risultati dei quattro esercizi. Nelle ultime tre colonne sono riportati il punteggio totale, in termini assoluti, in percentuale e il voto finale in decimi. Nella penultima riga sono riportate le medie ottenute dagli studenti nelle quattro esercitazioni e le medie dei punteggi finali; l'ultima riga mostra le percentuali di successo per ogni esercizio.

studente	ex. 1	ex. 2	ex. 3	ex. 4	TOT	%	voto
massimo	6	4	4	4	18	100	
BF	6	2	4	4	16	89	9
DE	6	4	4	4	18	100	10
FS	6	4	4	4	18	100	10
FE	3	2	3	4	12	67	6/7
GL	6	4	4	4	18	100	10
GS	6	4	4	4	18	100	10
LA	5	1	4	4	14	78	8-
MA	6	2	2	3	13	72	7+
PI	6	4	3	4	17	94	9/10
PL	6	4	4	3,5	17,5	97	10-
RG	6	2	3	3	14	78	8-
SM	6	3	3	4	16	89	9
ZZ	6	4	4	4	18	100	10
media	5,7	3,1	3,5	3,8	16,1	89,5	9
% successo	95	77	88	95	90	90	

Come si evince dalla tabella, i risultati ottenuti dal test sono molto buoni con una media di 9 su 10. Anche gli studenti con difficoltà oggettive hanno ottenuto buoni risultati: 7 su 10.

L'esercizio di maggior successo (95%) è il primo, con il calcolo dell'elemento mancante. 11 studenti su 14 l'hanno svolto perfettamente dopo solo un'ora di attività all'aperto.

L'esercizio dove hanno riscontrato maggiore difficoltà è stato l'esercizio 2 (77% di successo), con una media di 3 su 4; qui si trattava di scrivere la definizione di cosa sia una proposizione.

A spiegazione di questo risultato meno brillante ricordiamo che il test è stato svolto subito dopo l'attività all'aperto e senza compiti e studio domestico per memorizzare terminologie e definizioni; inoltre, gli studenti di solito hanno difficoltà a esprimere i concetti e ad usare un linguaggio matematico

appropriato, per non parlare della difficoltà linguistica per gli studenti stranieri.

Nell'esercizio, 3 dove veniva chiesto di applicare le varie proprietà ad una data proporzione, quella dove hanno avuto maggiore difficoltà è stata la proprietà fondamentale, seguito da quella dell'invertire. Il termine "fondamentale" li ha confusi un po'.

La proprietà dell'invertire è stata anche quella che ha messo in maggiore difficoltà gli studenti durante le attività all'aperto come abbiamo notato nei video per FE. e MA. Per superare questa difficoltà si potrebbe spiegare vivendola con il corpo in due passaggi, prima invertendo a sinistra i termini antecedente e conseguente e facendo vedere che non si ottiene più una proporzione, e poi invertendo gli altri due. Inoltre, esiste una forte correlazione tra gli errori commessi nel test e quelli commessi nel gioco. Ciò significa che rinforzare ciò che si "vive" con il corpo può portare anche a una migliore comprensione del concetto matematico, in questo caso delle proporzioni.

Abbiamo voluto sondare anche i livelli di ansia generati dal Test. Ricordiamo che gli studenti non erano stati preventivamente avvertiti e questo non li ha entusiasmatisi. È stato chiesto loro di votare, assegnando 5 livelli da A, livello di ansia molto basso a E, un livello di ansia molto alto.



Innanzitutto, guardando il grafico a torta della figura precedente, nessuno ha votato E, il 50% ha votato C e quindi il livello medio, il 29% il livello A e quindi un livello di ansia molto basso e solo il 7% ha riscontrato un livello medio-alto di ansia.

Il Test a sorpresa ha sicuramente suscitato qualche ansia tra gli studenti ma visti i risultati, molto limitati. Per il 29% degli studenti il test non ha suscitato alcuna ansia e solo il 7% ha rilevato un livello di ansia medio-alto.

5 - Conclusioni

Sperimentare un concetto matematico con il corpo, ad esempio diventando una proporzione, aiuta gli studenti non solo a memorizzare le terminologie ma anche a rendere le definizioni meno astratte e più comprensibili. Diventa anche più facile intervenire dove ci sono difficoltà cognitive o addirittura linguistiche. Inoltre, organizzare il lavoro sotto forma di gioco rende la matematica più piacevole e spinge gli studenti a essere più motivati e a dare il meglio di sé.

Come lavoro futuro prevediamo di confrontare i risultati ottenuti con una classe in cui viene utilizzato un metodo più

tradizionale. Inoltre, sono previste varie attività all'aperto per immergere le proporzioni in un contesto reale, inclusa la misurazione delle aule della scuola per realizzare un progetto in scala. Ancora, le dimensioni e le posizioni dei pianeti del sistema solare saranno calcolate in scala e la loro reale disposizione sarà simulata nel giardino. Lo stesso lavoro ma su carta verrà svolto nell'altra classe campione. Al termine delle attività per entrambe le classi, verrà testata la capacità degli studenti di applicare le proporzioni in diversi contesti reali proponendo loro problemi da impostare e risolvere.

Bibliografia

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

Abrahamson, D., Gutiérrez, J. F., Charoenying, T., Negrete, A. G., Bumbacher, E. (2012). Fostering mathematical discovery: one tutor's strategies for ushering the construction of proportional schemas via mediated embodied interaction, in *annual meeting of the American Educational Research Association*, pp. 13-17 (SIG Learning Sciences), Vancouver, April.

Abrahamson, D., Sánchez-García, R. (2016). Learning is moving in new ways: The ecological dynamics of mathematics education. *Journal of the Learning Sciences*, 25(2), 203-239, <https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1143370>

Clarke, D. J., Chan, M. C. E. (2019). The use of video in classroom research: window, lens or mirror, in L. Xu, G. Aranda, W. Widdjaja, & D. Clarke (Eds.), *Video-based research in education: cross-disciplinary perspectives*, pp. 5-18, Routledge.

Daher, W., Baya'a, N. (2012). Characteristics of middle school students learning actions in outdoor mathematical activities with the cellular phone, *Teaching Mathematics and its Applications*, 31(3), 133-152.

Ferreira, J. M. (2021). What if we look at the body? An embodied perspective of collaborative learning, *Educational Psychology Re-view*, 33, 1455-1473,
[https:// doi. org/ 10. 1007/ s10648- 021- 09607-8](https://doi.org/10.1007/s10648-021-09607-8)

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Fuson, K. C., Abrahamson, D. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual-phase problem-solving models, in J. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*, pp. 213–234.

Glenberg, A. M. (2010). Embodiment as a unifying perspective for psychology, *WIREs Cognitive Science*, 1, 586-596.

Kelton, M. L., Ma, J. Y. (2018). Reconfiguring mathematical settings and activity through multi-party, whole-body collaboration, *Educational Studies in Mathematics*, 98, 177-196.

Kosko, K. W., Ferdig, R. E., Zolfaghari, M. (2021). Preservice teachers’ professional noticing when viewing standard and 360 video, *Journal of Teacher Education*, 72(3), 284-297.

Lepellere, M. A., Gasparo, D. (2021). Outdoor activities to discover medians and centroid of triangles, in M. Kingston & P. Grimes (eds.), *Proceedings of the Eighth Conference on Research in Mathematics Education in Ireland (MEI 8)*, 260–267.

Lepellere, M. A., Gasparo, D. (2022). An outdoor activity to learn operations with integers, in *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 123-130.

Merleau-Ponty, M. (2012). *The Phenomenology of Perception*, Transl. ed D. A. Landes. London; New York: Routledge.

Moffett, P. V. (2011). Outdoor mathematics trails: an evaluation of one training partnership, *Education 3-13*, 39(3), 277-287.

Moss, M. (2009). Outdoor mathematical experiences: Constructivism, connections, and health, *Mathematics Teacher Education*, 4, 263-273.

Radford, L. (2008). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings, *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111-126,
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3>

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adlef, A. K., Yang, X., Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs, *ZDM – Mathematics Education*, 53, 119-134.

Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 415-432,
<https://doi.org/10.1007/s10857-017-9381-3>

Sinclair, N., de Freitas, E. (2019). Body studies in mathematics education: diverse scales of mattering. *ZDM Mathematics Education*, 51, 227-237,
<https://doi.org/10.1007/s11858-019-01052-w>

Varela, F. J., Thompson, E., Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*, MIT Press.

Weston, T. L., Amador, J. M. (2021). Investigating student teachers' noticing using 360 videos of their own teaching. *Journal of Technology and Teacher Education*, 29(3), 311-340.

QUARTA SESSIONE

Matematica per la Scuola Secondaria di II grado

I poliedri regolari

Il fascino della simmetria

Luigi Tomasi*

*Università di Padova (prof. a contratto); luigi.tomasi@unipd.it



Sunto: *In questo articolo presentiamo alcune proprietà dei poliedri, la caratteristica di Eulero per questi solidi e una digressione sul genere di una superficie. L'uso di un software di geometria dinamica 3D può servire per costruire i poliedri regolari ed esaminarne le proprietà di simmetria.*

Parole Chiave: *Poliedri regolari; simmetrie; software di geometria dinamica*

Abstract: *In this article we present some properties of polyhedra, the Euler characteristic for these solids and a digression on the genus of a surface. The use of a 3D dynamic geometry software can be used to construct regular polyhedra and examine their symmetry properties.*

Keywords: *Regular polyhedra, symmetries; dynamic geometry software*

1 – Introduzione

In questo articolo presento sinteticamente i poliedri regolari e alcune loro proprietà. Si tratta di un tema fondamentale della geometria dello spazio che viene trattato a conclusione e coronamento degli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.), nel libro

XIII (Frajese e Maccioni, 1970). Questo libro si apre con una serie di proposizioni relative alla sezione aurea, prosegue con lo studio di alcune grandezze legate ai poligoni regolari e si conclude con la Proposizione 18, che stabilisce i rapporti tra gli spigoli dei cinque poliedri regolari inscritti in una stessa sfera. Subito dopo la dimostrazione di questa proposizione, Euclide scrive:

“Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette [i cinque poliedri regolari] non può costruirsi nessun’altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali”.

Questo enunciato è il traguardo finale dell’opera di Euclide e molto di quel che lo precede ne è la preparazione. In effetti in esso confluisce il materiale di un po’ tutti i libri degli *Elementi*.

Prima ancora degli *Elementi*, lo studio dei poliedri regolari risale però alla Scuola pitagorica e a Teeteto (ca. 415-369 a.C.).

I poliedri regolari hanno avuto una grande influenza e potere di suggestione su matematici, filosofi ed artisti nel corso dei secoli, date le loro proprietà di simmetria. Devono il loro nome di “solidi platonici” a Platone (427-347 a.C.) che tratta di essi nel dialogo *Timeo*, considerandoli come gli elementi ultimi della materia.

Dopo Pitagora, Platone ed Euclide, sui poliedri sarebbe necessario citare molti altri matematici, filosofi ed artisti. Più avanti mi limiterò invece a citare soltanto Eulero (Euler, 1758).

2 - La definizione di poliedro e i poliedri regolari

La definizione più diffusa di poliedro, presente nei libri di testo scolastici, è la seguente: un poliedro è una figura nello

spazio delimitata da facce a forma di poligono in modo che due di esse non appartengano allo stesso piano. Un poliedro ha almeno quattro vertici e quattro facce. Tuttavia questa definizione si rivela molto “ingenua” perché può comprendere alcuni casi “patologici” di figure che oggi non sono considerate come poliedri. Si introduce quindi la seguente definizione (Dedò, 1999).

Una *superficie poliedrale* è definita come segue:

- (i) l'intersezione tra due facce, se non è vuota, è un vertice o uno spigolo
- (ii) ogni spigolo appartiene esattamente a due facce
- (iii) due facce adiacenti non sono complanari
- (iv) comunque si fissi un vertice v , e due facce f e g che contengono v , allora esiste una catena di facce $f = f_1, f_2, \dots, g = f_n$ tutte contenenti v ed f_i sia adiacente a f_{i+1} , per ogni $i = 1, \dots, n - 1$.

Commento. La proprietà (i) serve, ad esempio, per togliere dai poliedri il solido formato da due cubi sovrapposti (figura 1).

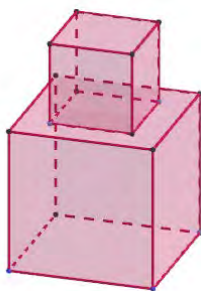


Figura 1. Cubi sovrapposti: non è un poliedro

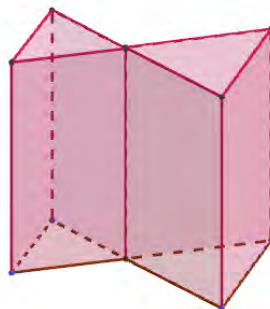


Figura 2. Spigolo in comune a più di due facce

La proprietà (ii) della definizione elimina il caso della figura 2, in cui uno spigolo appartiene a più di due facce. La

proprietà (iv) della definizione serve per escludere i seguenti casi di solidi (figura 3) dai poliedri.

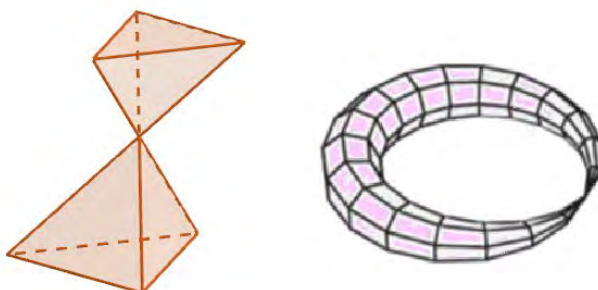


Figura 3. Anche questi solidi non sono poliedri

Si dà inoltre la definizione di superficie poliedrale semplicemente connessa (o di genere 0) se comunque si consideri una poligonale chiusa, formata da spigoli della superficie, questa è il bordo di una unione di facce. Questa proprietà serve per togliere dai poliedri che prenderemo in considerazione (poliedri semplicemente connessi) il solido rappresentato nella figura 4, topologicamente equivalente a una “ciambella”, ossia a una superficie toroidale. Questo solido (figura 4) può essere considerato un poliedro, ma non è semplicemente connesso.

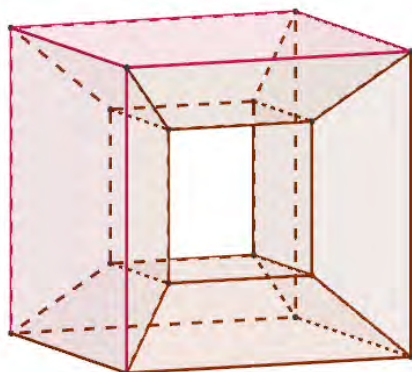


Figura 4. Superficie non semplicemente connessa

Una superficie poliedrale divide lo spazio in due sottoinsiemi; si chiama *poliedro* la parte dello spazio che è limitata. Un poliedro si dice convesso se un qualsiasi piano che contiene una faccia lascia tutti i vertici del poliedro, non appartenenti al piano considerato, in uno stesso semispazio.

Un poliedro convesso si dice *regolare* se sono verificate le seguenti tre proprietà:

- (a) le sue facce sono poligoni regolari
- (b) le facce sono tra loro congruenti
- (c) i diedri tra due facce aventi uno spigolo in comune sono isometrici.

Non bastano le prime due condizioni per definire un poliedro regolare; un controesempio è fornito dal poliedro ottenuto dall'unione di due tetraedri regolari con una faccia in comune (figura 5), che è un esaedro non regolare.

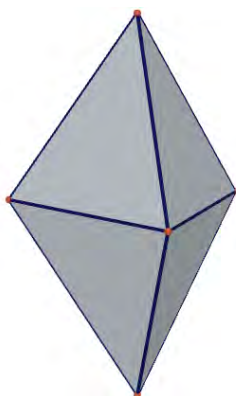


Figura 5. Esaedro non regolare

2 - La caratteristica di Eulero per i poliedri

Nella sterminata *Opera omnia* (in 76 volumi di grande formato) di Eulero (1707-1783), questa formula si trova, ma senza una “solida” dimostrazione - è Eulero stesso che lo afferma - in un articolo scritto nel 1750, ma pubblicato nel 1758, con il titolo *Elementa doctrinae solidorum*, contenuto nel vol. 26 dell’*Opera Omnia* (Demattè e Tomasi, 2022).

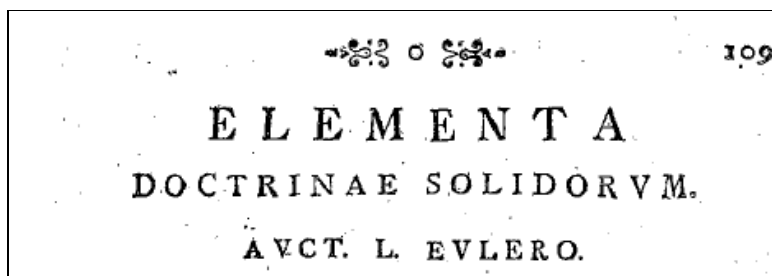


Figura 6. Intestazione dell’articolo di Eulero

Si può dimostrare che per una vasta classe di poliedri (quelli semplicemente connessi) –compresi ovviamente i poliedri regolari- vale la seguente relazione: $V - S + F = 2$.

Eulero nella Proposizione IV afferma:

In ogni poliedro ("solido hedris planis incluso" in Eulero) la somma del numero dei vertici e del numero delle facce eccede di 2 il numero degli spigoli: $V + F = S + 2$.

Questa formula viene introdotta nella quarta proposizione dell'articolo citato (figura 7).

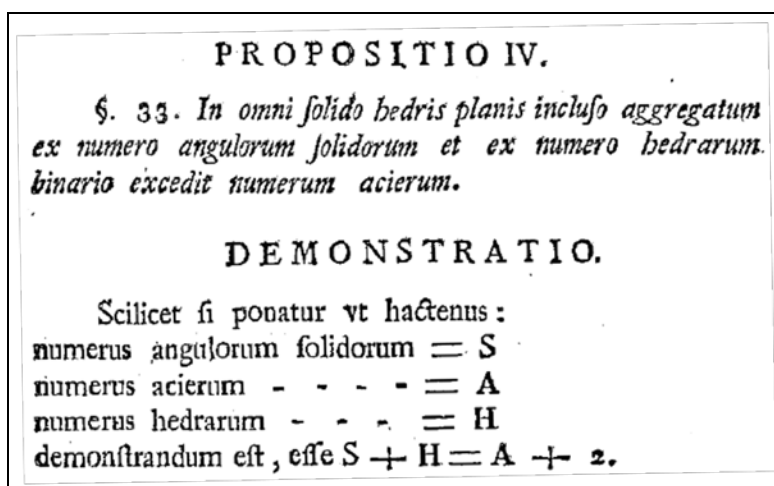


Figura 7. Proposizione IV dell'articolo di Eulero

Il numero 2 che compare in questa formula viene chiamato la *caratteristica* di Eulero dei poliedri (semplicemente connessi).

Nella scuola secondaria si può dare una "dimostrazione" semi-sperimentale di questa formula, con l'uso di un modello fisico di poliedro (si considera la superficie poliedrale) oppure eventualmente con l'aiuto di un software di geometria dinamica 3D, operando su un poliedro a facce triangolari. Si

toglie inizialmente una faccia e progressivamente si tolgono le altre facce del poliedro (in modo opportuno), fino a lasciarne una sola.

Una “dimostrazione” semi-sperimentale della relazione di Eulero

Consideriamo un poliedro convesso con le facce triangolari (figura 8). Ci possiamo sempre ricondurre a una superficie con le facce tutte triangolari: se un solido ha una faccia non triangolare, scelto un vertice di questa faccia, si tracciano le diagonali uscenti da questo vertice. In questo modo si ottiene una superficie che ha le facce tutte triangolari. Tuttavia quella che abbiamo ottenuto non è più, in base alla definizione, una superficie poliedrale, in quanto, per esempio, non verifica alla proprietà (iii) della definizione.

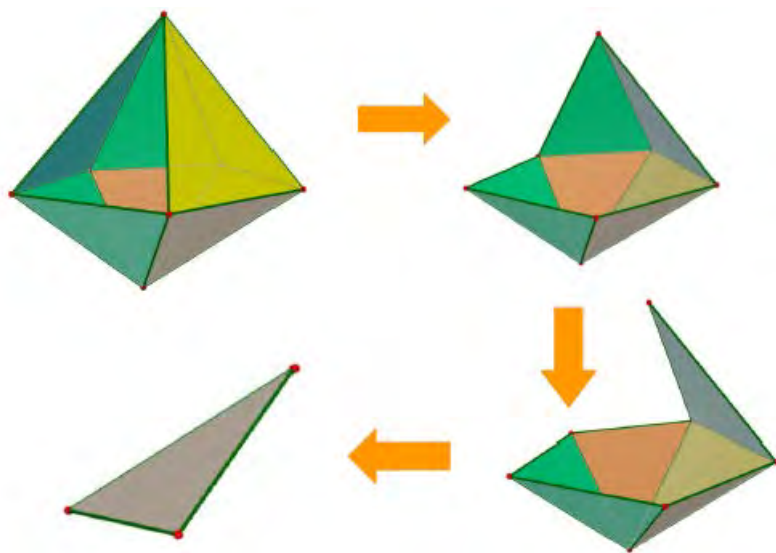


Figura 8. Dimostrazione semi-sperimentale della formula di Eulero

Poniamo inizialmente $F + V - S = x$. Togliamo solo la prima faccia (scelta a caso), intesa come superficie aperta,

senza gli spigoli e i vertici. In questo modo si ha che è diminuito (di 1) solo il numero delle facce. Quindi dopo questa eliminazione della prima faccia si ha: $f + v - s = x - 1$, dove abbiamo indicato con f , v , s il numero di facce, di vertici e di spigoli “correnti”, dopo aver tolto la prima faccia.

Togliendo ora una faccia alla volta, tranne l'ultima, si ottiene $f + v - s = x - 1$ (questo numero non cambia). Infatti, nel togliere successivamente le facce, una alla volta, le operazioni “lecite” sono di due tipi:

(a) togliere una faccia con un solo spigolo libero: f diminuisce di 1, v non cambia, s diminuisce di 1; quindi $f - 1 + v - (s - 1) = f + v - s = x - 1$;

(b) togliere una faccia con due spigoli liberi: f diminuisce di 1, v diminuisce di 1, s diminuisce di 2 (la faccia è un triangolo); quindi si ha

$$f - 1 + v - 1 - (s - 2) = f + v - s = x - 1.$$

Nella “demolizione” delle facce del poliedro si deve rispettare la “regola” di non spezzare la superficie in due o più parti (la figura deve rimanere semplicemente connessa). Rimane infine, come ultima faccia, un triangolo; quindi si ha: $1 + 3 - 3 = x - 1$, ossia $x = 2$. $\square$

Commento. Se le facce di un poliedro non sono triangolari, tracciando le diagonali da un (solo) vertice è possibile trasformarle in triangoli. Se consideriamo, per esempio, una faccia a forma di quadrilatero convesso, con questo procedimento il numero dei vertici rimane inalterato, il numero delle facce aumenta di 1 e il numero di spigoli aumenta di 1. In definitiva si ottiene:

$$(F + 1) + V - (S + 1) = F + V - S = 2.$$

Un analogo ragionamento possiamo fare per una faccia pentagonale o in generale per una faccia di n lati.

Essendo $n - 3$ il numero delle diagonali che si possono tracciare da un vertice di un poligono, dopo la “triangolazione” di una faccia per il poliedro si ottiene

$$F + n - 3 + V - (S + n - 3) = F + V - S = 2 .$$

La relazione di Eulero è di carattere topologico e riguarda la natura di una superficie omeomorfa alla superficie di una sfera (superficie di genere 0). Per esempio, la figura 9 riporta un grafo tracciato sulla superficie sferica, topologicamente equivalente alla superficie di un cubo. Anche per questo grafo vale la relazione di Eulero, sostituendo a V il numero di nodi, a F il numero dei cicli minimi e a S il numero degli archi tracciati.

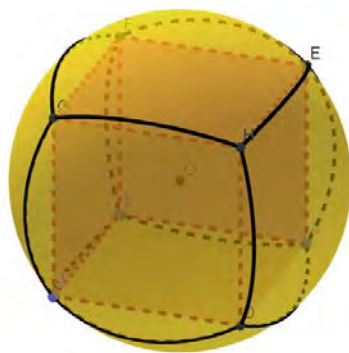


Figura 9. Grafo omeomorfo a un cubo sulla sfera

Questa relazione vale quindi più in generale per certi tipi di grafi costruiti su una superficie omeomorfa alla superficie di una sfera. Nella figura 10 si riporta l’immagine di un pallone da calcio costruito con 6 “tasselli”, aventi il bordo formato da 4 archi di circonferenza. Il grafo formato da questi archi di

circonferenza è omeomorfo al grafo formato dai vertici e dagli spigoli di un cubo. Anche per questo grafo vale la relazione di Eulero.

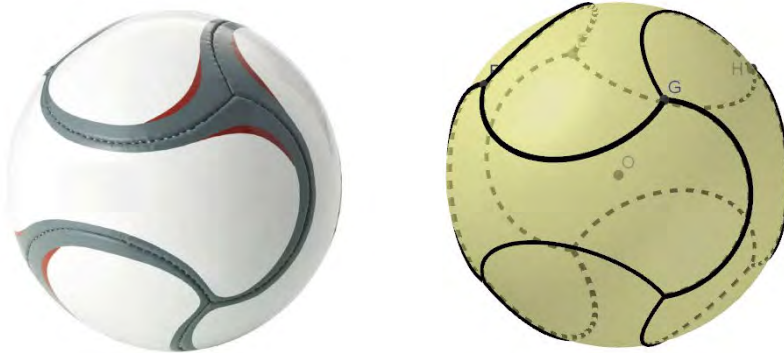


Figura 10. Pallone da calcio formato da 6 tasselli.

D'altronde un cubo è equivalente, dal punto di vista topologico, a un grafo planare (figura 11), detto diagramma di Schlegel (Victor Schlegel, 1848-1905).

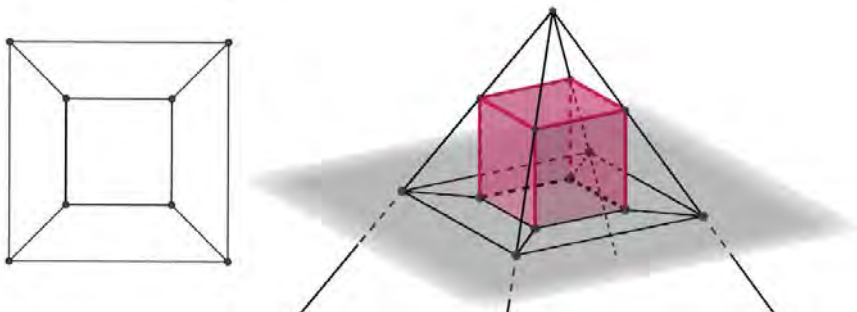


Figura 11. Grafo planare del cubo

Più in generale si dimostra che la caratteristica k di un grafo costruito su una superficie è data da:

$$k = V - S + F = 2 - 2g$$

(formula detta anche “di Eulero-Poincaré”, che generalizza la formula di Eulero), dove g è il genere della superficie.

Si definisce genere di una superficie il massimo numero di curve chiuse, prive di nodi e non intrecciate, che si possono tracciare sulla superficie senza che questa venga separata in due parti non connesse. Il genere di una superficie, utilizzando un linguaggio informale, è il numero di «buchi» della superficie ed è un invariante topologico (rispetto a omeomorfismi della superficie stessa). Riportiamo qui di seguito tre superfici (figura 12), una di genere 0 (superficie sferica), una di genere 1 (“ciambella” o superficie toroidale) e una di genere 2 (superficie di un solido con due “manici”).

È da notare che la sfera ha genere $g = 0$ e quindi si ottiene la relazione di Eulero come caso particolare della formula di Eulero-Poincaré.

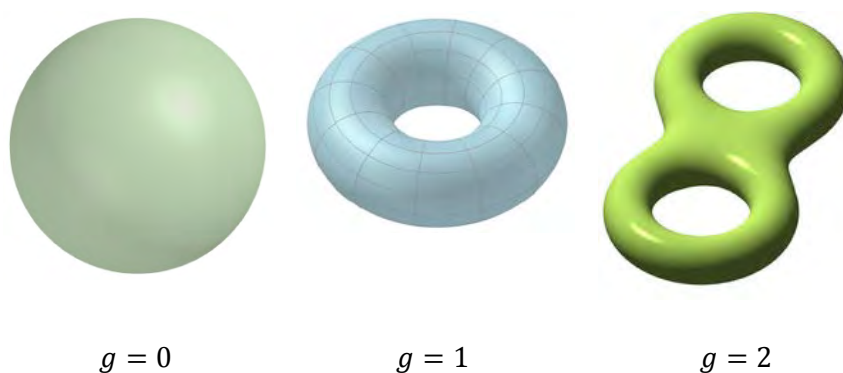


Figura 12. Alcune superfici e il loro genere

2 – I poliedri regolari

Consideriamo ora un poliedro regolare. Per caratterizzare un poliedro regolare si usa il simbolo $\{p, q\}$, una coppia ordinata, dove p è il numero di lati di una faccia, un poligono regolare, e q è il numero di spigoli che concorrono in ciascun vertice del poliedro. Questa notazione è stata introdotta dal matematico Ludwig Schläfli (1814-1895).

Osserviamo che si ha:

$$qV = 2S = pF.$$

Infatti, se contiamo i q spigoli, una volta per ciascuno dei V vertici, abbiamo contato due volte ogni spigolo: una volta per il vertice iniziale ed un'altra per quello finale. Una situazione simile si ha se contiamo i p lati di ciascuna delle F facce, poiché ogni spigolo appartiene a due facce.

Nel seguito ci serviremo inoltre della seguente proprietà di un angoloide (convesso):

la somma degli angoli delle facce che concorrono in uno stesso vertice di un poliedro convesso è minore di un angolo giro.

Dimostreremo che esistono soltanto cinque tipi di poliedri regolari: tetraedro regolare (4 facce); cubo o esaedro regolare (6 facce); ottaedro regolare (8 facce); dodecaedro regolare (12 facce) ed icosaedro regolare (20 facce). Tre di questi poliedri hanno per facce dei triangoli equilateri (tetraedro regolare, ottaedro regolare e icosaedro regolare), uno ha per facce dei quadrati (cubo) e uno ha per facce dei pentagoni regolari (dodecaedro regolare).

Una dimostrazione di questa proposizione è stata data da Euclide nella seconda parte della Proposizione 18 del Libro XIII degli Elementi (circa 300 a. C.); la riportiamo qui di seguito.

Teorema. Esistono soltanto cinque tipi di poliedri regolari.

Dimostrazione 1 (si tratta, in sostanza, della dimostrazione di Euclide).

Consideriamo un poliedro regolare e un suo angoloide. Poiché l’angoloide è convesso (e non è un semispazio), si deve verificare che la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro, ossia

$$q \frac{(p-2)\pi}{p} < 2\pi.$$

Semplificando, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Considerato che sia p (numero di lati di una faccia) che q (numero di facce di un angoloide) devono essere numeri naturali maggiori o uguali a 3, le coppie che soddisfano questa disuguaglianza sono le seguenti:

{3,3}: si ottiene il tetraedro regolare;

{3,4}: si ottiene l’ottaedro regolare;

{3,5}: si ottiene l’icosaedro regolare.

Poiché la disuguaglianza è simmetrica rispetto a p e q , sono soluzioni della disuguaglianza anche le coppie:

{4,3}: si ottiene il cubo

{5,3}: si ottiene il dodecaedro regolare.

Quindi si ottengono solo cinque tipi di poliedri regolari. $\square$

Osservazione. Si noti che questa è una dimostrazione di unicità dei cinque tipi di poliedri regolari. Euclide, quando dimostra la Proposizione 18 ha già proposto in precedenza la costruzione dei cinque poliedri regolari. Quindi ha già dimostrato la loro esistenza.

Presentiamo ora una seconda dimostrazione dello stesso teorema, che è più di carattere topologico, perché fa uso della relazione di Eulero per i poliedri (convessi).

Dimostrazione 2. Consideriamo un poliedro regolare. Allora sappiamo che valgono le seguenti relazioni:

$$q V = 2 S = p F.$$

Possiamo quindi ricavare

$$V = \frac{2 S}{q}, \quad F = \frac{2 S}{p}.$$

Sostituendo nella relazione di Eulero ($V + F = S + 2$), si ottiene

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} = S + 2.$$

Dividendo per $2S$, si ricava l'uguaglianza:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$$

e quindi la disuguaglianza:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Da questo punto in poi la dimostrazione prosegue come si è visto nella precedente dimostrazione 1. $\square$

Abbiamo visto che i poliedri regolari possono essere indicati con il simbolo $\{p, q\}$, dove p è il numero dei vertici del poligono regolare che costituisce le facce del poliedro regolare e q è il numero di spigoli che convergono in uno stesso vertice. Se si usa questa notazione i poliedri regolari sono caratterizzati dalla seguente tabella 1, dove F indica il numero delle facce del poliedro, V il numero dei vertici ed S il numero degli spigoli.

Poliedro regolare	Numero facce F	Numero vertici V	Numero spigoli S	Simbolo di Schläfli
Tetraedro	4	4	6	$\{3, 3\}$
Cubo	6	8	12	$\{4, 3\}$
Ottaedro	8	6	12	$\{3, 4\}$
Dodecaedro	12	20	30	$\{5, 3\}$

Icosaedro	20	12	30	$\{3, 5\}$
-----------	----	----	----	------------

Tabella 1. N. delle facce, dei vertici e degli spigoli dei poliedri regolari

2.1 – Dualità tra i poliedri regolari

Tra i poliedri regolari ci sono molte interessanti relazioni, una delle più importanti delle quali è la dualità. Si può, per esempio, partire da un cubo e costruire i centri delle facce. Congiungendo i centri di due facce adiacenti, in tutti i modi, si ottengono gli spigoli di un ottaedro regolare, detto duale del cubo. L’ottaedro regolare, quindi, possiede un numero di vertici che è uguale al numero di facce del cubo (figura 13). Analogamente si procede per la costruzione del cubo duale di un ottaedro regolare.

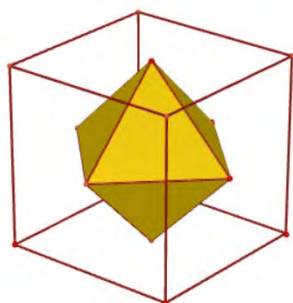


Figura 13. Cubo e duale

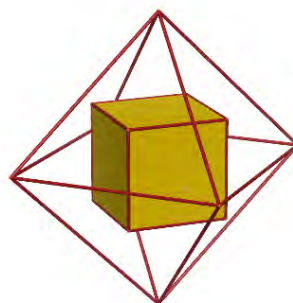
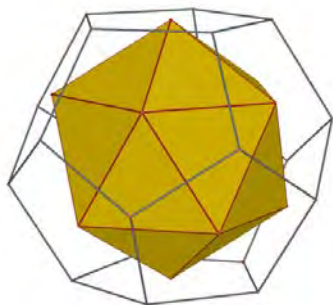
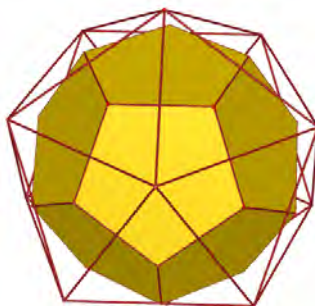


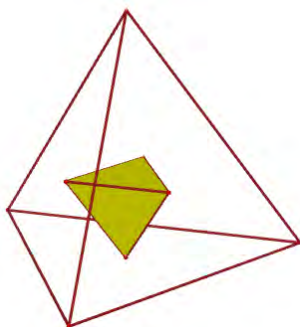
Figura 13. Ottaedro e duale

A partire da un ottaedro regolare, possiamo costruire i baricentri delle facce, che sono i vertici di un cubo (figura 15). I due solidi hanno lo stesso numero di spigoli.

La stessa relazione di dualità è presente tra il dodecaedro regolare e l’icosaedro regolare (figura 15 e figura 16).

**Figura 15. Dodecaedro reg. e duale****Figura 16. Icosaedro reg. e duale**

Il tetraedro invece è duale di se stesso (figura 17).

**Figura 17. Tetraedro regolare e duale**

2.2 - Simmetrie dei poliedri regolari

La dualità tra i poliedri regolari ci permette di studiare le simmetrie di questi solidi limitandoci a tre gruppi invece di cinque: il gruppo tetraedrale, il gruppo ottaedrale e il gruppo icosaedrale. Si iniziano ad esaminare gli assi di simmetria, i piani di simmetria di questi solidi; si scopre che il tetraedro regolare non ha un centro di simmetria, mentre gli altri quattro poliedri hanno un centro di simmetria.

Vale la seguente proprietà:

Poliedri duali hanno lo stesso gruppo di simmetria.

Questo proprietà segue immediatamente dal fatto che due poliedri duali hanno gli stessi assi di simmetria e gli stessi piani di simmetria. Inoltre, se hanno un centro di simmetria, poliedri duali hanno anche lo stesso centro di simmetria.

Si può iniziare lo studio delle simmetrie dei poliedri regolari a partire dal cubo e dal tetraedro regolare (con l’aiuto di un software di geometria dinamica 3D e di modelli concreti).

Tra le simmetrie si distinguono quelle pari (che mantengono l’orientamento destrorso di un tetraedro orientato) da quelle dispari (che trasformano l’orientamento destrorso di un tetraedro orientato destrorso in quello sinistrorso).

Le isometrie pari di un tetraedro regolare sono 12 e corrispondano alle rotazioni che portano in sé il tetraedro, compresa l’identità. Il gruppo tetraedrale è isomorfo al gruppo simmetrico di ordine 4 ed ha quindi ordine 24.

Il gruppo ottaedrale (che è lo stesso delle simmetrie del cubo) è un gruppo di ordine 48. Il sottogruppo delle isometrie pari è formato da 24 rotazioni (compresa l’identità) isomorfo al gruppo simmetrico di ordine 4.

Il gruppo icosaedrale (delle simmetrie dell’icosaedro regolare, che è lo stesso gruppo delle isometrie del dodecaedro regolare) è un gruppo di ordine 120. Il sottogruppo delle isometrie pari è formato da 60 rotazioni (compresa l’identità) isomorfo al gruppo alterno di ordine 5 (isometrie pari dell’icosaedro regolare).

Conclusioni

In questo contributo abbiamo descritto un percorso didattico per proporre uno dei fatti più importanti della geometria dello spazio, che riguarda l'esistenza di soli cinque tipi di poliedri regolari. Di questo teorema abbiamo proposto un paio di dimostrazioni, la prima in sostanza risalente a Euclide e la seconda di carattere più generale, di tipo topologico, perché utilizza la formula di Eulero per i poliedri (semplicemente connessi). Queste premesse ci hanno poi consentito di proporre uno studio sintetico delle simmetrie di questi solidi, che sono, tra i poliedri, le figure più ricche di simmetria, e ciò ne ha costituito, nella storia, il loro fascino per matematici, filosofi ed artisti.

Bibliografia

Cromwell P. (1997), *Polyhedra*, Cambridge University Press.

Dedò M. (1999), *Forme. Simmetria e topologia*, Decibel-Zanichelli.

Demattè A., Tomasi L. (2022), La formula di Eulero per i poliedri: una proposta didattica di uso delle fonti originali, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 45B, n.1, 2022.

Euler L. (1758), *Elementa doctrinae solidorum*, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4, pp. 109-140, in *Opera omnia, Series 1, vol. 26, pp.71-93* (in rete: *Euler Archive - All Works*. E230: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/230>)

Frajese A., Maccioni L., (1970) a cura di, *Gli Elementi di Euclide*, Torino: UTET.

Esplorazioni algebriche sui numeri triangolari

Successioni ricorsive e forma chiusa

Silvano Rossetto*

*Centro Ricerche Didattiche "U. Morin - Pieve del Grappa TV ;
rossetto49@gmail.com



Sunto: Prendendo spunto da un classico problema sui numeri triangolari, si descrive una attività sulle successioni ricorsive proponibile a studenti degli ultimi anni di scuola superiore. Dopo una breve descrizione della soluzione di Ramanujan data nel 1914 con le frazioni continue, si formula una congettura sulle prime soluzioni del problema trovate con il computer e si propone una dimostrazione che utilizza le successioni ricorsive e le loro forme chiuse.

Parole Chiave: Numeri triangolari, successioni ricorsive, forma chiusa.

Abstract: Starting from a classic problem on triangular numbers, we describe an activity on recursive sequences that can be proposed to students in the last years of high school. After a brief description of Ramanujan's solution given in 1914 with continued fractions, a conjecture is formulated on the first solutions of the problem found with the computer and a demonstration is proposed that uses recursive sequences and their closed forms.

Keywords: triangular numbers, recursive sequences, closed form.

1 - Introduzione

La rivista ‘The Strand Magazine: An Illustrated Monthly’ del 1914 pubblica questo problema:

Un tale fa visita ad un suo amico. Quando arriva nella via dove abita, non ricorda più il suo numero civico. Ricorda però che la somma dei numeri civici che precedono quello dell’amico è la stessa di quelli che seguono. Lo puoi aiutare se nella via le case sono più di 50, ma non arrivano a 500?

Il problema dello Strand Magazine si può riformulare nel modo seguente:

Determinare i numeri naturali x e y , con $x \leq y$, tali che:

$$\sum_{i=1}^{x-1} i = \sum_{i=x+1}^y i. \quad (*)$$

La coppia (1,1) è soluzione perché con $x=1$ e $y=1$ non ci sono numeri prima o dopo x . A parte la coppia *banale* (1,1), è soluzione anche la coppia (6,8) come mostra la figura 1.

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 1. Coppia (6,8) soluzione del problema dello Strand M.

Si ha infatti: $\sum_{i=1}^5 i = 15 = 7 + 8$. Si chiede se ci sono altre coppie (x,y) con questa proprietà, e, in particolare, si chiede per quale valore di x si ha $50 < y < 500$.

Il problema dello Strand M. si presta ad una attività di approfondimento che si può proporre a studenti di scuola secondaria superiore. L’attività coinvolge le successioni ricorsive e la loro forma chiusa. L’articolo descrive in modo sintetico, nel paragrafo 2, la soluzione proposta da Srinivasa Aiyangar Ramanujan con l’uso delle frazioni continue.

Nei paragrafi successivi si propone una ricerca alternativa delle soluzioni. Si inizia, paragrafo 3, con un algoritmo per la ricerca al computer delle prime soluzioni del problema (*).

L'analisi delle soluzioni (paragrafo 4) mette in evidenza relazioni tra i valori trovati e porta a formulare una congettura per il calcolo delle soluzioni attraverso successioni ricorsive. Nel paragrafo 5 si dimostra la soluzione generale del problema (*) usando la forma chiusa delle successioni ricorsive.

2 - La soluzione di Srinivasa A. Ramanujan

Ramanujan manda allo Strand M. la sua brillante soluzione che fa uso della frazione continua:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \quad (1)$$

I passi essenziali della dimostrazione sono i seguenti.

$$\text{Sia } T(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

il numero triangolare di ordine n , allora, come si vede in figura 2, vale l'uguaglianza $T(x-1) = T(y) - T(x)$ dalla quale si ricava l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)x}{2} &= \frac{y(y+1)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} \\ x^2 - x &= y^2 + y - x^2 - x \\ 2x^2 &= y^2 + y \end{aligned} \quad (3)$$

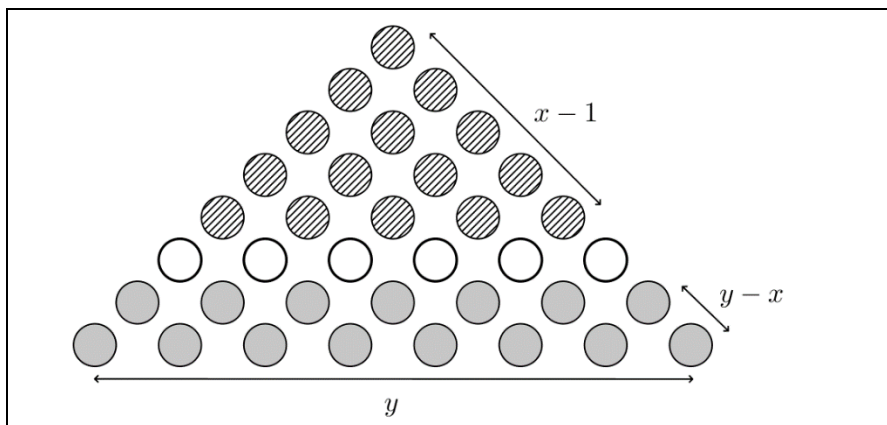


Figura 2. Rappresentazione grafica di una soluzione del problema (*).

Applicando a (3) semplici trasformazioni e ponendo $X = 2x$ e $Y = 2y + 1$ (4)

si ottiene:

$$\begin{aligned} (2x^2 = y^2 + y) \cdot 4 &\rightarrow 8x^2 = 4y^2 + 4y \\ 2(4x^2) &= (2y + 1)^2 - 1 \rightarrow 2X^2 = Y^2 - 1 \rightarrow Y^2 - 2X^2 = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

L'equazione (5) è un caso particolare dell'equazione diofantea di Pell: $Y^2 - k \cdot X^2 = \pm 1$, con $k = 2$ (5')

su cui si trova molta documentazione come in [2] e [3].

Le ridotte della frazione continua di Ramanujan (1) sono:

$$1; 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}; 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}; \quad (6)$$

$$1 + \frac{1}{2 + \dots} = \frac{41}{29}; \frac{99}{70}; \frac{239}{169}; \frac{577}{408}; \frac{1393}{985}; \frac{3363}{2378}; \dots \frac{Y}{X}$$

Applicando i termini delle ridotte in (6) all'equazione (5) si ottiene la tabella 1 dove si osserva che le ridotte di ordine pari sono soluzione dell'equazione (5), mentre quelle di ordine dispari danno, a sinistra, -1.

Alle soluzioni di ordine pari della successione (6) si applicano in modo inverso le trasformazioni (4) ponendo

$$x = \frac{X}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y-1}{2}, \text{ vedi tabella 2.}$$

	$\frac{Y}{X}$	$Y^2 - 2X^2 = \pm 1$
	$\frac{1}{1}$	$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$
	$\frac{3}{2}$	$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$
	$\frac{7}{5}$	$7^2 - 2 \cdot 5^2 = 49 - 50 = -1$
	$\frac{17}{12}$	$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$
	$\frac{41}{29}$	$41^2 - 2 \cdot 29^2 = 1681 - 1682 = -1$
	$\frac{99}{70}$	$99^2 - 2 \cdot 70^2 = 9801 - 9800 = 1$

Tabella 1. Ridotte della frazione continua (1) e soluzioni dell'equazione di Pell con k=2 (4).

n	2	4	6	8	10
$\frac{Y}{X}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{3363}{2378}$
(x,y)	(1, 1)	(6, 8)	(35; 49)	(204; 288)	(1189; 1681)

Tabella 2. Soluzioni del problema dello Strand M. ricavate dalle ridotte in tabella (1).

In particolare, la soluzione richiesta dal problema come proposto dallo Strand M. è 204 dato che il numero di case della via è 288. Si ha infatti:

$$\sum_{i=1}^{203} i = \frac{203 \cdot 204}{2} = 20706$$

$$\sum_{i=205}^{288} i = \sum_{i=1}^{288} i - \sum_{i=1}^{204} i = 41616 - 20910 = 20706$$

3 - Ricerca di una alternativa per le soluzioni del problema dello Strand M.

Per la nostra ricerca delle soluzioni del problema (*) procediamo con i seguenti passi:

1. Si cercano con un programma al computer le prime soluzioni del problema (*) come coppie (x,y) di valori per i quali vale la relazione: $\sum_{i=1}^{x-1} i = \sum_{i=x+1}^y i$.
2. L'osservazione delle soluzioni mette in evidenza relazioni che portano a formulare congetture sulla successione delle x e ad esprimerne le forme ricorsiva e, attraverso il teorema di Binet, la forma chiusa.
3. La relazione (*) permette di esprimere la forma chiusa delle y, dalla quale si ricava la sua forma ricorsiva.

3.1 Un algoritmo per la ricerca di soluzioni con l'uso del computer.

In prima battuta, si possono cercare al computer le coppie (x,y) che risolvano il problema (*) usando l'uguaglianza

$$T(x-1) = T(y) - T(x), \text{ con } T(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si inizia con $x=1$ e con $y=x$. Per ogni coppia (x,y), si verifica se (x,y) è soluzione e, in tal caso, la si registra fino a trovarne

un numero prefissato. Se invece è $T(x-1) > T(y) - T(x)$, si incrementa y di 1. Se è $T(x-1) \leq T(y) - T(x)$, si incrementa x di 1. Si ripete il controllo.

Questo algoritmo si può descrivere con un programma, ad esempio con DERIVE un ambiente di calcolo simbolico. Con un pc, il programma produce abbastanza rapidamente le prime cinque soluzioni, ma non bastano dieci minuti per calcolarne sei. Si può migliorare l'algoritmo, ad esempio, evitando di ripetere per ogni x e per ogni y il calcolo del numero triangolare, ma semplicemente aggiungendo ai corrispondenti valori il numero naturale che segue. Il nuovo algoritmo prende in esame il numero triangolare di base y e lo divide con la linea di lunghezza x (figura 3). Indichiamo con a (parte alta) la parte del triangolo superiore alla linea x e con b (parte bassa), la parte inferiore.

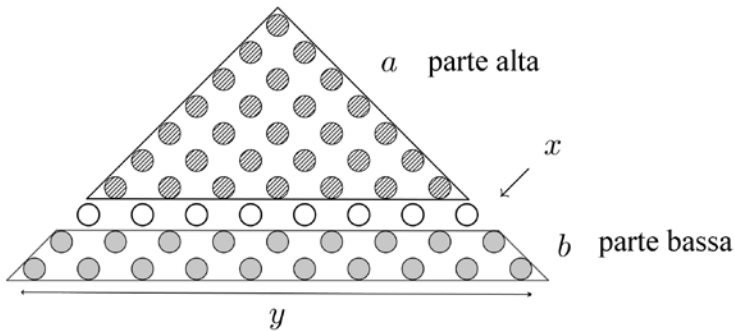


Figura 3. Suddivisione in aree del numero triangolare.

Questo algoritmo può essere descritto in DERIVE come in figura 4.

<pre>F1(n, x, y, v, a, b, i) := Prog v := [] i := 0 x := 1 y := 1 a := 0 b := 0 Loop If i = n RETURN v If a > b Loop y := y + 1 b := b + y exit Loop If a = b Loop i := i + 1 v := APPEND(v, [[i, x, y]]) exit a := a + x x := x + 1 b := b - x exit</pre>	<table><tr><th>n</th><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>35</td><td>49</td></tr><tr><td>4</td><td>204</td><td>288</td></tr><tr><td>5</td><td>1189</td><td>1681</td></tr><tr><td>6</td><td>6930</td><td>9800</td></tr><tr><td>7</td><td>40391</td><td>57121</td></tr><tr><td>8</td><td>235416</td><td>332928</td></tr><tr><td>9</td><td>1372105</td><td>1940449</td></tr><tr><td>10</td><td>7997214</td><td>11309768</td></tr></table>	n	x	y	1	1	1	2	6	8	3	35	49	4	204	288	5	1189	1681	6	6930	9800	7	40391	57121	8	235416	332928	9	1372105	1940449	10	7997214	11309768
n	x	y																																
1	1	1																																
2	6	8																																
3	35	49																																
4	204	288																																
5	1189	1681																																
6	6930	9800																																
7	40391	57121																																
8	235416	332928																																
9	1372105	1940449																																
10	7997214	11309768																																

Figura 4. Programma in DERIVE e prime dieci soluzioni del problema (*).

3.2 Forme ricorsiva e chiusa per la sequenza delle soluzioni.

Osservando la sequenza delle coppie soluzione del problema (*) in figura 4, si nota che i valori delle x si possono scomporre in due fattori come riportato in tabella 4.

Nella stessa tabella è evidente la relazione ricorsiva tra i valori delle colonne a e b :

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 1; & b_1 = 1 \\
 a_{n+1} = a_n + b_n; & b_{n+1} = 2 \cdot a_n + b_n
 \end{array}$$

X	a	b
1	1	1
6	2	3
35	5	7
204	12	17
1189	29	41
6930	70	99

Tabella 4: Scomposizione delle x in due fattori a e b .

Con questa relazione si può estendere senza complessità in tempo l'elenco delle soluzioni del problema (*) almeno per i valori delle x .

Si nota anche che le due colonne a e b sono, singolarmente, due successioni date in forma ricorsiva.

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 1 & & b = 1 \\
 a_2 = 2 & \text{e} & b = 3 \\
 a_{n+1} = 2 \cdot a_n + a_{n-1} & & b_{n+1} = 2 \cdot b_n + b_{n-1}
 \end{array} \tag{7}$$

Si può osservare che le successioni in (7) sono definite dallo stesso termine generale, mentre variano per i due termini iniziali.

Le successioni ricorsive come le (7) si dicono lineari omogenee e sono esprimibili con una funzione $F(n)$, detta forma chiusa, con un metodo che porta alla formula di Binet riferita a volte alla successione di Fibonacci. Trattazioni elementari della formula di Binet si trovano in [4], in [5] e in [6].

Le due successioni in (7) hanno equazione caratteristica $x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$ che ha come soluzioni $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. La loro forma chiusa è $F(n) = x_0 (1 + \sqrt{2})^n + x_1 (1 - \sqrt{2})^n$ con i due coefficienti x_0 e x_1 da

determinare sulla base dei primi due valori di ciascuna successione.

Le due forme chiuse si determinano come in (8) e (8')

$$\begin{cases} A(1) = x_0(1 + \sqrt{2}) + x_1(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ A(2) = x_0(1 + \sqrt{2}) + x_1(1 - \sqrt{2})^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

da cui $A(n) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right)$ (8)

e

$$\begin{cases} B(1) = x_0(1 + \sqrt{2}) + x_1(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ B(2) = x_0(1 + \sqrt{2})^2 + x_1(1 - \sqrt{2})^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui $B(n) = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}$ (8')

La successione $X(n) = A(n) \cdot B(n)$ corrisponde alla colonna x di figura 4: ne calcoliamo la forma chiusa a partire dalle due forme chiuse (8) e (8'):

$$\begin{aligned} X(n) &= A(n) \cdot B(n) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right) \cdot \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right) \end{aligned}$$

Osservando che $(1+\sqrt{2})^{2n} = \left((1+\sqrt{2})^2\right)^n = (3+2\sqrt{2})^n$ e che $(1-\sqrt{2})^{2n} = \left((1-\sqrt{2})^2\right)^n = (3-2\sqrt{2})^n$, si può concludere che:

$$X(n) = A(n) \cdot B(n) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \right) \quad (9)$$

Dalla (9), forma chiusa, si potrebbe anche ricavare la forma ricorsiva passando per l'equazione caratteristica che è:

$$(x - (3+2\sqrt{2})) \cdot (x - (3-2\sqrt{2})) = 0. \text{ Da cui: } x^2 = 6x - 1.$$

La corrispondente forma ricorsiva è quindi, come si può constatare in figura 3 e tabella 4,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 6 \\ x_{n+1} &= 6x_n - x_{n-1} \end{aligned} \quad (9')$$

3.3 Soluzioni (x,y) del problema (*).

Come visto in (3), l'equazione: $2x^2 = y^2 + y$ mette in relazione i termini (x,y) di una coppia soluzione del problema dello Strand M. e della sua generalizzazione nella forma (*).

Risolvendo l'equazione rispetto a y , si ottiene la formula che esprime il numero y di case della via, dato il numero

civico x dell'amico: $y^2 + y - 2x^2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8x^2 + 1}}{2}.$

Interessa solo la soluzione positiva; quindi, deve essere

$$y = \frac{\sqrt{8x^2 + 1} - 1}{2} \quad (10)$$

Il problema (*) è risolto dai valori $X(n)$ espressi in (9) se sostituiti a x in (10) producono per y numeri naturali. Si

richiede cioè in particolare che il termine sotto radice in (10) sia un quadrato perfetto. Di seguito la verifica algebrica:

$$\begin{aligned} 8X(n)^2 + 1 &= 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \right) \right)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \left((3+2\sqrt{2})^{2n} - 2(3+2\sqrt{2})^n \cdot (3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n} \right) + 1 \end{aligned}$$

Tenendo conto che $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9-8=1$ si ottiene:

$$8X(n)^2 + 1 = \frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4} + \frac{1}{2} \quad (11 \text{ a})$$

Ma anche:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4} + 2 \frac{\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) \right)^n}{4} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11 \text{ b})$$

e quindi il radicando in (10) è il quadrato di $R(n)$ con

$$R(n) = \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{2} \quad (12)$$

Dato che $(r - (3+2\sqrt{2}))(r - (3-2\sqrt{2})) = 0 \rightarrow r^2 = 6r - 1$ è

l’equazione caratteristica a cui si associa $R(n)$ e che $R(1)=3$ e $R(2)=17$, in analogia con quanto visto in (9) e (9’), alla forma chiusa (12) corrisponde la forma ricorsiva:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3 \\ r_2 &= 17 \end{aligned} \quad (12')$$

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$$

I primi quattro termini della successione r_n (12-12’) sono:

3, 17, $17 \square 6-3=99$, $99 \square 6-17=577$, che sono tutti numeri naturali dispari dato che il loro quadrato, radicando in (10), è evidentemente dispari.

Quindi l'espressione (10) produce sempre un numero naturale: la possiamo completare in questo modo:

$$Y(n) = \frac{\sqrt{8X(n)^2 + 1} - 1}{2} = \frac{\frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{2} - 1}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{4} - \frac{1}{2}$$

L'espressione (13) definisce la successione:

$$Y(1) = \frac{(3+2\sqrt{2})}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = 1$$

$$Y(2) = \frac{(3+2\sqrt{2})^2}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(17+12\sqrt{2})}{4} + \frac{(17-12\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2} = \frac{34}{4} - \frac{1}{2} = 8$$

$$Y(3) = \frac{(3+2\sqrt{2})^3}{4} + \frac{(3-2\sqrt{2})^3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{4} + \frac{(17-12\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(99+70\sqrt{2}) + (99-70\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2} = \frac{198}{4} - \frac{1}{2} = 49$$

Proseguendo il calcolo, si ottiene la successione:

1; 8; 49; 288; 1681; 9800; 57121; 332928; ... che corrisponde alla colonna delle y in figura 4.

Come si può facilmente constatare, la forma ricorsiva di questa successione è:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 8 \\ y_{n+1} &= 6y_n - y_{n-1} + 2 \end{aligned} \tag{13'}$$

Le due successioni (12) e (13), nelle loro forme chiusa oppure ricorsiva, forniscono le soluzioni $(X(n), Y(n))$ del problema (*).

4 - Conclusione “aperta”.

Il problema dello Strand M. ha offerto l'occasione per un percorso esplorativo nelle successioni e nelle loro forme ricorsive e chiuse. Ma una conclusione è interessante se apre la curiosità verso altri problemi analoghi.

La forma (*) del problema dello Strand M. fa riferimento ai numeri triangolari: ci si chiede se lo si può riformulare in termini di numeri quadrati.

Determinare i numeri naturali x e y , con $x \leq y$, tali che:

$$Q(x-1) = Q(y) - Q(x) \rightarrow (x-1)^2 = y^2 - x^2. \quad (**)$$

Le prime ovvie soluzioni sono: (1,1), (4,5), (21,29). In figura 5 è rappresentata la soluzione (4,5): $(4-1)^2 = 5^2 - 4^2$.

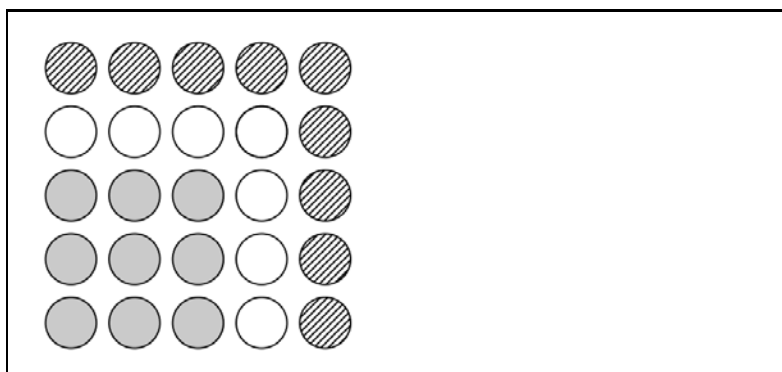


Figura 5. Soluzione (4,5) del problema ().**

Il problema (**) si può formulare in termini di terne pitagoriche:

Quali sono le terne pitagoriche (a,b,c) che hanno per cateti a e b due numeri consecutivi?

Alle prime tre soluzioni si associano le terne pitagoriche $(0,1,1)$, $(3,4,5)$, $(20,21,29)$. Questo problema, e altri sulle terne pitagoriche, è stato affrontato in molti modi e quindi si trova, anche in internet, una estesa documentazione, come ad esempio in [7]. La ricerca di ulteriori soluzioni si può condurre in modo analogo a quanto fatto per i numeri triangolari. Un adattamento del programma in DERIVE produce le soluzioni di figura 5.

La ricerca sulle successioni x e y delle soluzioni del problema (**) porta alle forme ricorsive:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & y_1 &= 1 \\ x_2 &= 4 & y_2 &= 5 \\ x_{n+1} &= 6x_n - x_{n-1} - 2 & y_{n+1} &= 6y_n - y_{n-1} \end{aligned} \tag{14}$$

alle quali corrispondono le forme chiuse:

$$\begin{aligned} X(n) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4} \right) (3 + 2\sqrt{2})^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \right) (3 - 2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2} \\ Y(n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (3 + 2\sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (3 - 2\sqrt{2})^n \end{aligned} \tag{15}$$

n	x	y
1	1	1
2	4	5
3	21	29
4	120	169
5	697	985
6	4060	5741
7	23661	33461
8	137904	195025
9	803761	1136689
10	4684660	6625109
11	27304197	38613965
12	159140520	225058681

Figura 5. Soluzioni del problema () trovate al computer.**

È ora naturale chiedersi se il problema (*) si può estendere agli altri numeri figurati. Ricordiamo che si può esprimere il numero figurato di n lati con i punti per lato con l’espressione:
 $FN(i, n) = (n - 2) \cdot T(i - 1) + n$. (***)

Ad esempio, con $n=4$ si ha:

$$FN(i, 4) = (4 - 2) \cdot T(i - 1) + i = 2 \cdot \frac{(i - 1)i}{2} + i = i^2, \text{ cioè i numeri}$$

quadrati. Si formula la congettura che l’equazione diofantea:

$$FN(x - 1, n) = FN(y, n) - FN(x), \text{ basata su (***)},$$

ha soluzioni (x, y) per ogni n . Se si passa alla dimensione 3 (numeri tetraedrici, cubici, ecc.) o alle dimensioni superiori, l’analogia equazione diofantea non ammette soluzioni.

Bibliografia

[1] Burkard Polster, Marty Ross, Tristan Tillij, Eddie Price, How did Ramanujan solve the STRAND puzzle?, <https://www.youtube.com/watch?v=V2BybLCmUzs>.

[2] Manfred R. Schroeder (1986), *La teoria dei numeri Cap. 7 Par. 7.3 pp 149-150*, Padova: Franco Muzio Editore

[3] Harold Davenport (1994), *Aritmetica Superiore Cap. 4 Par. 11 pp 95-99*, Bologna: Zanichelli.

[4] Nicolai N. Vorobiev (1973), *Suite de Fibonacci Cap.1 Par. 16 pp 103-107*, Mosca: Edizioni MIR.

[5] Alberto Fiorenza, Giovanni Vincenzi, Limit of ratio of consecutive terms for general order-k linear homogeneous recurrences with constant coefficients, *Chaos, Solitons & Fractals* 44 (2011) 145–152

[6] Francesco Daddi, La formula di Binet per i numeri di Fibonacci: una dimostrazione con l'algebra lineare, <https://www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica/page/2/-9>.

[7] Cristiano Teodoro, Generazione di terne primitive particolari, <https://www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica/page/2/-40>

Un laboratorio didattico per il concetto di funzione attraverso l'algebra dei segmenti di Cartesio

Francesca Coppa*, Antonella Palma**

* Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma;
francesca.coppa@uniroma1.it

** Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma;
antonella.palma@uniroma1.it



Sunto: Il concetto di funzione viene introdotto, secondo un approccio storico, attraverso l'algebra dei segmenti di Cartesio in cui un'equazione corrisponde a una costruzione geometrica e le variabili rappresentano segmenti la cui variazione è vincolata dalla corrispondente costruzione. La costruzione di una funzione razionale e la sua interpretazione come un oggetto, in maniera più diretta di quanto sia possibile con una definizione numerica, è realizzata attraverso l'uso di un software di geometria dinamica. Le attività all'interno del laboratorio didattico sono progettate per difficoltà incrementale: da costruzioni guidate fino a costruzioni più articolate da svolgere in modo autonomo.

Parole Chiave: algebra dei segmenti, funzione, GeoGebra, storia della matematica.

Abstract: The concept of function is introduced, according to a historical approach, through Descartes' algebra of segments where each equation is made to

corresponds to a geometric construction and the variables represent segments whose variation is constrained by the corresponding construction. The construction of a rational function and its interpretation as an object, in a more direct way than is possible with a numerical definition, is achieved through the use of dynamic geometry software. The activities within the educational laboratory are designed for incremental difficulty: from guided constructions to more complex constructions to be carried out independently.

Keywords: algebra of segments, function, GeoGebra, history of mathematics.

1 - Introduzione

Cartesio nella sua Geometria mostra come, partendo da due segmenti qualsiasi, si possano costruire con riga e compasso altri segmenti che rappresentano il prodotto, la divisione e la radice quadrata. Negli Elementi di Euclide il prodotto tra due segmenti è un rettangolo, tra tre segmenti un parallelepipedo ma già il prodotto tra quattro segmenti non ha più un’interpretazione geometrica.

La costruzione proposta da Cartesio, innovativa nella sua semplicità, è quella di fissare un segmento unità che, insieme al teorema di Talete, permette di definire prodotto e quoziente di segmenti come un nuovo segmento. Si ha così un'algebra geometrica molto potente dalla quale prende l'avvio la geometria analitica ed il concetto di funzione.

In questa algebra di segmenti un’equazione corrisponde a una costruzione geometrica e le variabili rappresentano segmenti la cui variazione è vincolata dalla corrispondente costruzione. Il grafico di una funzione razionale può dunque essere rappresentato come il luogo di una costruzione con riga e compasso.

Il concetto di funzione è uno dei principali ostacoli di carattere epistemologico riconosciuti sia nella storia della matematica sia nella didattica. La conoscenza di elementi mirati della storia può consentire di affrontarlo con consapevolezza (Jankivist, 2009). La storia però non dovrebbe essere usata senza modifiche, è dunque auspicabile attingere ad «argomenti storici per scegliere una genesi di un concetto adatto all'uso nelle scuole e per costruire o inventare situazioni didattiche che forniranno questa genesi» (Brousseau, 1997, p. 96). L'utilizzo di GeoGebra, proposto nel laboratorio didattico, pone lo studente nella condizione di costruire particolari funzioni e di interpretarle come oggetti (Sfard, 1992) in maniera più diretta di quanto sia possibile attraverso un approccio numerico (Imperi, Rogora, 2022).

In questo lavoro, si vuole osservare se una tale modalità possa consentire agli studenti l'acquisizione consapevole del concetto preliminare di covariazione geometrica, utile a porre le basi per costruire quello più astratto di funzione (Tall, Vinner, 1981). Gli studenti vengono suddivisi in gruppo e le attività proposte loro sono di tipo laboratoriale. Il confronto tra pari, secondo la "metafora della partecipazione", favorisce l'apprendimento considerato come processo di partecipazione a diverse pratiche culturali, focalizzandosi sulle attività più che sui risultati e prodotti. L'apprendimento, dunque, è un aspetto della partecipazione dove l'acquisizione del sapere non può essere separato dalle situazioni nel quale viene utilizzato (Sfard, 1998).

La sperimentazione si conclude con una sessione in cui gli studenti presentano le procedure elaborate e discusse all'interno di ciascun gruppo per risolvere le attività proposte.

La comunicazione e la cognizione, infatti, sono manifestazioni diverse, una interpersonale e l’altra intrapersonale, di uno stesso fenomeno (Sfard, 2009, pag. 336).

La sperimentazione è stata effettuata in due classi seconde di un liceo scientifico di Liceo Matematico. Il laboratorio didattico è stato realizzato mediante lo strumento “Classi GeoGebra”.

2 - Aderenza alle Indicazioni Nazionali

Coerentemente con le Indicazioni Nazionali (Linee Generali e Competenze per l’insegnamento della Matematica) si vuole fornire allo studente una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, l’algebra di Cartesio rappresenta uno dei primi passi compiuti durante la rivoluzione scientifica del Seicento che ha portato alla matematizzazione del mondo fisico e che ha condotto alla formazione della matematica moderna, cambiando così il volto della conoscenza scientifica.

Il concetto di funzione è uno degli obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio: nel paragrafo Relazioni e Funzioni si legge che lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici. La rappresentazione grafica di Cartesio, con la sua naturale evoluzione nella formalizzazione funzionale e numerica, presentata attraverso software di geometria dinamica, si presta per realizzare un intervento formativo in una classe seconda di liceo.

3 – L'algebra dei segmenti in GeoGebra

Cartesio rivoluziona l'algebra geometrica del XVII secolo.

La sua *Geométrie* appare in un momento cruciale della transizione dalla matematica antica a quella moderna. Il recupero della geometria ellenistica si era diffuso rapidamente grazie alla stampa di traduzioni delle opere di Archimede e di Apollonio. Il recupero di tali risultati andò di pari passo con lo sviluppo dell'algebra che risentiva dell'influenza della matematica araba e che aveva prodotto un'importante scuola di algebristi italiani, capaci di determinare formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado. Successivamente Viète gettò le basi dell'algebra simbolica, recepita e ampliata poi da Cartesio. Un'idea di come Cartesio operi, si può evincere dall'uso della quadratura di un rettangolo avente un lato pari al segmento unitario. Applicando il secondo teorema di Euclide, si ricava la costruzione del segmento radice quadrata. L'utilizzo del segmento unità è un'innovazione importante anche se ciò oggi sfugge all'occhio di chi è abituato a lavorare con l'unità.

Attraverso l'uso di GeoGebra è possibile non solo realizzare la costruzione proposta da Cartesio quanto visualizzare immediatamente il luogo generato dalla covariazione.

3.1 – Il prodotto e la divisione tra segmenti

La Fig. 1 riporta la costruzione originale proposta da Cartesio (Descartes, 1637, p. 298) relativamente al prodotto BE tra i segmenti BD e BC e alla divisione BC tra i segmenti BE e BD, dove AB rappresenta l'unità.

La Fig. 2 presenta la medesima costruzione rielaborata con GeoGebra, in cui i due segmenti rispettivamente BD e BC nel caso della moltiplicazione e BE e BD nel caso della divisione, sono posizionati su due semirette perpendicolari.

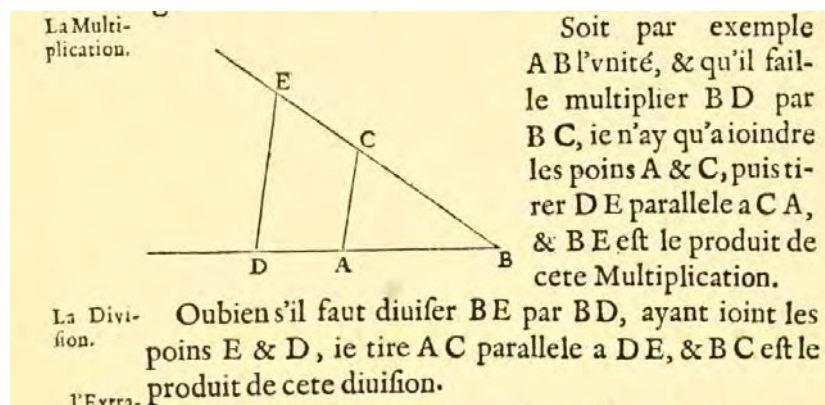


Fig. 1- Dalla Geométrie di Cartesio: moltiplicazione e divisione tra segmenti.

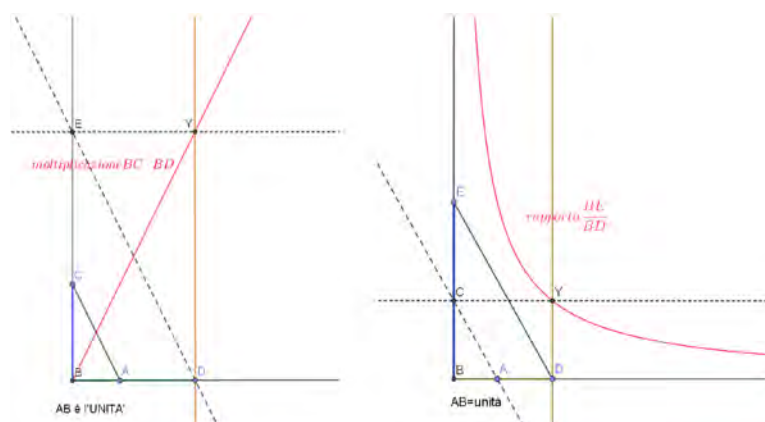


Fig. 2- Costruzione della moltiplicazione e della divisione tra segmenti e generazione dei rispettivi luoghi.

Di seguito si riportano le proposte di costruzione con GeoGebra per la moltiplicazione e la divisione di due segmenti, come mostrato nella Fig.2.

Proposta di costruzione con GeoGebra della moltiplicazione di due segmenti e costruzione del luogo.

Sia AB il segmento unitario e siano BD e BC i due segmenti dei quali determinare la moltiplicazione.

Si unisce A con C . Da D si traccia la parallela t ad AC che incontra in E l'asse sul quale giace BC . Il segmento BE rappresenta la moltiplicazione tra i due segmenti BD e BC .

Per costruire il luogo determinato dalla covariazione di E rispetto a D , bisogna proiettare il punto E sulla retta perpendicolare a BD in D . Sia Y tale proiezione. Il luogo generato da Y al variare di D rappresenta la moltiplicazione tra i due segmenti BC e BD .

Proposta di costruzione con GeoGebra della divisione di due segmenti e costruzione del luogo.

Sia AB il segmento unitario e siano BE e BD i due segmenti dei quali determinare la divisione.

Si unisce D con E . Dal punto A si traccia la parallela t a ED che incontra in C l'asse sul quale giace BE . Il segmento BC rappresenta la divisione tra i due segmenti BE e BD .

Per costruire il luogo determinato dalla covariazione di C rispetto a D , bisogna proiettare il punto C sulla retta perpendicolare a BD in D . Sia Y tale proiezione. Il luogo generato da Y al variare di D rappresenta la divisione tra i due segmenti BE e BD .

3.2 – La radice quadrata di un segmento

Le Fig. 3 riporta la costruzione originale proposta da Cartesio (Descartes, 1637, p. 298) relativamente alla radice quadrata di un segmento, mentre la Fig. 4 presenta la medesima costruzione rielaborata con GeoGebra.

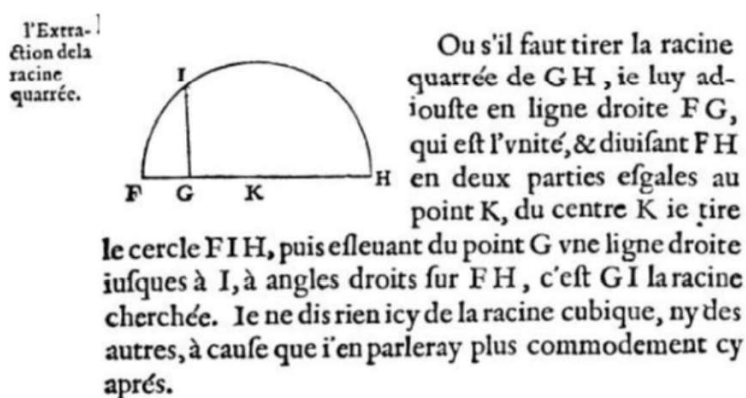


Fig. 3- Dalla Geométrie di Cartesio: radice quadrata di un segmento.

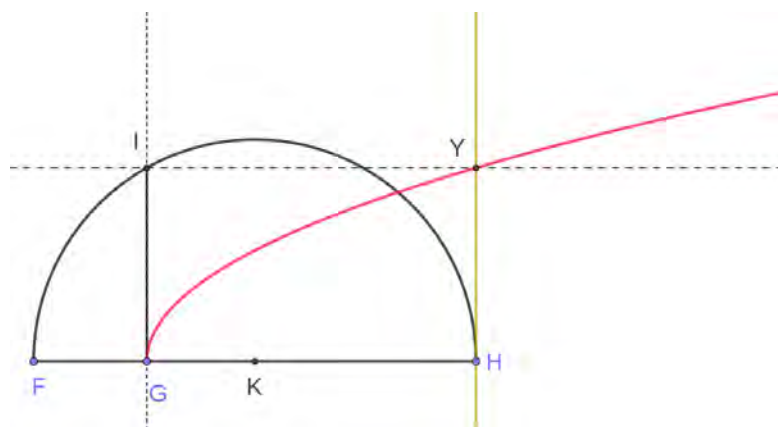


Fig. 4- Costruzione della radice e generazione del luogo.

Proposta di costruzione con GeoGebra della radice quadrata e costruzione del luogo.

Si costruisce un segmento FH con F fisso e H mobile sulla retta r. Si costruisce la semicirconferenza di diametro FH. Su tale diametro si individua il segmento unità FG. Si traccia la perpendicolare ad r passante per G. Sia I il punto intersezione di tale perpendicolare con la semicirconferenza. Per il secondo teorema di Euclide, si ottiene che $GI^2 = FG \cdot GH$. Essendo FG il segmento unitario si ottiene che $GI^2 = GH$. Abbiamo dunque rappresentato il quadrato di un segmento con un altro segmento.

Per costruire il luogo determinato dalla covariazione di I rispetto ad H, bisogna proiettare il punto I sulla retta perpendicolare a GH in H. Sia Y tale proiezione. Il luogo di Y rispetto ad H individua la radice quadrata di GH.

4 – L'intervento Formativo. La sperimentazione.

Gli studenti hanno lavorato in piccoli gruppi, avendo così la possibilità di confrontarsi e apprendere tra pari.

4.1 – Il piano didattico

Finalità	Avvicinare lo studente al concetto di variazione e covariazione al fine di giungere al concetto di funzione matematica.
Obiettivo didattico	Far acquisire agli studenti in modo semplice ed incisivo il concetto di covariazione di Cartesio e con l'ausilio di

	software dinamico che consente esplorazioni critiche.
Prerequisiti	Proporzionalità tra grandezze. Teorema di Talete. Similitudine tra triangoli e Teoremi di Euclide. Concetto di luogo geometrico. Utilizzo base di GeoGebra.
Metodologia	Tecniche di argomentazione. Metodologia laboratoriale. Utilizzo di opportune schede fornite agli studenti.
Durata	12 h.
Percorsi didattici	- Esplorazione con le mani. - Esplorazione con GeoGebra
Materiali	- Il “diario di bordo” (scheda cartacea) ad uso dello studente. - Elastico, tavoletta di legno e puntina da disegno. - Classi GeoGebra

4.2 – Esplorazione con le mani

L’attività preliminare per esplorare il concetto di covariazione è di tipo manuale e viene effettuata con le mani mediante l’utilizzo di elastici e altro materiale concreto.

Si parte dall'esplorazione della elongazione di un elastico. Inizialmente in modo lineare, per l'osservazione dell'allungamento di un segmento, successivamente, si passa all'analisi dell'elongazione di superficie, con un

rettangolo/quadrato, prima secondo una dimensione poi secondo entrambe le dimensioni. Si può esplorare allo stesso modo anche la variazione di un triangolo. Successivamente, si replica l'attività sopra un piano (tavoletta di legno) per porre l'attenzione all'esplorazione con punti fissi. Tali punti vengono individuati mediante puntine da disegno.

4.3 - Esplorazioni con GeoGebra

Le Classi GeoGebra sono progettate per difficoltà incrementale: da semplici costruzioni guidate fino a costruzioni più articolate da svolgere in modo autonomo.

Le prime attività sono strutturate in modo da consentire agli studenti l'esplorazione del concetto di covariazione.

Si propongono poi le costruzioni delle quattro operazioni tra i segmenti e successivamente della traccia dei luoghi generati dalle operazioni e loro composizione.

Infine, nelle classi GeoGebra, dove è previsto il lavoro in autonomia, vengono proposte attività più complicate e senza indicazione alcuna sulle procedure da adottare; tale fase costituisce lo step formativo di acquisizione della competenza da parte degli studenti.

4.4 - Il diario di bordo

Il diario di bordo è lo strumento attraverso il quale gli studenti possono esprimere opinioni puntuali riguardo le attività proposte e la cui compilazione rappresenta dunque un momento di riflessione critica e presa di coscienza.

5 – Le Classi GeoGebra

Il percorso è realizzato attraverso lo strumento Classi GeoGebra. I contenuti considerati sono così organizzati:

- 1) introduzione al concetto di covariazione di punti e segmenti;
- 2) costruzioni geometriche del segmento che rappresenta le quattro operazioni partendo da segmenti (fissi e/o variabili);
- 3) costruzioni di luoghi geometrici attraverso la proiezione del punto di covariazione su una retta diversa da quella in cui giacciono i segmenti di partenza;
- 4) lavoro in autonomia da parte degli studenti, mediante l’applicazione di conoscenze e abilità acquisite, al fine di trasformarle in competenze;
- 5) presentazione della produzione autonoma da parte degli studenti al gruppo classe.

Nei paragrafi successivi si riportano alcune proposte operative, relative ai contenuti sopra elencati, presenti nelle Classi GeoGebra.

5.1– Il concetto di covariazione

Il concetto di covariazione viene introdotto attraverso semplici esplorazioni come, ad esempio, la covariazione del punto medio di un segmento al variare di un estremo. Le prime Classi GeoGebra sono dedicate a tale esplorazione. Gli studenti vengono invitati ad utilizzare la proprietà “Traccia” del punto medio. Successivamente, si introduce l’utilizzo dello strumento “Luogo” di GeoGebra, evidenziando che il luogo viene generato solo in presenza di una covariazione che GeoGebra riconosce come curva o funzione.

Di seguito vengono riportati due esempi di esplorazione della covariazione legati alla variazione di un segmento che trascina la variazione di un secondo segmento correlato.

1) Movimento vincolato sulla circonferenza

Si parte da un segmento di estremi A (fisso) e B (variabile) e un punto C, non allineato con A e B.

Conduci poi da C la parallela r al segmento AB e da B la perpendicolare s ad AB (tratteggia le rette di costruzione r ed s). Sia D il punto di intersezione della retta r con la retta s , r e s . Costruisci una circonferenza centrata in A. Vincola il punto B alla circonferenza con lo strumento "Vincola/Svincola Punto", e disegna la traccia del punto D, selezionando "Traccia Attiva".

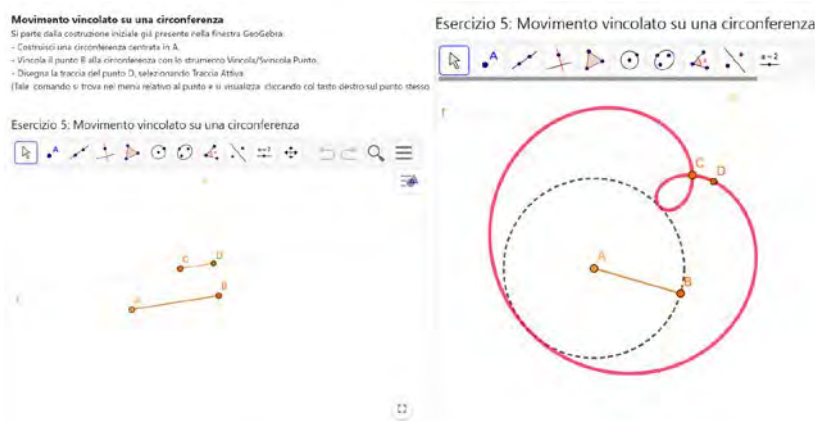


Fig. 5- Luogo generato dal movimento vincolato sulla circonferenza.

Gli studenti vengono guidati nella esplorazione attraverso le seguenti domande.

a) Hai mai visto la curva che è stata disegnata dalla traccia attiva? Che nome daresti a questa curva?

b) La traccia attiva può essere un luogo geometrico. Verificalo con lo strumento "Luogo" che si trova nel quarto gruppo degli strumenti. Descrivi le caratteristiche della curva luogo che è stata tracciata.

2) Covariazione del punto medio di un segmento con un estremo vincolato a una circonferenza di centro diverso dall'altro estremo

Dato un segmento con estremi A (fisso) e B (variabile), con C punto medio del segmento AB. Traccia una circonferenza nel piano con centro D diverso dal punto A. Vincola B alla circonferenza di centro diverso da A. Muovi il punto B e osserva la covariazione di C al variare di B.

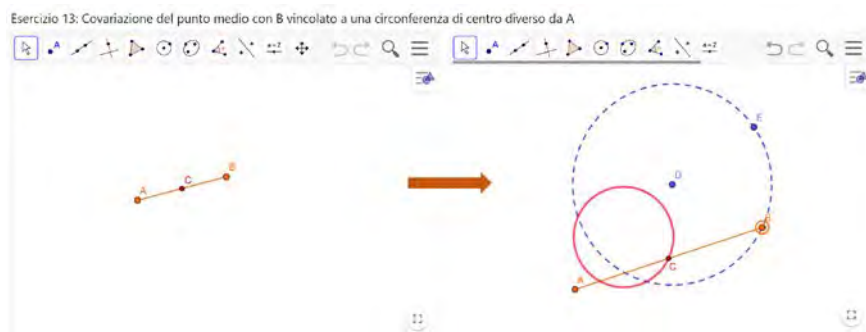


Fig. 6- Covariazione del punto medio.

Gli studenti vengono guidati nella esplorazione attraverso le seguenti domande.

a) Esplora la figura e annota eventuali casi particolari che osservi.

b) Visualizza la covariazione di C al variare di B con lo strumento "Luogo". Cosa produce tale covariazione? Corrisponde a quello che avevi ipotizzato?

5.2- L'algebra dei segmenti

Una delle Classi GeoGebra è interamente dedicata alle quattro operazioni su due segmenti di cui uno variabile. Gli studenti vengono sollecitati a riflettere sul fatto che, per visualizzare la covariazione, e dunque per generare il luogo, anche delle operazioni di somma e sottrazione, è necessario riportare il punto che rappresenta la covariazione su un asse diverso da quello sul quale sono riportati i segmenti.

Altro elemento di riflessione è stato quello riguardante la moltiplicazione di due segmenti, sia nel caso in cui essi siano uguali e variabili sia nel caso di uno variabile ed uno fisso. I luoghi generati sono diversi. Nel caso della divisione, si fa osservare che, se il segmento variabile è il dividendo allora si ritorna nella situazione della moltiplicazione tra un segmento fisso ed uno variabile.

A titolo d'esempio, si riporta la moltiplicazione tra due segmenti variabili congruenti.

Luogo della moltiplicazione di due segmenti variabili congruenti

Sia AU il segmento unitario su r . Sia AX un segmento di misura variabile sulla retta r . Considerando l'operazione di prodotto, riporta AX sull'asse s perpendicolare ad r in A ed effettua il prodotto di AX per AX .

Dalla proporzione $AX^2: AY = AU: AX$ si ha che $AY = AX^2$.

Conduci poi la perpendicolare in X alla semiretta r e la perpendicolare in Y alla retta s che si incontrano nel punto P . Costruisci il luogo generato da P al variare di X .

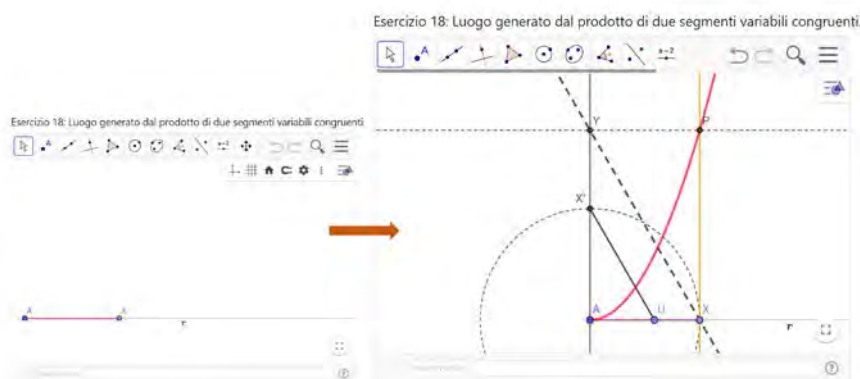


Fig. 7- Luogo della moltiplicazione di due segmenti variabili congruenti.

Gli studenti vengono guidati nella esplorazione attraverso le seguenti domande.

- Riconosci il luogo dei punti descritto da P al variare di X?
- Riconosci questo prodotto cosa rappresenta nell'algebra dei numeri?

5.3- Composizione delle operazioni

Le Classi successive presentano una serie di proposte più articolate, a difficoltà incrementale, riguardo l'applicazione dell'algebra dei segmenti.

Gli studenti prima di affrontare tali proposte devono aver consolidato la costruzione con l'algebra dei segmenti delle quattro operazioni e delle potenze di un segmento variabile.

Le prime proposte riguardano la costruzione di x^2+1 e x^3 . Nella prima, viene suggerito loro di costruire il segmento che rappresenta la moltiplicazione di due segmenti congruenti (x^2) al quale poi si dovrà sommare il segmento unitario. Nella seconda, gli studenti dovranno moltiplicare il segmento che rappresenta x^2 con il segmento x .

Un esempio di realizzazione è riportato nella seguente figura.

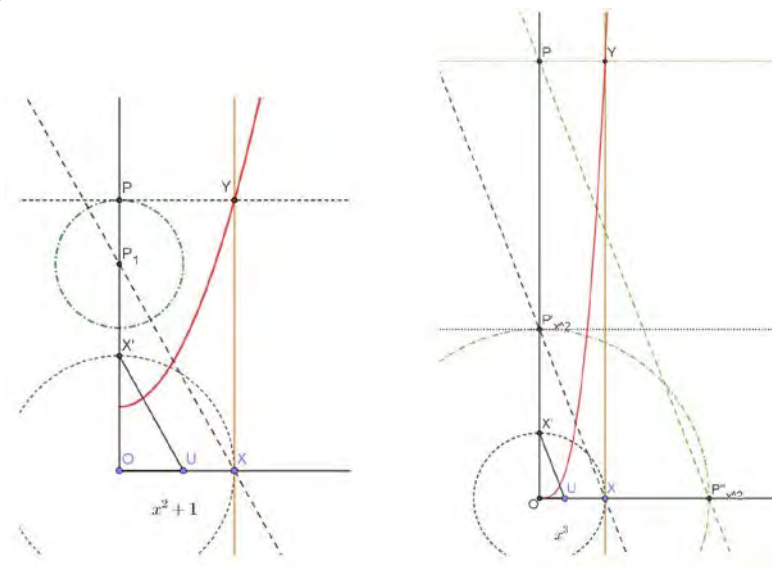


Fig. 8- Luogo di x^2+1 e x^3 .

5.4- Valorizzazione dell'autonomia

Nelle ultime Classi GeoGebra viene richiesto di rappresentare il luogo determinato da espressioni algebriche più articolate, senza fornire indicazioni ma evidenziando che le strategie per raggiungere lo scopo possono essere diverse.

Nella Fig. 9, si riporta un esempio di tali Classi.

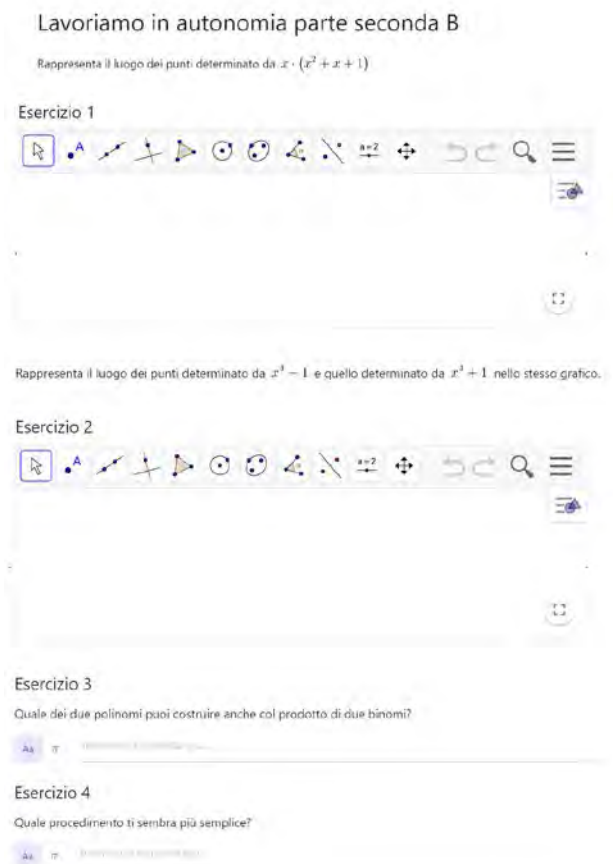


Fig. 9- Classe in autonomia.

5.5- Gli studenti presentano i lavori

La sperimentazione si conclude con la presentazione da parte degli studenti della risoluzione di alcune delle proposte presenti nelle ultime Classi GeoGebra. La costruzione della figura luogo, e la relativa procedura individuata per la realizzazione della stessa, ha costituito uno dei momenti

formativi volti all'acquisizione della consapevolezza da parte degli studenti del concetto di covariazione. Relativamente alle proposte aperte, ciascun gruppo ha prodotto una procedura di risoluzione concordata. Infatti, la capacità di comunicare correttamente contenuti matematici è uno degli obiettivi didattici della sperimentazione. In tal modo, gli studenti hanno avuto l'opportunità di costruire e consolidare abilità argomentative. Dai vari gruppi sono emerse diverse procedure, parimente corrette, che consentivano la risoluzione del medesimo problema. Il confronto tra pari ha dunque favorito l'apprendimento considerato come processo di partecipazione e di verbalizzazione di argomenti matematici.

6 – Conclusioni e scenari futuri.

Siamo convinte della valenza didattica della costruzione della curva-luogo di una covariazione di segmenti variabili per introdurre il concetto di funzione reale in maniera intuitiva e svincolata dall'insieme dei numeri reali. In tal modo, riteniamo che sia possibile percepire in maniera naturale la variazione della variabile indipendente e la covariazione della variabile dipendente, senza passare per la complicata trattazione numerica della continuità. Da una prima analisi, i dati suggeriscono che introdurre il concetto di covariazione secondo un approccio storico unitamente all'uso di software dinamico ha permesso agli studenti di esplorare e trovare correlazioni in maniera consapevole. Gli sviluppi successivi, pertanto, saranno mirati ad indagare se tale intervento didattico ha contribuito effettivamente a porre le basi per l'acquisizione del concetto più astratto di funzione.

Bibliografia

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Déscartes R. (1637). Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie. Qui sont des essais de cette Methode. Leyde: de l'Imprimerie de Ian Maire.

Euclide, (1970. (cur. Frajese A., Maccioni L.). *Gli Elementi*. UTET.

Imperi N., Rogora E. (2022). Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio, in *La matematica e la sua didattica*, **30**, n. 1-2, 33–52.

Jankivist U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, *Educ Stud Math*. Springer Science.

Sfard A. (1992). Operational origin of mathematical objects and the quandary of reification – the case of functions, in E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Washington, DC: MAA.

Sfard A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one, in *Educational Researcher*, Vol. **27**, No. 2.

Sfard A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*, Erickson, Trento.

Tall D., Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151–169.

I precursori medioevali dei compiti di realtà: le trame narrative che nascondevano i rapporti “proibiti” in matematica

I problemi del Liber Abaci

Laura Tomassi*

* Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata, Italia

Istituto Comprensivo A. M. Ricci di Rieti

laura.tomassi1@gmail.com, tomassi@axp.mat.uniroma2.it



Sunto: *Nel presente lavoro si illustra un percorso didattico in Curriculum Verticale e le esperienze d'aula svolte in classi di Scuola primaria, Secondaria di Primo Grado e di Liceo Matematico, con l'obiettivo di sviluppare il pensiero proporzionale e protoalgebrico. Attraverso l'integrazione della storia nella didattica della matematica, partendo dallo sfaccettato scenario del Liber Abaci di Leonardo Pisano, lo studente viene accompagnato nella risoluzione di problemi che possono essere considerati precursori dei moderni compiti di realtà, con la creatività laboratoriale di una bottega artigiana del 1200 ed il rigore stringente della geometria euclidea.*

Parole Chiave: *storia, pensiero proporzionale, compito di realtà, laboratoriale.*

Abstract: *This work illustrates a didactic path that can be extended in the Vertical Curriculum and the classroom experiences carried out in primary school, lower secondary school and high school classes, with the aim of developing proportional and pre-algebraic thinking. Through the integration of history in mathematics teaching, starting from the multifaceted scenario of Leonardo Pisano's Liber Abaci, the student is accompanied in solving problems that can be considered precursors of modern reality tasks, with the creativity of an artisan workshop of the 1200s and the rigorous rigor of Euclidean geometry.*

Keywords: *history, proportional thought, reality, laboratory.*

1 - Introduzione

Il presente percorso didattico appartiene all’ambito della Matematica e della Matematica applicata alle Scienze e si inserisce in un quadro teorico in cui la storia e l’oggettificazione sono gli elementi portanti (Barbin, 2002; Radford, 1997; Grugnetti, 2002). La storia della matematica favorisce la riflessione sia sugli oggetti matematici e sulla loro evoluzione, che sul modo di introdurli in classe (Radford, 1997; Radford, 2008).

Nel Liber Abaci, di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, risalente al 1202, partendo dal rigore dimostrativo euclideo, vengono proposti molteplici problemi sotto la veste di brevi narrazioni intrise di elementi realistici, nelle quali la realtà è costruita ad arte e funzionale alla creazione di situazioni matematiche significative di complessità crescente: tali problemi possono essere considerati precursori dei moderni compiti di realtà, che definirei «compiti di realtà storica».

1.1 – I compiti di realtà storica

Con la dizione generale «*compito autentico*» si indica un incarico assegnato e assunto dagli studenti, il cui scopo è di promuovere e di valutare, insieme a loro, le conoscenze, le abilità e le competenze utilizzate nell'affrontare problemi veri e reali (Glatthorn, 1999). I compiti autentici si fondano sull'impostazione costruttivista secondo cui il soggetto produce la conoscenza nell'agire riflessivo in situazioni di realtà. I compiti sono problemi complessi, aperti, che gli studenti affrontano per apprendere ad usare nel reale di vita e di studio le conoscenze, le abilità e le capacità personali, e per dimostrare in tal modo la competenza acquisita (Tessaro, 2014). Il compito autentico è stato variamente interpretato: come «*compito di realtà*» o «*compito di vita reale*», «*compito di prestazione*», «*compito esperto*», «*compito professionale*». Il vero punto nevralgico di questo è che non tutto ciò che è reale è autentico: l'introduzione di elementi nella realtà nei mezzi di insegnamento ha bisogno non solo di verosimiglianza ma anche di rappresentatività matematica.

È corretto che, nell'insegnamento, siano considerate autentiche le attività didattiche che promuovono transfer collegando il mondo vero dello studente al curriculum scolastico. Vi sono alcuni parametri da considerare perché un compito venga considerato autentico (Tessaro, 2014): le attività hanno rilievo nel mondo reale; i problemi connessi alle attività sono mal definiti ed aperti a multiple interpretazioni; le attività autentiche contengono compiti complessi; i compiti autentici offrono agli studenti l'occasione di esaminare i problemi da diverse prospettive teoriche e pratiche; i compiti autentici forniscono l'occasione di collaborare e di riflettere;

essi possono essere integrati ed utilizzati in settori disciplinari differenti; i compiti autentici generano prodotti finali che sono importanti di per sé; essi permettono più soluzioni alternative. Di seguito spiegherò perché, a mio avviso, i problemi proposti da Leonardo Pisano nel Liber Abaci possono essere considerati precursori dei compiti di realtà. Essi riguardano o la vita quotidiana con le sue attività commerciali o sono una rappresentazione dei quesiti teorici posti nelle Scuole d’Abaco. Nel primo caso i problemi sono uno spaccato realistico della vita medioevale, delle monete in uso, delle unità di misura, delle conoscenze tecnologiche e scientifiche dell’epoca, scritti in un latino che era sul punto di cedere il passo al volgare. Ciò li rende una base eccellente per progettare attività didattiche multidisciplinari. I problemi del XII capitolo sono invece rappresentativi del scendo caso. Essi sono detti «questioni erratiche», problemi di natura eterogenea tutti risolvibili con diversi metodi, illustrati dall’autore, seguendo varie vie ognuna delle quali porta al risultato voluto. La cosa è didatticamente molto interessante se si vuol superare una didattica per regole rigide da applicare meccanicamente. Si deve prima di tutto capire il problema, cercare una strada risolutiva autonoma, confrontarla con quelle proposte e poi scegliere una strada «più bella» (termine utilizzato da Leonardo Pisano) per risolverlo. Non si tratta solo di pensiero divergente ma di sviluppare senso critico, condizione necessaria per il quale è la scelta e la possibilità di scelta. In generale abbiamo sempre un possibile approccio geometrico e un possibile approccio aritmetico. I due approcci dovrebbero essere sviluppati in ciascuno indipendentemente dalle singole caratteristiche cognitive. Le «questioni erratiche»

non sono legate al commercio o all'economia o alla pratica della vita quotidiana, ma sono problemi generalmente figurati con un'immagine, un racconto, spesso surreale, nel senso che contiene elementi fortemente realistici ma mescolati ed inseriti in un contesto costruito ad arte. L'immagine serve per fissare la mente su tipo di problema matematico, su una procedura o, a volte per raccontare una situazione spesso, per i risultati numerici che produce, ridicolmente paradossale. In realtà si tratta di problemi astratti che cominciano col formare il corpo della nuova matematica che, con l'introduzione dei numeri razionali e dei relativi algoritmi comincia ad assumere una diversa fisionomia. Il racconto con i suoi personaggi permette di articolare verbalmente una sorta di protoalgebra dove le incognite sono indicate con una locuzione che ricorre, al posto di una lettera che la rappresenti simbolicamente, nei diversi passaggi algebrici (Catastini & Ghione, 2021; Ghione, comunicazione privata 2021).

Un esempio è rintracciabile nel seguente problema: «(XII.7.59) Un tale aveva 4 pesi [campione], con i quali pesava libbre intere della propria merce da una libbra fino a 40 libbre; si chiede quanto pesa ciascun peso[campione]: di certo occorre che il peso del primo sia di una libbra, affinché con esso fosse pesata una libbra, quello del secondo il suo doppio, più 1, cioè 3, o il triplo dello stesso primo; con questi due pesi [campione] si possono pesare da una libbra fino a 4. E ancora il peso del terzo è 1 più il doppio di ambedue, cioè il triplo del secondo, cioè 9; mentre il peso del quarto è 1 più il doppio del peso degli altri tre, cioè il triplo del terzo, cioè 27; questi 4 pesi [campione] messi insieme fanno 40. Di lì se vuoi sapere come

con questi pesi possono essere pesate quante libbre vuoi, da 1 libbra fino a 40 libbre» (Fibonacci, 1202).

La bilancia qui è nient’altro che un’immagine, un’oggettificazione della procedura mentale di costruzione di un sistema di numerazione in base 3 con il quale gli studenti possono esprimere i numeri da uno a quaranta: esperienze, i cui risultati non riporto perché vanno fuori dall’argomento di questo testo, indicano che l’oggettificazione della bilancia permette di ottenere lo svolgimento del compito assegnato con gradi di astrazione diversa a seconda dell’età degli studenti. La mia scelta dell’uso dei problemi del Liber Abaci è confortata da numerosi studi su come i Problemi d’Abaco possano essere un utile mezzo di fondamento del pensiero protoalgebrico ed algebrico in studenti delle fasce di età prese in considerazione nella mia esperienza (Charbonneau & Radford, 2000; Demattè & Furinghetti, 2022). Il «compito di realtà storica» porta la mente «all’origine delle cose», per usare un’espressione montessoriana.

Le mie domande di ricerca sono tre: la prima è se lo sviluppo del pensiero proporzionale può costituire un valido metodo di costruzione di un pensiero algebrico vivo; la seconda è se l’utilizzo della geometria euclidea e gli atti dimostrativi necessari alla costruzione del suo edificio possono essere funzionali allo stesso obiettivo; la terza è se è possibile costruire materiali ed artefatti efficaci funzionali alla risposta della seconda domanda anche per studenti in cui l’astrazione ed il rigore dimostrativo non sono ancora sviluppati pienamente.

1.2 – Il pensiero proporzionale

Il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, con un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici (Radford, 1997). Il *Liber Abaci* offre una grande attenzione didattica al lettore e proprio per questo può essere utilizzato, in maniera sorprendentemente in linea con quanto delineato dalle Indicazioni Nazionali del 2012: problemi diversi sono raggruppati per tipologia di risoluzione; le soluzioni sono descritte con grande minuzia e attenzione al calcolo, facendo uso dei numeri razionali importati da Fibonacci dal mondo arabo; per molti problemi viene fornita più di una strategia risolutiva, in modo che il pensiero sia sempre di fronte alla prerogativa più importante del pensiero matematico, la scelta. Grande attenzione è data a scopo pedagogico alla geometria euclidea, alla pratica manuale e alla produzione di artefatti da Leonardo Pisano, perfettamente in linea con gli studi didattici e neuroscientifici attuali (Mariotti, 1997, 2018; Dehaene, 2010): «E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria». Dalla geometria Euclidea sono derivati i diagrammi di soluzione con «la regola del tre» e con la «regola del cinque» che risolvono rispettivamente i problemi di proporzionalità diretta e bilineari. La motivazione per la quale è stata introdotta «regola del tre» risiede nello stabilire quantitativamente e velocemente il modo di confrontare il costo di una merce con un'altra della stessa specie. La «regola

del tre» o «*regola delle tre cose*» o «*regula italica*» è alla base di gran parte della matematica pratica medioevale e delle prime scuole d’abaco apparse in Italia nel XIII secolo. Tale regola si fonda sulla teoria delle proporzioni sviluppata da Euclide nel V libro degli Elementi a partire dal concetto di grandezza, di grandezze omogenee e di rapporto. Il termine *logos* utilizzato da Euclide per indicare un rapporto in senso matematico è lo stesso usato in filosofia per denotare una forma di ragionamento razionale. Il rapporto A:B sembra essere visto come un movimento di pensiero, una qualche costruzione rigorosa, quantitativa che lega A a B, che permette di dedurre B da A come una qualunque altra forma di ragionamento. Il rapporto 3:2 non è il numero 1,5 ma l'abbreviazione della seguente argomentazione: se tra un A e un B esiste tale rapporto, allora A è come 3 e B come 2 cioè B è due volte la terza parte di A. Ugualmente il termine *analogos* utilizzato da Euclide per indicare l’uguaglianza tra due rapporti assume il significato più generale di analogia e produce un metodo potentissimo per trasferire sul terreno solido dei numeri, situazioni apparentemente lontane. La «*regola del 5*» permetterà di confrontare tra loro merci diverse per valutare l’equità dello scambio.

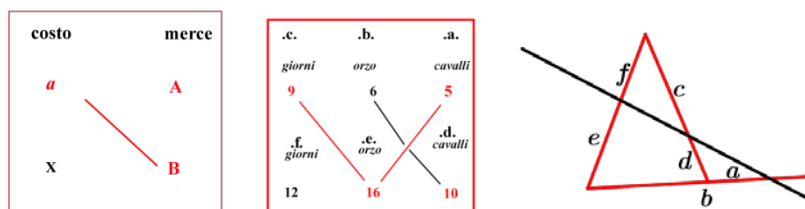


Fig. 1- La regola del tre, del cinque e la figura chata.

Alcuni problemi del Liber Abaci sono stati presi in esame in studi precedenti che evidenziano come si possono paragonare le strategie risolutive con quelle attuali che usano l'algebra simbolica e, osservando il cambiamento, comprendere che il pensiero matematico è in costante evoluzione (Demattè & Furinghetti, 2022; Grugnetti, 2002).

1.3 – I rapporti proibiti nella descrizione della realtà fisica e le radici medievali della scienza moderna

Nel suo saggio « Le origini medievali della scienza moderna » Edward Grant ha esposto quanto segue (Grant, 2017). La scienza ha una lunga storia che affonda le sue radici nell'Antico Egitto e nella Mesopotamia, anche se la scienza moderna nacque indiscutibilmente nel XVII secolo in Europa, grazie ad un insieme di circostanze che caratterizzavano la società occidentale di quel momento storico, che fondavano ed istituzionalizzavano la scienza. Ma essa esisteva già in molte antiche società: per esempio nel mondo Islamico, che aveva elaborato anche la scienza ellenistica, la matematica, l'astronomia, l'ottica geometrica e la medicina erano molto più sviluppate che nei paesi occidentali. Un imponente numero di studiosi afferma che la scienza moderna deve quasi nulla al Medioevo e questa posizione è allegoricamente rappresentabile dal personaggio galileiano di Simplicio. Dopo più di tre secoli ancora prevale l'idea che la scienza moderna sia cominciata con Copernico e Galileo, ma questa informazione è «deprecabilmente incompleta». Sarebbe più vicino alla verità sostenere che la critica degli scienziati del secolo XVI allo scolasticismo tradizionale fu necessaria, ma è

altrettanto importante chiedersi se Galileo derivò il teorema della velocità media e le varie sue definizioni di velocità e accelerazione dalla lettura di alcuni testi medioevali dei filosofi naturali, come Bradwardine, i cui contributi in campo cinematico e dinamico furono enormi.

Vi è da considerare inoltre la contrapposizione tra la scienza alta e l’arte empirica di costruire delle botteghe artigiane, la nascita di un’economia sempre più sviluppata che nel 1200 ha portato alla necessità di una cultura pragmatica e applicativa, quella del mercante, insegnata nelle scuole d’Abaco. Qui ferveva una cultura svincolata da canoni scientifici e filosofici, meno raffinata, più libera. In questo contesto operava la figura di Leonardo Pisano e nasceva il suo *Liber Abaci*, che pretendeva di essere un manuale ma anche un trattato di matematica. In particolare, Leonardo Pisano è precursore dei tempi e introduce operativamente diverse grandezze nelle scienze applicate (il prezzo, la concentrazione dei metalli preziosi nelle monete, il peso specifico), rapporti non euclidei tra grandezze non omogenee, non accettati per secoli in ambito matematico filosofico. Fibonacci apre così la strada alle grandezze derivate, concetti che saranno formalizzati secoli più tardi, essenziali per lo sviluppo della scienza: in questa prospettiva si può tracciare un percorso storico didattico nel quale la proporzionalità è elemento chiave per la “geometrizzazione della realtà fisica” (Napolitani, 1998). Si pensi che lo stesso Galilei nel dare le sue definizioni di velocità e peso specifico incorreva nella difficoltà di seguire la teoria euclidea dei rapporti e delle proporzioni.

Il carico delle merci, la conversione delle unità di misura, il prezzo e la concentrazione dell'argento nelle monete erano delle realtà empiriche nel Liber Abaci, molto prima che la fisica, la chimica e l'economia matematica nascessero come scienze vere e proprie. Fibonacci si era formato presso gli Arabi e nel mondo arabo del peso specifico veniva data una definizione rigorosa, come rapporto tra peso e volume da parte dello scienziato arabo al-Khāzinī (Mottana, 2017) nel trattato Bilancia universale della saggezza (1130 d.C.): "Il peso di un corpo relativamente piccolo, quale che sia la sostanza [che lo costituisce] ha, rispetto al suo volume, lo stesso rapporto che un corpo più grande [della stessa sostanza] ha con il proprio volume" (Djebbar, 2016).

«Leonardo Pisano contribuì, così, in maniera incisiva allo sviluppo del pensiero matematico e all'ampliamento degli orizzonti culturali della sua epoca, giungendo al risultato di gettare un ponte fra le rigorose metodiche dimostrative euclidee e la pragmatica mentalità del mondo mercantile di cui Leonardo stesso faceva parte» (Giusti, 2016).

2 – Esperienze d'aula

Lo studio i cui punti fondamentali sono stati appena esposti è stato in parte sperimentato nelle classi con uno spirito che vorrebbe "far vivere la matematica come parte della storia dell'umanità, in modo da umanizzarla e che intimorisca di meno. Si vorrebbe far percepire il pensiero matematico come un continuo sforzo di ripensamento e di miglioramento da parte dell'uomo, piuttosto che come un edificio che raccoglie verità certe e immutabili. Seguendo l'itinerario del pensiero

dell’uomo stesso, i suoi tentennamenti, i suoi progressi, ne potremmo rendere più obiettivo il cammino e più significativi i concetti” (Grugnetti, 2023 comunicazione privata). Si espongono di seguito alcune esperienze pilota che hanno bisogno di un seguito, per affinare tecniche valutative dell’efficacia dell’uso della storia come strumento per insegnare matematica e per determinare se possa avere effetto sugli atteggiamenti, sull'ansia, sulla motivazione e sui risultati negli studenti e nei loro insegnanti.

2.1 – Esperienze d’aula: laboratorio di soldi

L’idea di base della mia esperienza è che si possa recuperare il concetto originario di «logos» e «analogia» euclidei nell’avvicinare i bambini al concetto di rapporto e proporzione in maniera spontanea, attraverso laboratori sulle monete e pesi in epoca medioevale, riflettendo sul valore del denaro. I destinatari più giovani di questa iniziativa sono stati bambini delle classi terza dell’IC Falcone e Borsellino di Roma, con un laboratorio sulle unità di misura del periodo storico del *Liber Abaci*: disponendo di una bilancia a due bracci e rappresentando i pesi medioevali con i mattoncini BAM, i bambini hanno risolto semplici proporzioni, in maniera intuitiva, per realizzare dei modellini di monete con un determinato titolo d’argento: i denari imperiali sono stati costruiti usando plastilina per rappresentare il metallo grezzo e i confettini argentati per rappresentare l’argento.

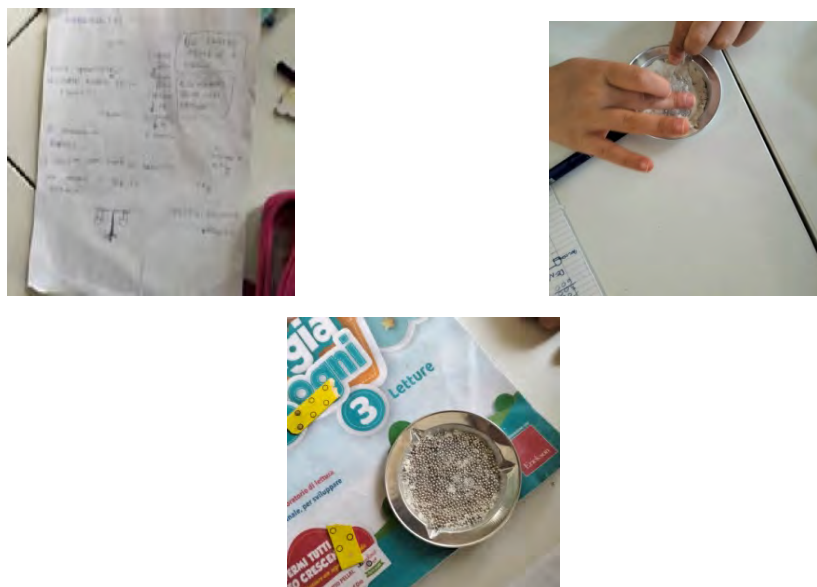


Fig. 2- Modellino di monete.

La logica proporzionale ha guidato le esperienze d'aula nelle classi seconda A e B della scuola secondaria di primo grado di Casperia (Rieti) e seconda A ed E dell'IC Falcone e Borsellino di Roma nell'anno scolastico 2022/2023. L'idea base è dimostrare che le proporzioni e la proprietà fondamentale delle proporzioni possono essere scritte e dimostrate a partire da attività laboratoriali e manipolative basate sugli Elementi di Euclide. Prima di tutto ci si è occupati di dimostrare il teorema dello gnomone (proposizione I.43), con materiale di cartoncino o plexiglass tagliato al laser e con file GeoGebra.

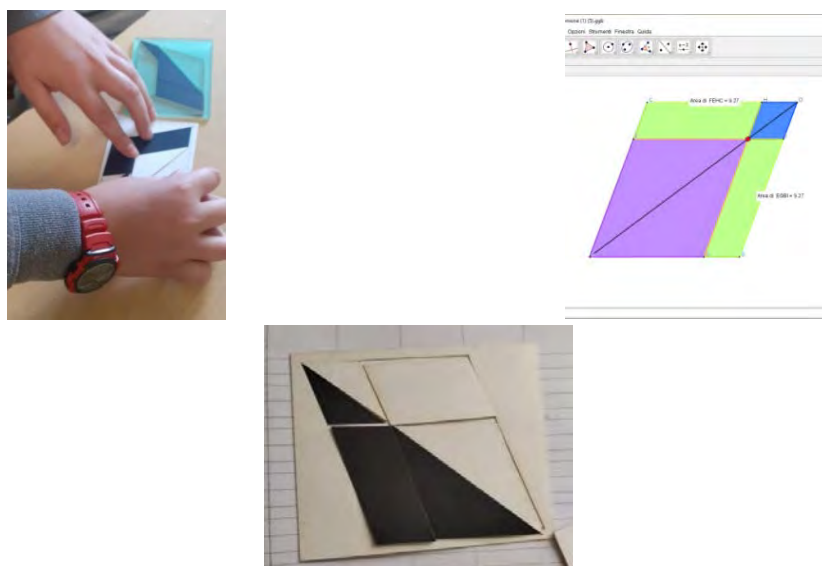


Fig. 3- Il teorema dello gnomone con attività manuali e con GeoGebra.

Dimostrando l’equivalenza dei parallelogrammi complemento, si sono fatte considerazioni sulla rappresentazione diagrammatica di un particolare tipo di rapporto: la concentrazione di colorante in acqua. La proprietà fondamentale delle proporzioni nel VI libro degli Elementi viene dimostrata attraverso la proposizione VI.16 per le grandezze geometriche; in verità data la giovane età degli studenti non è facile fare una dimostrazione rigorosa e così ragionato sulla costruzione di triangoli rettangoli simili diagrammatici della concentrazione di 2 soluzioni di acqua e colorante con la stessa colorazione. Ognuno ha riportato sui cateti dei triangoli rettangoli le misure dei volumi dell’acqua ed il numero delle gocce del colorante, prima su foglio a quadretti grandi. I triangoli sono stati ritagliati dai ragazzi e riprodotti su cartoncino colorato. Gli alunni hanno osservato

che i due triangoli ottenuti sono simili poiché i loro cateti corrispondenti sono in proporzione ($C1: C'1=C2:C'2$). Poi i triangoli sono stati posizionati con le ipotenuse allineate costituire la diagonale di un rettangolo, fornito su cartoncino dal docente, e si è enunciata la proprietà fondamentale delle proporzioni ovvero che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi unicamente per via deduttiva. Attraverso il prodotto dei medi si ottiene l'area di un rettangolo che seppure nella forma è diverso è comunque equivalente all'area del rettangolo che si ottiene dal prodotto degli estremi.

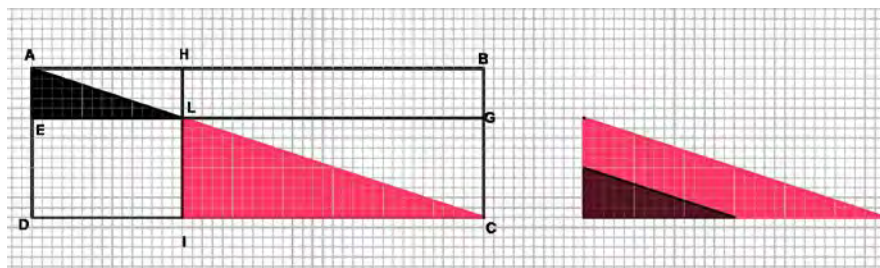


Fig. 4- Proprietà fondamentale delle proporzioni.

Tutte queste attività sono state utili a costruire un diagramma ispirato alla *regola del tre* di Fibonacci che risolve i problemi di proporzionalità diretta e permette di applicare le proprietà delle proporzioni in maniera intuitiva.

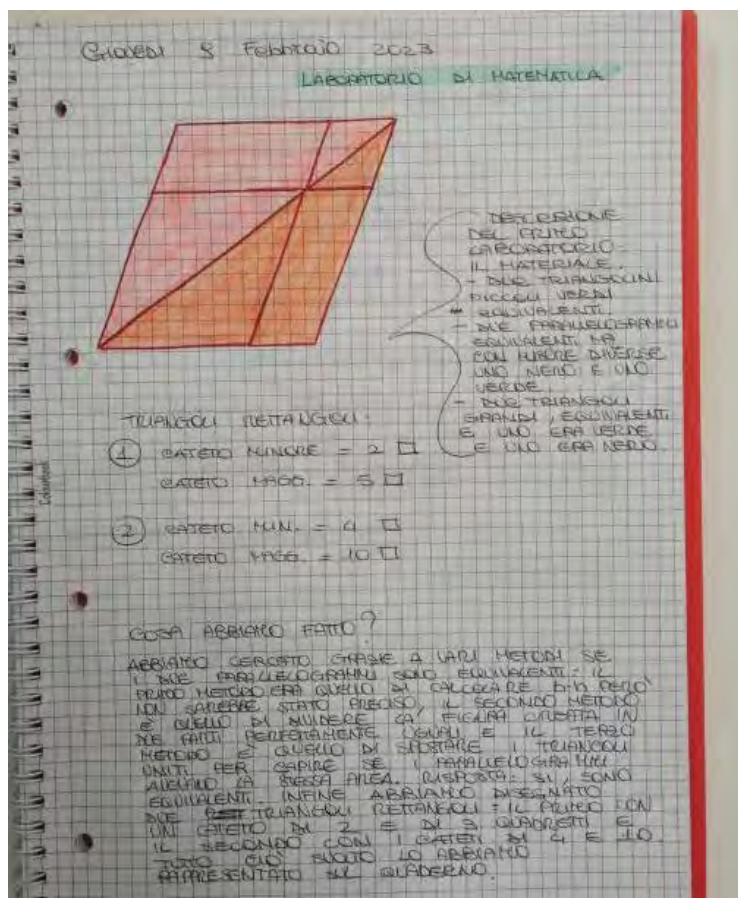


Fig. 5- La concentrazione e le proprietà fondamentale delle proporzioni.

Gli alunni hanno riportato su un foglietto quadrato la tabella risolutiva indicando i tre dati noti del problema di proporzionalità diretta e per rotazione rispetto agli assi di simmetria della tabella risolutiva trovare le possibili proporzioni risolutive ed equivalenti.

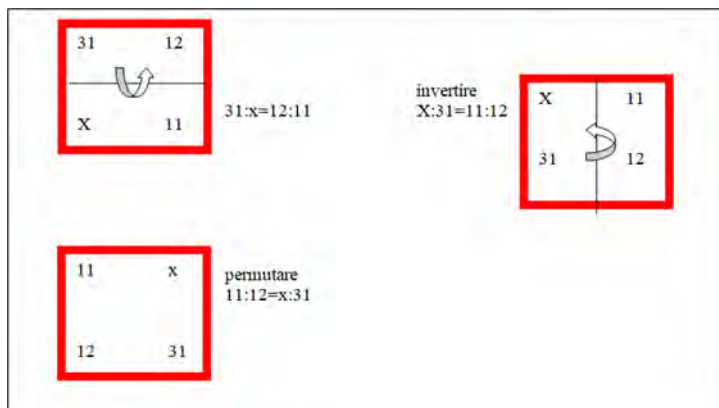


Fig. 6- Le proprietà delle proporzioni in forma diagrammatica.

Attenzione particolare hanno meritato i problemi di svuotamento, inseguimento e di concentrazione d'argento delle monete che hanno portato l'attenzione dei ragazzi sulle conoscenze fisiche e "chimiche" dell'epoca e sulle unità di misura, oltre che sulla numismatica e sulla costruzione di modellini di cera e limatura di ferro (Tomassi, 2021). Si è impostata la risoluzione del problema (XII.3.34):

C'è una caraffa che ha quattro fori, con il primo dei quali si svuota in 1 giorno; con il secondo in 2 giorni, con il terzo in 3 giorni, con il quarto in 4 giorni; si chiede in quante ore si svuoterà, se i detti quattro fori si aprono insieme.

Nella figura è riportata la soluzione come è stata letta nella traduzione riportata sulla pagina del sito www.progettofibonacci.it e a seguire una delle risoluzioni spontanee degli studenti: si è mostrato che in qualche modo la falsa posizione è una maniera naturale di risolvere i problemi all'età della scuola media

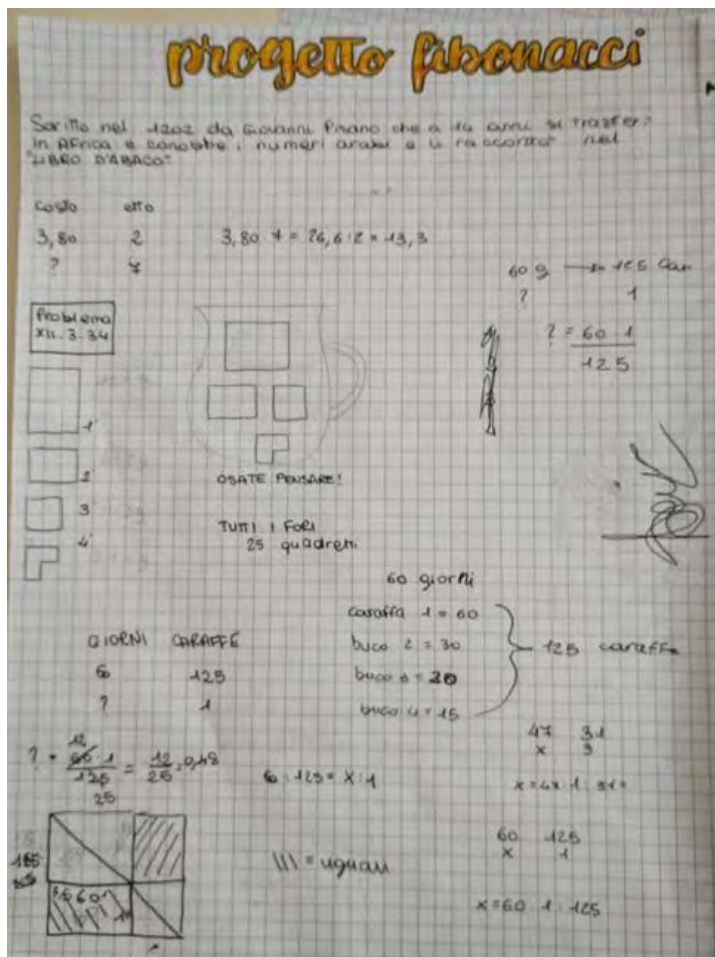


Fig. 7- Il problema della caraffa.

Un problema realistico e legato al valore delle monete, che ha ispirato la realizzazione del nostro laboratorio di numismatica è il seguente:

Problema VIII.2.36. Qualcuno volle comprare argento misto con stagno, volgarmente chiamato falso argento. Poiché non sapeva quanto argento puro ci fosse nelle libbre

di quella lega d'argento, prese di esso un granulo, il cui peso era 5 carrube e $\frac{1}{22}$ grani, cioè $\frac{5}{82}$ carrube; e lo pose sopra il fuoco, per ripulire l'argento dallo stagno: e essendo stato fatto ciò, trovò di lì 2 carrube di argento puro, e $\frac{1}{22}$ grani, cioè $(\frac{5}{82})$ carrube; si chiede quanto argento puro era nelle libbre di quella lega d'argento.



Fig. 8- Fusione di monete di cera.

2.2 – Matematica, storia, latino e scienze: il pensiero proporzionale come base del pensiero algebrico

La lettura del testo del *Liber Abaci*, nelle Secondhe classi di Liceo è avvenuta in latino, e la soluzione di problemi di realtà storica è stata eseguita attraverso il lavoro di gruppo. La proporzionalità è stata trattata con le basi geometriche con cui

viene presentata nel VI libro degli Elementi di Euclide, citato da Fibonacci nel come quadro teorico d’ispirazione.

Si è posta grande attenzione ad atti dimostrativi validi ma intuitivi, calibrati sull’età degli studenti. Con il metodo della dimostrazione materiale è stata dimostrata sia la proposizione VI.1 che la VI.2 degli elementi di Euclide, nonché la VI.16.



Fig. 9- “Dimostrazione materiale” della proposizione VI.1.

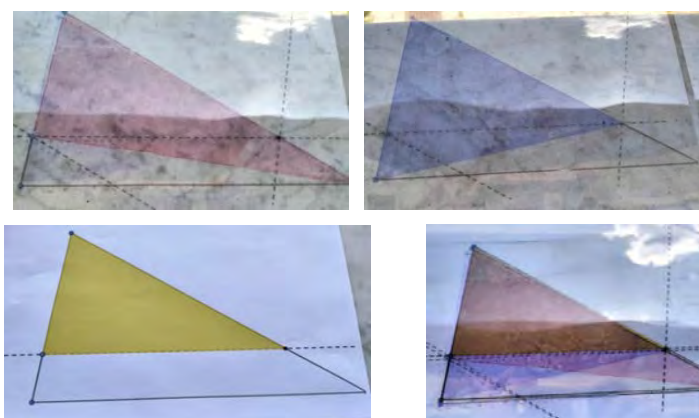


Fig. 10- “Dimostrazione materiale” della proposizione VI.2.

Le dimostrazioni materiali si servono della percezione, del movimento delle figure e della logica naturale: si utilizzano materiali di cartoncino e di carta trasparente. Esse preludono

sempre ad una dimostrazione teorica, esaustiva ma semplice, il più possibile vicino alla realtà storica della dimostrazione euclidea. A questo scopo ci si è serviti di GeoGebra per le costruzioni geometriche.

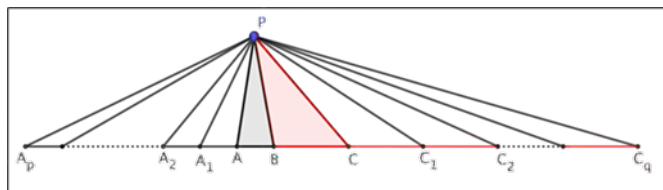


Fig. 11- "Dimostrazione materiale" della proposizione VI.1.

Si sono risolti problemi di svuotamento delle caraffe e si è osservato che la logica proporzionale e il metodo della falsa posizione sono effettivamente naturali per ragazzi del biennio della scuola superiore, che pure conoscono le equazioni, come confermato anche dalla proposta del *"problema del pozzo"* e *"dei due serpenti"* (XII.3.34 e XII.3.35) (Fibonacci, 1202).

Il problema di svuotamento della caraffa è stato affrontato come problema di realtà: i ragazzi hanno ricostruito con materiale povero un recipiente che si svuotasse in tempi doppi e quadrupli rispetto al tempo iniziale. Dover realizzare un dispositivo di questo tipo ha posto numerose questioni la risoluzione delle quali ha messo in campo tutta capacità di risolvere problematiche scientifiche vive e reali. Si sono realizzate caraffe con fori di lume diverso (ad esempio con fori quadrati, in cui il foro più piccolo fosse un quadrato inscritto nel quadrato più grande); oppure con un numero di fori doppio triplo o quadruplo rispetto ad un foro di riferimento; oppure con fori a diverse altezze. Si sono misurati i tempi di

svuotamento e cercata una definizione di cos’è la velocità di svuotamento.

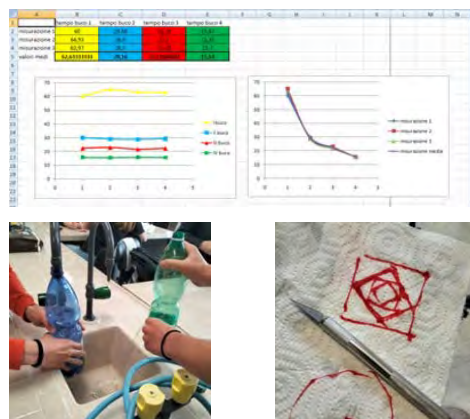


Fig. 12- Tempi di svuotamento delle caraffe e schizzo di un tipo di foro.

2.3 – Storia, lingua latina e fisica: il peso specifico, la geometrizzazione dello spazio fisico di Galilei

Si è ricostruito il percorso che ha portato alla definizione moderna di peso specifico, partendo dalla considerazione che, anche se operativamente ai tempi di Fibonacci esisteva l’idea di una definizione come rapporto tra grandezze non omogenee, peso e volume, ancora ai tempi di Galileo questo non veniva preso in considerazione a livello formale. Prova di questo è che il giovane Galileo descrisse il metodo di determinazione del peso specifico con la bilancia idrostatica e formalizzò la trattazione matematica del problema con la teoria delle proporzioni e dei rapporti euclidei ne suo trattatello La Bilancetta.

Compito di realtà storico per la classe IV del Liceo Matematico di Poggio Mireto: “*guardiamo il mondo con gli occhi*

del giovane Galileo, uno di noi". I ragazzi hanno letto diversi documenti storici. Il primo è stato il passo in latino della definizione operativa di peso specifico che si ritrova in Fibonacci, il quale, parlando del carico delle navi riporta la seguente frase a proposito delle merci:

(VIII.4.11) E questo modo è molto utile nel carico delle navi, quando si caricano di merci diverse, che hanno la loro specificità secondo la diversità di peso, la loro leggerezza o pesantezza, [que habent modum secundum diversitatem ponderis, et levitatem vel gravitatem illarum] come le navi che si caricano in Garbo [nord Africa occidentale] , che vengono caricate a cantari di pelli.

La lettura è proseguita con le fonti originali che il giovane Galileo aveva a disposizione per ricostruire la misurazione del peso specifico di Archimede (il passo del De Architectura di Vitruvio (libro 9, cap 3, linee 9-12) in lingua originale e nella versione volgarizzata da Cesare Cesariano. Abbiamo letto gli appunti di Galileo (valutando la difficoltà e l'incertezza della ricostruzione storica dell'esperimento di Archimede), conservati nel Museo Galileo e ripercorso l'esperienza di misura del peso specifico, come esposto nel trattato "*La Bilancetta*", di Galileo medesimo, del quale abbiamo letto il manoscritto. Dalla ricostruzione del modello della bilancia Galileiana, effettuata dal Dottore Giovanni Casini del Dipartimento di Fisica dell'Università Tor Vergata, applicata alla misura del peso specifico di un modello della corona di Gerone e dai calcoli fatti per determinare la *gravitas in specie*, con gli studenti ci si è resi conto di come ancora all'epoca di Galileo vi fosse il grosso ostacolo concettuale di scrivere la definizione del peso specifico come

rapporto tra grandezze non omogenee. Egli utilizzò il rapporto composto, un modello applicato anche alla sua definizione di velocità, riconducibile alla tradizione euclidea ed in uso nella cinematica dei filosofi naturali del Medioevo, come Bradwardine ed Oresme, che avevano dato la definizione di «Proportio proportionibus». Per gli studenti un esempio vivo di interazione dialettica tra scienze sperimentali e matematica.



Fig. 13- La Bilancetta di Galileo.



Fig. 14- Gli appunti del trattato di Galileo dal titolo *La bilancetta*.

Conclusioni

Coltivo l'idea di condurre una sperimentazione sistematica e maggiormente centrata sul percorso descritto. Ringrazio i colleghi insegnanti che hanno avuto un ruolo di primo piano insieme ai loro studenti nel permettermi di fare esperienza d'aula ed indirizzare i miei studi : i Professori Daniela Tossini, Gemma Settembrini, Antonio Padulo dell'IC Falcone e Borsellino di Roma; Lucia Grillotti, Vanessa Bianchetti, Alessandro Nardi dell'IC di Casperia (Rieti); Rodolfo Orlando, Eleonora Colletti del Liceo Matematico di Poggio Mirteto. Ringrazio inoltre Il Dottor Giovanni Casini dell'Università Tor Vergata per il prezioso aiuto nella ricostruzione della Bilancetta di Galileo.

Bibliografia

- Acerbi F. (2019). *Euclide, tutte le sue opere*, Bompiani.
- Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., Menghini, M. (2002). Integrating history: Research perspectives, *History in mathematics education, The ICMI study series*, 63-90.
- Catastini, L., Ghione, F. (2021). Problemi tra uomini che hanno denari (Fibonacci, Liber abaci, cap. XII), *Archimede*, 1, 2-16.
- Charbonneau, L., Radford, L. (2000). Crafting an Algebraic Mind: Intersections from History and the Contemporary Mathematics Classroom, *Canadian mathematics education study group groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques*.
- Dehaene S. (2010) *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Raffaello Cortina Editore.

Demattè, A., Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abacus problems, *ZDM–Mathematics Education*, 54(7).

Djebbar, A. (2016). *Une histoire de la science arabe. Entretiens avec Jean Rosmordu*, Média Diffusion.

Ghione, F., (2021) *Fibonacci e il peso specifico*; sul sito www.progettofibonacci.it

Ghione, F. (2019). Le origini dell’Aritmetica moderna in Fibonacci. Quali indicazioni didattiche?, *Periodico di Matematiche*, 11.

Giusti, E. (2016). *Un ponte sul Mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Polistampa.

Glatthorn, A.A. (1999). *Performance standards and authentic learning*, Larchmont, NY: Eyeon Education.

Grugnetti, L. (2000). Ancient problems for the development of strategic thinking, *History in mathematics education: An ICMI study*, 78-81.

Grant, E. (2017). *Le origini medievali della scienza moderna*, Giulio Einaudi Editore.

Leonardo Pisano Fibonacci (1202). *Riproduzione integrale dell’edizione del Liber abaci del 1857 a cura di Baldassarre Boncompagni*, www.progettofibonacci.it

Hanykov N. (1860). Analysis and extracts of Book of the balance of wisdom, *Journal of the American Oriental Society*, n. 6.

Hughes, B. (Ed.). (2008). *Fibonacci’s De practica geometrie*, New York, NY: Springer New York.

Mariotti M. A., Fischbein E. (1997), Defining in Classroom Activities, *Educational Studies in Mathematics*, 34, pp. 219–248.

Mariotti M. A. e Maffia A. (2018). Dall’utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell’insegnante nel processo di

mediazione semiotica, *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, (3), pp. 50 – 63.

Mottana A. (2017) *Galileo e la Bilancetta*, Olschi editore.

Napolitani P.D. (1998). La geometrizzazione della realtà fisica: il peso specifico in Ghetaldi e Galileo, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 7, pp. 139-237.

Radford L., (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics v. 17, n.1*, pp. 26-33, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

Radford, L. (2008). Semiotic reflections on medieval and contemporary graphic representations of motion, working paper presented at meeting of the *History and Pedagogy of Mathematics Conference* (HPM 2008), pp. 14-18 July 2008, Mexico City. <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>. Accessed July 14

Radford L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics v. 30, n.2*, FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*, Series: Semiotic Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematics, Volume 4, Brill.

Tessaro F. (2014). Compiti autentici o prove di realtà?, *Formazione e insegnamento*, XII(3), pp. 77-88.

Tomassi L. (2021). Laboratori didattici tra storia e matematica ispirati al Liber Abaci, *Periodico di Matematiche* 13, pp. 5-23.

Modellizzazione matematica all'aperto con MathCityMap: alcune esperienze di didattica fuori aula

Angela Donatiello* Anna Rita Ferraioli** Laura
Lombardi*** Vitantonio Cardone**** Gianluca
Razzino**** Serena Siani****

*DipMat, Università di Salerno, Italia; adonatiello@unisa.it

**Liceo Scientifico "B. Rescigno", Roccapiemonte (SA), Italia;
arferraioli@gmail.com

***Liceo Scientifico "P.S. Mancini", Avellino, Italia; llombardi@unisa.it

****Liceo Scientifico "E. Medi", Battipaglia (SA), Italia; vancar@tiscali.it;
gianlucarazzino@tiscali.it; arwen1987@hotmail.it



Sunto: *In questo contributo si presentano alcune esperienze di modellizzazione matematica all'aperto con l'uso di tecnologie, basate sul progetto Math City Map, che hanno coinvolto studenti di scuola secondaria di II grado, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno. Gli studenti, divisi in gruppi e monitorati a distanza attraverso il portale di MCM, hanno affrontato i task, presentati come problemi autentici, in modo consapevole, scegliendo la miglior strategia possibile per la determinazione delle misure necessarie alla loro risoluzione. L'esplorazione degli oggetti reali direttamente in contesto ha offerto l'opportunità di analizzare l'oggetto da più punti di vista, favorendo in tal modo il processo di devoluzione.*

Parole Chiave: Modellizzazione matematica. MathCityMap. Passeggiate matematiche. Didattica outdoor.

Abstract: *In this contribution we present some outdoor mathematical modeling experiences using technology, based on the Math City Map project, which involved secondary school students at the Department of Mathematics, University of Salerno. The students, divided into groups and monitored remotely through the MCM portal, approached the tasks, presented as authentic problems, in an informed way, choosing the best possible strategy for determining the measures necessary for their resolution. Exploration of the real objects directly in context provided an opportunity to analyze the object from multiple points of view, thus facilitating the devolution process.*

Keywords: *Mathematical modeling. MathCityMap. Math walks. Outdoor education.*

1 - Introduzione

Negli ultimi anni pre-pandemia le prove scritte degli Esami di Stato hanno evidenziato una presenza sempre maggiore di quesiti e problemi ispirati a contesti reali. I problemi offerti in ambito scolastico, a partire da quelli presenti nei libri di testi, sono però solo apparentemente ispirati alla realtà, sono spesso problemi non autentici e non realistici (Ariosto et al., 2021), talvolta senza alcun riscontro di validazione nel reale.

Lo scarso valore attribuito alle attività di modellizzazione nella scuola secondaria, l’eccessiva attenzione posta ad attività di carattere strettamente procedurale e i contesti d’aula, con strutturazioni spesso rigide degli spazi, creano fratture nel processo di apprendimento degli studenti, non favorendo la devoluzione e mostrando un’impostazione ancora talvolta fortemente trasmissiva.

Nella scuola italiana si vive inoltre una forte contraddizione tra la presenza sempre maggiore di smartphone e applicazioni fruibili su device personali che permeano la vita quotidiana degli studenti e il loro uso spesso inappropriato. Alcune scuole scelgono come facile soluzione il divieto d'uso di tali strumenti, acuendo le fratture tra la quotidianità e il mondo scolastico che appare dunque sempre più estraneo al vissuto degli allievi.

In questo breve lavoro si intende presentare alcune esperienze di modellizzazione matematica all'aperto con l'uso delle tecnologie, vissute con studenti di scuola secondaria di II grado, basate sul progetto Math City Map (MCM project)¹ a cui stanno contribuendo in modo importante le prof.sse Maria Flavia Mammana ed Eugenia Taranto dell'Università di Catania, in particolar modo nell'ambito della formazione docenti in corsi MOOC (Taranto et al., 2021; Jablonski et al., 2022).

2 - Quadro teorico di riferimento

E' ormai noto che la pratica delle passeggiate matematiche fuori aula contribuisce allo sviluppo del sistema motorio percettivo, fondamentale per esercitarsi in compiti complessi e poco familiari e per l'acquisizione di tutti i concetti matematici di base (Ludwig & Jablonski, 2019; Ariosto et al., 2021).

Ariosto, Ferrarello, Mammana e Taranto (2021) chiariscono che il processo di modellizzazione matematica per la

¹ MCM è un progetto del gruppo di lavoro MATIS della Goethe Universitat di Francoforte sul Meno <https://mathcitymap.eu/en/>

risoluzione di problemi reali è un processo ciclico in cui gli studenti, partendo dall’osservazione e dalla rilevazione di dati dal mondo reale (mondo extra-matematico), costruiscono una soluzione matematica (mondo matematico) che andrà poi tradotta e interpretata nel confronto nuovamente con la realtà.

Il processo di risoluzione di problemi del mondo reale, può essere descritto, da un punto di vista cognitivo, dallo schema in figura 1 (Blum & Leiss, 2005 in Ariosto et al., 2021), costituito da 7 fasi attuabili in modo non strettamente sequenziale (Ludwig & Jablonski, 2019; Ariosto et al., 2021).

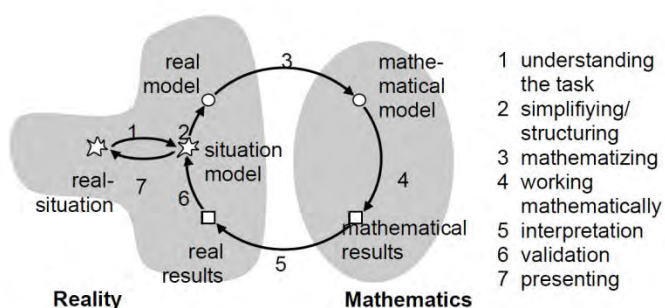


Figura 1: Modello ciclico della modellizzazione matematica

Anche le tecnologie digitali giocano un ruolo importante nelle attività di modellazione, sia per l’effettuazione di esperimenti, sia per indagini, simulazioni, visualizzazioni o calcoli. Il progetto MathCityMap integra l’uso delle tecnologie su due livelli: la progettazione dei tasks e della passeggiata matematica da parte dei docenti sul portale <https://mathcitymap.eu/> e la fruizione da parte degli studenti dei task proposti su mappa geolocalizzata, mediante l’uso di un’applicazione dedicata MCM su smartphone, con lo

scopo di motivare gli studenti alla ricerca di oggetti geometrici nella propria città e a risolvere problemi matematici su di essi (Ariosto et al., 2021).

L'esplorazione degli oggetti reali direttamente in contesto offre l'opportunità di analizzare l'oggetto da più punti di vista. L'attività, a metà strada tra la matematica e la fisica, mira anche a familiarizzare con strumenti di misura, a leggere mappe e ad orientarsi in città (Ariosto et al., 2021). Il prendere le misure necessarie (perimetro, diametro, altezze) direttamente sull'oggetto, anziché utilizzare dati numerici forniti in una traccia scritta, apre alla capacità di distinguere dati necessari da dati non necessari, evitando la mediazione falsata dei libri di testo che rendono i problemi matematici non autentici.

Taranto et al. (2021) sottolineano inoltre che gli studenti tendono a ricordare più a lungo i contenuti matematici affrontati durante i task matematici implementati in MCM e che risultano maggiormente motivati mentre risolvono i compiti del percorso matematico su smartphone.

3 - Esperienze effettuate, metodologia e risultati

Le esperienze realizzate hanno coinvolto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno, 14 studenti del Liceo Scientifico "P.S. Mancini" di Avellino nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche e 24 studenti del Liceo Scientifico "B. Rescigno" di Roccapiemonte in attività di Orientamento. Inoltre, dopo una formazione docenti con le prof.sse Mammana e Taranto nell'ambito del corso "La matematica nella costruzione dei saperi" del Polo di

Salerno della Fondazione I Lincei per la Scuola², tre docenti hanno progettato attività con MCM per 16 studenti del Liceo “E. Medi” di Battipaglia, calando così nel proprio contesto scolastico l’esperienza acquisita durante la formazione.

Per tutte le attività progettate, gli studenti sono stati divisi in gruppi da 4 ed è stato richiesto ad ogni gruppo di effettuare all’interno una suddivisione dei ruoli: il *capogruppo navigatore* aveva il compito di gestire l’applicazione MCM su smartphone, di guidare il gruppo verso lo specifico task e di segnare sull’app la risposta; i *misuratori* avevano il compito di prendere fisicamente le misure sull’oggetto da esperire per poter poi rispondere al quesito posto dal task; il *redattore* era infine incaricato di prendere appunti su un block-notes per segnare tutti i procedimenti sviluppati per la risoluzione e i risultati ottenuti. Tali ruoli sono stati abbastanza rispettati dagli studenti, anche se talvolta si è osservata una interscambiabilità, in particolare in situazioni di maggior difficoltà, quando il task ha richiesto riflessioni più approfondite e la necessità da parte degli studenti di interagire tra loro al di là dei ruoli assegnati.

Le attività degli studenti svolte all’interno del Campus UNISA, la loro posizione istantanea, i feedback sulle risposte fornite ai task e i tentativi effettuati sono stati costantemente monitorati a distanza attraverso il portale di MCM e/o l’App MCM per smartphone, in cui era stato preventivamente costruito ed implementato un percorso di 10 tasks all’aperto

² Il Polo di Salerno fa parte del progetto: "I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale", promosso dall’Accademia Nazionale dei Lincei e dal MIUR.

all'interno del Campus e attivato un gruppo classe con un codice dedicato (Figura 2).

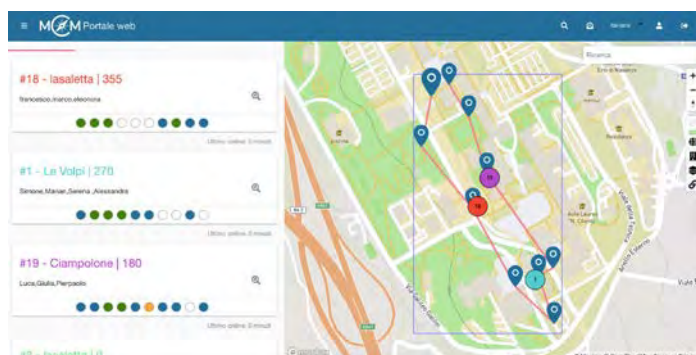


Figura 2: Vista del portale MCM sui gruppi di studenti attivi nel Campus

Tutti i gruppi di studenti hanno affrontato i task in modo consapevole e con evidente coinvolgimento e partecipazione, scegliendo di volta in volta la miglior strategia possibile per la determinazione delle misure necessarie. Ad esempio, un gruppo di studenti per ottenere la misura del diametro di un'aiuola e avendo metri a nastro insufficienti perché troppo corti, ha scelto di utilizzare il piede di uno degli studenti del gruppo come unità di misura, avvicinandosi moltissimo al risultato indicato in piattaforma (Figura 3).



Figura 3: Misura del diametro dell'aiuola con l'unità di misura - piede

Uno dei task che ha maggiormente attratto l'attenzione degli studenti è quello relativo al calcolo del perimetro di base, della superficie totale e del volume di una fontanella cilindrica con vasca superiore a forma di semisfera, collocata nel parco del Campus di Fisciano, accanto alla Biblioteca Scientifica. Per giungere al risultato atteso, gli studenti hanno effettuato le misure dell'altezza del cilindro con il metro a nastro e hanno poi dedicato molto tempo a discutere circa la forma superiore dell'oggetto.

Si riporta l'immagine di una studentessa che cerca di riprodurre con i gesti la forma semisferica della vaschetta, producendo un gesto *iconico*, secondo la classificazione data da McNeill (McNeill, 1992 in Sabena, 2018).



Figura 4: Gesto della mano utilizzato per rappresentare la concavità semisferica della fontanella

La necessità di riconoscere una semisfera è risultata necessaria sia per la determinazione dell'area totale, sia per il volume calcolato per differenza.

Indicato con r il raggio della circonferenza e con h l'altezza della fontanella,

$$r = (17,7 \pm 0,1)cm ; h = (78,0 \pm 0,1)cm$$

si ha che:

$$\begin{aligned} A_{totale} &= A_{base} + A_{laterale} + A_{semisfera} = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= (984,2 + 8658,0 + 1968,5)cm^2 = 11610,7 cm^2 \\ V_{totale} &= V_{cilindro} - V_{semisfera} = \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3 = \\ &= (76769,90 - 11613,91)cm^3 = 65156 cm^3 \end{aligned}$$

In questo caso in piattaforma è stata individuata una soluzione di tipo intervallo, i cui valori indicati sono proprio i valori centrali degli intervalli costruiti, come si può osservare nella figura 5.

Task type and solution*		Task type
variable name*	left border (Perimetr...	right border (Perimet...
Perimetro figura di b	103.43	119.00
Area fontana	10797.94	12423.44
Volume fontana	60595.08	69716.92

Figura 5: Soluzione di tipo vettore intervallo per il task sulla fontanella

La maggior parte degli studenti ha incontrato difficoltà con il task denominato “La pendenza della rampa”, riconosciuto come il task più complesso da quasi tutti i gruppi coinvolti. Tutti hanno subito pensato alla pendenza della rampa in termini trigonometrici, come tangente dell’angolo e immaginato dunque di calcolarla mediante il rapporto tra il livello verticale y e la lunghezza orizzontale x della base della rampa, ma tutti i risultati ottenuti venivano sempre riconosciuti dal sistema MCM come errati. Alcuni gruppi hanno rinunciato, mentre altri hanno raggiunto l’obiettivo solo dopo aver consultato i suggerimenti inseriti nel task. Solo un gruppo ha esperito diverse strade risolutive prima di giungere alla soluzione attesa.



Figura 6: Rampa con dislivello iniziale e tentativi degli studenti per ricostruire il “pezzo mancante”

In un primo tentativo essi hanno, infatti, riconosciuto che la rampa presenta un dislivello iniziale, poiché mancante della punta (come si osserva in figura 6) e hanno dunque tentato di colmare tale dislivello immaginando di ricostruire la parte di rampa mancante. Tale tentativo, essendo fortemente affetto da errori, ha condotto ad un risultato riconosciuto come errato.

Passando ad una rappresentazione visuale su carta (Figura 7), il gruppo ha notato che il dislivello poteva essere facilmente calcolato come una variazione verticale di tipo $\overline{\Delta y}$, ricollegando così la pendenza al rapporto incrementale e al coefficiente angolare di una retta. Tale passaggio alla rappresentazione grafica ha facilitato il processo di modellizzazione, permettendo agli studenti la transizione dal mondo reale al mondo matematico, secondo il modello di Blum & Leiss (Blum & Leiss, 2005 in Ariosto et al., 2021).

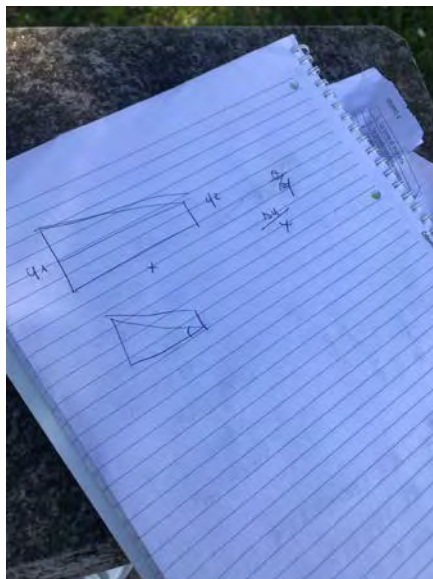


Figura 7: Segni riportati sul block notes per risolvere il task della rampa

In questo task la soluzione proposta in piattaforma era fornita nella modalità intervallo che restituisce un valore “verde” in caso di risposta totalmente corretta e un valore “arancione” in caso di soluzione con una maggiore deviazione dal valore centrale. Nella figura 8 è possibile visionare sia l’intervallo di soluzioni che una possibile formalizzazione della soluzione stessa.



Figura 8: Soluzione del task sulla rampa in MCM con intervallo di soluzioni accettato

Completata la fase esperienziale all'aperto, i gruppi sono rientrati in Dipartimento dove sono stati discussi collettivamente i risultati emersi. Ogni gruppo ha riportato alla classe le difficoltà e i ragionamenti seguiti, evidenziando il processo di risoluzione che ha condotto alla soluzione dello specifico task.

Agli studenti partecipanti al PLS in UNISA sono state proposte due tipi di attività: un primo momento esplorativo in cui hanno esperito in prima persona i task presenti sul percorso di MCM all'interno del Campus di UNISA fruibili dallo smartphone e un secondo momento di progettazione di nuovi task. Tale momento successivo aveva lo scopo di

favorire negli stessi studenti l’acquisizione di consapevolezza sul problem solving ad un livello metacognitivo.



Figura 9: Studenti impegnati nella progettazione di tasks sul portale MCM

Alcuni studenti, pur avendo progettato i task con grande attenzione, in linea con ciò che avevano esperito in precedenza, al momento del caricamento in piattaforma dei nuovi task creati avrebbero voluto inserire nella descrizione del quesito i dati numerici ricavati. Essi hanno dichiarato di essere abituati a “leggere” nei libri di testo problemi pieni di dati e pertanto risultava loro difficile dover caricare in piattaforma un testo totalmente aperto, senza dati numerici, pur avendone fatto esperienza nel percorso. Da ciò sembra emergere che la fase di progettazione abbia permesso agli studenti di effettuare una riflessione metacognitiva sul problem posing.

Al termine delle attività, agli studenti coinvolti è stato richiesto di compilare un questionario come momento riflessivo conclusivo e per permettere di analizzare l’efficacia dell’azione attuata.

Si riportano alcune risposte più significative. Uno studente evidenzia l'effetto di devoluzione che l'esperienza ha prodotto, un secondo studente evidenzia l'aspetto embodied dell'attività, mentre un terzo studente sottolinea l'importanza della cooperazione in gruppo.

Studente 1: in questo modo il problema diventa reale, dobbiamo prendere in causa i dati dell'oggetto.

Studente 2: abbiamo dovuto ricavare i dati per risolvere il problema sporcandoci le mani (letteralmente).

Studente 3: Lavorare di gruppo è stato il fattore più importante che ha permesso un'integrazione più veloce tra noi ragazzi e l'equa divisione dei compiti ha permesso di rendere piacevole e interessante l'attività svolta. Non credo che avrei riscontrato gli stessi risultati se avessimo proceduto individualmente.

Le attività progettate per il Liceo "Medi" sono state invece svolte all'interno dell'edificio e ciò ha necessariamente richiesto la stampa dei tasks, in quanto la geolocalizzazione di MCM è maggiormente performante per task esterni all'edificio. In particolare una delle due attività del percorso creato ha coinvolto la copia del quadro astratto di Anastasio Soldati, "Il piccolo campo" del 1949 su cui ai ragazzi è stato chiesto di calcolare l'area di una figura, ottenibile per differenza tra l'area di un trapezio e quelle di un triangolo e di un piccolo parallelogramma.

4 - Conclusioni

L'implementazione dei percorsi descritti di matematica all'aperto ha sicuramente contribuito a promuovere negli

studenti che vi hanno preso parte atteggiamenti positivi nei confronti della matematica, sperando situazioni reali ed autentiche e sviluppando competenze di modellizzazione in contesti informali. Inoltre, questo tipo di esperienza si inquadra perfettamente nell’ambito delle attività volte al consolidamento delle competenze chiave per l’apprendimento permanente.

Essa ha infatti consentito di sviluppare non solo le competenze matematiche e digitali, ma anche quelle personali e sociali: gli alunni coinvolti si sono trovati a dover gestire efficacemente il tempo a loro disposizione e a lavorare con gli altri in maniera costruttiva per concludere il percorso e tentare di vincere la gara. Gli studenti si sono mostrati entusiasti dell’attività proposta come si evince anche dalle risposte al questionario che è stato loro sottoposto al termine delle attività. In esso traspare anche l’effetto di devoluzione che l’attività ha permesso di sviluppare, nel doversi far carico dei dati e del contesto reale stesso.

Questa esperienza ha permesso di vedere in azione il modello ciclico della modellizzazione matematica di Blum & Leiss. I task del percorso rappresentano le situazioni reali. Individuato il problema, gli studenti hanno creato nelle loro menti o sui loro quaderni un modello della situazione. A questo punto, la mancanza di dati numerici ha permesso loro di semplificare il modello fatto in precedenza con la scelta delle sole grandezze necessarie a risolvere il problema ottenendo in questo modo un problema reale. A questo punto sono intervenute le loro conoscenze matematiche (per esempio il calcolo della superficie e del volume della fontana) passando al modello matematico. Lavorando

matematicamente sono giunti ai risultati matematici che hanno dovuto anche interpretare e selezionare per ottenere i risultati reali da inserire sulla piattaforma.

Bibliografia

Ariosto, A., Ferrarello, D., Mammana, M. F., & Taranto, E. (2021). Math City Map: Provide and share outdoor modelling tasks. An experience with children. *AAPP Physical, Mathematical & Natural Sciences/Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 99.

Jablonski, S., Taranto, E., Ludwig, M., & Mammana, M. F. (2022). Go online to go outdoors - A MOOC on MathCityMap. In *Proceedings of the 15th international conference on technology in mathematics teaching (ICTMT 15)* (p. 63). Danish School of Education, Aarhus University.

Ludwig, M., & Jablonski, S. (2019). Doing math modelling outdoors-a special math class activity designed with MathCityMap. In *HEAD'19. 5th International Conference on Higher Education Advances* (pp. 901-909). Editorial Universitat Politècnica de València.

Sabena, C. (2018). Exploring the Contribution of Gestures to Mathematical Argumentation Processes from a Semiotic Perspective. In: Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., Xu, B. (eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_30

Taranto, E., Jablonski, S., Recio, T., Mercat, C., Cunha, E., Lázaro, C., & Mammana, M. F. (2021). Professional Development in Mathematics Education—Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics. *Mathematics*, 9 (22), 2975.

Il Debate nella didattica della Matematica

Matteo Torre*

* Liceo Scientifico “G. Peano”, Tortona (AL); matteo.torre1984@gmail.com



Sunto: *Questo contributo presenta alcune idee su un nuovo protocollo del Debate, il Debate matematico. Oltre a due format di Debate in matematica, vengono presentate anche le ragioni didattiche e pedagogiche che mi portano a credere nella possibilità che il Debate possa essere una metodologia efficace per riportare la dimostrazione al centro delle lezioni di matematica delle scuole superiori, anche grazie all'aiuto della filosofia del linguaggio.*

Parole Chiave: *Debate, filosofia del linguaggio, dimostrazioni matematiche, metamatematica*

Abstract: *This paper presents some ideas on a new Debate's format, the math debate. In addition to two formats of debate in mathematics, are also proposed the reasons that lead the author to believe in the possibility that debate could give a key role to the proof in high school mathematics lessons, also thanks to the help of philosophy of language.*

Keywords: *Debate, philosophy of language, geometric proof, metamathics*

1 - Introduzione

Nella scuola ancora troppi docenti di scuola superiore (in una buona percentuale di materie scientifiche) considerano la filosofia inseparabile dalla speculazione e ritengono che il filosofo non possa usare metodi conoscitivi connessi con il sapere empirico.

Essi pensano che l'attività filosofica, escludendo l'uso di linguaggi soggetti a criteri di verifica, sia pressoché priva di carattere scientifico. Sono, invece, convinto che le influenze reciproche tra filosofia e matematica siano state molteplici e nella storia del pensiero occidentale molti sono stati i matematici filosofi, o viceversa i filosofi matematici o i filosofi interessati alla matematica: Pitagora, Platone, Aristotele, Descartes, Pascal, Leibniz, Condorcet, Hume, Kant, Husserl, Russel, Wittgenstein, solo per citarne alcuni molto noti.

Inoltre, non condivido l'idea di alcuni filosofi della matematica che individuano nella logica matematica il punto più alto di questa mutua e proficua interferenza. Credo che il posto che la matematica occupa nella conoscenza umana sia più interessante di quello della logica pura. L'eccessivo risalto dato alla logica e l'ambigua identificazione della logica con la matematica affermatasi nella filosofia contemporanea, tendono a eludere questioni filosofiche sostanziali per la matematica, come la relazione tra matematica e fisica o il ruolo della dimostrazione in matematica.

In questo articolo vedremo come un adattamento alla matematica della metodologia didattica del Debate potrebbe riuscire a coniugare una reintegrata centralità della dimostrazione nella didattica della matematica con la trasversalità tra la matematica e la filosofia, in particolare la

filosofia del linguaggio. La convinzione che questa proposta possa risultare vincente risiede, a nostro giudizio, proprio nel fatto che le dimostrazioni matematiche impiegano la logica espressa in simboli matematici insieme al linguaggio naturale, il quale di solito ammette una certa ambiguità: è proprio su questo aspetto che Debate e filosofia del linguaggio possono dare un apporto innovativo e decisivo verso il reintegro della dimostrazione nella prassi didattica della matematica nelle attuali scuole secondarie di secondo grado.

2 - Il Debate: brevi cenni introduttivi a una pratica didattica apparentemente nuova

Il Debate è una strategia didattica che si sta diffondendo sempre più nelle scuole italiane per la sua forte valenza formativa ed educativa. Si tratta di un confronto tra posizioni diverse (pro e contro), strutturato da ben precise regole, su una tematica di carattere generale (sia curricolare che extracurricolare, di attualità o di altro genere), da cui scaturisce una mozione, vale a dire un'affermazione dibattibile, che quindi ammetta la possibilità di uno schieramento a favore o contro. Nel seguito delineiamo una breve introduzione storica del Debate che, come vedremo, ha le sue fondamenta nella storia e nel patrimonio classico, ma che ha saputo rinnovarsi fino ai giorni nostri.

All'interno dell'orizzonte culturale occidentale, l'impiego del dibattito come metodo educativo condotto da un'istituzione scolastica può essere fatto risalire al Liceo, ossia al giardino dedicato ad Apollo Liceo in cui Aristotele iniziò a far scuola (335 o 334 a.C.) e che prese poi il nome di Peripato.

La civiltà romana si riduce a sistemare, in questo ambito, l’eredità greca attraverso la teorizzazione catoniana del *vir bonus* dicendi *peritus* e il filtro ciceroniano, che accompagna la *res publica* verso l’epilogo; anche l’età dell’impero attesta da un lato la sterile spettacolarizzazione nella raccolta delle *Declamationes* di Seneca, dall’altro il tentativo di riforma dell’istruzione e della società costituito dall’*Institutio oratoria* di Quintiliano e ritorna, con il *Dialogus de oratoribus* di Tacito, alla lettura della crisi dell’oratoria come effetto della crisi politica.

Nel Medioevo, in particolare nel periodo tra i secoli XI e XVII, il Debate può essere identificato o assimilato alla forma della *disputatio*. La *disputatio*, che germogliò in Italia e Francia, era un avvenimento di grande richiamo in particolare nella sua forma di *disputationes quodlibetales*, disputa in cui i maestri non potevano porre l’argomento da discutere ma questo veniva scelto (spesso in forma di questioni inedite) dagli studenti, da altri maestri presenti alla disputa o dal pubblico. Più specificamente, essa era una forma di esercitazione universitaria che costituiva parte integrante del curriculum scolastico nelle facoltà d’arte, medicina, teologia e legge, che aveva molteplici funzioni: serviva a promuovere le proprie abilità logiche, ad analizzare e suddividere, ad addestrare all’esposizione delle proprie tesi, ad abituare a porre domande e far fronte alle obiezioni, ad affinare l’ingegno e a coltivare la prontezza nella replica e a dare fondamento argomentativo a cose già note¹. È proprio questo lo spirito che troviamo anche nelle dispute matematiche dello stesso periodo e di cui parleremo nel seguito.

¹ Manuele De Conti, Matteo Giangrande, 2017.

Concludiamo questa breve panoramica sull'evoluzione del Debate andando nell'Inghilterra e negli Stati Uniti del XVIII e XIX secolo in cui si formarono, sulla scia dei dibattiti parlamentari britannici e americani, club e associazioni che consideravano il Debate un metodo di miglioramento e progresso. I membri si riunivano per discutere le più rilevanti questioni religiose, morali, sociali e politiche del tempo. Dal XX secolo il Debate ha iniziato a far parte, più o meno diffusamente e in modo più o meno integrato, dei sistemi educativi dei paesi di tutto il mondo. A oggi, i club e le associazioni che secondo regole diverse lo propongono come efficace sistema di crescita personale, professionale e civile sono davvero innumerevoli. Per esempio, il World Schools Debate Championship, una competizione internazionale rivolta agli studenti delle Scuole secondarie di secondo grado, ha raggiunto nel 2019 la sua trentesima edizione contando 64 nazioni coinvolte.

Il format del moderno debate, il Wolrd School Debate (WSD), è costruito sul modello parlamentare in cui due squadre (squadra di governo o squadra pro, e squadra di opposizione o squadra contro) discutono su una proposta (detta mozione) che viene avanzata e della quale la squadra contro vuole dimostrare l'inefficacia.

Ogni squadra è composta da tre componenti (speaker), completano il debate un timekeeper e tre giudici. Ciascuno speaker ha a disposizione 8 minuti e i vari interventi delle due squadre si susseguono secondo un ordine prestabilito (si veda Fig. 1); ciascuna squadra ha poi diritto a una replica di 4 minuti. Inoltre, durante i primi 6 interventi, dopo il primo minuto e fino al penultimo minuto gli speakers della squadra

opposta a quella che ha in quel momento la parola possono chiedere all’oratore di poter fare una domanda. Il protocollo WSD, anche se non analiticamente, ipotizza per ciascun speaker un ruolo e un compito ben precisi che se interpretati correttamente possono portare alla vittoria, unitamente a una gestione ottimale della propria posizione nei confronti della mozione.

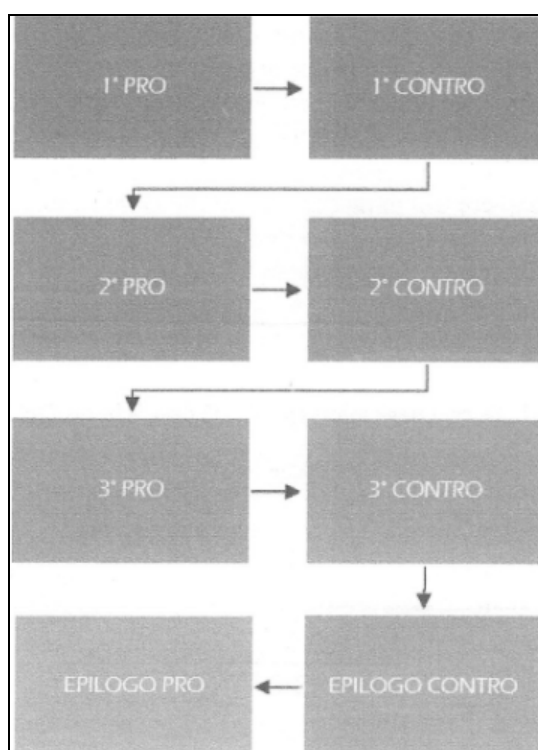


Fig. 1: struttura degli interventi nel format WSD

Le finalità di questo articolo non consentono di approfondire ulteriormente l’interessante discorso sulle regole e i principi dei vari format di Debate, nonché sui principi morali del buon debite e perciò rimandiamo il lettore

interessato alla nutrita bibliografia italiana e straniera. Cerchiamo ora di discutere delle motivazioni che ci hanno spinto a credere nel Debate come approccio didattico che coniuga matematica e filosofia.

3 - Dimostrazioni e filosofia del linguaggio: il linguaggio naturale è davvero un ostacolo?

Nulla è più importante in matematica delle dimostrazioni e paradossalmente nulla è meno studiato e proposto, in particolare nella scuola superiore².

La matematica insegnata nella scuola, a tutti i livelli, si presenta ancora troppo spesso come un argomento chiuso e concluso (scandito e affrontato a ipotetiche tappe propedeutiche una all'altra): un sapere fatto solo di regole e tecniche, sospeso in un cielo di cose immutabili come le sfere celesti della cosmogonia antica. Chi conosce davvero la matematica sa benissimo, invece, che essa è dominata da una potenza creatrice, dall'invenzione umana, che continuamente la rinnova e la arricchisce in funzione di nuovi obiettivi da perseguire. Gli obiettivi sono sempre stati, genericamente, quelli di conoscere la realtà, prima quella astronomica, poi quella intorno a noi, fisica e solida, poi quella fluida, quindi il movimento, i fenomeni casuali delle molteplicità aggregate e delle popolazioni, oggi addirittura lo strumento stesso della conoscenza, il cervello e la coscienza.

La matematica non si è mai accontentata di misurare la realtà che appare, con strumenti che si sovrappongono a essa

² Gabriele Lolli, 2020.

dall'esterno, ma si è proposta di andare oltre le apparenze, per conoscere le cause. Questa è la funzione della dimostrazione, come sosteneva Aristotele. Entrare nella realtà nascosta delle apparenze richiede la formazione di rappresentazioni nella mente, che mostrino la trama e l'ordito invisibile ai sensi di un modello (algoritmo) appartenente a un altro mondo, che in mancanza di un termine più specifico possiamo chiamare astratto. Con la nascita della dimostrazione la matematica si trasforma, da un insieme di nozioni, regole e tecniche utili per risolvere problemi pratici, a una disciplina fortemente caratterizzata dalla preoccupazione di giustificare quelle nozioni, quelle regole, quelle tecniche, di riflettere su di esse e sulle loro conseguenze, indipendentemente dalla possibilità di applicarle.

Nell'Antica Grecia la dimostrazione appare come un atto sociale che mira a convincere l'interlocutore. Se la dimostrazione è un'argomentazione tesa a convincere, allora le persone coinvolte in questa argomentazione devono convenire su un certo numero di conoscenze, su cui l'argomentazione si fonda e che non devono, a loro volta, essere oggetto di ulteriore argomentazione. È proprio in questo atto di grande oratoria e dal profondo legame con la logica che la dimostrazione può essere assoggettata al Debate.

Una profonda trasformazione nel concetto di dimostrazione è avvenuta agli inizi del '900: con Euclide una dimostrazione è un ragionamento che partendo da premesse vere arriva a conclusioni ancora vere. Il concetto è quindi fondato sul mantenimento della verità delle premesse, ossia su basi semantiche, che riguardano il significato di una proposizione. Verso la metà del '800 e agli inizi del '900, la

cosiddetta crisi dei fondamenti, con la scoperta delle geometrie non euclidee e la scoperta dell'esistenza di antinomie nella teoria degli insiemi, portano all'esigenza di ripensare le conoscenze e le tecniche matematiche in uso, cercando di fondarle su basi sicure. Bisogna precisare i concetti di assioma, teorema, dimostrazione, teoria; bisogna essere sicuri che le tecniche utilizzate nella ricerca matematica non portino a contraddizioni. Ma dimostrazione, contraddizione, teorema sono termini di un linguaggio e allora come precisarli se non si hanno chiari i limiti e le potenzialità del linguaggio con cui questi concetti vengono espressi? Ma di quali linguaggi si sta parlando? Non certo della lingua naturale, così ambigua, sfumata, in evoluzione. Si tratta di precisare il concetto stesso di linguaggio, di costruire linguaggi adeguati non solo a parlare degli oggetti di matematica, ma a definirli.

Nascono così i linguaggi formali e nasce la necessità di un'analisi approfondita di nozioni quali assioma, verità, teoria e dei reciproci rapporti tra queste. Si inizia a comprendere che occorre condurre l'analisi distinguendo il piano semantico, il significato di una proposizione, dal piano sintattico, considerando cioè la stessa proposizione come collezione di segni di un dato linguaggio. Sarà compito di un'ulteriore analisi precisare i rapporti tra la teoria, così costruita su basi sintattiche, e i modelli in cui queste vengono interpretate (semantica).

Sulla base di questo cambiamento di prospettiva, la dimostrazione non è più da considerarsi come un ragionamento che conduce da premesse necessariamente vere a conclusioni vere: si parte, invece, da formule ben definite di

un certo linguaggio (gli assiomi); si stabiliscono alcune regole di inferenza che, operando sulle formule di partenza consentono di ottenere da queste altre formule, dette teoremi. Il processo che dagli assiomi conduce ai teoremi è proprio la dimostrazione, la quale con Hilbert diviene un calcolo logico che precisa la nozione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria. Nasce così il concetto di dimostrazione formale che si distingue dalla nozione intuitiva di dimostrazione.

Nonostante la matematica abbia subito nel nostro secolo una forte spinta verso la formalizzazione, non si può negare che il lavoro del matematico quasi mai si svolga interamente all’interno di un predefinito e unico sistema formale.

Imre Lakatos, intorno agli anni ‘60, ha evidenziato e criticato la tendenza alla formalizzazione, intesa come attività che rischia di ridurre la matematica a una disciplina scheletrica e fossilizzata. Egli propone un’immagine della matematica come disciplina fallibile, che si costruisce e cresce attraverso dimostrazioni e contro esempi³.

Le dimostrazioni alle quali si riferisce Lakatos sono distanti dalle procedure meccaniche e molto più vicine al modo di procedere tipico del Debate: esse sono spiegazioni, giustificazioni, che non solo consentono di convincersi di certi risultati matematici, ma che guidano (ascoltatori e interlocutori) alla loro scoperta. Ogni passo di una dimostrazione viene sottoposto a critica, attraverso la ricerca di controesempi che contestino il singolo passo (controesempi locali) o la conclusione stessa della dimostrazione (controesempi globali). L’interesse di Lakatos è rivolto, quindi,

³ Imre Lakatos, 1979.

alla matematica informale, quella che guida il processo di scoperta e di ricerca. L'analisi evidenzia anche come la matematica (al pari delle altre scienze naturali) è fallibile e cresce attraverso la critica e la correzione di teorie che non sono mai libere da ambiguità o dalla possibilità di errore o di dimenticanza⁴. È questo un aspetto centrale che bisognerebbe trasmettere nella scuola superiore, in particolare nei Licei: la matematica è fallibile e i fenomeni mentali (da intendersi come fenomeni psicologici) non hanno maggiore priorità o rilevanza logica rispetto a qualcosa che accade sulla carta o in un discorso orale. Si può discutere di matematica e sulla matematica. A mio giudizio sarebbe, quindi, molto utile sfruttare le potenzialità didattiche ed educative del Debate per introdurre nella scuola superiore l'identità di struttura tra il mondo matematico e il linguaggio, come sosteneva Wittgenstein: la percezione del mondo matematico avviene attraverso il nostro pensiero e il nostro pensiero lo esprimiamo con il linguaggio, perciò per comprendere la matematica e la sua potenza creatrice è importante conoscerne il linguaggio. Il linguaggio esprime concretamente ciò che pensiamo sugli oggetti matematici e aiuta il pensiero, che è invece immagine delle idee astratte che talvolta ostacolano la comprensione e la divulgazione della matematica (anche a livello scolastico). Allo stesso tempo, però, il linguaggio formale ha delle limitazioni perché ci sono concetti della matematica che esso può mostrare ma non dire, per usa la metafora di Wittgenstein: "ci sono aspetti detti dal linguaggio ma non detti nel linguaggio, cioè non ci sono parole per mostrare tali aspetti". Ecco quindi che interviene l'utilizzo del linguaggio

⁴ Philip Davis, Reuben Hersh, 2003.

naturale che ancora troppo spesso viene "demonizzato" ed entra in opposizione con il linguaggio (chiamato dai puristi) "della matematica" e che va quindi a costituire un ostacolo alla comprensione degli argomenti matematici. Penso, invece, sia un dovere di ogni insegnante di matematica fa capire che sia nel linguaggio algebrico che in quello geometrico, e in particolare nelle dimostrazioni, sussistono contemporaneamente componenti sintattiche e semantiche, ma soprattutto accettare (loro per primi) che all'insegnamento della matematica concorrono almeno tre registri linguistici: il linguaggio simbolico, il linguaggio specialistico e il linguaggio naturale. È impensabile accettare che gli studenti usino soltanto per la manipolazione (sintassi) il linguaggio specialistico e simbolico, "Riempiendo una pagina di simboli" di cui non conoscono il significato e il potere comunicativo. È ragionevole, invece, trasmettere agli studenti che il sistema dei simboli algebrici e geometrici costituiscano un linguaggio "sottoinsieme" (e scritto telegraficamente) del linguaggio naturale e abituarli a comprendere la correttezza di un ragionamento matematico (ad esempio, all'interno di una dimostrazione) a partire dalla valutazione di correttezza di una struttura logica di un discorso espresso in linguaggio naturale. Anche perché, come accennato sopra e come affermano i teoremi di Gödel, il linguaggio matematico (come tutti i linguaggi) ha delle limitazioni, non può "parlare" della propria semantica, e ha delle potenzialità, può "parlare" della propria sintassi. Perché non provare a trasmettere queste idee, più o meno espressamente, ai nostri studenti di scuola superiore attraverso il debate in matematica? Forse non esiste un unico linguaggio universale (come credevano Russel e

Frege), ma esistono delle regole comuni, la logica matematica, gli assiomi e i teoremi, mediati da tanti piccoli linguaggi “locali” rappresentati dai linguaggi naturali che mediano la spiegazione dei concetti matematici.

4 - Perché il Debate in matematica?

Contrariamente agli studenti, che mediamente considerano la matematica noiosa e incomprensibile, solitamente gli insegnanti di matematica sostengono che la matematica è bella e semplice. Ancora troppo pochi di loro, tuttavia, sanno spiegare in cosa consista tale bellezza. Penso che molti matematici (e anche molti filosofi) sia concordi nel ritenere che nella costruzione di una dimostrazione matematica si possono rintracciare momenti decisionali che, tuttavia scompaiono nel resoconto finale, assolutamente associabili agli atti creativi che rendono unico il pensiero umano. Proprio come accade in una partita a scacchi: tutte le mosse che leggiamo sono interpretabili sulla base delle regole del gioco e, di per sé, non mostrano nessuna deviazione da poche norme rigide, però nella partita concreta esiste una strategia, esiste una creatività ed esistono delle decisioni! È questa creatività che ancora troppo spesso manca nelle ore di matematica. Lo studente attualmente (e in riferimento alla realtà della scuola superiore italiana) raramente viene sollecitato a pensare alle “questioni matematiche” da differenti prospettive, ma molto più spesso viene “addestrato” alla risoluzione di problemi con pattern simili e all’applicazione di medesimi schemi risolutivi.

Io credo che andando in questa direzione si vada verso una distorsione dell’essenza della matematica, che è

argomentazione e discussione di soluzioni creative, in cui lo studente non viene spinto a vedere la “bellezza della matematica”. A tal proposito, mi permetto di riportare una breve citazione del bellissimo libro di Paul Lockart *Mathematician’s Lament*:

Eliminando il processo creativo per lasciare solo i suoi risultati, avrete la certezza praticamente assoluta che nessuno entrerà davvero in contatto con la disciplina. È come se mi si dicesse che Michelangelo ha creato una scultura magnifica senza darmi la possibilità di vederla. Come potrei mai trarne ispirazione? Se ci si concentra sul che cosa e si trasalascia il perché, la matematica si riduce a un guscio vuoto. L’arte non sta nella «verità», ma nella spiegazione, nell’argomentazione. È proprio l’argomentazione che conferisce alla verità il suo contesto e stabilisce che cosa viene effettivamente affermato e il suo significato. La matematica è l’arte della spiegazione. Se si nega agli studenti la possibilità di dedicarsi a questa attività – di proporre i propri quesiti, di elaborare le proprie congetture e le proprie scoperte, di sbagliare, di vedere i propri sforzi creativi frustrati, di avere un’ispirazione e di formulare con fatica le proprie spiegazioni e dimostrazioni – si nega loro la matematica stessa. Sia ben chiaro: non mi sto lamentando per la presenza di formule nelle ore scolastiche di matematica, mi sto lamentando per l’assenza della matematica nelle ore scolastiche di matematica⁵.

Penso che il Debate in matematica possa costituire un valido strumento per rivalorizzare l’argomentazione nelle ore di matematica della scuola superiore attraverso una struttura del WSD, che va opportunamente rivisitata, ma in grado di coinvolgere anche gli studenti più timidi (e silenziosi) nel

⁵ Paul Lockart, 2010.

contesto classe. Inoltre, il debate in matematica potrebbe offrire la possibilità di sviluppare competenze chiave sull'argomentazione e la confutazione in matematica, imparando ad usare la propria "voce matematica" e con l'obiettivo di migliorare il linguaggio specifico della matematica. Infine, cambiare il mindset verso l'ora di matematica, sposterebbe l'attenzione dello studente dall'imparare formule e risolvere problemi simili, al discutere le migliori strategie e a interpretare le informazioni; ovvero a spostare l'attenzione sulla metamatematica, fondamentale per la matematica come attività di laboratorio del pensiero, implementando di conseguenza la concentrazione dello studente sul processo matematico e meno sul risultato.

Un'ultima annotazione di storia della matematica. Il debate in matematica (come, in generale, il debate) non è certamente una scoperta della pedagogia del XXI secolo: sin dal XVI secolo le dispute su problemi algebrici e geometrici costituivano il modo per ottenere la cattedra o per ricevere gradi accademici e gli argomenti delle dispute erano contenuti in specifici libri detti tesari. Il lettore esperto di matematica ricorderà, ad esempio, la famosa disputa che nel 1545 coinvolse Tartaglia, Gerolamo Cardano e Lodovico Ferrari circa la paternità della soluzione delle equazioni di terzo grado. Tartaglia tra il 12 e il 13 febbraio 1535 giunse alla risoluzione delle equazioni di terzo grado nel corso di una disputa con il maestro d'abaco Antonio Maria Fiore (l'allievo a cui Scipione del Ferro aveva lasciato in eredità la formula risolutiva da lui scoperta trent'anni prima). Gerolamo Cardano tra il 1539 e il 1540, ospitando a Milano il Tartaglia, ottenne che la formula gli fosse rivelata con l'impegno di

mantenerla segreta. L’impegno non fu rispettato da Cardano, il quale iniziò a lavorare con il suo allievo Ludovico Ferrari sul materiale fornito dal Tartaglia, andando oltre le sue scoperte e riuscendo a fornire una dimostrazione rigorosa della soluzione dell’equazione di terzo grado che pubblicò nel suo libro *Artis Magnae sive de regulis algebraicis* del 1545. Questo fatto scatenò le ire di Tartaglia che offese pubblicamente Cardano chiamandolo “*huomo di poco sugo*”⁶. Ferrari difese accanitamente il maestro e ne seguì una lunga disputa pubblica durante la quale Tartaglia fu umiliato e sconfitto e poco dopo vide il ritiro del suo incarico di professore.

Questo breve resoconto storico potrebbe essere un utile spunto per introdurre debate in matematica, sul solco della tradizione degli algebristi italiani del ‘500 e senza dimenticare l’insegnamento di Imre Lakatos che nel suo meraviglioso testo *Dimostrazioni e confutazioni*⁷ ci ricorda: “*la matematica non è l’accumulo costante di verità, ma il progressivo miglioramento di ipotesi creative per prove ed errori e attraverso le loro confutazioni*”⁸.

5 - Due proposte di protocollo per il Debate in matematica

La proposta si articola su 2 format di debate già promossi dalla rete We-Debate e consigliati per la scuola superiore,

⁶ Umberto Bottazzini, 1988.

⁷ Il quale può ulteriormente essere considerato un testo di riferimento sul debate in matematica, visto che si tratta di un dialogo tra un insegnante e i suoi studenti alla ricerca di diverse soluzioni a problemi matematici con la relativa discussione sui loro punti di forza e di debolezza.

⁸ Imre Lakatos, 1979

adattati a una mozione di carattere matematico: l'impromptu e, il già citato, WSD.

Partiamo dal format dell'impromptu. Le squadre sono composte da 2 studenti (l'ideale sarebbe di sesso differente, per affrontare anche la questione del gender gap) e vengono a conoscenza della mozione pochi minuti prima della gara, così come accade anche nel generico format dell'impromptu. La mozione è una problema di geometria analitica o di geometria (piana o solida) o di trigonometria dalla difficoltà intermedia che può essere tratto, ovvero liberamente ispirato, da esercizi presenti nei manuali scolastici attualmente in uso o in uso alcuni decenni fa.

Per semplicità di realizzazione riporto nel seguito l'idea di struttura di questa tipologia di debate in matematica:

- I giudici consegnano alle squadre la mozione (il problema di geometria) e il foglio con due dimostrazioni del problema; quindi estraggono quale delle due squadre inizierà per prima (la squadra che dà inizio al debate è chiamata Squadra A, l'altra Squadra B) e quale dimostrazione dovrà sostenere.
- Ciascuna squadra nel foglio che le è stato consegnato dai giudici troverà due dimostrazioni, quella che dovrà sostenere come maggiormente valida e quella assegnata alla squadra avversaria. Ogni squadra avrà a disposizione 10 minuti per analizzare la dimostrazione assegnata. È consentito l'uso solo di carta e penna, riga, squadra, compasso, un formulario, la calcolatrice. In questa fase gli speakers devono inquadrare didatticamente l'anno e il periodo scolastico in cui (a loro giudizio) presenterebbero

il problema geometrico assegnato e quali pre-requisiti sono necessari per comprenderlo, ragionare sui punti di forza della dimostrazione loro assegnata e pensare a una strategia di attacco su quella avversaria. Di fatto, quindi, compiono un ragionamento di meta-cognizione matematica su entrambe le dimostrazioni che dovrebbe far attivare le loro abilità e competenze nella disciplina;

- Si passa allo svolgimento del debate vero e proprio. Gli speakers si alternano nei loro interventi, ognuno avrà a disposizione 4 minuti e si presuppone che il primo speaker inquadri didatticamente la mozione e presenti i punti di forza della propria dimostrazione, mentre il secondo “attacchi” la dimostrazione della squadra avversaria evidenziandone eventuali ostacoli alla comprensione, passaggi complessi per gli studenti ai quali si proporrà quel tipo di problema. Ogni squadra avrà poi a disposizione 2 minuti di tempo per la replica in cui si riassumono i temi principali della linea di sviluppo del dibattito della squadra; inizierà la replica la Squadra A, ovvero quella che aveva dato inizio al debate;
- I giudici stabiliscono la migliore difesa. Saranno parametri di giudizio: i ragionamenti meta-cognitivi evidenziati nei discorsi delle squadre, la capacità espositiva e l’uso di un corretto linguaggio specifico ovvero l’uso di un adeguato linguaggio naturale facilmente traducibile in linguaggio formale, il corretto inquadramento e la valutazione dei pre-requisiti necessari per affrontare la mozione e la sua dimostrazione, l’eleganza formale nell’individuare aspetti di differenziazione tra le due dimostrazioni proposte alle squadre.

Come si può notare da un banale calcolo dei tempi, lo sviluppo di questa tipologia di debate si adatta egregiamente a quelli della classica ora di lezione e può quindi anche costituire un modo alternativo per presentare e far discutere il gruppo classe su un problema di geometria a partire da un dibattito peer to peer. Inoltre, credo che questa tipologia di debate possa avere una grande valenza didattica per far comprendere agli studenti che per affrontare (e risolvere) problemi geometrici sussistono spesso, a differenza delle equazioni, più strade contemporaneamente corrette. La presenza di più possibili soluzioni, spesso, disorienta gli studenti della scuola superiore, che spesso sono incapaci di considerare come corretta una dimostrazione da loro individuata, seppur differente da quella proposta dal loro insegnante. Instaurare qualche momento di debate in matematica nella prassi didattica, in particolare in quella della geometria, penso possa costituire un modo pregnante per gli studenti di comprendere e superare questa difficoltà.

Passiamo ora al format WSD di matematica. Le squadre sono composte da 3 studenti e ad esse viene inviata la mozione almeno 5 giorni prima dello svolgimento del debate. La mozione è un problema di geometria (piana o solida) di difficoltà elevata e superiore ai problemi presenti nei manuali scolastici in uso, oppure una mozione sulla storia della matematica. Possibili esempi di tali mozioni sono:

- le mozioni di storia della matematica potrebbero essere del tipo “La storia del numero π è più affascinante della storia del numero e ”, con l’attenzione di non ridurre la mozione a un problema triviale (“È più bello il numero 3 o il numero

4”) che riduce la discussione alla riproduzione di una serie di banali e stucchevoli opinioni, ma con eventualmente la possibilità di apertura verso questioni di filosofia della matematica (“La matematica è un’invenzione della mente umana e non una scoperta”).

- per i problemi geometrici sono molto consigliati quelli proposti dal Dipartimento di Matematica dell’Università di Ferrara nell’ambito dell’iniziativa FLATlandia⁹, ma in rete esistono altri contenitori, simili a quello riportato, con problemi altrettanto stimolanti.

Per semplicità di realizzazione riporto nel seguito l’idea di struttura di questa tipologia di debate in matematica:

- I giudici consegnano alle due squadre la mozione qualche giorno prima dello svolgimento della gara;
- Nel tempo che intercorre tra il debate e l’arrivo della mozione le due squadre dovranno produrre una dimostrazione originale della mozione geometrica, ovvero avviare una ricerca documentale sia per schierarsi pro o contro nel caso in cui la mozione sia sulla storia (o la filosofia) della matematica. Nel caso di una mozione di storia della matematica, la metodologia e le prassi di svolgimento della ricerca documentale potrà essere gestita in maniera del tutto simile a ciò che si farebbe nel caso del tradizionale debate di tipo WSD.

Nel caso, invece, di mozioni di geometria le squadre dovrebbero essere attente nel pensare non esclusivamente

⁹ <http://dm.unife.it/fardiconto/flatlandia/>

a una sola dimostrazione, ma ipotizzarne anche altre per affrontare prontamente due possibili problematiche che potrebbero capitare durante il debate: essere pronti a cambiare strategia argomentativa la possibilità che la squadra avversaria scelga la stessa linea dimostrativa, essere pronti a “contrastare” la squadra avversaria avendo già affrontato nella ricerca documentale più linee dimostrative;

- La gara ha inizio con l'estrazione di quale delle due squadre sarà pro e quale contro, nel caso di mozione di storia/filosofia della matematica, ovvero nell'estrazione di quale squadra inizierà il debate per prima (Squadra A e squadra B) nel caso di mozione di ambito geometrico. Ogni speaker ha quindi a disposizione 5 minuti e i loro interventi sono alternati così come già riportato in precedenza e come è visibile in Fig. 1. In particolare, nel caso della mozione di tipo geometrico¹⁰, il compito del primo speaker è quello di inquadrare didatticamente l'anno e il periodo scolastico in cui (a giudizio della squadra) presenterebbero il problema geometrico assegnato, quali pre-requisiti sono necessari per comprenderlo e di presentare la dimostrazione prodotta dalla squadra.

Nel caso in cui la squadra avversaria abbia scelto la stessa linea dimostrativa, lo speaker (dopo averlo dichiarato pubblicamente) avrà invece il compito di proporre un'altra dimostrazione dicendo differenze e caratteristiche simili

¹⁰ Nel caso di mozione di storia/filosofia della matematica i ruoli dei vari speaker sono del tutto congruenti con quelli descritti in precedenza per il format WSD.

rispetto a quella precedentemente illustrata dal primo speaker della sua squadra¹¹.

Sarà poi compito del secondo speaker valorizzare i punti di forza della dimostrazione proposta dalla squadra e, infine, il terzo speaker ha il compito di “attaccare” la dimostrazione della squadra avversaria cercando invece di valorizzerà la relativa “semplicità” della dimostrazione sostenuta dalla propria squadra cercando di sostenere anche la bontà didattica delle scelte fatte. Ogni squadra ha quindi 3 minuti di tempo per la replica che dovrà servire per riassumere tutte le varie idee proposte dai tre speaker della squadra ed eventualmente a migliorare la descrizione della dimostrazione alternativa, nel caso in cui la squadra A abbia “costretto” l’altra squadra a cambiare linea dimostrativa.

- I giudici stabiliscono la migliore difesa. Saranno parametri di giudizio: i ragionamenti meta-cognitivi evidenziati nei discorsi delle squadre, la capacità espositiva e l’uso di un corretto linguaggio specifico ovvero l’uso di un adeguato linguaggio naturale facilmente traducibile in linguaggio formale, il corretto inquadramento e la valutazione dei pre-requisiti necessari per affrontare la mozione e la sua dimostrazione, l’eleganza formale nell’individuare aspetti di differenziazione tra le due dimostrazioni proposte alle squadre, l’abilità di una squadra nel cambiare e adattare la strategia argomentativa e dimostrativa.

¹¹ Ovviamente, questo eventuale cambio di linea argomentativa è riservabile solo alla squadra B (cioè la squadra che non avviato il debate) per evitare una gestione circolare del dibattito.

Osservando i tempi di gestione di questo protocollo di debate possiamo affermare che esso costituisca una buona palestra di allenamento per preparare la prova orale dell'Esame di Stato. Per quanto riguarda, invece, i tempi di svolgimento confermiamo anche per questa tipologia di debate la possibilità di svolgimento all'interno dei tempi classici di un'ora di lezione per la scuola superiore.

Il lettore attento avrà indubbiamente individuato nella presente proposta alcuni aspetti ancora in fase di definizione e passibili di miglioramenti pedagogici e concettuali, come ad esempio la difficoltà di individuare mozioni adeguate alla matematica senza ricadere nel banale o nel divertissement¹², l'individuazione di protocolli alternativi a quelli presentati in questo articolo (ugualmente validi e replicabili) a cui si aggiunge la necessità di una sperimentazione su ampia scala della validità dei protocolli qui proposti, ovvero di protocolli alternativi.

6 - Riflessioni conclusive e proposte di sperimentazione

Sono convinto che il debate costituisca una buona approssimazione del pensiero dialettico messo in atto (parafrasando il pensiero di Hegel) che la scuola italiana, visti i pessimi esempi che i ragazzi osservano sui mass media e sui social, può sfruttare per insegnare agli studenti ad affrontare

¹² Tra le possibili tipologie di mozione segnaliamo l'idea di optare anche su mozioni di tipo meta-matematico (come proposto da M. Giangrande) e la possibilità di sfruttare i problemi alla Fermi (Matteo Torre, 2018).

con maturità e consapevolezza le contraddizioni che emergono quasi quotidianamente nella società moderna.

Il debate in matematica può, inoltre, anche avere delle ricadute positive nella pratica didattica di classe: esso dovrebbe contribuire a far capire agli studenti che “sbagliare” non è un problema, ammesso che le loro competenze volgano di più sul processo e meno sul risultato; che in una lezione matematica è importante saper ascoltare ma anche saper rispondere agli stimoli del docente usando un vocabolario matematico corretto e/o in relazione alle cose del mondo esterno (linguaggio naturale). In definitiva, il debate potrebbe costituire un rinforzo delle competenze metacognitive (cognizione più profonda) in matematica come sostenuto, in relazione all’importanza della meta cognizione, anche da Carpenter:

Gli studenti che imparano ad articolare e giustificare le proprie idee matematiche, ragionano attraverso spiegazioni matematiche proprie e altrui e forniscono una motivazione per le loro risposte sviluppano una profonda comprensione che è fondamentale per il loro futuro successo in matematica e campi correlati¹³.

Come già detto ampiamente, bisogna però essere molto prudenti nel saper scegliere in maniera corretta come usare il debate nell’ambito della didattica della matematica e, soprattutto, definire in maniera corretta come formulare un format di dibattito adatto a questioni matematiche e come scrivere mozioni “dibattibili” relative al curriculum di matematica della scuola superiore, magari raccogliendo una

¹³ Carpenter, Franke e Levi, p. 6.

lista esauriente e abbondante di mozioni matematiche. Invito quindi i lettori interessati a contattarmi per iniziare una discussione proficua e collaborativa. Allo stesso tempo, è indubbio che ci vorrà del tempo (e dei docenti entusiasti) per sviluppare abitudini e disposizioni argomentative negli studenti per evitare che essi confondano il debate in matematica con il discutere di mozioni matematiche in senso stretto, intese come proposizioni che affermino la verità o la falsità di determinate proprietà di particolari enti matematici.

Concludo con una frase che spero possa essere d'insegnamento per tutti gli studenti e i docenti che si avvicinano all'affascinante mondo del debate, tratta dai *Pensieri* di Joseph Joubert del 1917: *lo scopo di una discussione o di un dibattito non deve essere la vittoria, ma il miglioramento.*

Bibliografia

Bottazzini U. (1988). *La "grande arte": l'algebra del rinascimento*, in Franco Abbri (a cura di) *Storia della scienza moderna e contemporanea*, Torino: UTET.

Carpenter T., Levi L., Franke M.L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*, Portsmouth: Heinemann.

Cattani A. (2019). *Avere ragione*, Roma: Audino Ed.

Davis P., Hersh R. (2003). *L'esperienza matematica*, Milano: Edizioni Comunità.

De Conti M., Giangrande M. (2017). *Debate. Pratica, teoria e pedagogia*, Milano: Pearson.

De Conti M., Giangrande M. (2019). *Debate e scuola: un legame antico*, consultabile al link: <https://it.pearson.com/aree-disciplinari/italiano/rubriche/debate-metodo-didattico/nuovo-corso-puntate-Debate.html#>.

Lakatos I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, trad. it. di *Proofs and Refutations*, a cura di D. Benelli, Milano: Feltrinelli.

Lockart P. (2010). *Contro l’ora di matematica*, Milano: Rizzoli.

Lolli G., Tortoriello F.S. (2020). *L’arte di pensare*, Torino: UTET.

Lolli G. (2020). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*, Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli G. (2014). *Se viceversa*, Torino: Bollati Boringhieri.

Paola D., Robutti O. (1998). *La dimostrazione alla prova*, Serie Quaderni del MIUR, consultabile al link: <http://www.matematica.it/paola/quaderno%20ministero%20nove mbre%201998.pdf>

Sanchez C. (2018). *Il debate nelle scuole*, Milano: Pearson.

Torre M. (2018). I problemi alla Fermi: un esempio di compito autentico per la Flipped Classroom, *Bricks – Rivista per promuovere l’innovazione didattica*, Dic. 2018, consultabile al link: <http://www.rivistabricks.it/2018/12/27/i-problemi-alla-fermi-un-esempio-di-compito-autentico-per-la-flipped-classroom/>

Wang H. (1984). *Dalla matematica alla filosofia*, Torino: Bollati Boringhieri.

Wittgenstein L. (2014). *Ricerche filosofiche*, Torino: Einaudi.

Iperspazio, Frattali, Natura e...

Il disordine ordinato della Natura

Anna Amirante*

*Dipartimento di Matematica, Università di Salerno, aamirante@unisa.it



Sunto: Il concetto di iperspazio ci apre ad una Matematica moderna e la dimensione può essere anche un numero frazionario. La sfera descrive la Terra e la spirale un Nautilus; la geometria frattale riesce a descrivere le irregolarità della natura, come l'aspetto spongiforme di una nuvola, la ramificazione di un albero e l'irregolarità di un fulmine e si impone come un nuovo potente linguaggio della Matematica, dando ordine al disordine avvalendosi anche dell'Informatica. E partendo da queste osservazioni è nata l'idea dell'esperienza di ricerca didattica nelle sperimentazioni fatte in un'ottica dove la matematica-geometria è sia linguaggio che strumento per interpretare la realtà-natura in modo interdisciplinare. Costruiamo un pensiero critico nell'allievo studente- competente.

Parole Chiave: dimensione, geometria frattale, interdisciplinarietà, creatività.

Abstract: The concept of hyperspace opens us to modern mathematics and dimension can also be a fractional number. The sphere describes the Earth and the spiral a Nautilus; fractal geometry is able to describe the irregularities of nature, such as the spongiform aspect of a cloud, the branching of a tree and the irregularity of lightning and imposes itself as a powerful new language of Mathematics, giving order to disorder also using Computer Science. And starting from these observations, the idea of the experience of didactic research in experiments made in a perspective where mathematics-geometry is both language

and tool for interpreting reality-nature in an interdisciplinary way was born. We build critical thinking in the competent- student.

Keywords: *dimension, fractal geometry, interdisciplinarity, creativity.*

1. Da Euclide a Mandelbrot

Galileo Galilei riteneva che la Matematica fosse una disciplina indispensabile per interpretare i fenomeni naturali e per rappresentare le forme della natura. La nostra esperienza quotidiana ci induce tuttavia a ritenere che le figure geometriche più familiari nello studio (rette, cerchi, poligoni regolari, ...) in natura sono l'eccezione. Si può dire che il livello di maturazione di una scienza o di una civiltà viene valutato in funzione del grado di “matematizzazione” raggiunto e pertanto la geometria è sempre stata uno strumento necessario per un’evoluzione tecnologica e scientifica per ogni civiltà o, equivalentemente, la necessità tecnologica e scientifica hanno dato impulso e sviluppo alla geometria. Infatti, i cinesi solcarono i mari senza smarrire la rotta grazie alle precise proiezioni cartografiche e gli egiziani usarono la geometria per costruire le loro piramidi; Aristarco di Samo (310-230 a.C.) calcolò la distanza Terra-Luna ed Eratostene di Alessandria (276-194 a.C.) misurò il raggio terrestre. Non a caso il nome geometria (γεωμετρία), misurazione della terra, proviene da γῆ=terra e μετρία= misurazione e quando, appunto, Eratostene misurò il diametro della terra, la parola geometria era stata già stata coniata, pur con un’altra origine etimologica, ed il suo esperimento rese quindi onore al termine.

Tutte le informazioni che riceviamo dal mondo che ci circonda, ciò che vediamo, udiamo o tocchiamo subito le analizziamo in termini geometrici, usando formule, definizioni e teoremi della geometria che chiamiamo euclidea; anche rispetto a ciò che non vediamo: pensiamo ai solidi platonici associati agli elementi naturali, come cita Platone nel *Timeo*, oppure come fa l'astronomo Johannes Kepler (1571-1630) nella costruzione del sistema solare tramite sfere e poliedri.



Figura 1. Terra, Acqua, Fuoco, Aria e Quintessenza¹

1 dal *Timeo* di Platone: «... alla terra diamo la figura cubica; perché delle quattro specie la terra è la più immobile, e dei corpi il più plasmabile... e poi all'acqua la forma meno mobile delle altre (icosaedro), al fuoco la più mobile delle altre (icosaedro), al fuoco la più mobile (tetraedro), e all'aria l'intermedia (ottaedro); e così il corpo più piccolo al fuoco, il più grande all'acqua, e l'intermedio all'aria, e inoltre il più acuto al fuoco, il secondo per acutezza all'aria, e il terzo all'acqua... Restava una quinta combinazione e il Demiurgo se ne giovò per decorare l'universo (dodecaedro)».

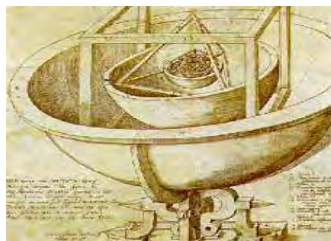


Figura 2. Modello platonico del sistema solare concepito da Keplero nella sua opera *Mysterium Cosmographicum*(1596)

Indubbiamente Euclide ha ricompilato e sistematizzato le conoscenze geometriche del suo tempo nella sua opera, gli *Elementi*, suddivisa in 13 libri: 6 di geometria piana, 3 di aritmetica, 1 sulle misurazioni e 3 di geometria dello spazio. Un lavoro tanto perfetto che dovremmo aspettare il 1899 con i *Fondamenti della Geometria* di David Hilbert per completare e correggere la sua opera. Inoltre, grazie a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Nicolai Lobachevsky (1792-1856) fu incrinata la certezza che la geometria di Euclide fosse l'unica possibile e furono aperte le porte alle geometrie non euclidee. Invece è stato Bernhard Riemann (1826-1866), allievo di Gauss ad introdurre per primo il concetto di varietà differenziabile, dove con varietà si fa riferimento alle differenti coordinate che varierebbero per ottenere i punti dell'oggetto, mentre l'aggettivo differenziabile si riferisce a ciò che è liscio, continuo, senza fratture e corrugamenti. Pertanto, con questo nuovo approccio le superfici tradizionali diventano varietà di dimensione 2, le curve varietà di dimensione 1, i punti varietà di dimensione 0 ed esistono, quindi varietà di dimensione 3 e di qualsiasi dimensione, anche se non sono semplici da visualizzare: gli iperspazi. Felix Klein (1840-1925) nel 1872 scrisse una

memoria in cui cercò di definire cosa fosse la geometria: nasce il Programma di Erlangen in cui tutte le geometrie trovano una sistemazione e rappresentano un caso particolare di quella proiettiva e spiana la strada allo studio degli spazi geometrici astratti. Purtroppo, però, la geometria della Natura era molto lontana dall'avere figure perfette di tipo euclideo. E quando nel 1912 Jean Baptiste Perrin si mise a registrare il movimento browniano di una particella ogni 30 secondi, osservando che <<le curve che non hanno tangente costituiscono la norma e curve regolari, come il cerchio, sono interessanti ma speciali>>, nessuno fece caso a queste osservazioni, a parte Benoit Mandelbrot. Egli, nonostante venisse dalla scuola di Bourbaki, e avesse letto gli scritti di Gaston Julia in cui si raccomandava di dimenticare la geometria per scegliere un rigore estremo (la vista poteva ingannare la ragione), nel 1970, con l'aiuto dei calcolatori IBM creò il grafico noto col nome di insieme di Mandelbrot.

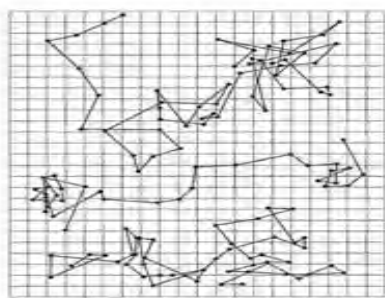


Figura 3. Grafico moto browniano di una particella in cui si può osservare la complessità della traiettoria e la similarità usando diverse scale



Figura 4. Insieme di Mandebrot

Michael Barnsley nel suo libro *Fractalis Everywhere* scriveva: << la geometria frattale cambierà a fondo la vostra visione delle cose. Continuare a leggere è pericoloso. Si rischia di smarrire definitivamente l'immagine inoffensiva che si ha delle nuvole, boschi, galassie, foglie, piume, fiori, rocce, montagne e di molte altre cose. Mai più tornerete a recuperare le interpretazioni di tutti questi oggetti che finora vi erano familiari >>. La geometria frattale diventa un linguaggio nel senso che le regole di calcolo o algoritmi rappresentano le unità fondamentali del linguaggio frattale.

Si tratta di una modellizzazione della complessità ed irregolarità delle strutture intorno a noi che dal punto di vista geometrico è un insieme infinito di iterazioni e nel 1987, codificando l'IFS (sistema di funzioni iterate) con un software opportuno, riuscì a riprodurre ogni piccolo dettaglio che avesse la caratteristica dell'autosimilarità ed insieme con Alan Sloan formò una società che gli fece ottenere il brevetto. La sua non utilizzazione oggi e la sostituzione col metodo JPEG è dovuto alla lentezza nell'esecuzione, ma resta un metodo con prospettive interessanti.

2. Un nuovo linguaggio con una nuova dimensione

Pare che Mandelbrot diede un nome alle sue figure sfogliando il dizionario di latino del figlio e trovando l'aggettivo *fractus*, derivato dal verbo *frangere*=rompere ed essendoci assomiglianza con vocaboli affini inglesi come *fracture* e *fraction*, gli sembrò adatto. Nasce così una nuova dimensione, quella frattale:

$D = \log N / \log (1/K)$, N = copie autosimili, k = rapporto dell'omotetia con cui si ottengono tali copie.

Esiste un legame con i numeri complessi calcolando la dimensione a partire da un segmento, fino al triangolo di Sierpinski, dal quadrato al merletto di Koch.



Figura 5. Il merletto di Koch



Figura 6. Il triangolo di Sierpinski ed il tappeto simile all'insieme di Cantor ottenuto partendo da un quadrato

Facciamo degli esempi di come si calcola la dimensione:

- $D_{\text{segmento}} = \log N / \log(N) = 1;$
- $D_{\text{quadrato}} = \log(N^2) / \log(N) = 2;$
- $D_{\text{cubo}} = \log(N^3) / \log(N) = 3$

Il merletto di Koch può essere diviso in 4 parti simili all'intero frattale. Ciascuna di esse si ottiene grazie ad un'omotetia di rapporto $K=1/3$: **$D = \log 4 / \log 3 = 1,262$**

Il triangolo di Sierpinski può essere diviso in 3 parti simili all'intero triangolo. Ciascuna di esse si ottiene grazie ad un'omotetia di rapporto $K=1/2$: **$D = \log 3 / \log 2 = 1,585$**

In entrambi i casi si tratta di numeri frazionari compresi fra 1 e 2. Possiamo dire che la dimensione ci dà un'idea di quanto il frattale riempia il piano. Frattali di dimensione prossima ad 1 saranno simili ad una curva, frattali di dimensione prossima a 2, tenderanno ad occupare tutto il piano.

Esiste inoltre un legame con i numeri complessi con la costante di Julia; infatti nella funzione $f(x) = x^2 + c$ la variabile x ed il parametro c sono numeri complessi, per $c = a + bi$ che assume un ruolo di controllo e può essere scelto a piacere. Con $-2,25 < a < 0,75$ e $-1,5 < b < 1,5$ Mandelbrot ottenne l'insieme che porta il suo nome.

2.1. Altri Frattali

Esiste il frattale di Cesaro, costruito col metodo di Barnsley, che rappresenta una generalizzazione della curva di von Koch, in cui la contrazione non è fissa, ma cambia con l'angolo: contrazione $k = 1/[2(1 + \cos \alpha)]$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$

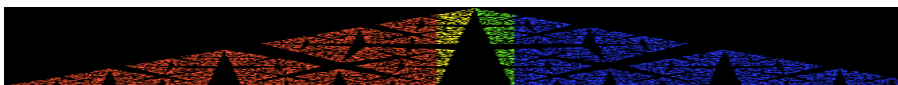
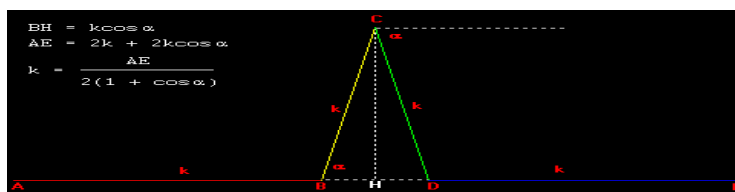


Figura 7. Frattale di Cesaro

Per la costruzione si parte da un segmento e si sostituisce ad esso la spezzata ABCDE, dove ogni segmento che costituisce la spezzata ha la stessa lunghezza k con le limitazioni dell'angolo dette prima. Per $\alpha=60^\circ$ si ottiene la curva di von Koch, mentre per $\alpha=90^\circ$ si ottiene la curva di Peano che non è un frattale in quanto la sua dimensione non risulta frazionaria.



Applichiamo la formula per calcolare la dimensione:

$d = \log_n[f(n)] = \log[f(n)]/\log n$, con

- $f(n) = 4$, infatti 4 sono le copie del segmento di base ad ogni passaggio;
- $n = 2(1+\cos\alpha)$, infatti ogni segmento ha lunghezza $1/[2(1+\cos\alpha)]$ del precedente

Vediamo i casi particolari di angoli:

$\alpha = 60^\circ$	$\rightarrow$	$d = \ln(4)/\ln(1 + 2\cos 60^\circ) = \ln(4)/\ln(3) = 1.26186$
$\alpha = 72^\circ$	$\rightarrow$	$d = \ln(4)/\ln(1 + 2\cos 72^\circ) = \ln(4)/\ln(2.61803)$

72°	$=$	$= 1.44042$
$\alpha = 85^\circ$	$\rightarrow$	$d = \ln(4)/\ln(1 + 2\cos 85^\circ) = \ln(4)/\ln(2.17431) = 1.78482$
$\alpha = 90^\circ$	$\rightarrow$	$d = \ln(4)/\ln(1 + 2\cos 90^\circ) = \ln(4)/\ln(2) = 2$

Esistono anche altri esempi, come la cattedrale frattale:



Figura 8. La cattedrale frattale ottenuta col metodo IFS, che si ottiene con l’unione di 4 trasformazioni lineari, dovuta sempre a Barnsley

Viene estratto un numero casuale che ci permette di impostare la trasformazione a seconda del suo valore. Ogni trasformazione viene scelta con probabilità del 25%. Iterando il procedimento si ottengono le stesse forme, ogni volta più piccole di un terzo, una dentro l’altra, fino ad ottenere la cattedrale. Lo stesso metodo si usa per costruire le felci, gli alberi, le montagne.

Oppure il Frattale di Apollonio:

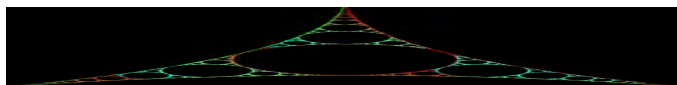


Figura 9. Il frattale di Apollonio

Il nome del frattale è in onore di Apollonio da Perga (III sec. a.C.) e per costruirlo si parte dal triangolo curvilineo.

Proviamo a vedere la sequenza:



Si osserva che l'area del frattale tende a zero, mentre il perimetro va ad infinito. Inoltre, non essendo una figura autosimile non si può calcolare la dimensione con la formula, ma è stata calcolata ed è circa 1,3058 (Mandelbrot 1983, pag. 172).

2.2. In Natura

Abbiamo detto che i Frattali hanno le forme che vediamo e tocchiamo in Natura, ma che non hanno la regolarità geometrica, come per esempio una felce:



Figura 10. La felce frattale

Invece che scrivere le trasformazioni:

$$(x' = ax + by + c) \text{ AND } (y' = dx + ey + f)$$

si dispongono in una stessa riga di una matrice i coefficienti che fanno parte della stessa trasformazione, mentre l'ultima colonna rappresenta la probabilità con cui applicare la trasformazione.

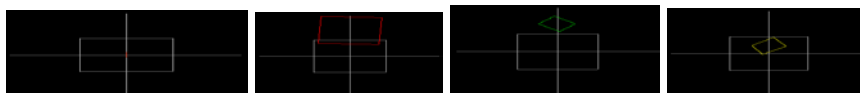
Ad esempio, riferendoci alla III trasformazione, che si applica con probabilità del 7%, possiamo scrivere:

$$(x' = 0.20x - 0.26y + 0.23) \text{ AND } (y' = 0.22x + 1.60)$$

Otteniamo la matrice:

	a	b	c	d	e	f	p
I	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	0.01
II	0.85	0.04	0.40	0.85	0.00	1.60	0.85
III	0.20	0.26	0.23	0.22	0.00	1.60	0.07
IV	0.15	0.28	0.26	0.24	0.00	0.44	0.07

Sequenza delle trasformazioni:



Un altro esempio interessante è la Nuvola Frattale:

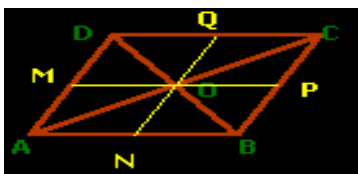


Figura 11. La nuvola frattale

anch'essa ottenibile col metodo IFS.

Passo 1: Si parte da un quadrilatero, ad esempio un parallelogramma, e si calcolano le coordinate del punto di incontro delle diagonali. Indicati con $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$; $D(x_4, y_4)$; i quattro vertici del parallelogramma, si ottengono con facilità le coordinate del punto di incontro delle diagonali: $O((x_1+x_2+x_3+x_4)/4, (y_1+y_2+y_3+y_4)/4)$

Disegneremo il punto O sullo schermo.



Passo 2: Dal punto O condurre la parallela a CD che incontra in

$M((x_1+x_4)/2, (y_1+y_4)/2)$ il lato

Passo 3

Dal punto O condurre la parallela ad AD che incontra in

$N((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$ il lato AB;

in $Q((x_3+x_4)/2, (y_3+y_4)/2)$ il lato CD.

Ora il parallelogramma ABCD risulta diviso in quattro parallelogrammi. In ognuno di essi potremo ripetere il procedimento precedente.

Per aggiungere il colore, per prima cosa conviene scegliere una tonalità di base come rosa o grigio. L'idea di tridimensionalità si ottiene aggiungendo delle chiazze di colore diverso ma sempre abbastanza in scala; la nuvola si schiarisce gradatamente andando da: in alto a sinistra verso il basso a destra. E poi parte il programma con la sequenza.



Figura 12. Esempi di nuvole con forme diverse che partono da una sequenza di punti diversa

Esistono ancora molteplici esempi in natura, come gli alberi, oppure il drago di Jurassic Park:



Figura 13. Drago di Jurassic Park

Questo simpatico frattale è stato reso famoso dal libro “Jurassic Park”, di Micheal Crichton, casa editrice Garzanti, da cui è stato tratto l’omonimo film. All’inizio di ogni capitolo ci sono dei segni che si complicano: sono disegni che si ottengono come iterazioni successive del frattale. Però, in questo caso,

il draghetto si può costruire anche con piegature successive di una strisciolina di carta, per esempio 16 volte e ad ogni riapertura la piega formi un angolo di 90° .

Altri approfondimenti si possono trovare sul sito web: www.webfract.it

3. Frattali e Arte

Il modulo sperimentato si è arricchito con la visione frattalica attraverso l'Arte, nell'esplorazione di nuove metodologie didattiche che rendono umanistico lo studio della matematica (Rogora E., Tortoriello F.S., 2018), secondo gli obiettivi dei percorsi del Liceo Matematico: essa può diventare uno strumento che favorisce questa finalità. E l'artista frattalico di riferimento è Jackson Pollock (1912-1956). Così diceva: <<Quando dipingo non ho l'esatta percezione di ciò che sta avvenendo, solo dopo mi rendo conto di ciò che ho fatto>>. Egli verrà considerato il padre della pittura d'azione (action painting), quando descrive i suoi momenti creativi; infatti, il suo intento è di utilizzare la pittura come mezzo non per descrivere i suoi sentimenti, ma per esprimerli. La sua è una pittura immediata, libera, nella quale tutto il corpo dell'artista viene coinvolto. Per far ciò utilizza una tecnica particolare: il dripping. Fa sgocciolare. Ma, alcuni ricercatori, Taylor insieme a due suoi colleghi, Adam Micolich e David Jonas (*Fractal Analysis of Pollock's Drip Paintings*, R.P. Taylor, A.P. Micolich and D. Jonas, 1999), decisero di analizzare con attenzione, con l'ausilio del computer, i dipinti di Pollock e scoprirono che erano presenti schemi frattali. Con l'analisi al computer si è poi riusciti a comprendere

meglio la tecnica di Pollock. È emerso che cominciava dipingendo piccole zone sulla tela; procedeva tracciando traiettorie che univano queste zone, fino a sommergerle: questo primo strato di colore costituiva lo strato di riferimento. Con intervalli che potevano variare dai due giorni ai sei mesi, depositava altri strati di colore sopra quello di riferimento, raffinando via via la complessità. Lo studio cronologico dei dipinti ha rivelato che la complessità degli schemi frattali aumentava man mano che Pollock raffinava la tecnica: l'analisi dei frattali al computer può quindi essere anche applicata per datare con precisione i suoi dipinti. Jackson Pollock dipingeva, quindi, frattali 25 anni prima della loro scoperta nei fenomeni naturali.

Di seguito alcune tele dell'autore:

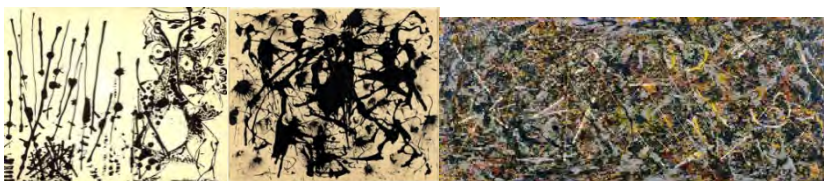


Figura 14. Tele dell'autore

3.1. Il Frattalismo

Negli ultimi anni, grazie all'ausilio del computer, si sono moltiplicate le esperienze di arte frattale. Sono sempre più numerosi i frattalisti. A Parigi, un gruppo di artisti d'avanguardia ha fondato il movimento dei *Frattalisti*. Il loro manifesto, un po' marinettiano, è del 1997:

Tutto brulica, vibra, s'attorciglia, brilla, sprizza, esulta, sobbalza, danza, volteggia, palpita, sfarfalla, turbina - scrive il teorico del gruppo, il critico d'arte Henri-Francois Debailleux. Veniamo precipitati dentro vortici, ritmi e turbinii come se la testa fosse dentro il cestello della lavatrice: tutto si muove, tutto gira e in tutte le direzioni.



Figura 15. Kerry Michtell



Figura 16. Edward Berko, senza titolo

Un altro punto di riferimento è il Gruppo Internazionale di Arte Frattale che ha sede in Brasile.

Ne fa parte, fra gli altri, anche Paolo Portoghesi che si presenta come "architetto frattalista".

"Senza copiare la natura l'artista frattale - scrive Dalva de Abrantes, nella presentazione del gruppo - riproduce quanto di più selvaggio, irrazionale e irregolare esiste nella natura stessa, vista nel suo divenire, nella sua essenza, piuttosto che nella sua apparenza".

La Matematica è estetica. Infatti, l'algebra dei frattali ha ispirato Giancarlo Petriglia per la collezione Primavera/Estate 2015 di Piquadro "Opera", mettendo insolite stampe geometriche dentro e fuori le borse, da uomo e da donna, dai colori vi-

vaci: è la creazione di borse scomponibili in parti uguali tra loro, ma dai colori diversi, (quasi) come nelle immagini di Mandelbrot.



Figura 17. Un momento dell’evento milanese per la presentazione Piquadro Opera P/E 2015 con un pezzo della collezione

Come la stessa Desigual lega il suo stesso logo ai modelli generati dalle funzioni matematiche che rientrano nella categoria dei Frattali.



Figura 18. Borsa “Fractal attraction”



Figura 19. Camicetta frattale

Esiste l’Architettura Take Away, un tipo di design che utilizza i frattali in sculture, come quelle dell’irlandese Nuala O’Donovan, oppure in moduli architettonici come il cubo “Fractal 23” di Tareshi Miyakawa ed i “Module Platform” di

Wetel Oberfell, le lampade di Edoardo Pierri e "Fractal Arcal e Cumulus lighting" che sono illuminazioni di Sara Ivanyi.



Figura 20. Coral Fragment di Nuala O'Donovan



Figura 21. Tavolino frattale di W.O.



Figura 22. Il cubo "Fractal 23" di T. Miyakawa (23 cassetti)



Figura 23. Raiz Lamp di E. Pierri

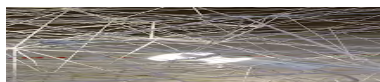


Figura 24. Ragnatela- frattale di S. Ivanyi

4. Approfondimenti

Oggi i frattali si utilizzano anche in Astronomia, Ingegneria, Meteorologia, in Economia e Medicina. In particolare, è possibile studiare l’Anatomia e la Fisiologia Umana con occhi frattali: la forma interna di un polmone o una rete neurale sono frattali, ma anche il battito cardiaco, le aree di attivazione cerebrale, il meccanismo di replicazione cellulare e così via. Modelli caotici sono utilizzati per codificare informazioni segrete o comprimere immagini col metodo IFS, come abbiamo visto. Inoltre, esiste anche l’applicazione nel settore dell’intrattenimento e del cinema: dal cortometraggio animato *Vol libre* nel 1980 in cui Carpenter considerò un paesaggio composto da quattro macro-triangoli che suddivise poi in quattro triangoli ciascuno ottenendo una montagna frastagliata ed estremamente realistica ad *Avatar*, fino al film di James Cameron del 2009 che ha dimostrato cosa fosse possibile ottenere con i frattali nel magico mondo di Pandora, con gli incantevoli paesaggi. Interessante è, quindi, il parallelismo fra geometria frattale e teoria del caos; infatti, il primo oggetto matematico della teoria del caos, il celebre attrattore a farfalla del modello matematico di Edward Lorenz, ha una struttura frattale.

5. Conclusioni

La matematica-geometria non è più solo teoremi e dimostrazioni, ma osservazioni, sperimentazioni ed investigazioni fenomeniche di varia natura. Il modello applicato è stato di tipo costruttivista (Vygotsky, L. S.) in quanto ha vi-

sto l'acquisizione di nuove informazioni come il risultato di esperienze di interazioni degli studenti con i docenti e ricercatori. Questi ultimi hanno svolto il ruolo di mediatori semiotici. Infatti il linguaggio geometrico deve essere veicolato ed usato nel campo umanistico e artistico, cercando di evitare o ridurre le cosiddette "ambiguità di campo e di registro", con l'aiuto anche della tecnologia. Le attività hanno, quindi, utilizzato metodologie didattiche diverse in base agli obiettivi prefissati, con laboratori di ricerca-azione, incoraggiando l'apprendimento della persona, perseguendo ciò che le Indicazioni Nazionali chiamano *competenze*, suscitando un interesse attraverso "stimoli" che catturino la curiosità con l'attivazione del pensiero "laterale" di Edward De Bono. La sperimentazione è stata condotta su studenti del IV e V anno di Liceo avendo come formula: $\text{Creatività} = n(=\text{Nuovo}) \cdot u(=\text{Utile})$. Tutto ciò ha convinto gli studenti: i frattali leggono la complessità della Natura con un nuovo linguaggio geometrico e l'Arte aiuta nella comprensione di concetti nuovi e non immediati.

Bibliografia

Amirante,A.,Tortorelli,L.,Veronesi,I.(2022),Mathematics, Literature and Art: getting passionate about mathematics through the use of digital technologies,proceeding of ICERI2022 Conferenze

Bachelard, G.,(1938), La formation de l'esprit scientifique, Vrin, Paris.

Capone,R. Rogora,E.,Tortoriello,F.S.,(2017) La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società*. Rivista dell'Unione Matematica Italiana 2(3), pp. 293-304.

Castelnuovo,E. (1963),*Didattica della matematica*, La Nuova Italia Editrice.

Chevallard, Y., (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

D’Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. In A. Bonfiglioli & C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer graphics*(pp.xix-xxi). Bologna: Aspasia

D’Amore, B.(2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni,identità tra due mondi possibili*. Bari: Edizioni Dedalo

D’Amore, B., & Duval, R. (2019). *L’educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa*.

Duval, R. (2015). *Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie*. In J.Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147-182). Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2018). *Per l’educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura*.

Emmer,M.(1998,1999,2000). *Matematica e cultura*. Springer Italia, Milano

Maldelbrot,B.(2000).*Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione*. Torino,Einaudi

Maldelbrot,B.(2005). *Nel mondo dei frattali*. Roma, Di Renzo

Rogora, E.,Tortoriello,F.S.,(2021) *Interdisciplinarity for learning and teaching mathematics*. Bolema, 35 , 1086-1106.

Rogora, E., Tortoriello, F.S., (2018) *Matematica e cultura umanistica*, Archimede, 82-88.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press

Il Debate come metodologia didattica innovativa

*Per una didattica inclusiva e formativa
Per promuovere l'apprendimento attivo e
partecipativo*

Gondeberga De Rubertis *

* Docente Liceo scientifico R.Caccioppoli- Napoli
Vice presidente ANFSU



Sunto: *In questo lavoro si analizzano le caratteristiche del Debate come didattica innovativa capace di promuovere un apprendimento inclusivo, attivo e partecipativo. Si spiegano le caratteristiche del Debate e le motivazioni che lo rendono un ottimo alleato per fronteggiare le sfide della didattica attuale che deve dare nuovi stimoli alla generazione di studenti digitali, ormai disallineata dalla società della conoscenza. La didattica innovativa attraverso il Debate rappresenta infatti un approccio pedagogico che si distingue per l'adozione di metodologie, strategie e strumenti che promuovono la personalizzazione, la collaborazione, l'uso della tecnologia e lo sviluppo di competenze trasversali, in modo da fornire agli studenti un'esperienza preparatoria per affrontare le sfide del mondo odierno.*

Parole Chiave: *Debate, didattica, innovazione, inclusione*

Abstract: *In this work, we analyze the characteristics of Debate as an innovative teaching method capable of promoting inclusive, active, and participatory learning. We explain the features of Debate and the reasons that*

make it an excellent ally in tackling the challenges of current education, which needs to provide new stimuli to the generation of digital students, now disconnected from the knowledge society. Innovative teaching through Debate represents a pedagogical approach that stands out for adopting methodologies, strategies, and tools that promote personalization, collaboration, the use of technology, and the development of transferable skills, thereby providing students with a preparatory experience to face the challenges of the modern world.

Keywords: *Debate, teaching, innovation, inclusion*

1 – Il Debate per promuovere l'apprendimento attivo e partecipativo

Il Debate è una strategia didattica che sta trovando posto nelle attività didattiche della scuola italiana con sempre maggiore insistenza; si tratta di un dibattito regolamentato, in cui due squadre competono al fine di convincere la giuria rispetto ad un argomento prestabilito.

Questo approccio insegna agli studenti a pensare in modo nuovo, incoraggiandoli a fondare e giustificare ogni argomentazione che propongono. Attraverso il Debate, gli studenti diventano protagonisti del loro apprendimento, imparando a utilizzare il linguaggio in modo intelligente e creativo e ad adottare i principi della comunicazione, inclusa la comunicazione digitale. Inoltre, mettere in pratica il Debate implica una riconsiderazione di alcuni paradigmi tradizionali, favorendo l'apprendimento basato sull'indagine, la cooperazione tra studenti e l'educazione tra pari. In questo modo il Debate va oltre il semplice confronto dialettico, contribuendo allo sviluppo e al rafforzamento delle competenze linguistiche, logiche e relazionali.

D'altro canto non si possono più trascurare i bisogni formativi delle nuove generazioni di nativi digitali che non riescono più a ottimizzare le loro capacità solo attraverso la lezione frontale.

La lezione frontale, infatti, intesa come un approccio didattico tradizionale in cui l'insegnante svolge un ruolo centrale nella trasmissione delle conoscenze agli studenti, può presentare alcune problematiche quando si applica agli studenti nativi digitali, che sono cresciuti con l'accesso immediato alle informazioni e alle risorse online. Pertanto, questi ultimi possono percepire le lezioni frontali come poco stimolanti, poiché richiedono un ascolto passivo invece di un'interazione attiva. Questo può portare a un basso coinvolgimento e ad una diminuzione dell'attenzione e della motivazione degli studenti. E' inevitabile, infatti, che la lezione frontale tenda a limitare l'interattività tra insegnante e studenti. Gli studenti nativi digitali sono abituati all'interazione costante con le tecnologie e le piattaforme digitali, e possono trovare frustrante non poter interagire attivamente durante le lezioni. L'assenza di dialogo e di scambi di idee può ostacolare l'apprendimento attivo e la partecipazione degli studenti.

Non bisogna inoltre sottovalutare il fatto che gli studenti delle nuove generazioni sono abituati a ricevere informazioni personalizzate e su misura attraverso i motori di ricerca e gli algoritmi che adattano i contenuti alle loro preferenze e interessi. La lezione frontale, invece, offre un approccio standardizzato che potrebbe non tener conto delle specifiche esigenze di apprendimento degli studenti. Ciò può portare a una mancanza di rilevanza e di connessione emotiva con i

contenuti presentati, anche perché tali generazioni di studenti sono spesso abituate a lavorare in modo collaborativo, ad esplorare diverse fonti di informazioni e a utilizzare strumenti digitali per creare contenuti. La lezione frontale può limitare queste opportunità, poiché l'insegnante detiene il controllo del flusso delle informazioni e dell'apprendimento. Ciò può ridurre le possibilità per gli studenti di sviluppare la creatività, l'autonomia e la capacità di problem-solving.

Affrontare queste problematiche richiede una riflessione sull'uso delle tecnologie digitali nell'ambito dell'insegnamento, incoraggiando approcci pedagogici più interattivi, personalizzati e orientati alla creatività. La combinazione di strategie tradizionali e strumenti digitali può aiutare ad affrontare le sfide e a creare un ambiente di apprendimento più stimolante e coinvolgente per gli studenti.

Questo è appunto quanto ci si auspica attraverso la promozione delle avanguardie educative sostenute dal MIUR.

In particolare nel *Manifesto delle avanguardie educative* si ambisce ad una scuola che possa connettere i saperi tradizionali con le competenze richieste nella società della conoscenza. Ciò implica lo sviluppo di competenze trasversali e l'integrazione di conoscenze formali e informali, che vanno oltre la tradizionale struttura dei libri di testo.

Un tale paradigma di scuola deve individuare, connotare e sviluppare l'innovazione in modo sostenibile e trasferibile ad altre realtà. Si sottolinea l'importanza di semplificare gli elementi chiave per rendere l'innovazione riproducibile e

condivisa, avvalendosi delle risorse del territorio e dell'autonomia scolastica.¹

La promozione della didattica innovativa nelle scuole secondarie di secondo grado rappresenta, quindi, un approccio pedagogico che si distingue per l'adozione di metodologie, strategie e strumenti che promuovono l'apprendimento attivo, la personalizzazione, la collaborazione, l'uso della tecnologia e lo sviluppo di competenze trasversali. Questo metodo mira a fornire agli studenti un'esperienza di apprendimento coinvolgente, significativa e preparatoria per affrontare le sfide del mondo odierno. È un approccio audace e coraggioso che mira a rivoluzionare l'esperienza di apprendimento, a rompere le catene del conformismo. È una danza sognante tra tradizione e innovazione, in cui l'eredità del passato si fonde con le speranze del futuro per plasmare una nuova forma di insegnamento che risuona con la voce vibrante della modernità.

In questo panorama di promesse il Debate sembra incarnare una delle possibilità più audaci, ma sicuramente maggiormente foriera di successi. Affonda le sue radici nella storia della cultura occidentale nascendo nell'antica Grecia, attraversa le scuole di retorica del mondo latino e medievale ed arriva ai nostri giorni apprestandosi a rimodellarsi alla luce delle nuove esigenze didattiche.

¹ *Manifesto delle Avanguardie educative*; Genova, 6 novembre 2014 – <https://innovazione.indire.it/avanguardieeducative/il-manifesto>

2 – Il Debate come innovazione didattica

Il Debate arriva ai nostri giorni come una competizione che, partendo dalle scuole anglosassoni, sta coinvolgendo sempre di più la didattica curriculare anche in Italia. Nella versione attuale, sperimentabile attraverso diversi protocolli di gioco, prevede un regolamento specifico che caratterizza le pratiche del gioco, individua i ruoli e gli obblighi dei diversi dibattenti, stabilisce i tempi imprescindibili della competizione. Ogni partecipante inoltre deve sottoscrivere il *Codice di condotta* che si fonda sull’etica del Debate ed è improntato sui valori della correttezza e del rispetto reciproco².

Il dibattito può essere condotto utilizzando diversi metodi e protocolli, tra cui, i più diffusi sono il protocollo WSD (world school debate) per le scuole secondarie di secondo grado e il British Parliamentary per le università.

Prima dell'inizio del dibattito, i partecipanti ricevono l'argomento o la risoluzione da discutere. Hanno un periodo di tempo limitato per prepararsi, cercando informazioni, raccogliendo prove e sviluppando le proprie argomentazioni. Il dibattito inizia con un'introduzione generale sull'argomento da parte di un moderatore o di un rappresentante designato. Ogni partecipante o squadra presenta la propria posizione sull'argomento in discussione, le squadre possono essere divise tra squadra di governo (pro) e squadra di opposizione (contro). Dopo la dichiarazione delle posizioni, ogni partecipante o squadra ha l'opportunità di presentare argomenti a sostegno della propria posizione. Gli argomenti

² Per un approfondimento: M. De Conti, J. Zompetti (2020) *L'etica del Debate*, Londra: Editore Pearson

possono includere prove, dati, statistiche o ragionamenti logici. Durante questa fase, i partecipanti cercano di persuadere il pubblico o gli avversari della validità delle proprie affermazioni. Dopo che ogni parte ha presentato i propri argomenti, si apre una fase di confutazione. Durante questa fase, i partecipanti o le squadre rispondono agli argomenti presentati dall'altra parte, evidenziando le debolezze o le contraddizioni nel ragionamento dell'avversario. Si cerca di confutare gli argomenti avversari e rafforzare la propria posizione. Durante la confutazione, i partecipanti possono cercare di sostenere ulteriormente le proprie argomentazioni con prove aggiuntive, come citazioni, studi o esperienze personali. In alcuni dibattiti, è possibile includere una fase di domande e risposte in cui il pubblico o il moderatore possono porre domande ai partecipanti. Questo aiuta a chiarire ulteriormente gli argomenti e a sondare la conoscenza e la preparazione dei partecipanti. Nella fase conclusiva ogni partecipante o squadra riassume brevemente i propri punti chiave e cerca di convincere il pubblico o gli avversari a sostenere la propria posizione. Si cerca di rafforzare l'argomentazione finale e di lasciare un'impressione duratura. Ci sono regole specifiche che governano il Debate; ad esempio, i dibattiti devono rispettare il tempo loro assegnato, evitare attacchi personali e argomentazioni irrazionali. La competizione si basa sulla capacità di presentare argomenti persuasivi, utilizzare prove solide e rispondere in modo efficace alle argomentazioni degli avversari; alla fine del dibattito, una giuria composta da giudici esperti valuta le performance delle squadre, considerando argomenti, capacità di persuasione, risposta agli

argomenti avversari, struttura dell'intervento e altre competenze comunicative. I punti vengono assegnati in base a criteri prestabiliti, nell'ottica di una valutazione costruttiva che evidenzia i punti di forza di ciascuno e metta in risalto le possibilità di miglioramento. E' evidente quindi che la metodologia didattica del Debate promuove lo sviluppo delle competenze di pensiero critico, abilità di comunicazione, capacità di ricerca e analisi e incoraggia gli studenti a considerare argomenti da diverse prospettive. Favorisce inoltre la collaborazione di squadra, la gestione del tempo e la capacità di ascoltare attentamente e rispondere in modo efficace.

2.1 - Per superare la logica dello studio inteso come mero apprendimento mnemonico di testi scritti

Il Debate può essere, pertanto, utilizzato come una metodologia didattica per superare la logica dello studio inteso come mero apprendimento mnemonico di testi scritti, promuovendo un approccio attivo e critico all'apprendimento.

Attraverso il Debate, gli studenti sono stimolati a esplorare argomenti complessi, analizzare diverse prospettive, elaborare argomentazioni e presentare le proprie opinioni in modo convincente. Questo processo richiede una comprensione approfondita degli argomenti, la capacità di raccogliere e valutare prove, e l'abilità di esprimere idee in modo chiaro e coerente.

A differenza dello studio mnemonico di testi scritti, il Debate richiede agli studenti di impegnarsi attivamente nella ricerca di informazioni, di analizzare criticamente le fonti e di sviluppare un pensiero critico. Essi devono costruire

argomentazioni solide basate su evidenze concrete e affrontare le contro-argomentazioni, che richiedono un'elaborazione e una comprensione più profonda del materiale.

2.2 - Per favorire l'approccio dialettico nell'apprendimento e sviluppare il pensiero critico

Il Debate può essere utilizzato come un potente strumento per favorire l'approccio dialettico nell'apprendimento, basandosi sulla pratica del dialogo e della discussione, in cui le diverse prospettive vengono esplorate e analizzate in modo critico.

Attraverso il Debate, gli studenti sono incoraggiati a esprimere le proprie opinioni e a confrontarle in modo rispettoso con quelle dei loro compagni di classe, considerando punti di vista diversi dai propri; ma soprattutto, sono motivati ad ascoltare attentamente i propri compagni di squadra e gli avversari, allenando così le loro capacità di concentrazione, che, col tempo, arrivano a superare di gran lunga quelle degli altri studenti.

Inoltre, il Debate incoraggia i discenti a sviluppare le abilità di persuasione e di argomentazione, (metodo AREL) poiché devono essere in grado di comunicare le loro idee in modo chiaro, convincente e ben strutturato. Questo processo richiede la capacità di formulare argomentazioni solide, di raccogliere prove pertinenti e di utilizzare strategie persuasive per influenzare l'opinione degli altri.

2.3 - Per contestualizzare i contenuti della formazione alla società civile.

Attraverso il dibattito, gli studenti hanno l'opportunità di esplorare e analizzare questioni rilevanti e attuali che riguardano la società in cui vivono.

Servendosi del Debate come metodologia didattica, gli insegnanti possono presentare ai loro studenti argomenti e temi che hanno un impatto diretto sulla società civile. Questo può includere questioni sociali, politiche, ambientali, etiche o economiche che richiedono una comprensione approfondita e una riflessione critica. Il debater, in linea generale, è fortemente motivato ad essere sempre informato sulle tematiche civili, in quanto deve essere pronto a condurre dibattiti anche "impromptu"³

Il Debate incoraggia in tal modo l'interazione sociale e il dialogo tra gli studenti, consentendo loro di confrontarsi con opinioni diverse e di sviluppare abilità di ascolto attivo e rispetto reciproco. Questo aiuta a costruire una cultura del dibattito civile e a promuovere il pensiero critico, la capacità di comunicazione e la tolleranza verso le diverse opinioni, rendendo l'apprendimento più significativo e divertente ed evidenziando l'importanza di comprendere e affrontare le problematiche presenti nel contesto sociale in cui gli studenti vivono.

2.4 - Per favorire l'integrazione degli strumenti digitali con quelli tradizionali nell'ambito dell'istruzione.

³ Si tratta di un format in cui i componenti delle squadre ricevono la tematica da dibattere un'ora prima dell'inizio della competizione e in questo tempo devono preparare la linea argomentativa, senza l'ausilio di alcun supporto informatico o cartaceo che non sia un vocabolario o il “Libro dei fatti” dell'anno corrente.

Ci si può avvalere della metodologia didattica del Debate per favorire l'integrazione degli strumenti digitali con quelli tradizionali nell'ambito dell'istruzione. L'uso dei mezzi digitali può arricchire l'esperienza del dibattito, consentendo agli studenti di sfruttare al meglio le risorse disponibili e di accedere a una vasta gamma di informazioni e fonti.

In tal modo si consente agli studenti di condurre ricerche approfondite su argomenti specifici, utilizzando Internet e altre risorse online per acquisire una conoscenza più ampia e aggiornata. Gli allievi possono consultare documenti, articoli, video, dati statistici e altre fonti di informazione per supportare le loro argomentazioni e approfondire la comprensione dei temi discussi, ma soprattutto saranno allenati ad una costante analisi critica delle fonti, per procedere ad una selezione accurata e proficua nel labirinto delle infinite possibilità costituito dalle risorse online.

Inoltre, l'uso degli strumenti digitali può facilitare la comunicazione e la collaborazione tra gli studenti, i quali, attraverso l'uso di piattaforme di discussione online, possono interagire, condividere opinioni, argomentare e rispondere alle argomentazioni degli altri in modo tempestivo e strutturato. Questo favorisce l'apprendimento collaborativo e la costruzione di conoscenze condivise.

D'altronde l'integrazione degli strumenti digitali può fornire modalità innovative per la presentazione e la visualizzazione delle argomentazioni, per sperimentare metodologie innovative di rappresentazione della conoscenza. In alcuni casi gli studenti possono utilizzare software di presentazione, strumenti di grafica o video editing per creare contenuti accattivanti e coinvolgenti che supportino le loro

argomentazioni. Ciò rende il processo del dibattito più dinamico e stimolante, coinvolgendo gli studenti in modo attivo e favorendo la loro creatività.

L'uso degli strumenti digitali nel Debate può anche favorire la partecipazione degli alunni più timidi o meno inclini a prendere la parola in modo tradizionale. Attraverso l'uso di piattaforme di discussione online o strumenti di votazione elettronica, gli studenti possono esprimere le proprie opinioni in modo anonimo, superando eventuali barriere sociali o di fiducia. Questo promuove l'inclusione e permette a tutti i discenti di contribuire attivamente al dibattito. Così, questo approccio ibrido, che combina gli strumenti digitali con quelli tradizionali, crea un ambiente di apprendimento ricco e stimolante, in cui gli allievi possono sviluppare abilità critiche, comunicative e digitali fondamentali per il loro futuro.

2.5 - Per migliorare le capacità di lavorare in gruppo

Il Debate può essere utilizzato in modo efficace per favorire il lavoro di gruppo e promuovere la collaborazione tra gli studenti, i quali, durante un dibattito, sono spinti a lavorare insieme, condividendo idee, organizzando le argomentazioni e sviluppando strategie per sostenere le loro posizioni.

Il lavoro di gruppo nel Debate richiede la divisione dei compiti e la cooperazione tra i membri del team. Gli studenti devono lavorare insieme per raccogliere le informazioni pertinenti, analizzare le evidenze, formulare argomentazioni convincenti e organizzare la struttura del dibattito. Questo processo richiede una comunicazione efficace, la capacità di ascoltare e rispettare le opinioni degli altri, nonché la capacità di negoziare e trovare un terreno comune.

Inoltre, il Debate promuove lo sviluppo delle cosiddette "soft skills" (competenze trasversali), che sono fondamentali per il lavoro di gruppo, ma diventano indispensabili nel mondo del lavoro. Queste competenze includono la capacità di collaborare, comunicare in modo chiaro ed efficace, negoziare, gestire i conflitti e prendere decisioni di gruppo. Durante il dibattito, gli studenti hanno l'opportunità di esercitare e sviluppare queste competenze, imparando a lavorare insieme in modo costruttivo e armonioso.

Il lavoro di gruppo nel Debate offre anche l'opportunità di valorizzare le diverse abilità e conoscenze dei singoli membri del team. Ogni studente può contribuire con le proprie prospettive, competenze e idee uniche, arricchendo così il dibattito e portando una varietà di punti di vista. Questo favorisce la diversità e l'inclusione, consentendo a tutti gli studenti di sentirsi coinvolti e valorizzati all'interno del gruppo.

Inoltre, il lavoro di gruppo nel Debate incoraggia lo spirito di squadra e la responsabilità condivisa. Gli studenti devono assumersi la responsabilità delle proprie azioni e contribuire in modo significativo al successo del team. Questa collaborazione e senso di responsabilità favorisce la costruzione di relazioni positive tra gli studenti, promuovendo un ambiente di apprendimento supportivo e inclusivo. Così il Debate non solo migliora l'apprendimento degli studenti, ma prepara anche gli studenti ad affrontare sfide del mondo reale, in cui il lavoro di squadra e la collaborazione sono spesso richiesti per il successo.

2.6 - Per favorire l’inclusione degli alunni con Bisogni Educativi Speciali

Il Debate, con la sua potente luce di inclusione, si erge come uno strumento pedagogico di inestimabile valore per favorire l'inclusione degli alunni con Bisogni Educativi Speciali (BES). Esso offre un ambiente fertile in cui gli studenti con diverse abilità possono partecipare attivamente, contribuire e apprendere insieme, senza discriminazioni o limitazioni.

In primo luogo, il Debate promuove l'empowerment degli alunni BES, consentendo loro di esprimere le proprie idee e opinioni in un contesto strutturato e rispettoso. Attraverso il confronto e la discussione, gli studenti con BES hanno l'opportunità di sentirsi coinvolti e valorizzati, riconoscendo la propria voce come un elemento fondamentale del dibattito. Questo favorisce la loro autostima e il senso di appartenenza, contribuendo così alla loro inclusione sociale ed emotiva.

In secondo luogo, il Debate offre una piattaforma per lo sviluppo delle abilità comunicative e sociali degli alunni BES. Attraverso l'interazione con i coetanei e la necessità di esporre le proprie idee in modo coerente e persuasivo, gli studenti con BES migliorano le loro competenze di comunicazione verbale e non verbale. Inoltre, la partecipazione al Debate richiede la capacità di ascoltare e rispondere alle argomentazioni degli altri, incoraggiando la pratica delle abilità di ascolto attivo e di interazione sociale positiva.

Inoltre, il Debate favorisce lo sviluppo del pensiero critico e della capacità di problem solving negli alunni BES. Attraverso la valutazione delle argomentazioni, l'analisi delle prove e la costruzione di ragionamenti strutturati, gli studenti con BES migliorano la loro abilità di analisi e sintesi. Questo li aiuta a

sviluppare strategie di problem solving e a prendere decisioni informate, competenze essenziali per affrontare le sfide sia nell'ambito scolastico che nella vita quotidiana.

Infine, il Debate favorisce l'inclusione degli alunni BES attraverso la promozione della consapevolezza e dell'accettazione della diversità. Attraverso il confronto di diverse opinioni e prospettive, gli studenti imparano a comprendere e rispettare le differenze, sviluppando una mentalità aperta e tollerante. Questo crea un clima inclusivo in cui gli alunni BES si sentono accettati e valorizzati per le loro uniche abilità e contributi.

2.7 - Per sviluppare le life skills

Attraverso la pratica del dibattito gli studenti acquisiscono, infine, le così dette "life skill", ossia tutte quelle competenze ed abilità cognitive, personali e sociali in grado di affrontare la vita di tutti i giorni. L'Organizzazione Mondiale della Sanità ha definito le 10 competenze principali che ogni individuo deve acquisire, tali competenze possono essere sviluppate grazie alla metodologia del Debate come di seguito spiegato:

1. Comunicazione efficace – attraverso l'allenamento alla discussione in pubblico
2. Capacità di prendere decisioni – attraverso l'organizzazione del dibattito e la scelta degli argomenti da sostenere
3. Problem Solving – attraverso la discussione sulla mozione che si svolge nella fase preparativa all'interno della squadra
4. Pensiero creativo – attraverso l'elaborazione della linea argomentativa

5. Pensiero critico – attraverso la selezione e l’analisi critica delle fonti
6. Empatia – attraverso l’incontro e l’ascolto attivo della propria squadra e della squadra avversaria
7. Capacità di avere delle relazioni interpersonali – attraverso l’organizzazione dei ruoli e dei compiti all’interno della squadra
8. Auto consapevolezza / consapevolezza di sé – attraverso l’autovalutazione dei propri interventi e di quelli della propria squadra
9. Gestione delle emozioni – un Debater per definizione deve essere un vincitore umile ed un perdente composto, deve quindi saper gestire bene le proprie emozioni
10. Gestione dello stress – attraverso il confronto con le regole e l’allenamento al dibattere in pubblico.

3 - In difesa del Debate

La metodologia didattica del Debate ha subito inevitabilmente alcune contestazioni, legate soprattutto al fatto che gli allievi devono sostenere una mozione senza necessariamente dividerne gli assunti. Qualcuno ha parlato di sofistica e di menzogna. Tuttavia, questa pratica didattica in realtà promuove la ricerca della verità, l'esposizione di opinioni diverse e la capacità di argomentare in modo convincente. Il dibattito fornisce agli studenti l'opportunità di esplorare prospettive diverse e di sfidare le proprie convinzioni, incoraggiando il pensiero critico e la ricerca di prove solide per sostenere le proprie posizioni.

Una delle caratteristiche fondamentali del dibattito è la necessità di presentare argomenti coerenti e basati su fatti concreti. Gli studenti che partecipano al dibattito sono incoraggiati a fare ricerche approfondite sul tema in discussione e a utilizzare fonti affidabili per supportare le proprie affermazioni. Questo processo di ricerca e analisi critica aiuta gli studenti a sviluppare abilità di valutazione delle informazioni e a riconoscere la differenza tra opinioni personali e fatti verificabili.

Inoltre, il dibattito richiede agli studenti di essere in grado di comprendere e argomentare posizioni contrarie alle proprie. Questo implica la capacità di mettersi nei panni degli altri, di comprendere i punti di vista diversi e di esprimere critiche costruttive. Questa pratica promuove l'empatia, la tolleranza e la capacità di comunicare in modo efficace anche con persone che hanno opinioni diverse.

È importante sottolineare che il dibattito non incoraggia la manipolazione o la falsificazione dei fatti. Al contrario, mette in luce l'importanza di presentare argomenti solidi e convincenti basati su prove verificabili.

Il dibattito, pertanto, non insegna a mentire, ma promuove il pensiero critico, la ricerca della verità e la capacità di esprimere idee in modo persuasivo e basato su prove solide.

Altra contestazione che è stata posta alla pratica didattica del Debate è legata alla componente competitiva che è imprescindibile dal Debate come gioco e sport mentale.

La competizione nel dibattito svolge un ruolo significativo nell'incoraggiare lo sviluppo delle abilità comunicative, del pensiero critico e della leadership. Sebbene il dibattito sia un'attività collaborativa che richiede il lavoro di squadra,

l'elemento competitivo stimola gli studenti a dare il massimo delle proprie capacità e a cercare di raggiungere risultati eccellenti.

In primo luogo la competizione crea un ambiente stimolante in cui gli studenti sono spinti a impegnarsi attivamente e a cercare di migliorarsi costantemente. La possibilità di vincere o perdere stimola una maggiore dedizione e l'impegno non trascurabile nel prepararsi per i dibattiti.

La necessità di comunicare in modo convincente e di rispondere alle argomentazioni avversarie in tempo reale contribuisce a migliorare le capacità di parlare in pubblico e di articolare i propri pensieri in modo coerente.

La competizione nel dibattito, inoltre, aiuta gli studenti a sviluppare la capacità di gestire lo stress e la pressione in situazioni di confronto diretto. Dovendo affrontare argomentazioni avversarie, rispondere alle domande e mantenere la calma durante le critiche, gli studenti imparano a gestire efficacemente le emozioni e a mantenere la concentrazione anche sotto pressione.

In tal modo si favorisce anche lo sviluppo delle capacità di leadership e di collaborazione. Gli studenti devono lavorare insieme come squadra, distribuendo le responsabilità, ascoltando le diverse prospettive e prendendo decisioni collettive. La competizione incentiva anche l'assunzione di ruoli di leadership all'interno della squadra, come il capitano o il portavoce, che aiutano a coordinare e guidare il gruppo.

È importante sottolineare che la competizione nel dibattito deve essere sana e rispettosa, ponendo l'accento sull'apprendimento e sulla crescita personale. L'obiettivo non

è solo vincere, ma anche sviluppare competenze e migliorarsi costantemente, per prepararsi ad affrontare sfide future con fiducia e determinazione.

Altro motivo di confronto relativo al Debate come metodologia didattica innovativa è sicuramente di carattere linguistico: il Debate, pur affondando le sue radici nel mondo classico e latino, è tornato in Italia dopo il “bagno linguistico nel mondo anglosassone, dove è ormai entrato pienamente a far parte della cultura e dell’educazione formale” [...] così che “la terminologia che ne descrive la struttura e l’organizzazione è spesso intrisa di anglicismi, divenuti ormai termini tecnici tipici di questa metodologia”⁴

Oggi il Debate non è solo dibattito o dialogo: è un dibattito regolamentato e le regole sono le caratteristiche che lo rendono così efficace in ambito didattico, *conditio sine qua non* della sua efficacia e del suo successo formativo. Alcuni momenti ed alcune figure di questo regolamento sono in lingua anglosassone, a partire dal nome stesso, ed assumono in tal modo un significato pregnante ed esclusivo che fa riferimento alla dinamica del gioco, superando la semplice traduzione. Si tratta, inoltre, di una terminologia tecnica che deve essere vista nei termini di una apertura alle possibilità di condivisione internazionale che apre il Debate ai nostri giorni, attraverso campionati che vedono partecipare studenti appartenenti a molte nazionalità disseminate nei diversi continenti, ma soprattutto si tratta di una terminologia che non intacca i valori fondamentali del Debate, né influenza la sua etica.

⁴ Linee guida per l’implementazione dell’idea Debate (Argomentare e dibattere), INDIRE, Firenze, 2019, p.8

4 - Conclusioni

In conclusione, il Debate, nobile strumento di confronto e argomentazione, si erge come una figura preminente nel panorama delle metodologie didattiche innovative. Esso si distingue per la sua capacità di stimolare e incantare gli animi dei giovani studenti delle scuole secondarie di secondo grado, trasformando le aule in un palcoscenico di idee e dibattiti.

Attraverso il Debate, gli studenti sono chiamati a cimentarsi in arditi confronti verbali, in cui argomentazioni ponderate, ragionamenti profondi, prove solide e collegamenti logici si intrecciano in un raffinato intarsio di abilità comunicative. Il Debate, infatti, offre, come detto, una piattaforma fertile per la coltivazione delle cosiddette "soft skills" o competenze trasversali, che sono preziose per il successo nella vita e nell'apprendimento.

Il Debate incarna, dunque, una palestra di eloquenza e retorica, che sfida gli studenti a esprimersi in maniera eloquente e convincente.

Attraverso questa pratica, gli studenti imparano a discernere tra argomenti validi e fallaci, ad esplorare diverse prospettive e ad adottare un approccio critico nei confronti delle questioni dibattute. Il Debate, quindi, diventa un laboratorio in cui si coltiva il pensiero analitico e il discernimento intellettuale.

Bibliografia

Cattani Adelino, De Conti Manuele (2012). *Didattica, dibattito, fallacie*, Napoli, Loffredo Editore

Cattani Adelino (2012). *Dibattito. Doveri e diritti, regole e mosse*, Napoli: Loffredo Editore

Cattani Adelino (2011). *Argomentare le proprie ragioni. Organizzare, condurre e valutare un dibattito*, Napoli: Loffredo Editore

De Conti Manuele (2015) *Dibattito regolamentato*, Napoli: Guida editori

Manuele De Conti – Matteo Giangrande (2018) *Debate. Pratica, Teoria e Pedagogia*, Londra: Editore Pearson

Christopher Sanchez(2018). *Il Debate nelle scuole*, Londra:Editore Pearson

AA. VV, (2021) *L'analisi della mozione*, Londra: Editore Pearson

M. De Conti, J. Zompetti (2020) *L'etica del Debate*, Londra: Editore Pearson

Matteo Giangrande (2020). *Le regole del Debate*, Londra: Editore Pearson

Alessandra Zoffoli (2012). *Debate. Manuale pratico per l'uso in classe*, Bologna: Zanichelli.

AA.VV (2019). *Linee guida per l'implementazione dell'idea Debate (Argomentare e dibattere)*, INDIRE, Firenze.

AA.VV., *Manifesto delle Avanguardie educative*; Genova, 6 novembre-2014–

<https://innovazione.indire.it/avanguardieeducative/il-manifesto>

La proposta didattica dell'approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede (parte seconda)

Luca Dragone * Antonella Palma **

*Università di Roma Tor Vergata; luca.dragone71@gmail.com

** Sapienza Università di Roma; antonella.palma@gmail.com



Sunto: *Nello studio dei problemi fisici vengono spesso trascurati gli aspetti squisitamente geometrici che si celano nella natura dei fenomeni. L'obiettivo del nostro intervento formativo è il recupero di questi aspetti legati alla sensibilità geometrica tanto cara ai matematici della Grecia ellenistica. Si considera il problema del galleggiamento presente nel Libro II Sui Galleggianti di Archimede. Dalla modellizzazione di uno scafo come paraboloide di rotazione, in base alla densità relativa del materiale di cui è costituito lo scafo, all'altezza e al parametro caratteristico del paraboloide, si ottengono le condizioni di stabilità e si giunge ad un risultato notevole di biforcazione. La sperimentazione si realizza in forma laboratoriale attraverso l'uso delle Classi GeoGebra.*

Parole Chiave: *Archimede, Galleggiamento, GeoGebra, Storia della matematica*

Abstract: *In the study of physical problems the purely geometrical aspects that are hidden in the nature of the phenomena are often neglected. The aim of our training intervention is the recovery of these aspects linked to the geometric sensibility so dear to the mathematicians of Hellenistic Greece. We consider the problem of buoyancy present in Book II of Archimedes' on Floating Bodies. Starting from the modeling of a hull as a paraboloid of rotation, on the basis of the relative density of the material of which the hull is made, the height and the characteristic parameter of the paraboloid, we obtain the conditions of stability and reach a remarkable result of bifurcation. The experimentation takes place in laboratory form through the use of GeoGebra Classes.*

Keywords: *Archimedes, Floatation, GeoGebra, History of mathematics.*

Premessa alla seconda parte dell’articolo

Lo studio del Libro II *Sui Galleggianti* di Archimede e la sua rielaborazione in forma di percorso didattico vengono proposti in questo articolo suddiviso in due parti.

Nella prima, presentata nel precedente numero della rivista, è stato fornito l’inquadramento storico necessario a ricostruire il contesto culturale dell’età ellenistica nel quale sono nate e si sono sviluppate le conoscenze matematiche essenziali per la comprensione del fenomeno fisico del galleggiamento. Dopo aver delineato il quadro teorico, aver fornito le indicazioni metodologiche e le motivazioni della scelta di proporre un argomento così complesso, è stato descritto l’inizio del percorso didattico relativo alle coniche, con particolare riferimento alla definizione e alle prime proprietà della parabola nel contesto della geometria ellenistica.

In questa seconda parte vengono affrontate altre proprietà della parabola, si completa l’apparato teorico per costruire un

modello tridimensionale di scafo come paraboloide di rotazione e si studiano le condizioni di stabilità di questo corpo immerso in un liquido.

4.5 – Tangente a una parabola in un punto

Né Archimede né Apollonio definiscono in modo esplicito cosa è una tangente ad una parabola, anche se sembra chiaro che intendano una retta che ha un solo punto in comune con essa e non la tagli. Archimede conosce e usa il seguente teorema (Russo, 2019, p. 77):

Se sull'asse, dalla parte opposta rispetto al vertice V , a quella sulla quale è Q , si considera il punto A , tale che $AV = VQ$, allora la retta AP è tangente alla parabola.

Quindi se $AV = VQ \Rightarrow AP$ è tangente alla parabola.

Seguendo Apollonio la dimostrazione è compiuta se è verificata la disuguaglianza $P''Q'^2 > P'Q'^2$, dove P' è un punto della parabola diverso da P , Q' è la sua proiezione perpendicolare sull'asse e P'' è l'intersezione della retta $P'Q'$ con AP .

Inoltre $P''Q' > P'Q' \Rightarrow P''Q'^2 > P'Q'^2$.

La dimostrazione segue il procedimento usato da Apollonio ed è proposta agli studenti per abituarli ad una procedura dimostrativa rigorosa e comunque elementare (che non significa facile) che utilizza solo le informazioni appena acquisite e il teorema di Talete.

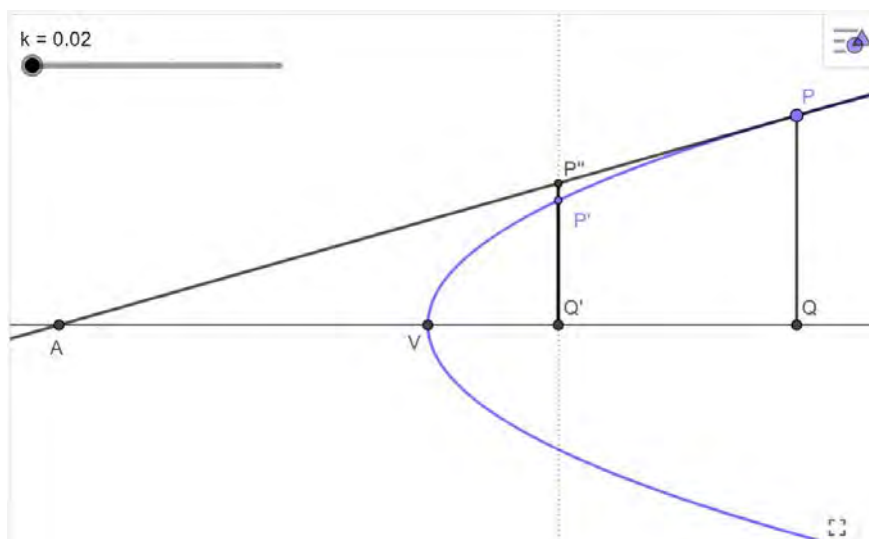


Fig. 7 - La tangente alla parabola

I triangoli $AP''Q'$ e APQ sono simili, quindi:

$$P''Q' : AQ' = PQ : AQ \Rightarrow P''Q' = AQ' \cdot PQ : AQ$$

Inoltre, per la proprietà caratteristica della parabola

$$\frac{PQ^2}{VQ} = \text{costante} \Rightarrow \frac{PQ^2}{VQ} = \frac{P'Q'^2}{VQ'} \Rightarrow P'Q'^2 = PQ^2 \cdot \frac{VQ'}{VQ}$$

Poiché si vuole dimostrare che $P''Q'^2 > P'Q'^2$, elevando al quadrato la relazione dove compare $P''Q'$ e imponendo la disuguaglianza si ottiene :

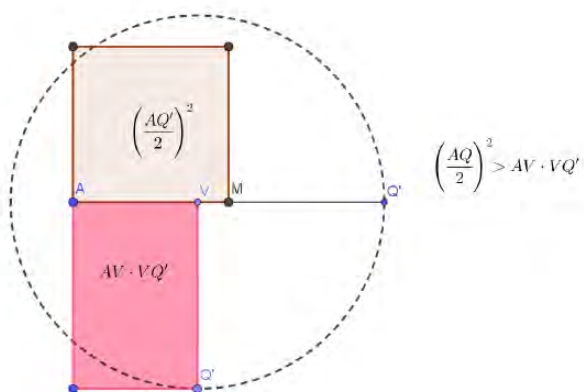
$$P''Q'^2 = AQ'^2 \cdot \frac{PQ^2}{AQ^2} > P'Q'^2 = PQ^2 \cdot \frac{VQ'}{VQ}$$

Dividendo i due termini della disequazione per PQ^2 e ricordando che per ipotesi $AV=QV \Rightarrow AQ=2VQ$ si ottiene

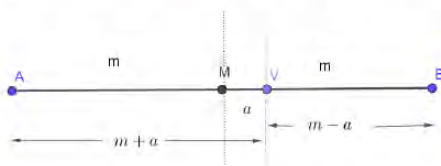
$$\frac{AQ'^2}{(2 \cdot VQ)^2} > \frac{VQ'}{VQ}$$

$$\left(\frac{AQ'}{2}\right)^2 > VQ' \cdot AV$$

È questa una disuguaglianza nota, ossia il prodotto tra le parti $(AV \cdot VQ')$ del segmento AQ' è massimo se il punto V divide il segmento AQ' a metà; in altre parole, tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello con area massima è il quadrato.



In linguaggio moderno, se il segmento è lungo $2m$ e il punto che divide il segmento dista dal punto medio M del segmento dato a , è chiaro che:



$$(m \cdot m)^2 = m^2 > (m + a) \cdot (m - a) = m^2 - a^2$$

Fig. 8 - La disuguaglianza che di tutti i rettangoli isoperimetrici il quadrato ha area massima

Questa dimostrazione è stata proposta agli studenti attraverso una Classe Geogebra, trovando un equilibrio tra indicazioni precise, suggerimenti per reperire informazioni precedentemente acquisite e autonomia.

Per la verifica dell'ultima disuguaglianza nella classe è stata proposta una figura dinamica.

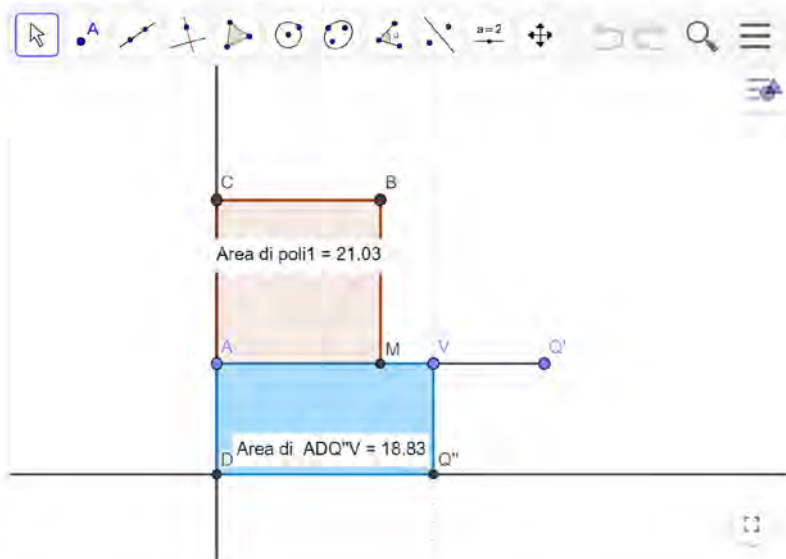
Osserva il disegno nella finestra seguente.

Sia dato il segmento AQ' diviso in due parti dal punto V .

Il prodotto tra AV e VQ' è massimo se il punto V divide il segmento AQ' a metà (quindi se V è il punto medio M).

Questa è una disuguaglianza nota, infatti tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello con area massima è il quadrato.

Esercizio 14



Quindi poiché $\left(\frac{AQ'}{2}\right)^2 > AV \cdot VQ'$ è sempre vera, allora anche $(P'Q')^2 > (P'Q)^2$ è sempre vera

e questo è quello che bisognava dimostrare per affermare che

se $AV = VQ \implies AP$ è la tangente alla parabola in P.

Fig. 9 - Stralcio della Classe GeoGebra per osservare che di tutti i rettangoli isoperimetrici il quadrato ha area massima

4.6 – La sottonormale di una parabola

La sottonormale di una parabola è definita come il segmento che ha per estremi il punto Q sopra specificato e il punto R, intersezione tra l'ortogonale alla tangente nel punto P e l'asse della parabola. La sottonormale QR è costante, ossia non dipende dal punto P ed è una caratteristica geometrica della parabola.

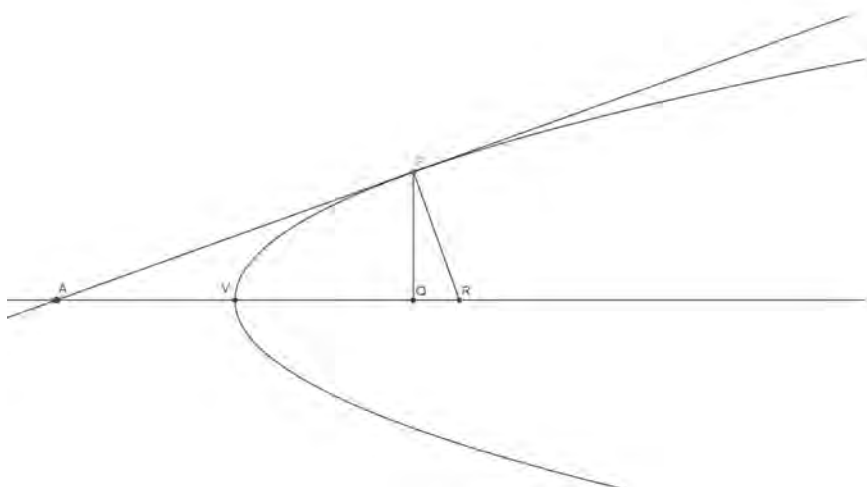


Fig. 9 – La sottonormale QR della parabola

Nella Classe GeoGebra, gli studenti costruiscono la sottonormale QR ed esplorano la figura muovendo il punto P sulla parabola. In tal modo verificano, anche con l'uso degli strumenti del software, la costanza della lunghezza del segmento QR. Inoltre osservano che, modificando la forma della parabola, la sottonormale varia.

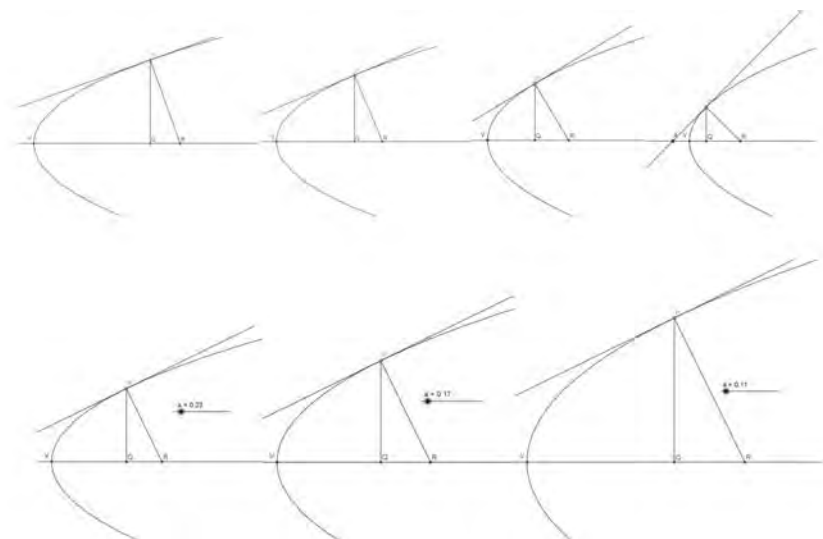


Fig. 10 – La sottonormale: costanza al variare di P e variazione per diversi valori di k.

A seguito dell’osservazione è stata richiesta agli studenti la dimostrazione della costanza della sottonormale da svolgere in modo autonomo dando i seguenti suggerimenti:

-nel triangolo rettangolo APR retto in P, per il secondo teorema di Euclide, il segmento PQ è medio proporzionale a AQ e RQ;

-è stato dimostrato che $AQ = 2 \cdot AV = 2 \cdot VQ$;

-si consideri la proprietà caratteristica della parabola.

Questa attività vuole essere il completamento del rigore dimostrativo dell’esercizio relativo alla tangente, che è stato svolto con un percorso guidato, e che ora si lascia all’autonomia di ogni singolo studente.

Dalla dimostrazione si ricava anche che la caratteristica della parabola è il doppio della sottonormale QR.

Il segmento QR viene anche chiamato parametro p della parabola.

$$\frac{PQ^2}{VQ} = 2p$$

Si invitano gli studenti a riflettere sul nome “parametro” della parabola e ad individuare la relazione tra p e il coefficiente del termine di secondo grado della parabola scritta nella notazione moderna. Infatti se consideriamo l'equazione $y=ax^2$, dove $QV=y$ e $PQ=x$, si ottiene che

$$\frac{PQ^2}{VQ} = 2p \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2p} x^2$$

$$a = \frac{1}{2p}$$

4.7 - Segmenti retti e obliqui di parabola e di paraboloide di rotazione

Si definiscono i segmenti di parabola retti e obliqui in concomitanza alle indicazioni per la loro costruzione nella Classe GeoGebra. In tal modo la definizione è simultaneamente anche un costrutto da manipolare. Le indicazioni per rendere il segmento parabolico modificabile tramite slider e colorato richiedono attenzione e uso di comandi GeoGebra inusuali rispetto a quelli base. Questa costruzione, che realizza una figura complessa, vuole consolidare la conoscenza della forma e delle caratteristiche di un segmento di parabola, passando così dalla costruzione alla

interpretazione come oggetto (Sfard, 1992), in modo diverso rispetto al passaggio attraverso la sola definizione.

DEFINIZIONE di SEGMENTO PARABOLICO

Dati in un piano una parabola y e una retta r che interseca y in due punti distinti A e B , la parte finita di piano delimitata dall'arco AB di y e dal segmento AB di r è detta **segmento parabolico**.

Disegna sul piano il segmento parabolico seguendo le istruzioni:

- Costruisci uno slider (seleziona la tendina nel decimo pulsante) e chiamalo a (variazione tra 0 e 2 con incremento 0,01)
 - Costruisci la parabola f di equazione $y = a \cdot x^2$ usando la barra di inserimento e chiamala f .
 - Costruisci uno slider e chiamalo m (variazione tra 0 e 5 con incremento 0,01)
 - Costruisci uno slider e chiamalo q (variazione tra -1 e 10 con incremento 0,01)
 - Costruisci la retta $g = m \cdot x + q$ usando la barra di inserimento e chiamala r .
 - Costruisci con lo strumento *Intersezione* i punti di intersezione tra la parabola e la retta e chiama A il punto che ha ascissa minore e B quello con ascissa maggiore. Il segmento AB si chiama *base del segmento parabolico*.
 - Evidenzia il **segmento parabolico** scrivendo nella barra di inserimento $\text{IntegraleTra}(f, r, x(A), x(B))$ (nascondi l'etichetta dell'integrale e coloralo come ti garba).
- Variando lo slider a modifichi la forma della parabola, muovendo m e q modifichi la base del segmento parabolico. Se $m = 0$ ottieni un **segmento parabolico retto**, altrimenti il segmento di parabola si chiama **obliquo**.

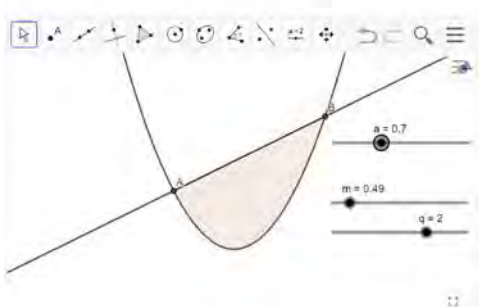


Fig. 11 – Esempio di costruzione di un segmento parabolico nella Classe GeoGebra

Viene successivamente presentata una figura modificabile di un segmento di paraboloide di rotazione 3D esplorabile da parte degli studenti in modo analogo a quello della figura 2D da loro costruita. Si pone particolare attenzione all’osservazione della forma della base del segmento di paraboloide grazie alla possibilità di rilevare l’intersezione tra due superfici offerta da Geogebra 3D. Si ha un cerchio come base del segmento di paraboloide retto e una ellisse di eccentricità variabile come base di quello obliquo.

Anche in questo caso la definizione di segmento di paraboloide di rotazione retto o obliquo è costruita tramite

immaginazione, materiale concreto e possibilità di manipolare una figura con Geogebra 3D.

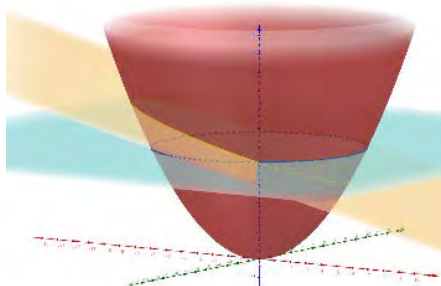


Fig. 12 – Segmento di paraboloide di rotazione geogebra3D

4.8 – Vertice, altezza e asse di un segmento parabolico ed estensione al segmento di paraboloide

Il vertice di un segmento parabolico, che è il punto sull'arco di parabola che ha massima distanza dalla base del segmento parabolico, non deve essere confuso col vertice della parabola. I due punti coincidono solo nel caso del segmento retto. Tale definizione non è immediatamente intuitiva e non è di facile costruzione. Le proprietà di tale punto vengono scoperte dai ragazzi nella Classe GeoGebra attraverso un'attività progettata con un'immagine dinamica nella quale la misura del segmento PW deve essere resa massima.

Nella finestra GeoGebra si ha un segmento parabolico di cui è possibile variare la forma. V è il vertice della parabola e P è un punto qualsiasi sull'arco parabolico. È stata disegnata sia la parallela alla base sia la tangente nel punto P. Il segmento

PW misura la distanza del punto P dalla base AB del segmento parabolico. Gli studenti esplorano la figura e trovano quando il punto P corrisponde al vertice del segmento parabolico, ossia al punto di massima distanza dalla base, osservando che ciò accade quando la tangente e la retta parallela alla base coincidono.

Nella figura di seguito hai un segmento parabolico di cui puoi variare le dimensioni con gli slider;
 Il punto V è il vertice della parabola, mentre P è un punto sulla parabola ed è stata disegnata
 in rosso la tangente alla parabola nel punto P, e
 in giallo la parallela al segmento AB (base del segmento parabolico) passante per P.
 Il segmento viola misura la distanza del punto P dalla base AB del segmento parabolico.
 Esplora la figura e trova quando il punto P corrisponde al punto T vertice del segmento parabolico.
 Fai le tue considerazioni.

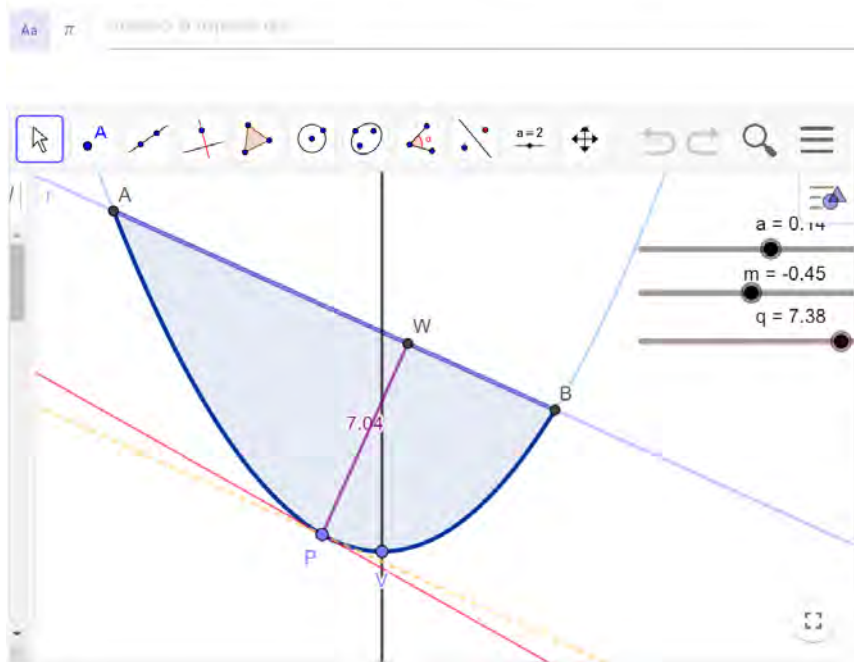


Fig. 13 – Ricerca del vertice del segmento parabolico nella Classe GeoGebra

L'invito a fare considerazioni consente ai ragazzi di trovare le condizioni per cui un punto è vertice del segmento parabolico. Importante è il momento di verbalizzazione della scoperta, che avviene mediante la risposta ad una domanda aperta da noi proposta nella Classe GeoGebra. Infatti, l'apprendimento si basa sul presupposto che il pensiero può essere concettualizzato come comunicazione con se stessi (commognition), e infine il confronto e la discussione plenaria affina la capacità di comunicare correttamente contenuti matematici, obiettivo didattico trasversale presente in ogni sperimentazione.

Data anche la definizione di vertice di un segmento di paraboloide di rotazione, si passa alle definizioni di altezza e asse di un segmento parabolico. L'altezza è la distanza tra il vertice e la base, mentre l'asse è il segmento parallelo all'asse della parabola che congiunge il vertice alla base. Attraverso opportune finestre GeoGebra, strutturate in modo da poter modificare la forma del segmento parabolico avendo sempre indicato il vertice, gli studenti costruiscono altezza e asse, esplorano le diverse configurazioni e annotano differenze e situazioni particolari, come ad esempio quella del segmento parabolico retto.

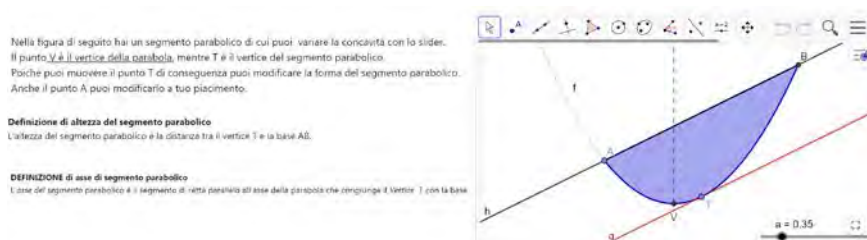


Fig. 14 – Altezza e asse del segmento parabolico nella Classe GeoGebra

Successivamente i ragazzi sono invitati a immaginare altezza e asse di un segmento di paraboloide di rotazione nella figura 3D.

4.9 – Baricentro

Il concetto di baricentro, το κέντρον του βαρεος, viene usato da Archimede già in *Sull’equilibrio delle figure piane* senza però definirlo. Anche nel trattato *Sui Galleggianti* la definizione è sottintesa, probabilmente si assume noto che il peso di un corpo possa essere pensato applicato al suo baricentro.

Ne *Sui Galleggianti* però viene aggiunto un postulato nuovo, enunciato esplicitamente, ossia che la spinta idrostatica agente su un corpo galleggiante è applicata al baricentro della sua parte immersa.

Archimede determina la posizione del baricentro del segmento di paraboloide pieno: esso si trova sull’asse nel punto che dista dal vertice due terzi della lunghezza dell’asse. Questa informazione non è dimostrata durante l’attività, ma solo enunciata; si rimanda però la sua comprensione al momento in cui i ragazzi avranno strumenti matematici adeguati, quali il calcolo integrale, per ricavarla matematicamente. Allora sarà possibile cogliere anche la differenza tra il paraboloide pieno e vuoto e quindi analizzare con maggiore consapevolezza la scelta di Archimede di usare un segmento di paraboloide pieno.

La posizione del baricentro è fondamentale per capire il galleggiamento e quindi si è dedicato ampio spazio in una Classe GeoGebra al suo posizionamento: prima in un segmento di paraboloide retto con asse verticale, poi in uno

ancora retto ma il cui asse può essere inclinato rispetto al piano orizzontale di un angolo variabile, infine in un segmento di paraboloide obliquo. Le figure proposte sono in 2D, immaginando il paraboloide tagliato da un piano verticale passante per l'asse, e con la possibilità di variare la forma del segmento di paraboloide. Il punto baricentro è stato trovato come intersezione tra l'asse e una circonferenza di centro nel vertice del segmento di paraboloide e raggio pari a $\frac{2}{3}$ dell'asse. L'invito a rispondere ad alcune domande presenti nella Classe GeoGebra ha stimolato gli studenti all'esplorazione delle figure dinamiche.

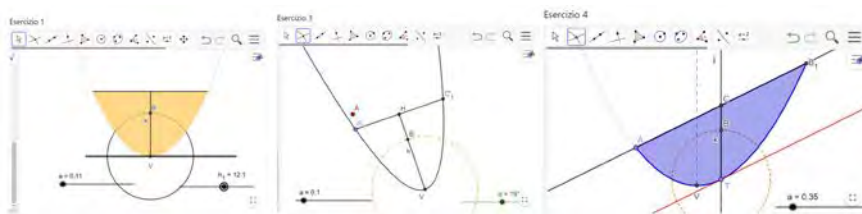


Fig. 15 – Esercizi per trovare il baricentro del segmento di paraboloide nella Classe GeoGebra

La visualizzazione della variazione della posizione del baricentro è importante per il modello del galleggiamento. Il segmento di paraboloide retto simula lo scafo e quindi la posizione del suo baricentro, relativamente alla forma e all'angolo di inclinazione durante il rollio, indica il punto in cui è applicata la forza peso; il segmento di paraboloide obliquo simula la parte immersa nel liquido nel cui baricentro agisce la spinta idrostatica.

4.10 – Segmento di paraboloide poggiato su un piano

Archimede studia la stabilità dell’equilibrio di un corpo galleggiante omogeneo con la forma di un segmento retto di paraboloide di rotazione. Visto che sicuramente tale solido posto verticalmente nell’acqua è in equilibrio per ragioni di simmetria, si cercano le condizioni di equilibrio stabile.

Una proposta di studio di Lucio Russo (Russo, 2019, p. 139) è quella inizialmente di affrontare la determinazione delle condizioni di stabilità di un paraboloide poggiato su un piano orizzontale rigido, valendosi del metodo che Archimede ha usato per lo studio del corpo immerso in acqua.

I risultati fin qui raggiunti nel percorso didattico proposto sono quelli necessari per poter affrontare questo studio e giungere ad un primo risultato notevole per l’equilibrio.

La scelta di non presentare alcuni dettagli matematici, come già detto, è consapevole e condivisa con gli studenti. In questa fase si utilizzano anche informazioni ricavate attraverso le esplorazioni delle figure dinamiche per giungere infine ad una vera e propria simulazione col software di situazioni di stabilità o instabilità per il rollio di un modello di scafo.

Nella classe GeoGebra è presentata inizialmente una figura bidimensionale statica nella quale si evidenziano i punti in cui sono applicate la forza peso e la reazione vincolare.

Il punto V è il vertice del segmento di paraboloide, B il suo baricentro e T il punto in cui il solido è tangente al piano.

Si indica con H il punto di intersezione dell’asse del segmento di paraboloide con la sua base, quindi il segmento VH indica l’altezza. Il punto D è l’intersezione tra l’asse e la perpendicolare al piano orizzontale passante per il punto di tangenza T e rappresenta il punto sull’asse in cui è applicata la

reazione vincolare. Si indica con C l'intersezione tra l'asse e la perpendicolare a tale asse passante per T. Ricordando la definizione di sottonormale, si individua che il segmento CD è il parametro p della parabola, ed è quindi indipendente dal punto di tangenza T.

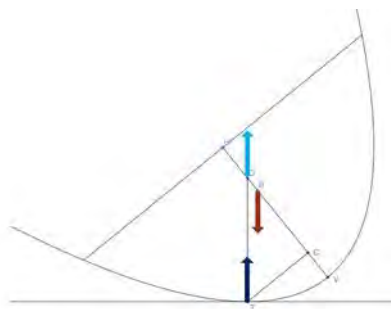


Fig. 16 – Segmento di paraboloide inclinato poggiato su un piano orizzontale rigido

La geometria del segmento di paraboloide, ossia il parametro p , determina la posizione reciproca del punto D e del baricentro B. Il punto D può essere “sopra” oppure “sotto” il baricentro B.

Se il punto D è “sopra” il baricentro B, la coppia di forze tenderà a *raddrizzare* il segmento di paraboloide (ossia far sì che l'asse tenda a divenire perpendicolare al piano d'appoggio); si parlerà in questo caso di equilibrio verticale stabile. Nel caso opposto, ossia se D è “sotto” B, la coppia di forze tenderà a far aumentare l'inclinazione dell'asse; si parlerà in questo caso di equilibrio verticale instabile.

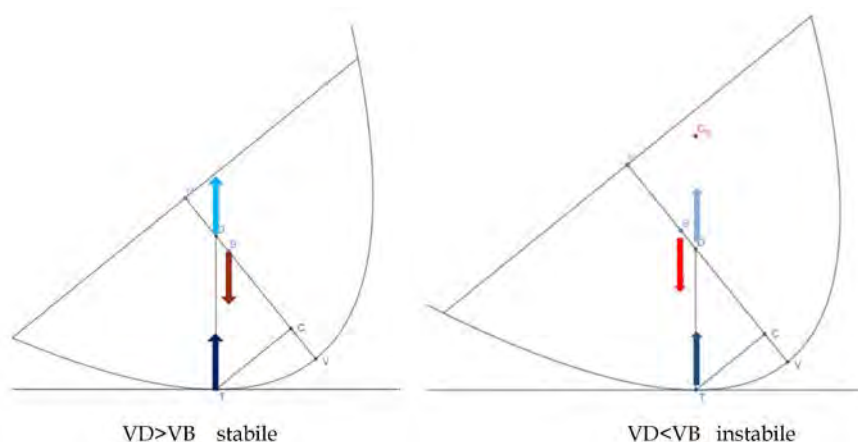


Fig. 17 – Condizioni di stabilità ed instabilità per un paraboloide poggiato

Successivamente nella Classe GeoGebra (fig. 18) è presentata la figura di segmento di paraboloide con tre parametri variabili: la concavità a (che è legata al parametro p essendo $p=1/2a$), l'angolo α di inclinazione dell'asse rispetto al piano orizzontale e l'altezza del segmento di paraboloide.

La figura dinamica consente di osservare le posizioni reciproche dei punti D e B sull'asse al variare di uno o più parametri e trovare così le diverse situazioni di stabilità e instabilità, prima attraverso esplorazioni libere, e poi con lo studio geometrico alla maniera di Archimede.

Si studia quindi la condizione in cui la coppia di forze è *raddrizzante*, ossia quella in cui il punto D è più lontano dal vertice V rispetto a B. Tale situazione è verificata quando vale la disuguaglianza $VD > VB$, che è tanto più vera se $CD > VB$. Il segmento $CD=p$ è il parametro della parabola, e la distanza VB, poiché B è il baricentro, è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'asse, che nel segmento di paraboloide retto coincide con l'altezza, dunque

$VB = \frac{2}{3}h$. Con queste semplici osservazioni geometriche si può scrivere la disuguaglianza $CD > VB$, più stringente di $VD > VB$, come $p > \frac{2}{3}h$. Poiché p e h sono parametri di costruzione del segmento di paraboloide, il loro rapporto è un parametro di forma del segmento stesso, e dunque:

$$\frac{h}{p} < \frac{3}{2}$$

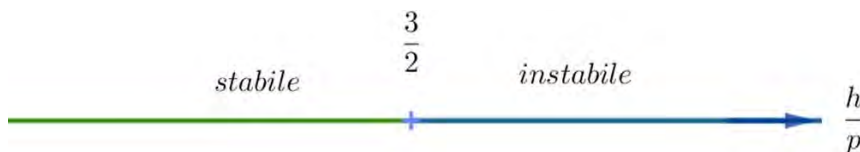
Tale disuguaglianza è condizione sufficiente ma non necessaria di stabilità e non dipende dall'angolo di inclinazione α .

Si studia poi la condizione in cui la coppia di forze aumenta l'inclinazione, cioè quando il punto D è più vicino al vertice V rispetto a B.

In questo caso si considera la disuguaglianza $VD < VB$ dove $VD = CV + CD$. Per piccole inclinazioni dell'asse rispetto al piano orizzontale (angolo α), la grandezza CV è una quantità trascurabile, e quindi si può scrivere la disuguaglianza $CD < VB$. Poiché $CD = p$ è il parametro di forma, si ricava:

$$\frac{h}{p} > \frac{3}{2}$$

che è condizione necessaria ma non sufficiente di instabilità.

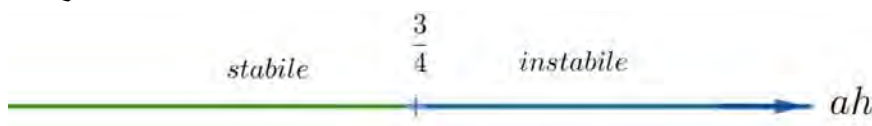


Inoltre, ricordando la relazione tra p e il valore a dell’equazione della parabola, si trovano le seguenti condizioni di stabilità e instabilità:

$$\frac{h}{p} = 2ah < \frac{3}{2} \Rightarrow ah < \frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} \text{Condizione sufficiente ma} \\ \text{non necessaria di stabilità} \end{array}$$

$$\frac{h}{p} = 2ah > \frac{3}{2} \Rightarrow ah > \frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} \text{Condizione necessaria ma} \\ \text{non sufficiente di instabilità} \end{array}$$

Quindi



Quest’ultima scrittura è comoda per disegnare con GeoGebra la sezione del segmento di paraboloidi e confrontare il valore ah con $\frac{3}{4}$. Nella Classe Geogebra i ragazzi hanno la possibilità di esplorare dapprima la figura dinamica (in cui è possibile variare la forma, l’altezza e l’inclinazione del segmento) e osservare così le posizioni reciproche di B e D.

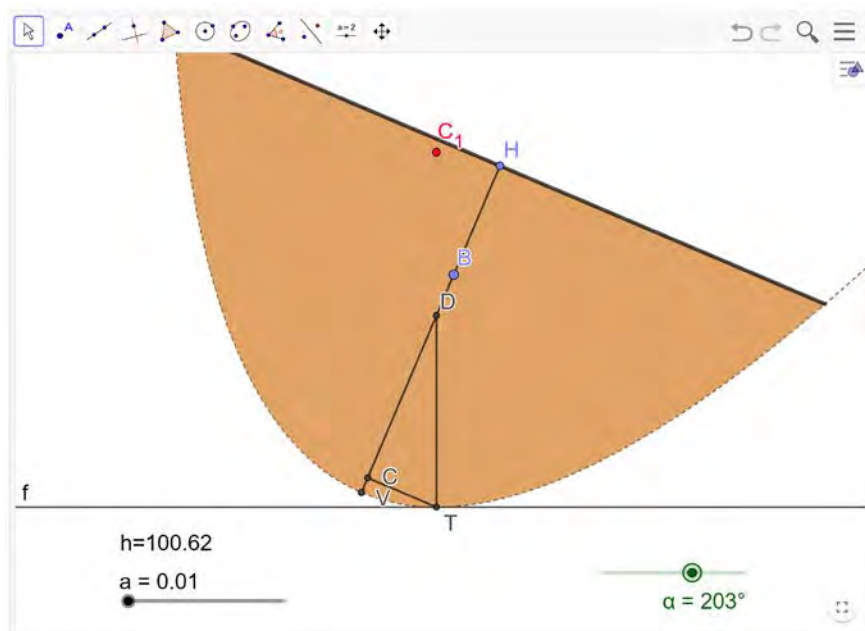


Fig. 18 - Segmento di paraboloidi poggiato su un piano orizzontale nella Classe GeoGebra

Successivamente, attraverso il foglio di calcolo Excel, si riportano i valori a e h del segmento di paraboloide, si calcola il prodotto e lo si confronta con il valore 0.75.

Se il prodotto $ah < 0.75$ si hanno condizioni di stabilità indipendentemente dall'angolo di inclinazione α ; invece, per valori di $ah > 0.75$, le condizioni di stabilità o instabilità possono dipendere dall'angolo di inclinazione α , determinando un fenomeno di biforcazione.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	h	a*h	0.75	stabilità	per angolo	stabilità	per angolo		
2	0.01	72.57	0.73	<0.75	sempre					
3	0.01	86.15	0.86	>0.75	instabile	<28°	stabile	>28°		
4	?	?	?							
5	?	?	?							
6	?	?	?							
7	?	?	?							

Fig. 19 – Tabella Excel nella Classe GeoGebra

Si passa quindi alla situazione in cui il segmento di paraboloide è immerso in un liquido.

4.11 – Segmento di paraboloide immerso in un liquido

Prima di immergere il segmento di paraboloide in acqua c’è bisogno di un risultato che Archimede enuncia e dimostra nella proposizione 23 di *Conoidi e Sferoidi*:

Due segmenti di uno stesso paraboloide di rotazione, uno retto e l’altro obliquo, sono equivalenti se hanno assi uguali.

Questo ci dice dal punto di vista geometrico che il volume del segmento di paraboloide dipende esclusivamente dalla lunghezza del suo asse, e ciò è importante dal punto di vista fisico poiché il volume immerso è una costante per una stessa imbarcazione, indipendentemente dall’inclinazione dell’asse dello scafo.

La dimostrazione, seppur richieda solo considerazioni geometriche elementari, non è semplice e pertanto non viene

proposta ai ragazzi, ma solo commentata nel suo notevole risultato fisico, così come il corollario che ne segue:

Il rapporto tra i volumi di due segmenti di paraboloide di rotazione è uguale al rapporto tra i quadrati dei loro assi.

Nella figura il punto B è il baricentro del segmento di paraboloide che simula lo scafo e $h=VH$ la sua altezza. Il punto M, dove è applicata la spinta idrostatica, è il baricentro del segmento di paraboloide immerso, con $TM=\frac{2}{3}ST$, dove ST è l'asse e dipende esclusivamente dalla parte immersa dello scafo.

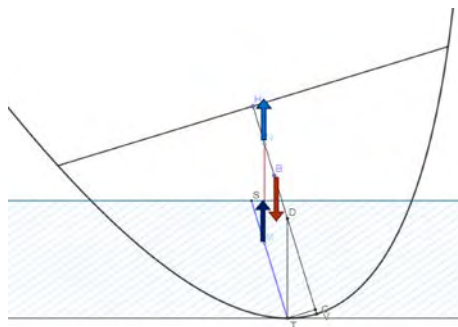


Fig. 19 – Segmento di paraboloide immerso in un liquido

Anche l'intensità della spinta idrostatica dipende solo dal volume immerso che non è condizionato dall'inclinazione dell'asse. L'effetto della spinta idrostatica sull'asse del paraboloide è sul punto N che, se è esterno al segmento BV (cioè se è «sopra» B), fa sì che la coppia di forze cui è sottoposto il paraboloide sia *raddrizzante*, viceversa se N è interno al segmento BV (cioè se è «al di sotto» di B) la coppia di forze è *inclinante*.

Come per quello poggiato, nella Classe GeoGebra è presentata la figura di un segmento di paraboloide immerso con tre parametri variabili: la concavità a , l'angolo α di inclinazione e l'altezza h del segmento di paraboloide, ai quali si aggiunge il parametro b che indica la profondità di pescaggio, anch'esso controllabile con uno slider. Il pescaggio simula la densità relativa tra lo scafo e il liquido in cui esso è immerso.

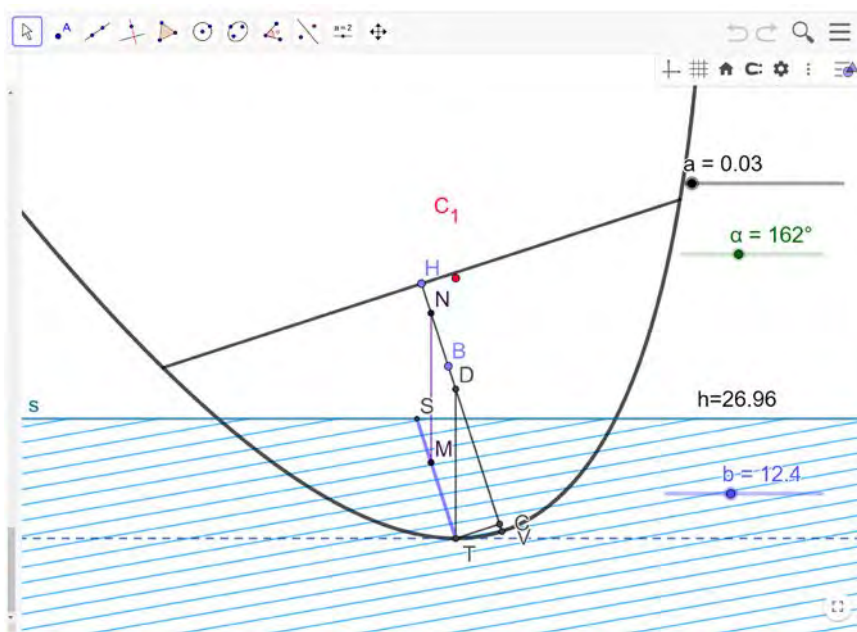


Fig. 20 - Segmento di paraboloide immerso in un liquido nella Classe GeoGebra

La figura dinamica consente di osservare le posizioni reciproche dei punti N e B sull'asse al variare di uno o più parametri e trovare così le diverse situazioni di stabilità e

instabilità, prima attraverso esplorazioni libere, e poi con lo studio geometrico proposto da Archimede.

Si studia quindi la situazione di equilibrio. Affinché N sia al di sopra di B si deve avere la condizione $VN > VB$, verificata dalla disuguaglianza più stringente $CN > VB$. Ma $CN = CD + DN$, e poiché DNMT è un parallelogramma per costruzione, allora $CN = p + TM$. Inoltre $VB = \frac{2}{3}h$ e quindi si ottiene: $p + TM > \frac{2}{3}h$.

Sia p sia h sono parametri di costruzione del segmento di paraboloide che simula lo scafo, mentre TM è la distanza tra il vertice e il baricentro del segmento di paraboloide che simula la parte di scafo immersa.

La precedente disuguaglianza è sicuramente soddisfatta se $p > \frac{2}{3}h$, condizione già trovata per il paraboloide poggiato, e come in quella situazione è condizione solo sufficiente di stabilità. L'immersione del segmento di paraboloide aumenta ancor più il margine della possibile stabilità anche quando $p < \frac{2}{3}h$; infatti se TM è abbastanza grande da superare la differenza $\frac{2}{3}h - p$ la stabilità è ancora garantita.

Il segmento $TM = \frac{2}{3}ST$ dipende esclusivamente dalla parte immersa dello scafo, quindi è legata al rapporto tra il peso del corpo e il peso di un uguale volume di liquido: quello che in termini moderni si indica con "peso specifico relativo".

Si definisce il peso specifico relativo d il rapporto tra la densità dello scafo e quella del liquido:

$$d = \frac{\rho_{\text{scafo}}}{\rho_{\text{liquido}}}$$

Poiché all'equilibrio la spinta idrostatica eguaglia il peso dello scafo, cioè $\rho_{\text{acqua}} \cdot V_{\text{immerso}} = \rho_{\text{scafo}} \cdot V_{\text{scafo}}$, e inoltre, per il corollario precedentemente citato, il rapporto tra i volumi di

due segmenti di paraboloide di rotazione è uguale al rapporto tra i quadrati dei loro assi, il peso specifico relativo si può scrivere come:

$$d = \frac{V_{imm}}{V_{scafo}} = \frac{ST^2}{h^2}$$

e poiché $TM = \frac{2}{3}ST$ e $VB = \frac{2}{3}h$ vale anche che

$$d = \frac{TM^2}{VB^2}$$

Tale risultato, che è il quadrato di un rapporto di segmenti, insieme con la disuguaglianza ottenuta per la coppia di forze raddrizzante, produce:

$$p + TM > \frac{2}{3}h \Rightarrow TM > \frac{2}{3}h - p \Rightarrow TM^2 > \left(\frac{2}{3}h - p\right)^2$$

che consente di scrivere una notevole relazione per la stabilità del segmento di paraboloide immerso dipendente solo dalla forma dello scafo (p e h) e dal materiale dell'imbarcazione considerata come un solido pieno (d):

$$d = \left(\frac{TM}{VB}\right)^2 > \left(\frac{\frac{2}{3}h - p}{\frac{2}{3}h}\right)^2 = \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2$$

E ancora:

$$d > \left(1 - \frac{3}{4ah}\right)^2$$

La disequazione sembra favorire l'uso di materiali con peso specifico maggiore, concetto apparentemente controintuitivo

ma che in realtà si coniuga perfettamente con il modello teorico e con le sue applicazioni pratiche.

Quindi le condizioni di stabilità del modello dipendono da un delicato e ponderato equilibrio delle diverse componenti.

4.12 - L'importanza del contesto

Archimede propone nel trattato calcoli estremamente rigorosi e disuguaglianze in condizioni di massima sicurezza, come insegna l'ingegneria meccanica.

L'utilizzo delle disuguaglianze nelle dimostrazioni geometriche e la loro interpretazione fisica, nonché il tenere costantemente presente l'obiettivo pratico che si vuole raggiungere, consente agli studenti di approcciare la matematica con il metodo proprio del genio siracusano. Infatti, nonostante la rigerosità della teoria, il varo della nave viene fatto prima del suo completamento, questo a rimarcare il connubio tra rigore teorico e senso pratico. Egli è *Ἀρχιμήδης ὁ μηχανικός*.

Solitamente gli studenti che leggono un testo matematico non sono abituati, o meglio educati, a tenere in considerazione il contesto in cui è stato scritto. Si ritiene generalmente che la matematica debba essere comprensibile al di fuori della circostanza che la determina: il periodo in cui un testo è stato scritto, il paese o l'autore sembrano essere irrilevanti per chi si accosta a un teorema. Invece gli studenti dovrebbero essere guidati a porre domande significative sul contesto perché la fonte possa essere interpretata adeguatamente. Infatti, spesso fa differenza se un'opera è stata scritta da un autore di mentalità teorica o pratica, ed è possibile rintracciare nel testo

indicazioni di questa prevalente abitudine mentale (Jahnke, 2000, p. 313).

5 – Primi risultati della sperimentazione e scenari futuri

La sperimentazione è stata realizzata in una classe di terzo liceo scientifico di Liceo Matematico. Le attività sono state svolte solo parzialmente e si concluderanno all’inizio del prossimo anno scolastico.

I dati sperimentali a nostra disposizione, seppur ancora in via di elaborazione, si rivelano promettenti.

Una prima lettura delle risposte dei ragazzi nelle Classi GeoGebra rileva che le attività proposte sono state accolte con interesse ed entusiasmo. Questo clima di coinvolgimento ha stimolato gli studenti a esprimere opinioni personali e a trovare procedure dimostrative talvolta originali e alternative a quelle suggerite.

Le esplorazioni delle figure, inoltre, hanno suscitato stupore e l’inaspettato ha fatto sì che i ragazzi si ponessero domande, cosa che ha consentito un confronto costruttivo sia tra pari sia con il docente/ricercatore.

L’elaborazione completa dei dati al termine della sperimentazione sarà oggetto di lavori futuri.

Siamo convinti della valenza didattica di questo approccio storico del Libro II *Sui Galleggianti*, esso consente di affrontare uno studio complesso con l’uso del metodo geometrico di Archimede potenziato dallo strumento GeoGebra. Riteniamo che questo percorso possa essere di aiuto agli studenti per guardare alle dimostrazioni geometriche come necessità per

giungere a conclusioni e risultati fisici notevoli. Inoltre, crediamo che l'uso delle disuguaglianze algebriche applicate al mondo reale possa rendere i ragazzi più consapevoli della complessità degli eventi, complessità ritrovata anche attraverso la scoperta del fenomeno di biforcazione, argomento poco presente nei curricula scolastici. Infine, questo percorso è un esempio che può aiutare i giovani a riflettere sull'importanza dei modelli matematici applicati ai fenomeni fisici.

Bibliografia

Archimede: *Sui corpi galleggianti*, a cura di H.F. Fleck pubblicazione elettronica, 2016.

Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2009). Gestures as semiotic resources in mathematics classroom, *Educ. Studies in Mathematics*, 70(2), pp 97-109.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Capone R., Rogora E., Tortoriello F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento, *Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 2(3), pp. 293-304.

Frajese A. (1974). *Opere di Archimede*. Torino: UTET.

Freudenthal H. (1991). *Revisiting mathematics education – China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Jahnke H.N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. J. Fauvel, J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education, the ICMI study* (pp. 291–328, Chapter 9). Dordrecht: Kluwer Academic.

Jankivist U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, *Educ Stud Math*. Springer Science.

Rorres C. (2004) Completing Book II of Archimedes’s On Floating Bodies. *The Mathematical Intelligencer* (Vol. 26, N.3, pp. 32-42) Disponibile da https://www.cs.drexel.edu/~crrorres/screw/Rorres_MI_2004.pdf

Russo L. (2019). *Archimede*. Roma: Carocci editore

Toeplitz O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, XXXVI, 88–100.

Tzanakis C., Arcavi A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201–240, Chapter 7). *The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Aperitivo in terrazza

*Dibattito sull'insegnamento e la professione
docente: scenari e criticità.
Il ruolo delle associazioni*

Rosa Buonanno*

*Pomigliano; rosa.buonanno@alice.it

Nel pomeriggio di sabato 16 settembre si è tenuto, come previsto da programma, un aperitivo-dibattito sui seguenti temi:

- L'insegnamento e la professione docente oggi: scenari e criticità;
- Il ruolo delle associazioni.

Ha moderato gli interventi la sottoscritta, prof.ssa Rosa Buonanno, delegata dal Comitato Scientifico - insieme ad altri esperti - anche alla revisione degli articoli pubblicati in questo volume e, quindi, al corrente di tutte le tematiche affrontate.

Relativamente alle finalità dell'insegnamento e alla realizzazione di ambienti di apprendimento efficaci e significativi, in grado di rendere gli studenti protagonisti del loro apprendimento e capaci di affrontare le sfide di una società in continua evoluzione, è intervenuto il prof. Matteo

Torre sul tema: “ È meglio una testa ben fatta che una testa ben piena”.

Successivamente il prof. Silvano Rossetto, in rappresentanza del Centro Ricerche Didattiche “ Ugo Morin” di Pieve del Grappa (TV), ha evidenziato l’importanza dell’utilizzo di strumenti, di strategie e di metodologie didattiche in grado di motivare gli allievi all’apprendimento.

Il dibattito si è poi focalizzato sull’impatto delle nuove tecnologie nella didattica, in particolare sul tema proposto dal prof. Giovanni Vincenzi: “In che modo l’intelligenza artificiale può modificare l’insegnamento e la ricerca in matematica?”.

Hanno preso parte alla discussione i proff.ri Paolo Gibilisco, Luigi Tomasi, Antonio Vitiello, Antonio Criscuolo, Serafina Ippolito.

La prof.ssa Antonella Moser è intervenuta invece riguardo alla “Frammentarietà delle lezioni: un ostacolo per una matematica laboratoriale”.

Alla chiusura del dibattito ho ritenuto opportuno portare un sentito ringraziamento all’amministrazione del Comune di Agerola, nelle persone del sindaco dott. Tommaso Naclerio e dell’assessore al Turismo ed alla Pubblica Istruzione dott.ssa Regina Milo, che per il terzo anno consecutivo hanno supportato l’attività, manifestando grande accoglienza per le nostre proposte scientifiche ed estrema disponibilità rispetto a tutte le esigenze di carattere organizzativo.

Indice

PRIMA PARTE

F. G. Della Vecchia G. Vincenzi	7
<i>Editoriale</i>	
Programma del Convegno	11
 Prima sessione: Matematica, Fisica, Chimica, Scienze Naturali e Applicate nella scuola secondaria di II grado	
M. I. Mandrone	19
<i>La Statistica Classica e le Statistiche Quantistiche</i>	
Vittorio De Falco	45
<i>Buchi neri</i>	
L. Dragone A. Palma	77
<i>La proposta didattica dell’approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede (parte prima)</i>	
A. Moser	
<i>Modelli Matematici: uno strumento interdisciplinare trascurato nelle normali prassi didattiche</i>	
Paolo Gibilisco Laura Tomassi	117
<i>La probabilità, ancella e regina dell’analisi matematica</i>	
Matteo Torre	129
<i>Esperimenti di Galileo con Arduino</i>	
Francesco Bevacqua	149
<i>Matematica & AI</i>	

S. Cerasaro	159
<i>Le fractionnes in gradi bus in classe nel terzo millennio</i>	

Seconda sessione: Interventi dedicati al ricordo della prof.ssa Tonia Olivello

T. Olivello A. P. Perillo	181
<i>Tonia Olivello: Una vita per l’insegnamento</i>	

F. Casolaro	187
<i>Tonia Olivello tra Geometria e Didattica</i>	

M. Condelli F. Mancinelli	191
<i>Quante persone in piazza?</i>	

I. Casolaro	199
<i>Una rappresentazione elementare dei concetti di Analisi Matematica nelle applicazioni fisiche</i>	

L. Paladino A. Rotunno	209
<i>Risoluzione dei problemi algebrici con le Trasformazioni Geometriche</i>	

M. Cuomo	231
<i>La geometria e la fisica nello spazio tridimensionale</i>	

SECONDA PARTE

Terza sessione: Matematica, Fisica e Scienze Naturali per la Scuola secondaria di I grado

F. D’Antonio M. Moccaldi <i>La Matematica e le Scienze a fumetti</i>	9
M. D’Errico E. Petruccione <i>Geologia e Geometria</i>	25
G. Angelucci <i>Un’attività interdisciplinare tra geometria e botanica per la Scuola Primaria</i>	45
M. A. Mangiarotti <i>La meraviglia degli alberi monumentali italiani</i>	69
D. Gasparo M. A. Lepellere <i>Embodied Design basato sull’azione per insegnare le proporzioni</i>	81

Quarta sessione: Matematica per la Scuola secondaria di II grado

L. Tomasi <i>I poliedri regolari</i>	111
S. Rossetto <i>Esplorazioni algebriche sui numeri triangolari</i>	131
F. Coppa A. Palma <i>Un laboratorio didattico per il concetto di funzione attraverso l’algebra di Cartesio</i>	149

L. Tomassi	169
<i>I precursori medioevali dei compiti di realtà</i>	
A. Donatiello, A.R. Ferraioli, L. Lombardi	197
V.Cardone, G.Razzino, S.Siani	
<i>Modellizzazione matematica all’aperto con MathCityMap</i>	
M. Torre	215
<i>Il Debate nella didattica della Matematica</i>	
A. Amirante	241
<i>Iperspazio, Frattali, Natura</i>	
G. De Rubertis	263
<i>Il Debate come metodologia didattica innovativa</i>	
L. Dragone A. Palma	285
<i>La proposta didattica dell’approccio geometrico alla fisica dei galleggianti secondo Archimede (parte seconda)</i>	
R.Buonanno	315
Indice	317