

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXVII - Serie IV – volume IV(3)
settembre 2022**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

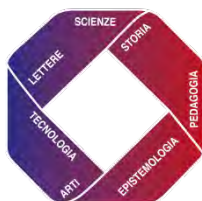
PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXVII - Serie IV - Volume IV (3)
Settembre 2022**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanni Catalani
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze)
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Buonocore Aniello (Napoli)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Fernando Di Gennaro (Teramo)
Franco Eugeni (Roseto d.li Abruzzi)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Lungo (Napoli)
Raffaele Mascella (Teramo)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675
Copyright © 2022 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.
Tutti i diritti riservati.
ISBN 978-88-3293-622-3
Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2022 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Luca Nicotra	7
<i>Vox clamans in deserto</i>	
Giordano Bruno	49
<i>La probabilità è soltanto soggettiva</i>	
Paolo Manca	65
<i>Ancora sulla improbabile “probabilità frequentista”</i>	
Franco Francia	83
<i>Proprietà degli insiemi completi dei IV ordine</i>	
Ferdinando Casolaro, Alessandra Rotunno	141
<i>Un matematico tra politica e storia</i>	
Andrea Lanzillo	163
<i>Una proposta didattica per l’insegnamento della relatività</i>	
AA. VV.	185
<i>La scomparsa di Tonia Olivello</i>	
<i>Profili biografici degli autori</i>	195

Vox clamans in deserto

Il multiconcreto e la probabilità soggettiva di Bruno de Finetti

Luca Nicotra*

** Ingegnere. Presidente dell'A. P. S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di: «Periodico di Matematica», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «ArteScienza», «ArteScienza_magazine»;
luca.nicotra1949@gmail.com.



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.087

Sunto: *Quanto degli insegnamenti dei grandi ingegni realmente lascia un segno duraturo nei «crani limitati dei portatori d'acqua e degli operatori culturali», per dirla con Piergiorgio Odifreddi? E quanto invece, purtroppo, rimane di fatto ignorato o, peggio ancora, stravolto, rischiando di farne delle "vox clamans in deserto"? Due casi eccellenti: l'astratto ridotto al "multiconcreto", affermazione felicissima dell'origine empirica del processo mentale dell'astrazione, e la teoria della probabilità soggettiva. Due fondamentali conquiste del pensiero filosofico-scientifico di un genio italiano: Bruno de Finetti.*

Parole Chiave: *Concreto, astratto, probabilità, Bruno de Finetti.*

Abstract: *How much of the teachings of the great geniuses really leaves a lasting mark on the "limited skulls of water carriers and cultural operators", in the words of Piergiorgio Odifreddi? And how much instead, unfortunately, remains in fact ignored or, worse still, distorted, risking to turn them into "vox clamans in the desert"? Two excellent cases: the abstract reduced to "multiconcrete", a very happy affirmation of the empirical origin of the mental process of abstraction, and the*

theory of subjective probability. Two fundamental achievements of the philosophical-scientific thought of an Italian genius: Bruno de Finetti.

Keywords: *Concreto, astratto, probabilità, Bruno de Finetti.*

1 – “*Vox clamans in deserto*”

Un fenomeno purtroppo molto più diffuso di quanto si pensi è l’oblio della lezione dei grandi ingegni, che rischia seriamente di fare di ciascuno di loro una vuota «*vox clamans in deserto*». Nei loro confronti i «crani limitati dei portatori d’acqua e degli operatori culturali» (per usare una felice espressione di Piergiorgio Odifreddi) si adagiano su un comportamento alquanto ipocrita: innalzano loro monumenti e si “esibiscono” in altisonanti celebrazioni (spesso per trarne lustro personale ...) ma in realtà, nei fatti, ne ignorano l’insegnamento o, ancor peggio, si comportano all’opposto.

Allora il tributo più onesto e sincero alla loro opera non è quello di innalzare retorici monumenti, ma è il riproporne sempre l’insegnamento, che è il loro vero grande monumento, e possibilmente con le stesse loro parole, perché nel “tramandare” si annida spesso il “tradire”: le due parole hanno la stessa radice, come sanno bene i filologi. Ben diceva Federigo Enriques (1938, p. 153):

Pei valori dello spirito, come per quelli materiali dell’economia, sussiste una “legge di degradazione” : non si può goderne pacificamente il possesso ereditario, se non si rinnovano ricreandoli nel proprio sforzo d’intenderli e di superarli.

Di Bruno de Finetti abbiamo il «possesso ereditario» di una immensa sua opera e se crediamo in essa e non vogliamo che essa stessa si “degradi”, dobbiamo “rinnovarla” continuamente nello sforzo onesto di intenderla e (forse) superarla, perché il vero Maestro sa bene che la via da lui aperta non è mai un vicolo chiuso ma una strada di cui non è dato conoscere la fine. Dei tanti «valori» della sua opera, vorrei qui ricordarne in particolare due, forse quelli a lui più cari: la sua critica all’uso “selvaggio” dell’assiomatismo e la sua rifondazione in chiave soggettivista (l’unica ragionevolmente sensata) della probabilità.

2 - Dal concreto all’astratto

Francesco Bacone (1561-1626), Galileo Galilei (1564-1642) e René Descartes (1596-1650) operarono una grande rivoluzione nel campo del pensiero filosofico, con la separazione del campo scientifico da quello teologico e metafisico e la ricerca di un metodo proprio della scienza e della filosofia, dando luogo al passaggio dal pensiero filosofico-scientifico medioevale a quello dell’età moderna.

I primi due si opposero al puro metodo deduttivo di Aristotele avulso dall’esperienza, ma in modi diversi.

Bacone nel *Novum organum scientiarum* inseguiva il sogno di una “vera scienza” basata unicamente sull’uso della “vera induzione”, riponendo quindi nella sola esperienza la fonte per ricavare le leggi della natura e della mente.¹

¹ Francesco Bacone si inserisce quindi nel solco della cosiddetta “scuola empiristica”, basata sull’empirismo “bruto”, che fa affidamento unicamente

Galileo pose le basi del moderno metodo sperimentale fisico-matematico, con la verifica sperimentale delle ipotesi sui fenomeni naturali e l'uso della matematica come linguaggio formale nella codifica delle leggi naturali.² Tuttavia, per Galileo, mentre la conoscenza del mondo fisico poteva e doveva essere verificata unicamente dalle conferme dell'esperienza, la sua struttura razionale matematica si sottraeva a tale verifica, avendo un valore assoluto di verità, paragonabile a quella divina: «...quanto alla verità di che ci danno cognizione le dimo-

sull'esperienza passivamente e acriticamente accettata, senza alcun intervento della mente.

² In realtà, già i chimici-alchimisti musulmani ottennero scoperte importantissime utilizzando molto tempo prima proprio l'esperienza intesa come condizione necessaria ma non sufficiente, per ogni interpretazione della natura, in linea quindi con la visione positiva della scienza tipica della "scuola empirica", differente dalla "scuola empiristica". L'averroismo e la scuola di Chartres, fiorita nei secoli XI e XII sotto l'influenza araba, professavano i principi della scuola empirica, subordinando la conoscenza del mondo ai dati sperimentali però ordinati e interpretati dalla mente. Tuttavia, ancora non si può parlare di un vero e proprio metodo sperimentale, in quanto l'approccio sperimentale della maggior parte degli scienziati islamici alla conoscenza aveva più preoccupazioni utilitaristiche di dominio sulla natura che finalità puramente scientifiche e non aveva quella dichiarata impostazione fisico-matematica che sarà stigmatizzata da Galileo Galilei nel XVII secolo e vigorosamente affermata nel secolo successivo da Isaac Newton. Alhazen (965-1040) (in arabo Hasan Ibn al-Haitham), Abū al-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Biruni (973-1048) e Avicenna (980-1037) (in arabo Abū Alī al-Husayn ibn 'Abd Allāh ibn Sīnā) sono i più grandi scienziati islamici, tutti dell'XI secolo, che fecero sistematico uso, nelle loro ricerche, di questa prima forma del metodo sperimentale (Nicotra, 2015.) Anche Dante Alighieri riconosceva l'importanza del metodo sperimentale: *Da questa istanza può deliberarti/Esperienza, se giammai la provi,/Ch'esser suol fonte ai rivi di vostr'arti.* (*Divina Commedia*. Paradiso canto II, 94-105).

strazioni matematiche, ella è l'istessa che conosce la sapienza divina» (Galilei, 1632, Salviati, Prima Giornata).

Prima ancora di Bacone e Galilei bisognerebbe, però, ricordare Leonardo da Vinci come assertore del metodo induttivo-deduttivo e della necessità di accostare all'esperienza la matematica, divenendo così il più chiaro precursore del metodo scientifico moderno, fondato sulla fusione fra esperimento e matematica (Nicotra, 2015). I richiami all'uso dell'esperienza e della matematica sono numerosi negli sparsi frammenti degli scritti leonardeschi e costituiscono una inequivocabile anticipazione del metodo fisico-matematico che contraddistinguerà la scienza moderna da Galilei in poi. Per Leonardo la Natura è razionale e l'esperienza deriva tutta dalla ragione (ovvero dalle sue leggi), ma per comprendere questa occorre procedere all'inverso, cominciando a investigare l'esperienza per risalire alla ragione (Baldini, 1993, p. 6):

Ma prima farò alcuna esperienza avanti ch'io più oltre proceda, perché mia intenzione è allegare prima l'esperienza e poi colla ragione dimostrare perché tale esperienza è costretta in tal modo ad operare. E questa è la vera regola come li speculatori delli effetti naturali hanno a procedere, e ancora che la natura cominci dalla ragione e termini nella esperienza, a noi bisogna seguitare in contrario, cioè cominciando, come di sopra dissi, dalla esperienza, e con quella investigare la ragione.

Proprio per la razionalità della Natura, non può esistere alcuna esperienza che non sia figlia della ragione ma possono esserci esperienze ancora non manifestate che, dovendo anch'esse derivare dalla ragione, corrispondono a "ragioni" ancora ignote (Leonardo da Vinci, 2004, pp. 22, 32):

Nessun effetto è in natura senza ragione; intendi la ragione e non ti bisogna esperienza. La natura è piena d'infinite ragioni, che non furon mai in esperienza.

Questo pensiero colloca Leonardo addirittura come un precursore della fisica teorica («intendi la ragione e non ti bisogna esperienza»), nella quale è caratteristica la possibilità di “scoprire” leggi naturali in base a considerazioni matematiche (quindi razionali) molto prima della loro conferma sperimentale.³

Leonardo manifesta più volte la sua avversione per il vuoto parlar filosofico e per le disquisizioni metafisiche, ribadendo la necessità di attenersi all'esperienza e applicare ad essa i metodi matematici (*Codice Atlantico* a 119 v):

Io credo che invece che definire che cosa sia l'anima, che è una cosa che non si può vedere, molto meglio è studiare quelle cose che si possono conoscere con l'esperienza, poiché solo l'esperienza non falla. E laddove non si può applicare una delle scienze matematiche, non si può avere la certezza.

In Leonardo, Bacone e Galileo, sia pure con le dovute differenze, è quindi ben manifesta l'idea della copresenza dell'esperienza e della ragione, o, detta in altri termini, dell'induzione e della deduzione, dell'osservazione-sperimentazione e del ragionamento, idea accettata ormai “ufficialmente” come caratterizzante la scienza moderna, ma sprezzatamente ignorata dai cosiddetti “matematici puri”, che

³ Un esempio classico è la scoperta dell'antimateria (positrone) fatta nel 1928 da Paul Adrien Maurice Dirac in base a una sua famosa equazione, confermata sperimentalmente successivamente nel 1932 da Carl David Anderson.

pretendono di erigere a un inesistente stato di purezza l'assiomatismo quando, anziché presentarlo come utile punto di arrivo "razionale" di un processo cognitivo che parte dall'esperienza (sulla scia del pensiero leonardesco), lo utilizzano come punto di partenza «senza riferimento a casi ed esigenze che giustifichino praticamente la creazione di certi schemi mentali», il che «può piacere per vanto di purezza o dispiacere per il senso d'inutilità, gratuità, vacuità, di ciò che è mero "jeu d'esprit"», come afferma Bruno de Finetti (1966, p. 10361).

3 - La "matemattica" di base "assiomatica" : il bagno catartico dell'astrazione

Nasce così la «"matemattica" di base "assiomatica"», facendo della matematica una «roba da matti» grazie a un cattivo uso dell'assiomatica (de Finetti B., 1978, p.13).

Ma oltre che una «roba da matti», si tratta in realtà di un "tumore" maligno in seno alla scienza, perché caratterizzato da una degenerazione delle sue cellule "sane", che si dovrebbero alimentare sempre di esperienza e ragione, venendo meno uno dei due alimenti fondamentali: l'esperienza. Un organismo, dunque, la «"matemattica" di base "assiomatica"», che oltre ad essere «roba da matti» è estraneo (come le cellule tumorali in un corpo sano) all'idea di scienza moderna, regredendosi a una moderna forma di aristotelismo che si alimenta unicamente di vuote deduzioni tratte da premesse arbitrarie, se pur coerenti. Albert Einstein diceva della logica: «Il pensiero logico, da solo, non ci può fornire conoscenze sul mondo dell'esperienza e termina in essa. Le proposizioni puramente

logiche sono vuote davanti la realtà» (Einstein, 1952, p.67). E Bruno de Finetti: «Ciò che è logico è esatto. Ma non ci dice nulla. Nessuna pretesa sarebbe altrettanto illogica che quella di ricavare qualcosa dalla logica» (de Finetti B., 1937).⁴

Leonardo, Bacone, Galilei, de Finetti, tutte *vox clamans in deserto*!⁵

A questa mania di credere nella “purificazione” del concreto nel bagno catartico dell’astratto fa riscontro l’idea di Bruno de Finetti della riduzione dell’astratto al multiconcreto (de Finetti B., 1974b). L’astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere aristocraticamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente lega-

⁴ Per brevità evito molte altre illustri citazioni simili, sull’affermazione della negazione di nuova conoscenza a partire della logica, che si possono trovare nella mia relazione, “L’immaginazione creatrice nell’arte e nella scienza”, in *Atti della conferenza “Caos e immaginazione nell’arte e nella scienza”*, 10 maggio 2008, Monte Compatri: edizioni Controluce.

⁵ Ma su molte altre questioni (oltre quella appena accennata dei rapporti fra ragione ed esperienza) sembra dovere purtroppo riconoscere l’esistenza di un’ampia schiera di illustri *vox clamans in deserto*! Bruno de Finetti criticava senza mezzi termini la validità di molti testi scolastici a proposito dei quali «pur rifuggendo da giudizi precisi», riteneva tuttavia di «dover convenire, che nella prassi scolastica, le tendenze al peggio sembrano destinate sistematicamente ad aver presa con maggior forza». Ma si affrettava a riconoscere l’esistenza, invece, di libri di testo lodevoli (ricordando quelli di Michele Cipolla, Federico Enriques, Ugo Amaldi, Francesco Severi, Emma Castelnuovo) ma tristemente rilevava che «non sembra purtroppo, né come diffusione né come impostazione, che abbiano esercitato una grande influenza sulla mentalità scolastica». Riguardo alla diffusione dei testi di Enriques-Amaldi certamente non è vera l’affermazione di de Finetti, ma forse rimane vera quella riguardo alla loro influenza sulla mentalità scolastica.

to pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multiconcreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato, come magistralmente de Finetti stesso fa notare (de Finetti B., 1966, p. 10361):

È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo assumono usandole per formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa).

Certamente non tutti i matematici ignorano questo "naturale" e imprescindibile legame ombelicale della "pura astrazione" con "l'impura esperienza del concreto". A tal proposito è bene ricordare ciò che, da par suo, Lucio Lombardo Radice (che certamente non era un matematico applicato) sentiva il bisogno di precisare a proposito dell'assiomatismo, riconducendolo nei giusti binari dell'astrazione giustificata da una comprensione razionale del multiconcreto (Lombardo Radice, 1974, pp. 8, 9):

... la matematica non si occupa di sistemi formali qualunque (arbitrari) pur che coerenti [ma] si occupa di quei sistemi formali che traducono, in termini di pura struttura,

parecchi sistemi concreti (concreti rispetto alla nuova formalizzazione).

In verità l'assiomatismo ha origini veramente "nobili", essendo nato (come molte altre grandi idee della scienza) da un coraggioso atto di ribellione all'*Ipse dixit*: la negazione delle verità assolute necessarie dei famigerati giudizi sintetici a priori di Kant, che ha permesso la nascita delle geometrie non-euclidee. Ma è stato frainteso e ha contratto il germe di un male, vestendo un abito di purezza che in realtà non esiste, per il semplice motivo che la purezza è soltanto una invenzione dell'uomo, nata dalla sua vanagloriosa aspirazione a salire su uno sgabello onorifico (per usare una felice espressione di de Finetti), per «quel pervertito senso dei valori che è la nemesi dell'esser possessori di schiavi», come argutamente osservava Alfred Whithead: non esiste in Natura. Nessuna cosa è "pura" in Natura e nemmeno gli sforzi dell'uomo riescono a ottenerla. Con i migliori procedimenti metallurgici, per esempio, non si riesce, generalmente, a ottenere metalli con purezza superiore al 99% (per il rame e il ferro si può arrivare al 99,95%). Il termine "puro" nasconde l'aspirazione a stabilire scale di valori proprie dei «possessori di schiavi», che non hanno nessuna giustificazione né teorica né pratica. Esistono soltanto punti di vista diversi "egualmente validi". Termini come "ricerca pura", "fisica pura", "matematica pura", ecc. dovrebbero essere banditi e sostituiti con altri più appropriati quali "ricerca di base" (già peraltro usato, ma non sempre come si dovrebbe) "fisica di base", "matematica di base", ecc.

4 – La probabilità: dal misterioso regno di una Natura semideterministica all'impuro regno delle scommesse e dell'uomo della strada

Bertrand Russell, con la sua ben nota ironia, affermava che «il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato». In realtà la sua ironia coglieva in pieno il bersaglio, ma ignorava evidentemente l'opera di Bruno de Finetti, che invece finalmente ha pienamente gettato luce sul suo significato dando la prima “vera” definizione accettabile della probabilità, proprio “sporcando” la sua mente di matematico⁶ con il cercarne il significato nell'ambiente più impuro che possa esistere: quello delle scommesse e del senso comune dell'uomo della strada.

Occorre aggiungere che il rifiuto dello “sgabello onorifico” della purezza non è stato l'unico motore della sua ricerca: ad esso si è accompagnato come un eccellente “booster”, per usare un efficace termine meccanico, il dubbio su tutto ciò che prima era stato disquisito sulla probabilità. Il dubbio che già in Leonardo, Bacone, Galilei e Cartesio ha costituito il principio del “nuovo metodo”, il dubbio della verità di tutto ciò che prima è stato detto o pensato, maturato opponendosi all'autorità indiscussa dell'*Ipse dixit*.⁷ Il dubbio, il bruniano

⁶ Matematico e basta, senza dire né puro né applicato, aggettivi che de Finetti non amava.

⁷ Però già Ruggero Bacone (1214 circa-1292), filosofo, scienziato, teologo e alchimista inglese, detto *Doctor mirabilis* per la sua vasta cultura, si opponeva all'abitudine di seguire ciecamente le autorità precostituite, sia sul piano teologico che su quello scientifico, procurandosi parecchi nemici. Fu un assertore convinto dell'importanza dell'esperienza

«dubio de riveder il sole» (Bruno, 1585, Dialogo Quinto) che, assieme al metodo induttivo-deduttivo sostenuto dalla matematica, è l'altro elemento fondante della scienza moderna. E al dubbio è collegato il concetto di incertezza, che ormai domina tutta la scienza contemporanea, ovvero la logica continua dell'incerto che si esprime attraverso gli infiniti valori della probabilità, in contrapposizione alla logica discreta binaria del vero o falso. La scienza, nel suo significato più autentico, è ricerca di ciò che ancora non ci è noto e come tale il suo cammino ha come inseparabili compagni il dubbio e il caso.⁸

Cartesio nel Collège Royal dei Gesuiti di La Flèche, («L'une des plus célèbres écoles d'Europe», com'egli stesso ebbe a definirlo) seguì approfonditi studi umanistici, scientifici, filosofici e religiosi. Ma la sua mente vivacissima e critica pose il dubbio al disopra delle tante "verità" che i suoi Maestri di La Flèche gli avevano inculcate come indiscutibili, liberandosi di tutto ciò che la sua educazione scolastica gli aveva forzatamente fatto accettare (Descartes, 1938, pp. 29-30):

Ma non appena ebbi compiuto questo corso di studii, a capo del quale costuma d'esser ammessi nel numero dei dott. Mutai affatto d'opinione; poiché mi trovai involuppato in tanti dubbii ed errori, che mi sembrava, cercando d'istruirmi, di non aver fatto altro profitto che d'aver scoperto sempre più la mia ignoranza. E nondimeno ero in una delle più celebri scuole d'Europa.

nella formazione della conoscenza e per tale motivo è considerato uno dei padri del metodo induttivo. Le sue affermazioni al riguardo restano troppo generiche e vaghe per poterlo considerare un vero precursore del metodo sperimentale.

⁸ Aggiungerei l'aggettivo serendipico.

Per progredire nella conoscenza “vera”, Cartesio comprese che doveva fare *tabula rasa* di tutto ciò che gli era stato insegnato (Descartes, 1961, p. 16):

Non da oggi soltanto mi sono accorto che fin dai miei primi anni ho ricevuto come vere molte opinioni false; e quel che ho poi fondato sopra principi così malsicuri non può essere che dubbio ed incerto: ed ho deciso, allora, di dovere incominciare sul serio, una volta per sempre, a disfarmi di tutte le opinioni che avevo ricevuto per l'innanzi nella mia credenza, e cominciare tutto di nuovo, fin dalle fondamenta, se volevo stabilire qualche cosa di certo e di costante nelle scienze.

Tre secoli dopo Bruno de Finetti (1906-1985) ripeteva press'a poco gli stessi concetti. In particolare era ricorrente, nelle sue lezioni, l'allusione all'intelligenza dei bambini che poi, crescendo, diventano «ottusi pappagalli» per colpa della scuola (de Finetti B., 1974a):

Occorrerebbe cercare di far sempre assimilare tutte le cose nuove allo stesso modo in cui, nell'età da 0 a 5 anni, prima che la scuola intervenga e spesso distrugga tutto questo bell'avvio, si assimilano tutte le nozioni che si assimilano, tutta la base di tutto quello che verrà dopo. Cercare di far recuperare la freschezza mentale dei bambini, la capacità di autoeducarsi e autoistruirsi con l'osservazione e la riflessione diretta, sarebbe il più grande successo e il più grande dono che una scuola ben concepita possa offrire a un essere umano.

E anche lui, come Cartesio, faceva *tabula rasa* di tutto quanto era stato affermato da grandi matematici con la sua rifondazione in chiave soggettivista (l'unica ragionevolmente sen-

sata) della probabilità.⁹ E qui è bene subito sgombrare il campo da possibili errori grossolani: rifondazione e non introduzione di una nuova definizione di probabilità, una possibile alternativa da affiancare alle altre già esistenti, come purtroppo spesso si legge in molta letteratura matematica, specialmente scolastica. Sarebbe auspicabile, specialmente a livello didattico, di abbandonare la superata concezione oggettivistica della probabilità, insegnando fin dall'inizio il suo significato soggettivo che, come vedremo, non disconosce le vecchie cosiddette¹⁰ definizioni di probabilità, utilizzabili come possibili metodi per assegnare il valore della probabilità in base a scelte "soggettive".

Una semplice frase, emblematica, sintetizza la sua grandiosa opera di rifondazione della probabilità, ed è stata riportata nella lapide apposta nel luglio 2011 accanto al portone di ingresso della sua casa natale ad Innsbruck, a cura dell'Università di quella città austriaca che gli dette i natali il 13 giugno 1906:

LA PROBABILITA' NON ESISTE

Chi ha conosciuto Bruno de Finetti sa bene che amava usare espressioni molto forti e provocatorie, i suoi famosi pungenti "neologismi", con il solo intento di perseguire una

⁹ Anche il logico inglese Frank Ramsey (*The foundations of mathematics and other logical essays*, 1931) giunse, indipendentemente da Bruno de Finetti, a una concezione soggettivista della probabilità.

¹⁰ Vedansi più avanti le critiche definettiane ad esse, alla luce delle quali esse non sono vere definizioni ma tutt'al più metodi per assegnare il valore della probabilità.

maggiore efficacia e questa affermazione sulla probabilità risulta certamente il massimo della provocazione da parte di un «mago della probabilità», quale era considerato de Finetti anche a livello del grosso pubblico. Il significato della frase è molto “semplice e inatteso”, come lo erano le sue soluzioni ai problemi che poneva al Club Matematico dell’Università “La Sapienza” di Roma negli anni Sessanta-Settanta del secolo passato: la probabilità non esiste come proprietà oggettiva, «come una misteriosa e inafferrabile entità metafisica, esistente in astratto, e dalla quale dovrebbe dipendere, chissà in quale modo, l’avverarsi di un evento» (de Finetti B., 1931, p.13).



È ben noto che le opere di de Finetti sulla probabilità sono numerose,¹¹ ma quelle che rimangono fondamentali, per comprendere le sue innovative idee sulla probabilità, sono

¹¹ Un elenco completo di tutte le sue opere, ordinato secondo i dettami di de Finetti stesso, si trova alla fine della sua prima biografia completa da me scritta assieme alla figlia Fulvia (de Finetti F., Nicotra, 2008).

quelle giovanili del 1931: 12 Probabilismo, saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza, e Sul significato soggettivo della probabilità. La prima (de Finetti B., 1931a) contiene l'esposizione critica dei concetti che riguardano la probabilità fino ad allora intesa, ovvero in chiave oggettiva, e l'esposizione a livello filosofico della sua nuova concezione della probabilità in chiave soggettiva, nonché della conseguente concezione della scienza alla luce della logica dell'incerto in sostituzione della rigida logica classica binaria del vero o falso. La seconda, invece, contiene la trattazione matematica dei principi della probabilità soggettiva (de Finetti B., 1931b),¹³ dimostrando come si possa costruire con tutto rigore l'intera teoria delle probabilità sulla definizione soggettiva di probabilità da lui data.

Nell'ultima sua lezione universitaria (de Finetti B., 1989, capitolo "La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni", p. 149), de Finetti stesso ammise che sostanzialmente non ebbe mai nulla da modificare o da aggiungere, «pur estendendola e approfondendola», alla concezione della probabilità, con annessa modalità di assegnarle un valore numerico, una misu-

¹² In realtà nella nota 2 di p.5 di *Probabilismo* troviamo però scritto: «Fin dall'aprile 1928 avevo pronta un'esposizione completa dei fondamenti della teoria delle probabilità secondo il mio punto di vista ...», che dimostra che de Finetti non ancora ventiduenne arrivò a maturare una prima formulazione sistematica delle sue concezioni soggettiviste sulla probabilità.

¹³ B. de Finetti, *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico*. In: "Atti della XIX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze" (Bolzano- Trento 1930), SIPS, Roma, 1931, p.44.

ra,¹⁴ contenuta in queste due opere, che aveva maturato tra il 1926 e il 1928, cioè a cavallo della laurea!.

Le argomentazioni filosofico-logiche che dimostrano l'assurdità di considerare la probabilità una proprietà oggettiva, assieme alle critiche alle tre possibili definizioni di probabilità "oggettiva" (classica o per partizione, frequentistica e assiomatica) sono tutte contenute in *Probabilismo* (de Finetti B., 1931a),¹⁵ in una forma concettuale comprensibile anche da un "non matematico", come è giusto che sia, poiché la probabilità è un concetto che riguarda tutti e non soltanto i matematici o gli scienziati. Già tali osservazioni sono sufficienti per far abbracciare completamente l'idea del carattere soggettivo della probabilità, anche se non lo sono ancora per dimostrare la possibilità di erigere su di essa in maniera rigorosa l'intero Calcolo delle probabilità, obbiettivo raggiunto invece nell'opera più specialistica *Sul significato soggettivo della probabilità* (de Finetti B., 1931b). Infatti, come H. E. Kyburg e H. E.

¹⁴ La parola "misura" potrebbe sembrare poco corretta (ma ne fa uso de Finetti stesso), in quanto potrebbe sembrare più appropriata per le grandezze che hanno un valore oggettivo e non per la probabilità che ha un valore soltanto soggettivo. Invece è oltremodo adatta per la probabilità, in quanto ne evidenzia il carattere soggettivo. La misura di una grandezza infatti, essendo un numero puro risultante dal rapporto fra due grandezze omogenee, ha un valore relativo, variando a seconda dell'unità di misura scelta. Nel caso della probabilità soggettiva è soltanto una misura, un numero puro e non una grandezza oggettiva avente una sua esistenza indipendente e come tale è variabile a seconda del soggetto che valuta la possibilità di avverarsi dell'evento e delle informazioni in suo possesso nell'istante di tempo in cui viene fatta tale valutazione.

¹⁵ Per conoscere i retroscena della sua tormentata pubblicazione rimando a (Nicotra, 2007)

Smokler dicono della ‘scambiabilità’ nella prefazione alla raccolta *Studies in Subjective Probability*,¹⁶ fin quando de Finetti non introdusse nel 1931 il concetto di scambiabilità degli eventi rispetto alle permutazioni (teorema di rappresentazione di de Finetti), «la teoria soggettivistica delle probabilità era rimasta poco più che una curiosità filosofica. Nessuno di coloro per i quali la teoria delle probabilità era oggetto di conoscenza o di applicazione vi prestava gran che di attenzione. Ma, coll’introduzione del concetto di ‘equivalenza’ o ‘simmetria’ o ‘scambiabilità’, quale ora è conosciuto, è stata scoperta una via per connettere la nozione di probabilità soggettiva con i classici problemi dell’inferenza statistica».

5 - Le diverse probabilità “oggettive”

Nell’ambito della cosiddetta probabilità oggettiva sono tre le possibili definizioni. Già questa “trinità” dovrebbe risultare alquanto sospetta per una proprietà ritenuta “oggettiva”: una “realtà oggettiva” che tuttavia si manifesta in tre modi molto diversi! Una realtà quasi in odore di misticismo: una e trina allo stesso tempo! Un mistero della fede ma non più religiosa bensì scientifica! Ricordiamone brevemente le “definizioni”.

5.1 - La probabilità classica o per partizione

La prima definizione matematica di probabilità, detta perciò “classica”, si trova esplicitamente indicata nel Libro II del

¹⁶ Wiley New York 1964, pp. 13-14.

trattato *Théorie analytique des probabilités*¹⁷ pubblicato nel 1812 dal matematico francese Pierre Simon de Laplace¹⁸ (de Laplace, 1820, p. 181):

On a vu dans l'Introduction que la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles. (Come abbiamo visto nell'Introduzione la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ad esso e il numero di tutti i casi possibili, quando non c'è nulla che ci faccia credere che un caso dovrebbe verificarsi piuttosto che qualsiasi altro, in modo che questi casi siano, per noi, ugualmente possibili).

Ovviamente l'aggettivo “favorevole” non è riferito al contenuto dell'evento, bensì alla nostra attesa che esso si realizzi: favorevole è semplicemente l'evento su cui fissiamo l'attenzione, che ci attendiamo che si realizzi o che sia vero, di cui vogliamo valutare numericamente (con la probabilità) la possibilità di accadere o di essere vero, indipendentemente dal fatto che sia o no un evento piacevole o vantaggioso. Essa, a volte, è detta anche “definizione per partizione”, poiché implica una partizione dell'insieme di tutti gli eventi possibili nei due sottoinsiemi degli eventi favorevoli e degli eventi non-

¹⁷ Il trattato era diviso in due libri: *Calcul des Fonctions génératrices* e *Théorie générale des probabilités*. Raccoglieva articoli scritti da Laplace fin dal 1774.

¹⁸ La definizione data da Laplace in realtà non era nuova perché era stata già utilizzata da Cardano (*Liber de ludo aleae*) e Galilei (*Sopra le scoperte dei dadi*) anche se non espressa in maniera esplicita.

favorevoli. Questa definizione ha un dominio di applicazione limitato da due condizioni:

1. è applicabile soltanto in tutti i casi in cui è possibile conoscere quali e quanti sono gli eventi che si possono realizzare e quali e quanti sono quelli favorevoli;
2. gli eventi possibili devono avere tutti la stessa probabilità, vale a dire non ci deve essere nessun motivo che favorisca la realizzazione dell'uno piuttosto che dell'altro.

Il classico esempio di applicazione di questa definizione è il lancio di una moneta, perfettamente “equilibrata” o “simmetrica”, nel senso che non ci sia maggior concentrazione di massa su una faccia piuttosto che sull'altra, che favorirebbe la caduta della moneta su una delle due facce. Gli eventi possibili sono due (testa, croce), mutuamente escludentisi, mentre l'evento favorevole è uno dei due (o testa o croce). Si esclude il caso, che in realtà potrebbe verificarsi, che la moneta cada di taglio, senza presentare quindi nè testa nè croce. In questa scelta si utilizza già, in maniera “sottaciuta”, una valutazione di probabilità molto piccola che la moneta cada di taglio, tale da giustificare l'esclusione a priori che l'evento accada, concludendo che la probabilità che in un lancio la moneta cada presentando croce o testa (“o” esclusivo) sia dunque $1/2$.

La presenza dell'aggettivo “equiprobabile” rende difettosa questa definizione dal punto di vista logico, chiudendola in un circolo vizioso, poiché essa fa uso dello stesso concetto di probabilità che “pretende” di definire: «Eccoci dunque costret-

ti a definire il probabile col probabile. Come sapremo che due casi possibili sono ugualmente probabili? Sarà per una convenzione?» (Poincaré, 1950, p. 176). Usualmente, tale anomalia è superata ricorrendo al Principio della Ration Non Sufficiente o Principio d'Indifferenza,¹⁹ introdotto da Pierre Simon de Laplace, per il quale gli eventi vanno intesi come equiprobabili se non si può formulare nessuna ragione per credere il contrario, in quanto si presume che vi sia simmetria perfetta rispetto ai casi possibili. Ma è chiaro che anche una siffatta giustificazione non è del tutto soddisfacente e attira facilmente critiche ben fondate: il non essere in grado di formulare ragioni in contrario non esclude che in realtà ve ne possano essere.

5.2 - La probabilità frequentista

La definizione classica di probabilità presuppone la possibilità di eseguire “virtualmente”, e non materialmente, l'esperimento o prova che può dar luogo all'evento atteso, individuando tutti i possibili esiti, e fra questi quelli in cui si presenta l'evento in considerazione, dal semplice esame dell'oggetto protagonista dell'evento: il lancio di un dado può essere facilmente immaginato e con esso i suoi possibili risultati, eventi croce o testa, anche senza materialmente effettuare l'esperimento, perché l'esame dell'oggetto “dado” ci consente di sapere quali essi sono.²⁰ Ma tale possibilità riguarda soltanto un limitato sottoinsieme dell'universo di tutti i casi reali,

¹⁹ Da non confondersi con il Principio di Ration Sufficiente di Leibniz, secondo il quale “nulla accade senza che vi sia ragione perché accada proprio così invece che altrimenti”.

²⁰ Si consideri, però, l'osservazione precedente relativa alla possibilità della caduta del dado di taglio.

nella maggior parte dei quali, invece, non è applicabile la definizione classica di probabilità.

In molte situazioni reali, infatti, l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità non può essere generato da un esperimento virtuale, ma, al contrario, può manifestarsi soltanto "a posteriori", con l'esperienza effettiva. Occorre, dunque, compiere materialmente gli esperimenti che generano l'evento. Utilizzando i risultati ottenuti, viene spontaneo calcolare il rapporto fra il numero di esiti positivi dell'esperimento (quelli in cui si presenta l'evento atteso) e il numero totale delle prove, cioè la frequenza relativa dell'evento, rapporto che caratterizza bene la "presenza" di questo nella totalità degli esperimenti compiuti. In situazioni di questo tipo si è tentati di riproporre l'applicazione della definizione classica identificare i casi favorevoli con gli esiti positivi delle prove e i casi possibili con le prove effettuate. In questi casi, però, c'è una sostanziale differenza rispetto alle situazioni in cui è applicabile la definizione classica: ora infatti i casi possibili sarebbero "soltanto" le prove finora effettuate, che non esauriscono tutte quelle effettuabili, che sono infinite, e analogamente i casi favorevoli sarebbero "soltanto" gli esperimenti finora effettuati che hanno generato l'evento atteso. In altre parole, nella definizione classica di probabilità gli eventi favorevoli e possibili sono "tutti" quelli che effettivamente sono favorevoli e possibili; nelle nuove situazioni investigate, invece, essi sono quelli "finora esperiti" e quindi risultano variabili secondo il numero di prove effettuate, che è necessariamente una scelta dello sperimentatore. Qualunque sia il numero di esperimenti da questi deciso, le prove non ancora fatte, ma fattibili, costituiscono altrettanti casi possibili, fra i quali potranno esserci altri casi fa-

vorevoli. Pertanto, se assumessimo tout court come probabilità la frequenza relativa dell'evento, avremmo una probabilità variabile perché dipendente dal numero di esperimenti effettuati, che è variabile, contrariamente all'unicità del valore calcolato con la definizione classica. Ciò che possiamo investigare è, invece, se esistono condizioni che autorizzano tale assunzione entro un grado di approssimazione accettabile, consentendoci quindi che dovremmo accontentarci di un valore "approssimativo" di probabilità, che non può essere rigorosamente unico come nella definizione classica.

A tale scopo, occorre prendere in considerazione i casi in cui è calcolabile la probabilità per partizione, effettuando "realmente" un certo numero di prove. Consideriamo il solito lancio di una moneta. Ebbene, effettuando più lanci della moneta, "cercando" di mantenere inalterate le condizioni sotto cui essi avvengono, si può osservare che all'aumentare del loro numero, la frequenza relativa dell'evento "croce" (e lo stesso vale per l'evento complementare "testa") tende a stabilizzarsi attorno a un valore molto prossimo alla probabilità (0,5 o 50%) calcolata con la definizione classica. Tale tipo di esperimento si può ripetere in tutti i casi ai quali è applicabile quest'ultima. Eseguendo successive serie di esperimenti, in ciascuna delle quali si aumenta progressivamente il numero di esperimenti, si osserva che all'aumentare del numero di questi, il valore della frequenza relativa dell'evento considerato tende a stabilizzarsi attorno a uno stesso valore: è la cosiddetta "legge empirica del caso" o "legge empirica dei grandi numeri". Tale legge, spesso, erroneamente è confusa con il teorema di Bernoulli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \left(\frac{n}{N} \right) - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

che asserisce semplicemente che aumentando indefinitamente il numero N di prove, tende alla certezza ($P = 1$) che la probabilità della frequenza relativa dell'evento scarti dalla probabilità classica p per meno di un numero positivo ε comunque piccolo. Questo teorema, qualche volta, viene erroneamente utilizzato come anello di congiunzione fra le definizioni classica e frequentista di probabilità, come è stato acutamente criticato da Bruno de Finetti:

... non si sfugge al dilemma che la stessa cosa non si può assumere prima per definizione e poi dimostrare come teorema, né alla contraddizione di una definizione che assumerebbe una cosa certa mentre il teorema afferma che è soltanto molto probabile.

L'unico anello di congiunzione plausibile fra probabilità per partizione e frequenza relativa è invece la semplice e più onesta legge empirica del caso, in virtù della quale risulta "plausibile" ribaltare i termini dell'osservazione sperimentale, e "assumere" come probabilità la frequenza relativa dell'evento determinata per un numero "abbastanza grande" di esperimenti, in tutti quei casi in cui è possibile "ripetere a pari condizioni" l'esperimento. Questo valore limite, nel senso non matematico ma sperimentale, viene assunto come valore della probabilità nella definizione frequentista. Esso, non essendo un "limite" in senso matematico, non è determinabile tramite operazioni matematiche, bensì tramite un numero teoricamente infinito di esperimenti, in aperto contrasto con il modo operativo sperimentale che conosce soltanto il "finito",

per cui in pratica è determinabile con un “opportuno” numero finito di esperimenti.

Secondo la definizione frequentista dunque,²¹ “ la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si è verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande”. Quale debba essere in pratica tale numero non è determinabile a priori, ma è solo lo sperimentatore che può definirlo, in base alla legge empirica dei grandi numeri, che lo autorizza a porre fine all’esecuzione degli esperimenti quando rileva che la frequenza relativa dell’evento presenta oscillazioni sempre più piccole: il valore medio di queste è assunto come valore della probabilità (figura 3). E tale decisione non può che essere soggettiva, approssimativa e variabile da sperimentatore a sperimentatore e, anche per uno stesso sperimentatore, ancora variabile da una serie di esperimenti all’altra (perché, per esempio, non è mai possibile mantenere perfettamente identiche le condizioni sotto cui avviene la prova, per cui il numero di esperimenti oltre il quale le oscillazioni della frequenza relativa diventano “sempre più piccole” cambierà per lo stesso sperimentatore da una serie di esperimenti all’altra). La probabilità, in tale definizione, dipende dunque non soltanto dal numero di esperimenti fatti ma anche dalla valutazione di identità delle condizioni operative, per cui non è univocamente determinabile ed è affetta da errore sperimentale, come la misura di una qualunque altra grandezza fisica.

²¹ Proposta da Richard von Mises, Hans Reichenbach e Guido Castelnuovo agli inizi del secolo XX.

La definizione frequentista, essendo fondata su un'operatività sperimentale, non richiede che gli esiti dell'esperimento siano equiprobabili e quindi ha il pregio di superare il limite fondamentale di quella classica, per la quale invece tale requisito è indispensabile. È opportuno, però, rile-

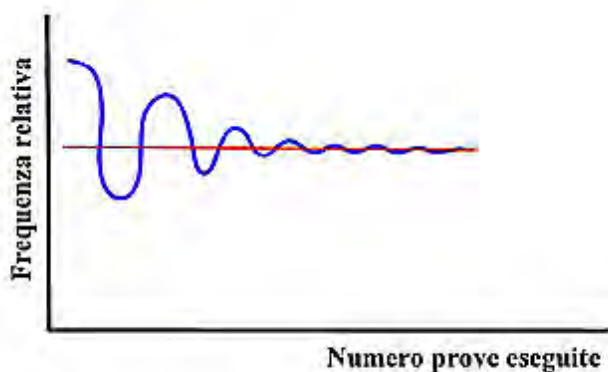


Figura 1 - Frequenza relativa di un evento versus numero di prove eseguite.

vare che la legge dei grandi numeri giustifica, sperimentalmente, di assumere la frequenza relativa come probabilità nei casi per i quali la simmetria (vale a dire l'equiprobabilità) degli esiti possibili renderebbe applicabile la definizione classica. Pertanto, l'estensione della definizione frequentista ai casi in cui quella di Laplace non è applicabile è un'estrapolazione che ha una certa arbitrarietà. Inoltre, stando sempre alle sue giustificazioni "sperimentali", la definizione frequentista dovrebbe essere applicata soltanto ad eventi ripetibili, ovvero generati da esperimenti ripetuti esattamente nelle stesse condizioni quante volte si voglia. Tuttavia, in pratica, specialmente in sta-

tistica, la frequenza relativa è assunta come probabilità di eventi che non hanno tali caratteristiche, bensì hanno la connotazione di “accadimenti” avvenuti nel passato e non riproducibili quante volte si voglia “in laboratorio”, nel presente o nel futuro. Un esempio servirà a chiarire quanto detto. Volendo dare oggi una stima della probabilità alla mortalità scolastica nel primo biennio della facoltà d’ingegneria, lo statistico otterrà tale valore come frequenza relativa dell’evento “abbandono degli studi da parte di studenti d’ingegneria entro il secondo anno”, riferendosi ad un determinato periodo del passato, per esempio dal 1990 al 2018. A tale scopo, prenderà in considerazione il numero di iscritti a ingegneria in quel periodo e dividerà per esso il numero di studenti che nello stesso periodo hanno abbandonato gli studi entro il secondo anno. È vero che potrebbe prendere in considerazione altri periodi di tempo, il che equivarrebbe a scegliere in qualche modo il numero di “esperimenti” (che in realtà sono invece accadimenti), ma la sua è sempre una scelta condizionata, poiché non può scegliere a piacere il numero di anni cui riferire la sua indagine, anzi può capitargli di avere a disposizione un solo campione di dati numericamente non rappresentativo. In tutte queste situazioni, si fa una forzatura, utilizzando come probabilità la frequenza relativa di eventi per loro natura legati esclusivamente al passato e quindi non ripetibili.

5.3 - La probabilità assiomatica

Alcuni matematici, sotto la spinta dell’assiomatismo, hanno proposto una definizione assiomatica della probabilità fondata su tre definizioni e tre assiomi. Le definizioni sono:

1. una prova è l'esecuzione di un esperimento "ripetibile", nel senso che deve essere possibile ripeterlo nelle stesse condizioni, e con esito "aleatorio", vale a dire non prevedibile con certezza, qualunque possano essere i nostri sforzi d'indagine;
2. l'insieme dei possibili esiti di una prova si dice universo o spazio campione U ;
3. un evento E è un qualsiasi sottoinsieme dell'universo U . Lo spazio degli eventi S è l'insieme degli eventi d'interesse, e quindi, in generale, è un insieme di insiemi. Per esempio, con riferimento al lancio dei dadi, i cui esiti possibili sono testa (T) e croce (C), e quindi è $U = \{T, C\}$, si può assumere come spazio degli eventi S l'insieme delle parti $\{T\}$, $\{C\}$, $\{\emptyset\}$, $\{T, C\}$ dell'universo U che comprende anche l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$ e U stesso.²²

In particolare se E è costituito da un solo esito si dice evento elementare, mentre se è costituito da più esiti, si dice evento composto. L'universo U è anche l'evento certo, poiché è costituito da tutti gli esiti possibili. Ad ogni esito si può associare un punto di uno spazio euclideo a n dimensioni; U è pertanto lo spazio i cui punti rappresentano tutti e soli gli esiti possibili

²² Il primo a esporre una teoria assiomatica coerente e sistematica della probabilità è stato il matematico russo Andrei Nicolaievich Kolmogorov nel 1933, con la sua monografia *Grundebegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung* (*Fondamenti del calcolo delle probabilità*), soddisfacendo in parte le richieste di David Hilbert di dare una fondazione assiomatica alla teoria della probabilità.

di una prova, mentre un evento E è un sottoinsieme di tale spazio, cioè è costituito da una parte dei punti di U , potendo ridursi a un solo punto nel caso di evento elementare.

Per fissare le idee, si pensi al lancio di un dado, di due dadi, di tre dadi, ...di n dadi: l'esito della prova è rispettivamente il numero, la coppia di numeri, la terna di numeri ...l'ennupla di numeri delle facce dei dadi rivolte verso l'alto. Dunque, ad ogni esito si può associare un numero, una coppia di numeri, una terna di numeri, una ennupla di numeri, che possono essere intesi come coordinate di uno spazio euclideo a 1, 2, 3, ... n dimensioni. Se, per esempio, nel lancio di un dado l'evento è l'uscita del numero 2, si ha l'evento elementare $E = \{2\}$, mentre se l'evento considerato è l'uscita di un numero pari si ha l'evento composto $E = \{2, 4, 6\}$, vale a dire l'evento occorre se l'esito del lancio del dado è uno dei numeri 2, 4, 6. Nel caso di eventi composti, due eventi si dicono compatibili quando la loro intersezione è un insieme non vuoto: $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ (quindi hanno almeno un evento semplice in comune), incompatibili quando invece la loro intersezione è un insieme vuoto: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (quindi non hanno alcun evento semplice in comune).

Due eventi incompatibili sono, per esempio, gli eventi testa e croce nel lancio di un dado, l'uno escludendo l'altro; due eventi compatibili, invece, sono l'uscita di una figura e di una carta di cuori nell'estrazione di una carta da un mazzo, potendo una carta di cuori essere anche una figura.

La probabilità assiomatica è una funzione d'insieme P definita sullo spazio degli eventi S , ovvero è una legge in grado di assegnare ad ogni evento E appartenente ad S un numero che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov:

1. la probabilità di un evento E è un numero reale non negativo: $0 \leq P(E) \in \mathbb{R} \leq 1$;
2. la probabilità di un evento certo è 1: $P(U) = 1$ (U è per definizione l'evento certo);
3. la probabilità di un evento composto dagli eventi semplici E_1 e E_2 incompatibili ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) è la somma delle probabilità di E_1 e di E_2 : $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Così introdotta, la probabilità è formalmente definita come misura di un insieme, e rientra pertanto come caso particolare nella più generale Teoria della misura, potendo essere interpretata come misura normalizzata $P(E)$ dell'insieme-evento E (il suo valore è un numero compreso tra 0 ed 1, estremi inclusi).

L'impostazione assiomatica della probabilità è accattivante per il suo rigore formale, con cui è possibile dedurre tutta la teoria della probabilità dalle premesse (definizioni, assiomi), soddisfacendo pienamente lo spirito deduttivo del matematico, ma ha un grosso difetto: non definisce cos'è in realtà la probabilità. Infatti, come in qualunque teoria assiomatica, la probabilità non è definita nella sua natura, ma è definita soltanto implicitamente come "un" (e non "quel") numero reale non negativo che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov. Tale numero dipende dalla funzione d'insieme scelta, in altri termini il valore della probabilità assiomatica dipende dal criterio scelto per la misura dell'insieme-evento. Insomma, si ha una situazione analoga alla geometria euclidea, in cui il punto, la retta e il piano non sono definiti esplicitamente, ma implici-

tamente attraverso le loro mutue relazioni (assiomi), per cui, come paradossalmente diceva David Hilbert, i punti, le rette e i piani potrebbero in realtà essere anche bicchieri, posate o quant'altro, purché soddisfacenti gli assiomi euclidei.

La teoria assiomatica della probabilità, oltre il rigore logico, ha un altro pregio. Riportando le considerazioni sugli eventi a calcoli sugli insiemi corrispondenti, attraverso il concetto di probabilità come misura normalizzata dell'insieme-evento, consente la determinazione della probabilità in casi in cui non é possibile applicare la definizione classica, come per esempio quando è infinito non numerabile sia il numero degli esiti possibili sia il numero di quelli favorevoli. In altre parole, la probabilità assiomatica può fornire una risposta a quesiti del tipo: quale è la probabilità che un ago, imperniato ad una sua estremità nel centro di un cerchio, cada entro un determinato settore di questo, per esempio di 30° ? È chiaro, infatti, che assumendo come eventi elementari le posizioni assunte dall'ago quando si ferma, sia quelle entro l'intero cerchio (eventi possibili) sia quelle entro il settore considerato di 30° (eventi favorevoli) sono infinite non numerabili, perché costituiscono un *infinitum continuum*: la probabilità classica sarebbe data quindi dal rapporto ∞ / ∞ che è una forma indeterminata. Invece, con la teoria assiomatica, la probabilità può essere assunta come la misura normalizzata dell'insieme degli esiti favorevoli, vale a dire il rapporto fra la misura del settore entro cui ci si aspetta che l'ago cada (30°) e la misura dell'angolo giro corrispondente all'intero cerchio (360°), che costituisce l'universo U, e quindi $P = 30^\circ / 360^\circ = 8,3\%$

6 - Le critiche della scuola soggettivista alla probabilità oggettiva

Le definizioni di probabilità fin qui date, pur risultando proficue in numerosi casi, offrono il fianco a varie critiche:

1. sono ottenute sulla base unicamente di eventi già accaduti o ripetibili e quindi non sono applicabili a quella stragrande maggioranza di casi in cui gli eventi di cui vogliamo stimare la probabilità non sono mai accaduti oppure sono per loro stessa natura irripetibili. Per esempio, è palese a tutti che con nessuna delle definizioni finora date (classica, frequentista, assiomatica) è possibile stabilire la probabilità di eventi del tipo: domani piovgerà, il prossimo presidente della repubblica italiana sarà una donna, nel 2020 nasceranno gli Stati Uniti d'Europa, il prossimo papa sarà africano. Di fatto, è relativamente a casi di questo tipo che nella vita di tutti i giorni siamo maggiormente stimolati a esprimere una nostra "ragionevole" previsione e quindi a stabilirne la probabilità;
2. la ripetibilità degli esperimenti è un'utopia, perché in realtà nessun esperimento è perfettamente ripetibile in quanto non è possibile mantenere rigorosamente identiche le condizioni sotto cui è ripetuto;
3. le definizioni per partizione (classica) e in base alla frequenza relativa non sono vere definizioni, ma metodi per ottenere il valore della probabilità,

sono quindi tutt'al più definizioni operative e non dicono nulla sulla vera natura della probabilità; la definizione assiomatica, infine, non è operativa ed è una definizione implicita per assiomi, che nulla quindi può dire su "cosa è" la probabilità;

4. ad onta della loro pretesa oggettività, sono in esse presenti elementi soggettivi che dipendono dal soggetto che valuta la probabilità: la valutazione della equiprobabilità degli eventi possibili nella definizione classica, la scelta del numero di esperimenti da effettuare e la valutazione della identità delle condizioni sperimentali in quella frequentista, la scelta della funzione d'insieme che fornisce la misura dell'insieme-evento nella definizione assiomatica;
5. si allontanano dal senso comune originario di probabilità, che è ben evidenziato invece nelle definizioni "non matematiche" del vocabolario Zingarelli, che sottintendono un punto di vista squisitamente soggettivo che senz'altro riscuote il consenso dell'uomo comune.

Bruno de Finetti critica il "presunto" rigorismo e oggettivismo delle vecchie definizioni di probabilità (de Finetti B., 1974b):

Esse non definiscono nulla; peggio ancora nascondono, con sproloqui e arcane definizioni, colme di fumo e di vuoto, il vero senso in cui il termine è usato dall'ultimo uomo della strada... La cosiddetta definizione basata su partizioni in casi

ugualmente probabili richiede sia già acquisito, in senso soggettivo, il concetto di uguale probabilità. E quella basata sulle frequenze richiede il medesimo circolo vizioso ed in più un'intuizione (necessariamente grossolana) di un nesso tra osservazione di frequenze e valutazioni di probabilità, nesso di cui soltanto un'adeguata elaborazione della teoria delle probabilità (soggettive) permette di stabilire il significato in base ad effettiva analisi delle circostanze in gioco.

E per lui il concetto di probabilità non può avere un valore oggettivo (de Finetti B., 1931, pp. 93-94):

D'ora in avanti useremo le parole oggettivo e soggettivo nel senso corrispondente alla concezione empirica, che mantiene anche per noi un significato ben definito. Un empirista direbbe che sono oggettivi i fatti, che hanno un valore oggettivo quelle proposizioni che sono vere o false a seconda che un evento ben determinato si verifica o non si verifica, quelle proposizioni la cui verità o falsità si riduce a una pura e semplice constatazione che ci è imposta. Ora poco importa, dal punto di vista formale, che io creda effettivamente che tali fatti costituiscano una realtà esterna, o li consideri soltanto delle mie sensazioni; resta questo di in discutibile: che, una proposizione siffatta, so sempre in quali circostanze io debbo dire che è vera e in quali altre che è falsa. Che io la dica vera o falsa, ciò non implica da parte mia nessuna manifestazione affettiva, ciò non significa un giudizio, ciò non ha nessun valore concettuale. [...] Negando alla probabilità ogni valore oggettivo, intendo dunque affermare che, comunque un individuo valuti la probabilità di un dato evento, nessun'esperienza potrà dargli ragione e nessuna potrà dargli torto, e, più in generale, nessun criterio può immaginarsi che doni un senso qualunque, obbiettivo, alla distinzione che si vorrebbe qui stabilire fra ragione e torto.

[...]Cosa vogliamo dire, nel linguaggio ordinario, dicendo che un avvenimento è più o meno probabile? [...]Vogliamo dire che ci sentiamo di fare un grado più o meno grande d'affidamento sull'eventualità che esso abbia ad avverarsi.

La valutazione del grado di affidamento nell'avverarsi di un evento è sempre incerta (de Finetti B., 1989, Capitolo "La previsione: le sue leggi logiche, le sue fonti soggettive", p. 90):

Ma ogni evento può solo accadere o non accadere e in nessuno dei due casi è possibile decidere con quale grado di dubbio sarebbe stato «ragionevole» o «giusto» aspettarsi l'evento prima di sapere se è accaduto o meno.

Ed è sempre relativa, dipendendo dal soggetto e dalle informazioni da lui possedute nel momento in cui valuta il grado di affidamento nell'avverarsi dell'evento. Il caso di eventi equiprobabili, nell'ottica della probabilità oggettiva sarebbe l'ammissione di una natura semideterministica (de Finetti B., 1931, pp. 12-13):

Il concetto di probabilità è relativo: il fatto che due casi ci appaiano ugualmente probabili dipende dal gruppo di circostanze che ci sono note od ignote. Basta questo per distruggere il feticcio di una probabilità 'vera', esistente nel "regno di tenebre e di mistero" della realtà ultrasensibile, per abbattere una specie di semi-determinismo che considera due casi ugualmente probabili come due casi di fronte a cui la natura è ancor libera di scegliere, e che, non presentando nessuna caratteristica per farsi preferire, mettono la natura nell'atroce imbarazzo dell'asino di Buridano. Sembra impossibile. Ma qualcuno pensa proprio così: che la probabilità dipenda dal fatto che un evento non è ancora 'deciso'.

A conclusione delle sue riflessioni critiche sulla probabilità oggettiva, de Finetti diede una nuova definizione di probabilità, con le vere caratteristiche di una definizione, in contrapposizione alle pseudodefinitioni della probabilità oggettiva precedentemente viste: «grado di fiducia di un dato soggetto, in

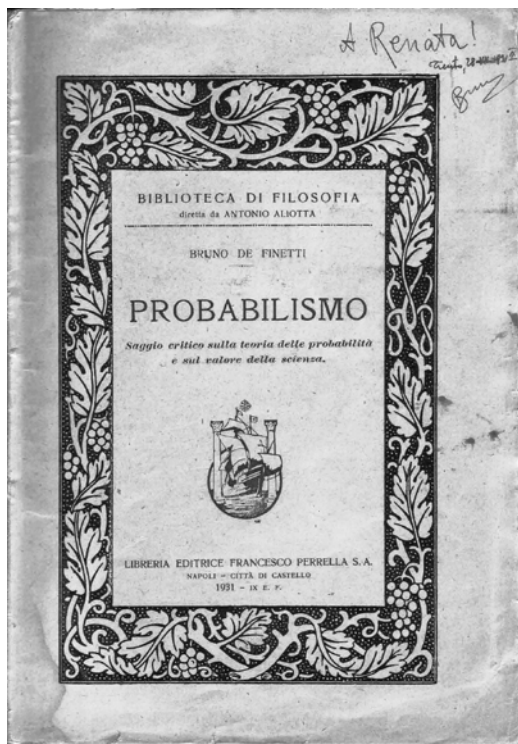


Fig. 2 – Bruno de Finetti, *Probabilismo* con la dedica di Bruno de Finetti alla moglie Renata (1930). Fotografia tratta da Fulvia de Finetti e Luca Nicotra, *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Belforte, 2008.

un dato istante e con un dato insieme di informazioni, riguardo al verificarsi di un dato evento» (de Finetti B., 1970, vol.1. p. 6) . Formalmente quindi potremmo scrivere: $P_E(S, t, I)$ dove P_E è la probabilità di un evento, S è un soggetto “giudicante”, t il tempo, I l’insieme di informazioni coerenti riguardo l’evento E .

Questa definizione della probabilità riporta il significato di probabilità alla comune accezione dell’uomo della strada.

La definizione soggettiva è (finalmente!) una definizione nominale e non “operativa”, nel senso che non indica una procedura specifica per assegnare alla probabilità un valore numerico, salvo che dovrà essere un valore, compreso fra 0 e 1, tanto più vicino a uno quanto maggiore è la nostra convinzione che l’evento si verifichi e tanto più vicino a zero quanto maggiore è la nostra convinzione che l’evento non si verifichi. Per assegnare un valore numerico o misura alla probabilità, de Finetti ricorre alle sue origini nel gioco d’azzardo e applica lo schema delle scommesse: il valore assegnato alla probabilità di un evento è il rapporto tra la “posta” di chi valuta la probabilità e la somma delle “poste” dei due scommettitori.

Così, per esempio, se Giovanni è disposto a scommettere 3 contro 1 che il cavallo Destriero vincerà la prossima corsa, significa che il suo avversario è invece disposto a scommettere 1 contro 3 che quel cavallo vincerà: la probabilità che Giovanni attribuisce alla vittoria di Destriero, quindi, è per lui, $\frac{3}{4}$, vale a dire il 75%, mentre per il suo avversario è $\frac{1}{4}$, pari al 25%. In altri termini la scuola soggettivista di de Finetti e Ramsey, provocatoriamente, assegna alla probabilità di un evento il valore numerico pari «alla massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria». La “posta” impegnata nella definizione di de Finetti può essere determinata in svariati modi (simulazioni al computer, calcoli scientifici, calcoli combinatori, frequenza relativa, valutazioni puramente intuitive, rapporto casi favorevoli/casi possibili, ecc.), ma sempre in maniera “equa e coe-

rente con le informazioni” possedute dal soggetto che valuta la probabilità.²³

La definizione soggettivista di probabilità, dunque, non rigetta le precedenti definizioni, ma le recupera sottraendole all’errata pretesa di oggettivismo, per utilizzarle più ragionevolmente e realisticamente in ottica soggettivista, come scelte non necessarie, bensì ritenute utili da chi deve dare un valore alla probabilità, in base alle “sue” informazioni o al “suo” intuito. Il soggettivismo in essa presente non è pertanto “arbitrarietà”, come a volte è frainteso da alcuni, ma l’espressione dell’opinione del soggetto che valuta la probabilità, coerente con le informazioni, di qualunque tipo, di cui egli dispone sull’evento, comprendendo fra esse anche la conoscenza di diverse valutazioni della probabilità dell’evento espresse da altri soggetti o, perfino, la mancanza di qualunque informazione.

Le tecniche di calcolo messe a punto da Bruno de Finetti, grazie al suo teorema di scambiabilità, sono tali da consentire di ricavare, in maniera coerente con le premesse, il valore della probabilità e pertanto sono “oggettive”, pur essendo le premesse stesse soggettive, in accordo con l’osservazione sulla sostanziale differenza fra il calcolo delle probabilità, che ha valore oggettivo, e i metodi per la definizione di probabilità (teoria della probabilità), che possono variare. La definizione di probabilità dello Zingarelli: «La misura in cui si giudica che un avvenimento sia realizzabile o probabile», che a prima vista può sembrare poco scientifica, contiene, invece, proprio i tre elementi essenziali che caratterizzano la definizione più

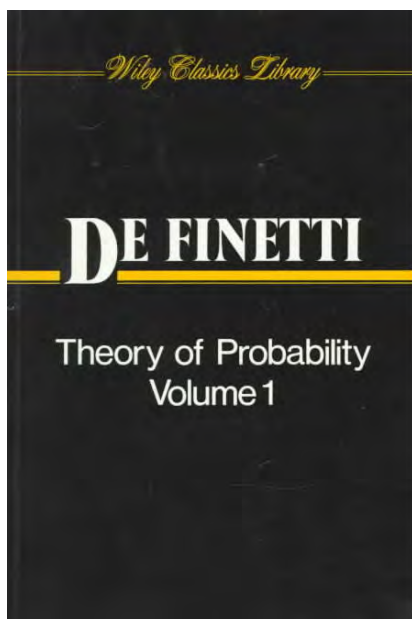
²³ Per il significato della frase «equa e coerente con le informazioni» si rimanda alle trattazioni specialistiche sulla probabilità soggettiva.

generale di probabilità data da de Finetti: misura, giudizio e realizzabilità.

La definizione definettiana ha il pregio innegabile di fornire “sempre” un valore della probabilità, anche nei casi in cui l’evento non è ripetibile, non è mai accaduto o le informazioni

disponibili sono molto scarse o inesistenti. Inoltre, è notevole constatare che esistono casi in cui alcuni eventi sono composti di altri ai quali, in base alle precedenti definizioni “oggettive”, non sarebbe possibile assegnare alcun valore di probabilità e che, d’altra parte, la probabilità di tali eventi complessi risulta poco influenzata dalle probabilità assegnate agli eventi componenti. Di conseguenza, non ha molto senso discutere sulla “attendibilità” dei valori di probabilità assegnati agli eventi elemen-

tari, mentre è essenziale prendere l’iniziativa di assegnare in qualche modo tali valori. L’approccio soggettivista consente di sbloccare brillantemente tali situazioni, applicando il calcolo delle probabilità laddove sarebbe impossibile con le altre definizioni di probabilità. Bruno de Finetti applicò le sue vedute probabilistiche anche in psicologia, a molti aspetti dell’istinto,



**Fig. 3 – Il primo volume di
Teoria della Probabilità
nell’edizione inglese.**

del subconscio e dell'intuizione, ai quali riconobbe sempre un ruolo decisivo nel processo della scoperta matematica. Una curiosità: egli pose in evidenza, per esempio, la manifestazione di un certo senso della probabilità da parte dei cinghiali quando, inseguiti dai cacciatori, cercano di trovare una via di scampo.

Bibliografia

BALDINI Massimo (1993). *Aforismi, novelle e profezie di Leonardo da Vinci*. Roma: Newton Compton, ed. web: www.liber.it.

DE FINETTI Bruno (1931a). Probabilismo. In: «*Logos*», Napoli: Perrella.

DE FINETTI Bruno (1931b). "Sul significato soggettivo della probabilità". In: «*Fundamenta Mathematicae*», Warsawa, 1931, pp. 298, 299, 300, 301, 302, 304, 305.

DE FINETTI Bruno (1931c). "Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico". In: "Atti della XIX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze" (Bolzano- Trento 1930), SIPS, Roma, 1931, p.44.

DE FINETTI Bruno (1937). "Pirandello Maestro di Logica". In: «*Quadrivio*» 5-12-1937 ; "Luigi Pirandello, maestro di logica". In: "Il Brennero", 9-12-1937.

DE FINETTI Bruno (1966). "Sull'insegnamento della matematica". In «*Homo Faber*», anno XVII n.164, 1966.

DE FINETTI Bruno (1974a). "Il ruolo delle regioni negli sforzi per il rinnovamento della scuola". Appendice In: «*Periodico di Matematiche*», 50, n. 3 (1974).

DE FINETTI Bruno (1974b), "Interventi al Convegno della C.I.I.M.", Viareggio 24-26 ottobre 1974. In «*Notiziario del Bollettino della Unione Matematica*», dicembre 1974.

DE FINETTI Bruno (1978). "Rischi di una 'matemattica di base 'assiomatica''". In: «*Tuttoscuola*», Anno IV, n. 62 4 - 10-1978.

DE FINETTI Bruno (1989). *La logica dell'incerto*, a cura di Marco Mondadori. Milano: Il Saggiatore.

DESCARTES Renato (1961). *Discorso sul metodo*. Traduzione con introduzione, note e commento filosofico a cura di Giuseppe Saitta. Settima edizione. Bologna: Zanichelli.

DESCARTES Renato (1961). *Meditazioni filosofiche*. Introduzione, traduzione e note a cura di Guido De Giuli. Terza ristampa. Quarta edizione. Torino: Paravia.

ENRIQUES Federigo (1938). *Le matematiche nella scuola e nella cultura*. Lezioni pubblicate a cura di Attilio Frajese. Bologna: Zanichelli.

EINSTEIN Albert (1952). "La questione del metodo". In: *Come io vedo il mondo*, Milano: Giachini.

GALILEI Galileo (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

BRUNO Giordano (1585). *De gli eroici furori*. Parigi: Antonio Baio.

LEONARDO DA VINCI (2004). *Aforismi*. Prato: Giunti Editore.

LOMBARDO RADICE Lucio (1974). "Il punto di vista matematico". In: «*Periodico di Matematiche*», serie V, Volume 50, n. 5-6 ottobre 1974.

NICOTRA Luca (2007). "Bruno de Finetti scrive a Adriano Tilgher". In «*Lettera Matematica Pristem*» n. 64, luglio 2007. Milano: Springer.

DE FINETTI Fulvia, NICOTRA Luca (2008). *Bruno de Finetti. Un matematico scomodo*. Livorno:Belforte.

NICOTRA Luca (2015). "Il ruolo dell'Islàm nello sviluppo delle scienze". In «ArteScienza», n.4, dicembre 2015, Roma http://www.assculturale-arte-scienza.it/Rivista%20ArteScienza/ArteScienza_N4/Luca%20Nicotra/L_Nicotra_ArteScienzaN4_91-138.pdf.

NICOTRA Luca (2019). "Leonardo da Vinci: artista-scienziato o scienziato-artista?". In Ugo Locatelli. *Così il tempo presente. Omaggio al pensiero di Leonardo* (a cura di Carlo Francou). Roma:UniversItalia, 2019, pp. 72-87.

POINCARÉ' Henry (1950). *La scienza e l'ipotesi*. Firenze: La Nuova Italia, 1950.

La probabilità è soltanto soggettiva

Giordano Bruno*

*Università Mercatorum; giordano.bruno@unimercatorum.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.088

Sunto: *L'incertezza e il suo trattamento sono alla base della "complessità" della realtà. È assolutamente necessario, quindi, che didatticamente lo strumento che misura l'incertezza, ovvero la probabilità sia introdotta in maniera non fuorviante, presentandola come qualcosa di oggettivo e indipendente da chi, al contrario, valuta. Qui, si vuole ricordare ancora una volta come la concezione soggettiva delle probabilità (sviluppata da Bruno de Finetti) sia l'unica che garantisca un approccio corretto e coerente.*

Parole Chiave: *Grado di fiducia, scambiabilità, frequenza, sistemi complessi*

Abstract: *Uncertainty and its treatment are the basis of the "complexity" of the reality. It is necessary, therefore, that didactically the tool that measures uncertainty, probability, is introduced in a non-misleading way, presenting it as something objective and independent of whom, on the contrary, evaluates. Here, we want to remember once again how the subjective conception of probabilities (developed by Bruno de Finetti) is the only one that guarantees a correct and coherent approach.*

Keywords: *Degree of believe, exchangeability, frequency, complex systems*

È trascorso quasi un secolo da quando Bruno de Finetti ha definitivamente (anzi definettivamente, come amava dire lui) chiarito come la probabilità esista solo soggettivamente.

Eppure, ancora oggi, vediamo fiorire scritti, in particolare di carattere didattico, che parlano di probabilità oggettiva, misurata attraverso il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, oppure per mezzo della frequenza relativa di successo, ponendo sullo stesso piano le cosiddette impostazioni classica e frequentista con la concezione soggettivista della probabilità.

È allora, forse, opportuno cercare di riavvolgere il nastro e srotolarlo nella maniera più chiara possibile.

Fermiamoci, per prima cosa, a esaminare l'affermazione: la probabilità esiste solo soggettivamente.

Per probabilità, credo che possiamo essere tutti d'accordo, intendiamo la misura dell'incertezza, di che cosa? Di un fatto, un accadimento, una circostanza, possibili; di qualcosa che può essere vera o falsa (verificarsi o non verificarsi, più pragmaticamente).

Una misura, poi, può essere qualitativa e/o quantitativa.

Ma cosa misuriamo (nell'uno o nell'altro modo) quando ci troviamo di fronte all'incertezza?

Misuriamo il grado di possibilità, plausibilità, verosimiglianza che un determinato fatto ha per noi; stabilendo se per noi (singolarmente o con opinioni concordanti) quel fatto è in sé più o meno plausibile o lo è o meno nel confronto con altri; oppure assegnando alla sua possibilità un valore numerico in una scala predefinita: tanto più questo valore sarà alto, tanto più riterremo plausibile quel

fatto e viceversa tanto più sarà basso, tanto meno lo riterremo tale.

In poche parole, come dice de Finetti, la probabilità è il “grado di fiducia” che un “individuo” ha nel verificarsi di un dato evento.¹

Questa, che per lui, è una definizione, non è riducibile ad un'altra indeterminata, del tipo: la probabilità è il grado di fiducia nel verificarsi di un dato evento!

Il grado di fiducia di chi?

Qui si apre, un'interessantissima questione, che ho cercato di esporre in altro scritto (Bruno, 2020), sull'aspetto sistemico della concezione di de Finetti.

Il grado di fiducia che esprime una valutazione di probabilità non è né astratto, né intrinsecamente oggettivo (ovvero ricavabile solo da leggi predeterminate) ma è necessariamente formulato da un soggetto, che si può identificare con un “io” (o al più un “noi”²).

E ciò accade perché ogni valutazione, ogni grado di fiducia, è il risultato dell'informazione che ogni singolo soggetto possiede nel contesto di spazio e tempo in cui si trova.

Soffermiamoci, un attimo, ad esaminare l'etimologia del termine informazione, che riporto dal Dizionario Treccani:

informazione s. f. [der. di *informare*; cfr. lat. *informatio* - *onis* «nozione, idea, rappresentazione» e in epoca tarda «istruzione, educazione, cultura»]. – 1. ant. e raro. L'azione dell'informare, di dare forma cioè a qualche cosa: “altrimenti

¹ Evento è qui usato in senso scientifico: una proposizione logica che può assumere solo due valori, vero o falso.

² Nel caso di convergenza di un insieme di soggetti verso un'unica valutazione.

è disposta la terra nel principio de la primavera a ricevere in sé la i. de l'erbe e de li fiori, e altrimenti lo verno" (Dante). 2. Atto dell'informare o dell'informarsi, nel senso di dare o ricevere notizia: per una più esauriente i. sull'argomento si vedano i volumi ...; libertà d'informazione, intesa come libero accesso alla verità attraverso i mezzi che interpretano e formano la pubblica opinione. Con sign. più concr., nell'uso com., notizia, dato o elemento che consente di avere conoscenza più o meno esatta di fatti, situazioni, modi di essere, ecc.

Non credo ci sia bisogno che mi dilunghi ulteriormente per evidenziare che di per sé l'informazione che ogni soggetto possiede in merito ad un determinato evento non possa essere oggettiva.

Mentre, il singolo soggetto, come ha espresso bene de Finetti, se vorrà essere "coerente" dovrà esprimere oggettivamente il proprio grado di fiducia sulla base dell'informazione posseduta.

Non mi soffermo su questo aspetto, che è l'architrave della concezione soggettivista di de Finetti e che può essere sviscerato opportunamente nel primo volume del suo *Teoria delle probabilità* (de Finetti, 1970).

Quello che mi preme mettere in evidenza è il fatto che tale impostazione si inserisce pienamente nel cambiamento di paradigma in tutti i campi del sapere che viene operato nel Novecento, a partire dalle scienze fisiche e da quelle biologiche.

Non è più il determinismo che con le sue leggi naturali dà spiegazione di quella che chiamiamo realtà; ma si affacciano a noi (per rappresentarne solo una parte) la relatività einsteiniana, la teoria dei quanti con il principio di

indeterminazione di Heisenberg, il neodarwinismo evoluzionista con le mutazioni, la teoria dei sistemi dinamici complessi con le proprietà emergenti.

Come scrive de Finetti, nel suo *L'invenzione della verità* (de Finetti, 2006, p. 77):

Non v'è più, nella previsione scientifica, una certezza assoluta; v'è soltanto una certa probabilità che può al massimo divenire tanto grande da meritare il nome di certezza pratica.

E indicava in *La logica dell'incerto* di «assumere come strumento fondamentale del pensiero scientifico al posto della logica ordinaria categorica, rigida, fredda, una logica viva, elastica, psicologica» (de Finetti, 1989, p. 7).

Inoltre, tale logica (de Finetti, 1989, pp. 144,145):

non dovrebbe essere considerata come una teoria ausiliaria per quelle branche della scienza che non hanno ancora scoperto meccanismi deterministici che pur "devono" esistere: essa deve invece essere considerata come la premessa logica dell'intero ragionamento induttivo. Così come l'ordinaria logica a due valori è lo strumento necessario di ogni ragionamento in quei casi in cui è pertinente soltanto il realizzarsi oppure no di un evento, così la logica del probabile, la logica di una scala continua di valori, è lo strumento necessario di ogni ragionamento in cui entra, in modo esplicito o implicito, un grado di dubbio, un giudizio di certezza pratica o di impossibilità pratica o infine una stima della verosimiglianza di un evento qualsiasi.

Pertanto, riprendendo l'osservazione riferita al cambiamento di paradigma, questa è assolutamente

giustificata anche in riferimento all'impostazione di de Finetti sulla probabilità.

Aggiungo che un ruolo decisivo viene proprio giocato dal soggetto che valuta l'incertezza. È esattamente lo stesso ruolo che svolge l'osservatore nel caso dei "sistemi complessi".

Un sistema complesso di per sé non esiste al di fuori di un osservatore che, rilevandone una o più proprietà emergenti con il proprio modello cognitivo, lo determina.

Per riportare un esempio, molto noto dopo il Nobel al fisico Giorgio Parisi, pensiamo ad uno "stormo" di uccelli: lo individuiamo come un sistema dinamico complesso nel momento in cui un osservatore ne coglie le proprietà emergenti, dovute alle interazioni degli uccelli tra di loro (quelle che ci appaiono come meravigliose e rapidissime evoluzioni e mutamenti di configurazione in cielo) e quando quelle interazioni tra i componenti dello stormo venissero a cessare per l'osservatore, quel sistema (quello stormo) non esisterebbe più. Ma ciò succederebbe anche quando dovesse scomparire l'osservatore!

Allo stesso modo la probabilità di un evento non è un'"etichetta" attaccata ad esso, non si sa come e da chi, è solo la manifestazione di un "sentimento" relativo a quell'evento da parte di un singolo individuo (o un gruppo di individui che fanno la stessa valutazione). Quell'etichetta scomparirebbe allo sparire del soggetto valutatore (l'osservatore).

Chi non riesce ad accettare che le cose stiano in questo modo si pone fuori dal contesto scientifico attuale.

Peraltro, ci si dimentica sempre che anche la matematica ha i suoi problemi di indecidibilità (vedi il teorema di Gödel, o l'ipotesi del continuo), ma con ciò non crolla certamente.

Per non aggiungere, poi, che la matematica è fondata su assiomi o postulati e, ad esempio, la negazione della validità del quinto postulato di Euclide ha dato luogo alle geometrie non euclidee.

Quindi anche la matematica che costruiamo non è oggettivamente determinata, ma lo è soggettivamente sulla base della scelta degli assiomi.

Allora, correttezza vuole che quando si tratta la probabilità, le si deve attribuire un significato che permetta di trasformarla in una misura qualitativa oppure in una misura numerica, e solo successivamente proseguire eventualmente per via assiomatica.³

Dobbiamo abituarci a divulgarla partendo dal suo significato, allontanandoci da metafisicherie che mascherano la realtà dei fatti: nei confronti dell'incertezza abbiamo come strumento per trattarla solo la probabilità soggettiva e come mezzo principe per aggiornare le nostre valutazioni il "teorema di Bayes", che tiene conto anche dei dati statistici, ma che alla fine ci restituisce una probabilità che sempre soggettiva rimane.

E per quanto l'uomo si sforzi, attraverso ad esempio i big data e la cosiddetta intelligenza artificiale, non riuscirà mai a fare "predizioni" certe, dovrà limitarsi a fare "previsioni" che, per loro natura, anche nel migliore dei casi (con probabilità estremamente alta) potranno non avverarsi.

³ Ma non è certamente questo il miglior modo per introdurla e svilupparla didatticamente!

Ritengo questo aspetto un fatto culturale molto profondo e che investe l'etica di quello che insegniamo ai nostri giovani, sempre più bombardati da false certezze, spesso indotte anche dalle straordinarie capacità tecnologiche di cui l'uomo si è dotato.⁴

Nascondere l'incertezza insita nella realtà e ancor di più la nostra relativa impossibilità, per quanto prima detto, di avere strumenti oggettivi per valutarla, è il comportamento peggiore che possiamo adottare.

Ma come si dirà e allora le due impostazioni più note riguardanti il calcolo delle probabilità: quella "classica" e quella "frequentista", cosa ci stanno a fare?

Esaminiamo da vicino entrambe e cerchiamo ancora una volta di chiarire cosa sono.

Intanto, a mio parere, c'è già un equivoco nel chiamarle, impostazioni o concezioni, sono semplicemente degli strumenti operativi che hanno ragione di essere solo sotto determinate condizioni, come ha ben chiarito Bruno de Finetti, ma evidentemente occorre tornarci sopra.

Partiamo dall'impostazione classica, in cui la probabilità di un evento E è data dal rapporto dei casi favorevoli al realizzarsi di E rispetto a tutti i casi possibili. Naturalmente i casi possibili devono essere tutti ugualmente possibili, ovvero detto in altri termini ciascuno dei casi possibili deve avere la stessa probabilità di verificarsi.

Ecco che la definizione usata ci porta ad una tautologia: si vuole definire la probabilità usando la stessa!

⁴ In altri scritti (Bruno, 2012) ho trattato anche l'aspetto, per certi versi contro intuitivo, della necessità in determinate situazioni di addirittura cercare di non ridurre l'incertezza!

Quindi questa non è una definizione logicamente accettabile e, anche tralasciando che tale definizione si riferirebbe ad una piccolissima parte degli eventi che possiamo considerare e di cui ci può interessare valutarne la probabilità, dobbiamo necessariamente concludere che è un errore trattarla come fondativa di una impostazione matematica della probabilità.

Mentre, può essere adottato come criterio di valutazione quando gli eventi in gioco sono considerati soggettivamente equiprobabili.

Infatti, se abbiamo una famiglia di eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$, di cui uno ed uno solo può verificarsi (costituenti cioè una partizione dell'evento certo Ω) e che io giudico essere equiprobabili, allora la probabilità che uno qualunque di quegli eventi si verifichi è necessariamente $1/n$, mentre la probabilità che se ne verifichino almeno m (con $m \leq n$) è necessariamente m/n .

Tanto per fare un esempio banale, si consideri il lancio di un dado. Per ragioni di simmetria è ragionevole attribuire uguale probabilità al presentarsi di una qualunque delle 6 facce nel lancio del dado. Ciò vuol dire immediatamente e necessariamente attribuire probabilità pari ad $1/6$ a ciascuna delle facce. E attribuire probabilità $1/2$ alla probabilità che si presenti una faccia con un numero pari, perché basta sommare 3 volte $1/6$.

Ecco, allora, che da una semplice valutazione soggettiva di equiprobabilità si può arrivare ad utilizzare il rapporto dei casi favorevoli su quelli possibili come criterio di valutazione di altri eventi.

Naturalmente c'è da considerare che le situazioni in cui è ragionevole pensare ad un'equiprobabilità dei costituenti sono sostanzialmente quelle in cui è presente una qualche situazione di simmetria e in particolare questo accade nei giochi (lancio di una moneta, lancio di un dado, estrazioni di carte da un mazzo, estrazioni con restituzione da un'urna di composizione nota, ...), mentre nei casi di maggiore interesse pratico l'equiprobabilità dei costituenti è un caso assolutamente limite.

Si pensi, ad esempio, ad una situazione in cui una persona X è malata e si considerino i costituenti:

X ha la malattia A , X ha la malattia B , ..., X ha la malattia Z ,
vi sembra plausibile giudicare equiprobabili questi eventi?

Pertanto, appare a me, del tutto scorretto procedere nella didattica della probabilità, partendo da valutazioni che si rifanno al criterio della cosiddetta impostazione classica. È vero che sono le situazioni più semplici da trattare, ma è anche vero che sono le più fuorvianti perché danno l'idea di una probabilità oggettiva, se non si è prima ben addestrati a valutazioni soggettive e quindi eventualmente all'attribuzione (appunto soggettiva) di equiprobabilità ai costituenti.

Passiamo, ora, a trattare il caso della cosiddetta impostazione frequentista e limitiamoci a considerarne la versione che generalmente si usa didatticamente: la probabilità di un evento E riferito ad una serie di prove ripetute equiprobabili e indipendenti è la frequenza relativa di successo di E , ovvero il numero di volte in cui E si verifica sul totale delle prove, purché queste siano in numero sufficientemente grande. Ora si può enunciare la definizione

frequentista della probabilità come la si vuole, ma la sostanza è quella qui rappresentata.

Anche in questo caso, vi sono molte obiezioni da fare: intanto il numero sufficientemente grande chi lo stabilisce e come? E poi, in realtà le prove sono supposte tra loro equiprobabili e indipendenti (probabilisticamente) e questo chi lo stabilisce? Lo stabilisce il soggetto che valuta e allora siamo punto e accapo come nel caso classico. Inoltre, perché se uno valuta ciascuna prova equiprobabile e indipendente (probabilisticamente) da qualunque altra dovrebbe apprendere qualcosa sulla possibilità del verificarsi di E?

Siamo nel campo del mistero più profondo. Non credete che tutto ciò sia fuorviante per i nostri studenti?

Ma anche qui si può rimediare e chiarire attraverso l'impostazione soggettiva quando è lecito valutare una probabilità attraverso la frequenza relativa di successo.

La chiave di tutto ciò sta nella "scambiabilità" (introdotta da Bruno de Finetti), che didatticamente può essere presentata così: considerata una successione di eventi $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, essi si dicono scambiabili se importa solo quanti e non quali si verificano (cioè non conta l'ordine con cui si verificano).

Questo, ad esempio, è il caso di estrazioni con restituzione da un'urna di composizione incognita o di lancio di una moneta che può darsi che sia asimmetrica.

Ciò significa in termini probabilistici che si ha la stessa probabilità per una qualunque successione in cui si presentino, ad esempio, h successi su n prove.

Ovvero, in termini formali:

$$P(E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_h} \wedge E_{i_{h+1}}^c \wedge \dots \wedge E_{i_n}^c) =$$

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_h \wedge E_{h+1}^c \wedge \dots \wedge E_n^c), \text{ per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Quindi, se consideriamo l'esempio delle "estrazioni con restituzione da un'urna di composizione incognita" (in cui non conosciamo, ad esempio, la percentuale di palline rosse presenti) e troviamo 80 palline rosse sul totale di 100 estratte è lecito pensare che gli eventi considerati siano scambiabili, perché qualsiasi successione di eventi in cui sono presenti 80 palline rosse e 20 bianche ha la stessa probabilità di presentarsi.

Questo dato che rappresenta la frequenza relativa di successo può essere preso come stima della probabilità di pallina rossa alla 101-esima estrazione?

Consideriamo il problema in generale, vogliamo studiare cosa ricavare da quello che possiamo considerare un modello: estrazioni con restituzione da un'urna di composizione incognita (contenente n palline, con la proporzione di palline rosse $\frac{r}{n}$ non nota).

Supponiamo equiprobabili, inizialmente, le diverse ipotesi $H_r = \left\{ \text{Nell'urna sono presenti } \frac{r}{n} \text{ palline rosse} \right\}$ (con $r = 0, 1, \dots, n$), e consideriamo gli eventi $E_i = \{ \text{Pallina rossa alla } i\text{-esima estrazione} \}$, si ha evidentemente $P(E_i | H_r) = \frac{r}{n}$.

Poniamo, poi, $E = E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_h} \wedge E_{i_{h+1}}^c \wedge \dots \wedge E_{i_n}^c$, dove gli eventi E_i sono "scambiabili" (contando solo quanti se ne verificano e non quali).

Pertanto, per l'equiprobabilità e l'indipendenza condizionata degli E_i risulterà:

$$P(E) = \sum_{r=0}^n P(H_r) P(E | H_r) = \sum_{r=0}^n P(H_r) \left(\frac{r}{n} \right)^h \left(1 - \frac{r}{n} \right)^{n-h}.$$

Applichiamo, infine, il teorema di Bayes, e otteniamo (considerando l'ipotesi di equiprobabilità delle ipotesi H_r , per cui $P(H_r) = \frac{1}{n+1}, r = 0, \dots, n$)

$$\begin{aligned} P(H_r|E) &= \frac{P(H_r)P(E|H_r)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{n}\right)^h \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-h}}{\frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n}\right)^h \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-h}} \\ &= k \left(\frac{r}{n}\right)^h \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-h}. \end{aligned}$$

Ora questa espressione (proporzionale a una binomiale) assume il suo valore massimo quando $\frac{r}{n} = \frac{h}{n}$ (che rappresenta la frequenza relativa di successo).

Possiamo, perciò, rispondere positivamente alla domanda che avevamo lasciato senza risposta.

E più in generale, dire che quando si ha a che fare con una famiglia di eventi scambiabili è ragionevole valutare la probabilità di un evento ulteriore, appartenente alla stessa famiglia, per mezzo della frequenza relativa di successo⁵.

Tutto qui il rapporto tra probabilità e frequenza, senza ricorrere a fumose metafisicherie (quali la cosiddetta legge empirica del caso), ma basandosi solo sulla nozione di scambiabilità che deriva immediatamente dalla concezione della probabilità soggettiva, unica concezione degna di questo nome.

Non sono per natura un estremista, ma ho espresso in maniera decisa la mia posizione, perché ritengo che molti

⁵ Naturalmente se dovessimo, ad esempio, valutare la probabilità della vittoria del prossimo incontro di un pugile, sapendo che su 100 incontri ne ha vinti 80 e persi gli ultimi 20, sfido chiunque a valutare quella probabilità pari all'80%.

danni si possano evitare se la logica del probabile (o logica dell'incerto) viene ben presentata e insegnata.

Al contrario, ritengo che partire e soffermarsi sulle due "cosiddette" impostazioni (quella classica quella frequentista) può essere fuorviante, in quanto induce a usare una valutazione di probabilità non come un bisturi delicato quale deve essere, ma come una sorta di meccanismo specializzato, dal comportamento deterministico e oggettivistico, facile da usare alla bisogna in maniera indiscriminata un po' in tutte le circostanze.

E non è molto più significativo e interessante per dei ragazzi valutare, ad esempio, la probabilità che uno (ciascuno) possa vincere un concorso per entrare alla Facoltà di Medicina, oppure che l'occupazione giovanile cresca il prossimo anno in Italia per più del 5% rispetto all'anno precedente, oppure ancora che entro il 2030 il ghiacciaio della Marmolada cessi di restringersi, ...?

È ovvio, ma è bene sottolinearlo, nessuna di queste valutazioni di probabilità può essere fatta con i criteri del rapporto dei casi favorevoli sui casi possibili o della frequenza relativa di successo.

E non sarà difficile pensare ad esempi specifici per le diverse età di studenti, esempi tra l'altro che come quelli qui indicati richiedono un approfondimento culturale generale e favoriscono l'apprendimento.

In una società che a detta di molti è già diventata ipercomplessa (se non iper-ipercomplessa, etc.) e nella quale l'incertezza è uno degli aspetti dominanti, sapersi misurare con essa fa sicuramente la differenza, e fornire ai nostri

ragazzi uno strumento critico e portatore di responsabilità è quanto di meglio possiamo fare.

Bibliografia

BRUNO Giordano (2012). "Preserving Uncertainty", Methods, Models, Simulations and Approaches Towards a General Theory of Change, «World Scientific».

BRUNO Giordano (2020). "The systemic thinking of Bruno de Finetti", «G. & L. E. R.» Vol. X. No. X, 2020.

DE FINETTI Bruno (1970). *Teoria delle probabilità*, 2 volumi. Torino, Einaudi

DE FINETTI Bruno (2006). *L'invenzione della verità*, (Introduzione, Glossario e Bibliografia a cura di Giordano Bruno e Giulio Giorello, premessa di Fulvia de Finetti), Milano: Cortina editore.

DE FINETTI Bruno (1989). *La logica dell'incerto*, a cura di Marco Mondadori. Milano: Il Saggiatore.

Su certe equazioni di alto grado “risolubili”

Il matematico norvegese Niels Abel ⁶(1802-1829) ben sapeva che esistono equazioni di grado più elevato del quarto, risolubili per radicali e che un'equazione di grado superiore al quarto se è risolubile per radicali ha una forma speciale, differente da quella propria di una generica equazione dello stesso grado. Sarà Evaristide Galois a risolvere quale dovesse essere una tale forma. È il caso, della famosa equazione di sesto grado, da lui considerata, seguente:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

che divisa per x^3 diviene:

$$x^3 + x^2 + x + 1 + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} = 0$$

nella l'equazione posto $x + x^{-1} := u$, si ha:

$$u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$$

dalla quale per ogni valore di u , soluzione della precedente, si ottengono due valori di x dalla:

$$x^2 + 1 = u x.$$

Tale procedura è applicabile alle più generali equazioni:

$$a x^2 + b x + d + b x^{-2} + c x^{-1} = 0$$

$$a x^3 + b x^2 + c x + d + a x^{-3} + b x^{-2} + c x^{-1} = 0$$

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 + a_m x^{-m} + a_{m-1} x^{-(m-1)} + \dots + a_1 x^{-1} = 0.$$

Franco Eugeni

⁶ Il medico modenese Paolo Ruffini (1765-1822) nel 1799 enunciò la sua dimostrazione dell'impossibilità di risolvere le equazioni di grado superiore o uguale al quinto, dimostrazione completata nelle sue pecche dal lavoro, circa del 1825, proprio da Abel e passato alla storia come *Teorema di Ruffini-Abel*.

Ancora sulla improbabile “probabilità frequentista”

Paolo Manca*

*Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa;
paolo.severino.manca@gmail.com



DOI : 10.53159 / PdM(IV).v4n3.89

Sunto: Viene ricordata, per matematici distratti, l'unica definizione operativa di probabilità e cioè quella proposta da de Finetti: la cosiddetta probabilità soggettiva. Viene altresì ricordato e mostrato come, in casi specifici, la probabilità soggettiva debba coincidere con la “probabilità classica”. Viene ancora indicato come la probabilità (soggettiva) sia in grado di venire modificata attraverso la formula di Bayes utilizzando la frequenza empirica osservata, recuperando così, in modo opportuno, l'approccio frequentista.

Parole Chiave: probabilità soggettiva, Von Mises, de Finetti, legge empirica del caso.

Abstract: For distracted mathematicians, the only operational definition of probability is remembered and that is the one proposed by de Finetti: the so-called subjective probability. It is also recalled and shown how, in specific cases, the subject probability must coincide with the "classical probability". It is also indicated how the (subjective) probability is able to be modified through the Bayes formula using the observed empirical frequency, thus appropriately recovering the frequentist approach.

Keywords: subjective probability, Von Mises, de Finetti, empirical law chance.

1 - La “probabilità frequentista”¹

Sotto un profilo puramente formale la probabilità è una misura normalizzata cioè una funzione θ , additiva e non negativa, definita su un'algebra di eventi :

$$(1) \quad 1 \geq \theta \geq 0, \quad \theta(A + B) = \theta(A) + \theta(B) \quad \text{se } A \cap B = \Phi$$

Sempre sotto un profilo formale il calcolo delle probabilità è una estensione della logica classica nel senso che questa associa ad un evento un valore di verità pari a zero o a uno, mentre quello un valore di verità compreso tra zero e uno.

Ma cos'è la probabilità?

Riporto, inorridito, quanto affermano due fra i tanti , Alan Agresti e Barbara Finlay, in *Metodi statistici di base e avanzati*, Pearson, 2012: «La probabilità di una osservazione è la proporzione di volte in cui essa dovrebbe verificarsi in una lunghissima sequenza di osservazioni»,² e mi dispiace per il loro ispiratore, Richard Von Mises, che era una persona e uno studioso di valore.

Richard von Mises (1883-1953) era un ingegnere matematico che diede contributi importanti all'idrodinamica e

¹ Paolo Manca : *Te la do io la probabilità* (ed.goware 2018).

² Tanto per capire il livello dei due autori ricordo come definiscono una variabile casuale: «Una variabile deve assumere almeno due differenti valori. Per un campione casuale o per un esperimento casuale ciascun possibile risultato ha una probabilità di verificarsi. La variabile viene quindi definita come variabile casuale».

all'aerodinamica e che volle anche occuparsi di probabilità, almeno riferita a esperimenti "ripetibili".

Von Mises nel libro del 1919 dal titolo *Wahrscheinlichkeitsrechnung* tentò di tradurre in termini formali e assiomatici l'idea, non nuova, di una probabilità intesa come "limite" della frequenza empirica verificata su un numero "sufficiente di prove".

Egli ridusse l'oggetto del calcolo delle probabilità ai "*Kollektiv*": successioni infinite di prove di uno stesso esperimento suscettibile di essere replicato più volte e praticamente nelle stesse condizioni.

E poichè la frequenza gode delle proprietà (1), Von Mises, di autorità assunte vere tali proprietà anche per il loro "limite" (che non c'è.)

Tenuto conto del livello di conoscenza dei tempi, tenuto conto che la formalizzazione di Kolmogoroff è del 1925, che i primi lavori sulla probabilità di de Finetti sono del 1927, i contributi di Von Mises sono da considerarsi straordinari.

Von Mises volle dare dignità scientifica a una convinzione diffusa secondo la quale la probabilità di alcuni esperimenti/fenomeni/eventi, che possono dar luogo a diversi risultati e che sono "ripetibili", sia una "proprietà fisica" e, in questo senso, oggettiva, del fenomeno stesso: tale "proprietà" si manifesta attraverso la frequenza con cui tali risultati hanno luogo.

Secondo Von Mises, ripetendo "indefinitamente" l'esperimento e calcolando la frequenza con cui si presenta ciascuno dei possibili risultati cui può dare luogo, si ottiene una misura di questa "probabilità".

In sintesi la probabilità sarebbe una proprietà fisica, e dunque in qualche modo oggettiva, che caratterizza un esperimento, così come la massa e la densità sono proprietà fisiche che caratterizzano la materia.

Dunque una moneta ben equilibrata, oltre al peso, alle dimensioni, al metallo di cui è composta, possederebbe anche la proprietà fisica di cadere mostrando più o meno lo stesso numero di volte sia testa che croce.

Ma lanciata come e in che luogo? Sulla Terra, sulla Luna o su un diverso campo gravitazionale? Lanciata da un apparecchio apposito o da un giocatore di *baseball*?

Entro quale intervallo di temperature?

Purtroppo sia la definizione di evento "ripetibile" che la definizione di probabilità di un evento ripetibile non hanno trovato altro sostegno e restano un dogma ascientifico.

Anche i terrapiattisti hanno le loro ragioni, ma certamente sono migliori le ragioni di chi sostiene che la terra è circa sferica. Allo stesso modo chi parla di probabilità frequentista qualcosa di sensato la dice ma certamente si possono dire cose più sensate.

2 - La legge empirica del caso

L'idea della probabilità oggettiva non è tuttora tramontata e alcuni seguaci di Von Mises hanno pensato di giustificarla grazie alla "legge empirica del caso": questa afferma, in termini piuttosto nebulosi, che "in base all'esperienza accade che la frequenza relativa al verificarsi di un evento, dall'esito incerto ma ripetibile, tende a stabilizzarsi".

In effetti in semplici casi, in cui, in base a ragionamenti vari di simmetria, si definisce la probabilità classica di un evento come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, si constata empiricamente che la frequenza relativa risulta "genericamente prossima" al valore di probabilità classica, nel senso che maggiore è il numero di prove "meno frequentemente" accade di osservare "grandi scarti" della frequenza dal valore di probabilità classica.

La legge empirica del caso, che operativamente non giustifica e non consente di calcolare una probabilità qualsivoglia, ha trovato un sostegno perché i fedeli assertori della probabilità frequentista la hanno identificata con la "legge dei grandi numeri", un teorema del calcolo delle probabilità formulato per la prima volta da Jakob Bernoulli, (1654-1705), e successivamente ampiamente generalizzato.

La legge dei grandi numeri prende in considerazione una successione di variabili casuali $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indipendenti e identicamente distribuite di valore medio μ e la variabile casuale valor medio $S_n = 1/n \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ e dimostra che S_n tende a μ in probabilità.³

Per enunciare con rigore il teorema e le sue generalizzazioni occorrerebbe introdurre alcune nozioni di convergenza debole e forte che risultano eccessivamente tecniche; restando a un livello più elementare possiamo dire che la "legge dei grandi numeri" è un teorema del calcolo delle probabilità il quale afferma che, una volta definita la probabilità di un even-

³ Teorema di Kincin : Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. con media finita $E[X_i] = \mu, \forall i$, sia $S_n = 1/n \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, allora la successione di v.a. $\{S_n\}$ tende in probabilità a μ : $S_n \Rightarrow_p \mu$, cioè per ogni $\epsilon > 0$ risulta : $P(|X_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

to, sia μ , e una volta ammesso che questo evento possa essere ripetuto, allora la variabile casuale che misura la frequenza relativa, con cui le “ripetizioni” di tale evento si verificano, tende in probabilità a μ e ciò significa in parole semplici che al crescere del numero delle ripetizioni “diventa sempre meno probabile” che tale frequenza si discosti molto da μ .

Si tratta di affermazioni completamente diverse e occorre insistere che mentre la legge dei grandi numeri presuppone che si sia definita prima la probabilità, la legge empirica del caso viene utilizzata per cercare di definire la probabilità.

Tra l'altro tuttora la cosiddetta legge empirica del caso, oltre a causare seri danni all'utilizzo della scienza statistica, incoraggia non poche tragedie tra i cosiddetti giocatori incalliti: quelli che, anche se hanno perso cifre consistenti, sono certi che “prima o poi si rifaranno”⁴. Grazie alla legge empirica del caso infatti essi giustificano la legge “degli eventi ritardatari”: come se la pallina della roulette o le palline da estrarre al gioco del lotto avessero memoria indelebile degli esiti precedenti.⁵

⁴ Illuminante il commento di una madre sul vizio del figlio: “non mi addoloro per ciò che ha perso, ma sono terrorizzata dal fatto che vuole rifarsi.” Del resto già Tacito avvertiva che “la speranza di diventare ricchi è la più diffusa causa di povertà”.

⁵ Trucchi a parte come quando all'estrazione del lotto provvedevano i bambini bendati e le palline da estrarre venivano scaldate. E a questo punto occorrerebbe ricordare cosa suggerisce la teoria della rovina del giocatore.

3 - Ma allora cos'è la probabilità?

Uso indifferentemente le parole incertezza, casualità,⁶ aleatorietà, stocasticità, sottolineando la differenza con termini come imprecisione, genericità, vaghezza, indeterminatezza.

L'incertezza è un aspetto che caratterizza l'intera nostra vita e il mondo che ci circonda e la necessità di prendere decisioni in condizioni di incertezza è quotidiana.

Purtroppo nella nostra civiltà buona parte dell'impostazione della conoscenza ha una connotazione deterministica e l'incertezza viene vista come un disturbo, una sgradevole incidentale anomalia, mentre dovrebbe essere una caratteristica essenziale, fisiologica, di molti modelli e nelle scienze e nelle discipline sociali.⁷

In un mondo in cui regna l'incertezza, di un evento, di un fatto, di una circostanza, di un avvenimento, di una affermazione, di una proposizione, suscettibili di essere veri o falsi, non sempre possiamo affermare se siano tali ma soltanto esprimere, in base alle informazioni che possediamo, un certo grado di fiducia sulla loro verità/falsità.

Quando siamo in grado di poter esprimere con un numero questo grado di fiducia possiamo parlare di probabilità pur-

⁶ Casualità richiama il termine caso dal latino "*casus*" (caduta) usato nel senso "che ci cade addosso"; aleatorietà richiama il termine "*alea*" che in latino significa dado (da cui la celebre frase di Cesare: *alea iacta est*); stocastico deriva dal greco "*stocasticos*" che, letteralmente, significa congetturale.

⁷ A volte l'incertezza è intrinseca perché riguarda eventi futuri, a volte legata a carenza di informazioni che potrebbero essere acquisite ma che rinunciamo ad ottenere per costi rilevanti e/o per tempi di acquisizione troppo lunghi.

chè sia possibile introdurre questo numero in termini operativi.

Il riferimento alla richiesta di una definizione operativa merita qualche chiarimento. Come ha brillantemente illustrato il premio Nobel per la fisica Percy Williams Bridgman nel suo *La logica della fisica moderna* (1927), molti concetti della fisica e della scienza in generale, ritenuti universali (quali ad esempio il tempo, la massa) e dunque immediatamente noti, hanno un puro valore nominalistico: per dare un contenuto reale alla definizione di tali concetti occorre non tanto precisare che cosa sono ma fornire una procedura univoca per misurarli.

In altre parole in campo scientifico noi conosciamo una grandezza solo se abbiamo una procedura operativa che ci consente di misurarla.⁸

Per giungere dunque a una definizione operativa di questo numero-probabilità accettiamo con Bruno de Finetti:⁹

⁸ Ad esempio e' proprio partendo dal processo di misurazione del tempo che scopriamo la relatività dei concetti quali il prima e il dopo. Di più, senza far cenno alla relatività einsteniana, scopriamo che il tempo, quello della fisica, esiste solo se esiste lo spazio e il cambiamento.

⁹ Bruno de Finetti (1906-1985:) un genio italiano e un insigne maestro. Invito i lettori ad approfondirne la conoscenza leggendo, anche su internet, notizie sui suoi contributi scientifici e sulla sua vita. Spiritoso quanto basta si ricordano alcuni suoi neovocaboli che non sono ancora passati di moda: "burosauri" per burocrati, "trinomite" per malattia di molti insegnanti fissati sugli esercizi inutili e fastidiosi quali quelli sul trinomio, "adhoccherie" per dimostrazioni "ad hoc", speciose, pesanti, prive di luce e fantasia.

Al concetto di probabilità soggettiva era giunto anche Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), matematico, logico, statistico ed economista inglese, con l'articolo *Truth and Probability* del 1926 e pubblicato postumo nel 1931. Le critiche e le discussioni sulla probabilità soggettiva di Ramsey e de Fi-

- di essere coerenti.
- di esprimere il nostro grado di certezza sulla verità di un evento E stabilendo quale somma s riteniamo sia equo pagare/ricevere per partecipare ad una scommessa che prevede una vincita/perdita R se e solo se l'evento E si rivelerà vero.¹⁰ Il rapporto s/R misura la probabilità che il soggetto attribuisce all'evento E .

La formulazione della regola della coerenza in termini più rigorosi potrebbe apparire macchinosa e la evitiamo, diciamo solo che la coerenza non permette che si possano definire le probabilità di più eventi in modo da trovare una combinazione di scommesse che consenta una vincita certa: nessun soggetto razionale accetterebbe una tale attribuzione di probabilità.

La condizione di coerenza va letta all'interno di un'algebra di eventi: il soggetto nell'attribuire una probabilità ad eventi, nel contesto di un'algebra di eventi, deve rispettare la regola che nessuna combinazione di scommesse su tali eventi consenta di acquisire un guadagno certo.

netti e l'approccio successivo di L. J. Savage e quanto ne è seguito superano i limiti del presente lavoro.

¹⁰ Ovviamente per dare significato univoco all'ammontare di tale posta, che altrimenti sarebbe "la minima possibile" (o "la massima possibile"), la notazione pagare/ricevere , vincita/perdita sta a significare che il soggetto, deve stabilire il valore di s con equità e dunque, stabilito il valore s , deve ritenere indifferente partecipare alla scommessa o come banco o come scommettitore.

Nel caso di un unico evento E , che genera l'algebra formata dagli eventi $(E, \neg E, \Phi, \Omega)$ la coerenza impone semplicemente che se p è la probabilità di E allora $1-p$ deve essere la probabilità di $\neg E$ e viceversa.

In conclusione la probabilità di un evento E , secondo l'opinione di un dato individuo, è il prezzo che egli stima equo attribuire all'importo unitario esigibile al verificarsi di E , per cui valuta indifferente partecipare alla scommessa come scommettitore o come banco.

Concludo il paragrafo con un minimo di osservazioni.

La probabilità è per sua natura soggettiva e questo termine viene purtroppo inteso infelicamente in senso negativo come se esistesse anche una probabilità oggettiva.

Quando, in base alle informazioni disponibili, si ritiene, come nei "giochi di azzardo", che nessun esito del gioco sia privilegiato, per coerenza si deve attribuire ai medesimi esiti la stessa probabilità e dunque si adotta la probabilità "quella classica": si tratta ovviamente di avere fiducia sulla imparzialità di colui che distribuisce le carte, ovvero che lancia i dadi, ovvero del meccanismo di estrazione dei numeri al lotto e così via.

Circa la "probabilità classica" è mia opinione personale che essa non possa essere che "un caso particolare di probabilità soggettiva" (l'unica probabilità possibile).

Infatti, accettando di definire la probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, accettiamo di fatto che i casi siano tutti egualmente possibili, infatti, se un soggetto coerente giudica non sussistano motivi di preferenza tra gli eventi $E_1, \dots, E_N$ di una partizione, allora il soggetto deve essere dispo-

sto a pagare/ricevere la somma $1/N$ per partecipare ad una scommessa che prevede una vincita/perdita pari ad 1 se e solo se l'evento E_i si rivelerà vero e ciò per ciascuno degli eventi E_i ; infatti combinando N scommesse, ciascuna di importo s per ciascuno degli N eventi, e dunque pagando/ricevendo $s.N$, riceverebbe /pagherebbe con certezza 1. Se fosse $s.N \neq 1$ si avrebbe un arbitraggio.¹¹

Termino il paragrafo con qualche elementare osservazione.

Se si deve valutare la probabilità relativa all'esito di una partita di calcio nessuno si sogna di invitare i giocatori a ripetere un centinaio di volte l'incontro, piuttosto si leggono i giornali specializzati, si interrogano gli esperti, si considerano le quotazioni dei bookmaker.

Se, lanciando una moneta a cui attribuisco inizialmente la stessa probabilità, riscontro 10 volte la stessa faccia, sono disposto ovviamente a modificare la mia opinione: esiste per questo il teorema di Bayes (vedi par. 4).

Non tutti gli eventi per noi incerti sono modellizzabili in modo soddisfacente nel contesto della probabilità (ovviamente soggettiva).

Esistono situazioni decisionali che presentano una tale genericità, vaghezza, indeterminatezza e contemporaneamente tali rilevanti conseguenze che nessun individuo ragionevole accetta di modellizzarle nel contesto della probabilità: la totale ignoranza non coincide con l'equiprobabilità.¹²

¹¹ Respirare e rileggere.

¹² Rimando in particolare alla logica fuzzy.

4 - Il calcolo delle probabilità

Ogni teoria scientifica può essere considerata:

- sia *sintatticamente*, cioè come un insieme di simboli combinabili tra loro attraverso le regole logiche e definite dagli assiomi, (aspetto formale)
- sia *semanticamente* cioè in relazione al significato “intuitivo-reale” (aspetto interpretativo nel dominio della realtà),
- sia in *senso pratico*, cioè in funzione delle applicazioni.

Affinchè la teoria si riveli degna di interesse è necessario che sia rilevante l'aspetto semantico.

L'aspetto semantico riguarda il significato e l'interpretazione dei simboli che devono essere ritrovati in una “rappresentazione reale” o “dominio della realtà”, cioè in un modello reale in cui si trova corrispondenza tra gli enti non definiti del sistema assiomatico ed enti del modello reale e in modo tale che gli enti reali verifichino le proprietà previste dai postulati.

Nel modello formale, originariamente proposto da Kolmogoroff e universalmente accettato, nessuna attenzione è, volutamente, dedicata all'aspetto semantico e alla determinazione di una rappresentazione “reale”.

Il Calcolo delle probabilità, sotto l'aspetto sintattico, è una disciplina matematica che utilizza il linguaggio della teoria della misura : si tratta di una misura normalizzata che può essere σ -addittiva o addittiva.

Ma il Calcolo delle probabilità non è una branca della teoria della misura.

Semanticamente il Calcolo delle probabilità, nel caso dell'unica probabilità possibile, è un'estensione della logica classica in un mondo dove regna l'incertezza, è la proposta

che la scienza offre a un soggetto ragionevole per fornirgli strumenti adeguati a comprendere e gestire con razionalità una porzione considerevole dell'incertezza che lo circonda.

Quanto alle applicazioni del Calcolo delle probabilità sono ubiquitarie ma la più importante riguarda la statistica : il Calcolo delle probabilità è il linguaggio della statistica inferenziale.

Una volta stabilito che la condizione di coerenza è formalmente equivalente alle proprietà che caratterizzano una misura, il Calcolo delle probabilità diventa dunque lo strumento indispensabile per trarre deduzioni coerenti a partire da valutazioni coerenti in un mondo dove regna l'incertezza con le regole formali della teoria della misura.

5 - La probabilità condizionale e il teorema di Bayes

La probabilità di un evento è un numero che esprime il nostro grado di fiducia sulla verità di un evento in base alle informazioni di cui disponiamo e nel rispetto di elementari condizioni di coerenza.

La probabilità dipende dunque dal complesso di informazioni che possediamo.

In questo senso, a rigore, nell'indicare la probabilità di un evento A , secondo l'opinione di un certo individuo ad un determinato istante t , dovremmo sempre utilizzare il simbolo $P(A, \Delta, t)$ per sottolineare la dipendenza, oltre che dall'evento, dal momento della valutazione, t , e dalle informazioni a quel tempo disponibili, Δ : è scontato infatti che al sopraggiungere

di nuove informazioni una valutazione di probabilità può modificarsi, anche notevolmente.

Se dunque, dopo aver valutato la probabilità di un evento A , veniamo a conoscenza che un altro evento B ha avuto luogo, ci chiediamo se e come questa nuova informazione può modificare, nel rispetto della coerenza, la nostra iniziale precedente valutazione.

Si parla in questo senso di probabilità a priori e a posteriori.

Il teorema di Bayes mostra appunto come modificare il soggettivo grado di fiducia al sopraggiungere di nuove informazioni nel rispetto della coerenza ed è proprio grazie a Bayes che le “intuizioni” di Von Mises restano “in qualche modo” recuperabili.

Indichiamo con $P(A)$ la probabilità iniziale o a priori e con $P(A|B)$ la probabilità di A subordinata al verificarsi di B , probabilità finale o a posteriori o probabilità condizionale : ¹³

$P(A)$ indica il nostro grado di fiducia sulla verità di A non sapendo se B sia vero o no, $P(A|B)$ indica il nostro grado di fiducia sulla verità di A sapendo ovvero nell'ipotesi che B sia vero.

$P(A|B)$ è il prezzo che giudichiamo equo scommettere a fronte della vincita unitaria se si verifica l'evento A avendo saputo che l'evento B si è verificato.

In base al principio di coerenza/equità si dimostra deve essere: ¹⁴

¹³ La probabilità condizionale è una probabilità in quanto soddisfa gli assiomi che definiscono una probabilità Precisamente definita una probabilità sull'algebra di eventi Π e introdotto un evento H con $P(H) \neq 0$ allora $P(\cdot|H)$ è una probabilità definita sull'algebra degli eventi che si ottengono dagli eventi dell'algebra Π facendo intersezione con l'evento H .

$$(2) \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

Come noto a partire dalla (2) si ricava la formula di Bayes che dunque mostra come si deve modificare la propria probabilità iniziale al sopraggiungere di nuove notizie rispettando la coerenza :

$$(3) \quad P(A_i | B) = P(B | A_i)P(A_i) / \sum_{j=1, \dots, k} P(B | A_j)P(A_j)$$

essendo $A_1, \dots, A_k$ una partizione dell'evento certo (o come si dice universo).

A livello mnemonico-intuitivo possiamo interpretare la formula di Bayes come quella che permette di risalire alle "cause", A_i , in base all'osservazione "degli effetti" , B , e delle probabilità iniziali delle cause.

Senza addentrarmi in un tema delicato e che richiede ampi approfondimenti, mi limito ad un esempio, spero, istruttivo per capire come utilizzare correttamente la formula stessa.

Un'urna contiene N palline di cui alcune rosse. Ho la possibilità di procedere a successive estrazioni con ripristino per

¹⁴ È importante notare che la formula (1), che nell'approccio formale di Kolmogorov viene assunta come definitoria, trova nell'approccio soggettivo piena giustificazione in quando traduce la condizione di coerenza.

Solo la probabilità soggettiva riesce a giustificarla compiutamente: essa esprime la condizione necessaria e sufficiente per mantenere la coerenza al sopraggiungere di nuova informazione.

Questa considerazione è essenziale per capire la portata e le conseguenze della formula di Bayes che, pur dimostrata attraverso una semplice manipolazione di simboli, acquista, lo ripetiamo, con la definizione (unica possibile) di probabilità soggettiva, il significato di condizione necessaria e sufficiente di coerenza.

cercare di migliorare la mia opinione iniziale sul numero di palline rosse effettivamente contenute.

Il numero di palline rosse potrebbe essere pari a 1, o a 2, ..., o a N, dunque il numero di palline rosse è una variabile casuale H che può assumere i valori 1, ..., N.

Indico con $P(A_j)$, con $j = 1, \dots, N$, le probabilità che traducono l'idea iniziale che mi sono fatto sulla composizione dell'urna.¹⁵

Procedo a 6 successive estrazioni con ripristino e trovo 4 palline rosse e 2 bianche, cioè una frequenza osservata di palline rosse pari a $2/3$. Indico con B questo evento.

Trovo ragionevole ammettere, subordinatamente a ciascuna delle ipotesi fatte per la variabile casuale H , che le estrazioni siano indipendenti ed equidistribuite. Nell'ipotesi che sia vera l'ipotesi $H = h$, allora la probabilità di estrarre una pallina rossa è: $p_h = h/N$, non rossa è $q_h = N - h/N$.

Dunque la probabilità di avere 4 rosse e due non rosse vale

$$P(B | A_h) = C_{N,h} p_h^4 \cdot q_h^2$$

A questo punto modifico le $P(A_i)$ iniziali e accetto per coerenza con Bayes:

$$P(A_i | B) = P(B | A_i)P(A_i) / \sum P(B | A_j)P(A_j).$$

¹⁵ La scelta delle $P(A_j)$ dipende dalle informazioni possedute : ad esempio, se l'urna modella una popolazione umana e le palline rosse sono individui portatori di specifiche caratteristiche genetiche, un addetto ai lavori riesce subito a circoscrivere l'ordine di grandezza delle percentuali di tali portatori.

Certo la formula risultante è assai più complicata che prendere "tout court" la frequenza $4/6$ a prescindere delle informazioni che già possiedo. E tuttavia se da tali risultati dovesse dipendere la vita di qualcuno penso che costui si fiderebbe senza esitazioni della formula complicata.

Si può intuire come dalla (3), e per questo esempio, all'aumentare dell'informazione, espressa dalla frequenza osservata, la probabilità iniziale si modifichi appunto verso la frequenza osservata e ciò per buona pace dei "frequentisti". L'argomento supera i limiti della presente nota e rimando ad un buon testo di statistica bayesiana.

6 - Commento finale

Poche pagine scritte con impegno attraverso le quali mi auguro di ottenere "molte conversioni", e non per me, ma per la coerenza scientifica e per onorare la memoria di un genio italiano non sufficientemente riconosciuto dai suoi compatrioti : Bruno de Finetti.

Per gli increduli che non ho convinto lascio comunque una riflessione consolatoria di George Box (1979): *Models of course are never true but fortunately it is only necessary that they be useful.*

Risponderò comunque volentieri a contestazioni "garbate".

Matematica e maschilismo

Due matematici David e Bob sono al bar. Bob afferma che le donne non capiscono e non capiranno mai nulla di matematica.

David, che ha adocchiato la bella cameriera Mary abbastanza appariscente, ad alta voce sostiene che le donne hanno una grande attitudine per la matematica, certamente più di quanto Bob possa immaginare. Bob, è perplesso, si alza e va al gabinetto. In sua assenza David chiama la cameriera e la istruisce:

- Ascolta Mary, tra poco, quando Bob sarà tornato, io ti farò una domanda e tu mi dovrai rispondere: "meno logaritmo del modulo di cosen iks". Capito? Prova a ripetere.

Lei ripete: - Meno il ritmo... del cosacco? E David: - Ci siamo quasi: "meno logaritmo del modulo di cosen iks".

E lei: - Meno lo garitmo delmodu lodi cosicchiso? E lui, che ha visto Bob uscire dalla toilette, le dice: - Va bene,... va bene...vai, vai... Bob, intanto, ritorna al banco e David gli propone di fare una prova:

- Secondo me anche le cameriere dei bar conoscono il calcolo integrale.

- Ma va? Impossibile!-

Vogliamo fare una prova? Ora chiederò a quella cameriera di risolvere un integrale e vedremo cosa risponderà. Chiama la cameriera e le chiede: - Signorina, scusi, può dirmi quanto vale l'integrale della tangente di x in dx ?

La cameriera ci pensa un attimo poi risponde, decisa: - Meno logaritmo del modulo di cosen x - e mentre se si allontana, ancheggiando vistosamente, si volta indietro e dice con un sorriso smagliante: - Più una costante, naturalmente!

Proprietà degli insiemi completi del IV ordine

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.090

Sunto: Nell'articolo: "Insiemi completi del terzo ordine" di Francia F., pubblicato sul *Periodico di matematica*, Vol. I(1-2), sono esposte le condizioni di completezza di un insieme ternario di punti materiali posizionati su una retta; da quello studio risulta che la completezza di un insieme ternario deriva dalle distanze intercorrenti fra i punti dell'insieme di sostegno e le relative masse. Anche nel presente articolo si ricercano le condizioni di completezza di un insieme di punti materiali che, a differenza del caso precedente, sono posizionati sul piano. I risultati di questo studio sono formalmente analoghi a quelli precedentemente citati: le condizioni di completezza di un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati appartenenti al piano π derivano dalla relazione intercorrente fra le masse degli elementi dell'insieme completo I e le aree dei triangoli i cui vertici sono i punti di sostegno di J .

Parole Chiave: Insiemi di punti materiali equivalenti, Quadrato di un insieme di punti materiali.

Abstract: In the article: "Complete sets of the third order" by Francia F., published in the *Periodical of Mathematics*, Vol. I(1-2), are exposed the conditions of completeness of a ternary set of material points placed on a straight line; from that study it results that the completeness of a ternary set derives from the distances between the points of the set and their masses. Also in the present paper, we search for the conditions of completeness of a set of material points which, unlike the previous case, are positioned on the plane. The results of this study are

formally analogous to those previously mentioned: the conditions of completeness of a quaternary set containing triads of unaligned points belonging to the plane π are derived from the relation between the masses of the elements of the complete set I and the areas of the triangles whose vertices are the support points of J .

Keywords: *Equivalent sets of material points, Square of a set of material points.*

1 – Cenni sugli insiemi quaternari

Nota 1: Per rendere più agevole la lettura del presente articolo, evitando consultazioni di lavori pregressi, sono richiamati, in modo sommario, alcuni enunciati di teoremi e alcune definizioni contenute nell'articolo: "Insiemi del IV ordine appartenenti al piano".

Sia J un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati del piano π . Siano (X,Y) e (W,Z) gli elementi di una qualsiasi partizione di J in coppie di punti; siano r e t le rette passanti, rispettivamente, per (X,Y) e (W,Z) . Fra le partizioni consideriamo quelle contenenti coppie che individuano rette r e t con intersezione H (escludiamo coppie appartenenti a rette parallele). Si hanno i seguenti casi:

Caso a)

Se il punto H è interno ai segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$, diciamo che i due insiemi ternari (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni. In questo caso si dimostra che tutti gli elementi di $J = (X,Y,W,Z)$ sono esterni (o aderenti) (fig.1). I segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$ sono detti diagonali. Il poligono $P(J)$ è detto quadrilatero.

Caso b)

Se H è esterno ai segmenti $[X,Y]$ e $[W,Z]$ diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni. In questo caso si

dimostra che tutti gli elementi di J sono esterni (o aderenti) all'insieme (fig.2).

Anche in questo caso $P(J)$ è detto quadrilatero

Caso c)

Se H è esterno al segmento $[X,Y]$ ed interno a $[W,Z]$ (o viceversa) diciamo che (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni; in particolare (X,H,Y) è detto coniugato esterno di J e (W,H,Z) è detto coniugato interno di J (o viceversa). In questo caso si dimostra che J contiene un punto interno; i rimanenti punti di J sono esterni (o aderenti) (fig.3)

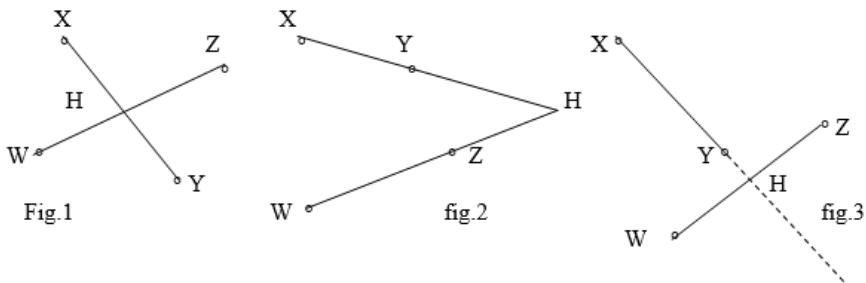
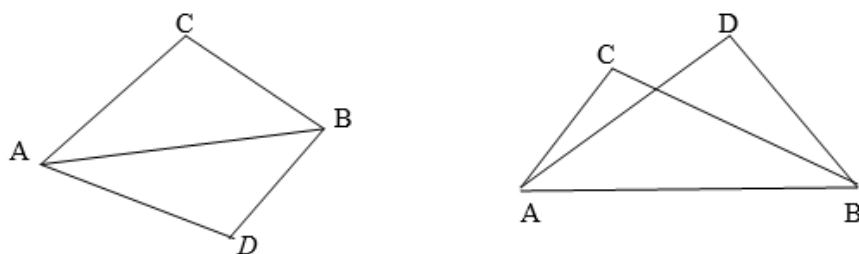


Fig.1 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati interni.

Fig.2 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati esterni.

Fig.3 Gli insiemi (X,H,Y) e (W,H,Z) sono coniugati alterni.

Def.1: Sia (A, B) la coppia di punti comuni ai due insiemi ternari $J' = (A,B,C)$ e $J'' = (A,B,D)$ appartenenti al piano π . Se C e D appartengono, rispettivamente, ai semipiani opposti individuati dalla retta r passante per A,B , allora J' e J'' sono detti adiacenti. In caso contrario sono dette non adiacenti.

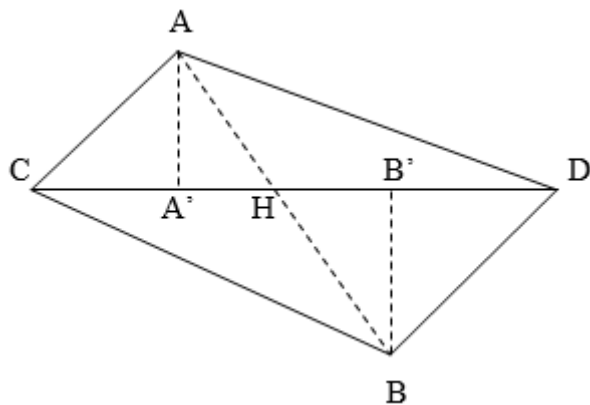


Nota 2: Per procedere più speditamente nell'esposizione che segue introduciamo alcuni simboli.

Con $T(J)$ intendiamo riferirci al triangolo i cui vertici sono i punti dell'insieme $J = (A, B, C)$. Indichiamo con S_{ABC} l'area del triangolo $T(J)$. Analogamente, con $Q(J)$, intendiamo riferirci ad un quadrilatero i cui vertici sono gli elementi di $J = (A, B, C, D)$. Indichiamo con S_{ABCD} l'area del rettangolo $Q(J)$.

2 – Masse e superfici

TH.1: Sia $J = (A, B, C, D)$ un insieme di punti del piano Π . Se (A, H, B) e (C, H, D) sono coniugati interni, allora, l'insieme $(S_{CBD} \ A, S_{DAC} \ B, -S_{BDA} \ C, -S_{ACB} \ D)$ è completo.



Siano A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B su $[C, D]$.

Posto $d(A, A') = h_1$ e $d(B, B') = h_2$ si ha :

$$S_{ACH} = \frac{1}{2} d(C, H) \cdot h_1 \text{ e } S_{AHD} = \frac{1}{2} d(H, D) \cdot h_1 \text{ da cui :}$$

$$\frac{S_{ACH}}{d(C, H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H, D)} \quad (2,1)$$

Analogamente , essendo

$$S_{BCH} = \frac{1}{2} d(C, H) \cdot h_2 \text{ e } S_{BHD} = \frac{1}{2} d(H, D) \cdot h_2 \text{ si ha :}$$

$$\frac{S_{BCH}}{d(C, H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H, D)} \quad (2,2)$$

Sommando membro a membro la (2,1) e la (2,2), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(C, H)} + \frac{S_{BCH}}{d(C, H)} = \frac{S_{AHD}}{d(H, D)} + \frac{S_{BHD}}{d(H, D)}$$

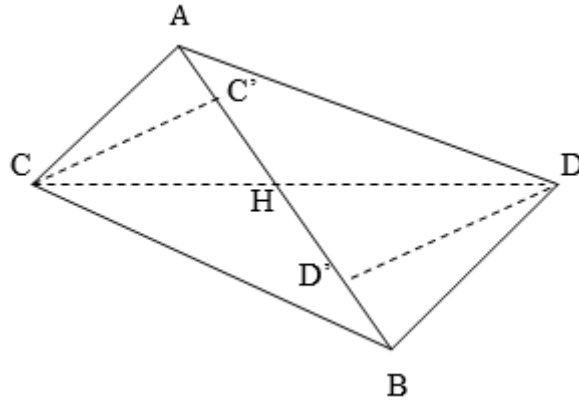
Essendo $S_{ACH} + S_{BCH} = S_{ACB}$ e $S_{AHD} + S_{BHD} = S_{ABD}$,
la precedente relazione diviene:

$$\frac{S_{ACB}}{d(C, H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H, D)}$$

$$\text{Posto } \frac{S_{ACB}}{d(C, H)} = \frac{S_{ABD}}{d(H, D)} = \frac{1}{K'}, \text{ con } K' \in R^*, \text{ si ha:}$$

$$\begin{aligned} d(C, H) &= K' \cdot S_{ACB}, \quad d(H, D) = K' \cdot S_{ABD}, \quad d(C, D) = \\ &= K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \end{aligned} \quad (2,3)$$

Analogamente, siano C' e D' le proiezioni ortogonali di C e D su $[A,B]$. Posto $d(C,C') = h_3$, $d(D,D') = h_4$, si ha:



$$S_{ACH} = \frac{1}{2} d(A,H) \cdot h_3 \text{ e } S_{CHB} = \frac{1}{2} d(H,B) \cdot h_3, \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} \quad (2,1')$$

$$S_{AHD} = \frac{1}{2} d(A,H) \cdot h_4 \text{ e } S_{BHD} = \frac{1}{2} d(H,D) \cdot h_4, \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)} \quad (2,2')$$

Sommando membro a membro la (2,1') e la (2,2'), si ha:

$$\frac{S_{ACH}}{d(A,H)} + \frac{S_{AHD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CHB}}{d(H,B)} = \frac{S_{BHD}}{d(H,B)}$$

che possiamo riscrivere così:

$$\frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)}$$

$$\text{Posto } \frac{S_{ACD}}{d(A,H)} = \frac{S_{CBD}}{d(H,B)} = \frac{1}{K''}, \text{ con } K'' \in \mathbb{R}^*, \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} d(A,H) &= K'' \cdot S_{ACD}, \quad d(H,B) = K'' \cdot S_{CBD}, \quad d(A,B) = \\ &= K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) \end{aligned} \quad (2,3')$$

Sostituendo le (2,3) e le (2,3') negli insiemi completi:

$$I' = [d(H,D) \cdot C, -d(C,D) \cdot H, d(C,H) \cdot D] \text{ e}$$

$$I'' = [d(H,B) \cdot A, -d(A,B) \cdot H, d(A,H) \cdot B] \text{ si ha:}$$

$$I' = [K' \cdot S_{ABD} \cdot C, -K' \cdot (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, K' \cdot S_{ACB} \cdot D]$$

$$I'' = [K'' \cdot S_{CBD} \cdot A, -K'' \cdot (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, K'' \cdot S_{ACD} \cdot B]$$

Dividendo I' per K' , I'' per K'' , sottraendo un insieme all'altro, tenendo conto dell'eguaglianza

$$\begin{aligned} (S_{ACB} + S_{ABD}) &= (S_{ACD} + S_{CBD}), \text{ si ha: } I = \frac{1}{K''} I'' - \frac{1}{K'} I' = \\ &= [S_{CBD} \cdot A, - (S_{ACD} + S_{CBD}) \cdot H, S_{ACD} \cdot B] - \\ &- [S_{ABD} \cdot C, - (S_{ACB} + S_{ABD}) \cdot H, S_{ACB} \cdot D] = \\ &= (S_{CBD} \cdot A, S_{ACD} \cdot B, -S_{ABD} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D). \end{aligned}$$

TH.2: Siano (A,H,B) e (C,H,D) i coniugati interni dell'insieme quaternario del piano $J = (A,B,C,D)$ contenente terne di punti non allineati. Se $I' = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ è un insieme completo, con $m, n, s, h \in \mathbb{R}^+$, allora sussistono le seguenti eguaglianze:

$$m = K \cdot S_{BCD}, n = K \cdot S_{ACD}, s = K \cdot S_{BDA}, h = K \cdot S_{ABC}, \quad (2,4)$$

con $K \in \mathbb{R}^*$.

Supponiamo che $I' = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ sia completo; per il TH.1, anche I' insieme

$I = (S_{CBD} \cdot A, S_{DAC} \cdot B, -S_{BDA} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D)$ è completo.

Conseguentemente è completo

$$I'' = I' - K \cdot I = [(m - K \cdot S_{CBD}) \cdot A, (n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B, \\ - (s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, - (h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D].$$

Attribuiamo a K un reale che annulli una qualsiasi massa di I'' . Ad esempio, posto:

$$K = \frac{m}{S_{CBD}}, \text{ si ha: } (m - K \cdot S_{CBD}) = 0 \text{ e } I \text{ diviene:}$$

$$I''' = [(n - K \cdot S_{DAC}) \cdot B, -(s - K \cdot S_{BDA}) \cdot C, -(h - K \cdot S_{ACB}) \cdot D].$$

Poiché I''' è un insieme ternario di punti non allineati, essendo completo deve essere improprio: tutte le masse di I''' devono essere nulle:

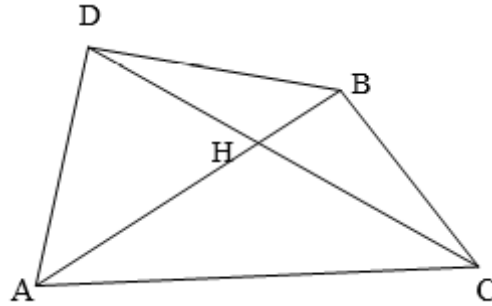
$$(n - K \cdot S_{DAC}) = 0, (s - K \cdot S_{BDA}) = 0, (h - K \cdot S_{ACB}) = 0.$$

Conseguentemente le (2,4) risultano verificate.

Il precedente teorema permette di affermare che il rapporto fra masse di punti materiali di I e I' , egualmente posizionati, è costante. Diciamo, allora, che I' appartiene alla stessa classe individuata da I . Gli insiemi I e I' sono detti equivalenti.

TH.3: Sia $I = (m \cdot A, n \cdot B, -s \cdot C, -h \cdot D)$ un insieme quaternario completo con sostegno

$J = (A, B, C, D)$ e masse $m, n, s, h \in \mathbb{R}^+$. Il poligono $P(J)$ è un quadrilatero le cui diagonali sono $[A, B]$ $[C, D]$.

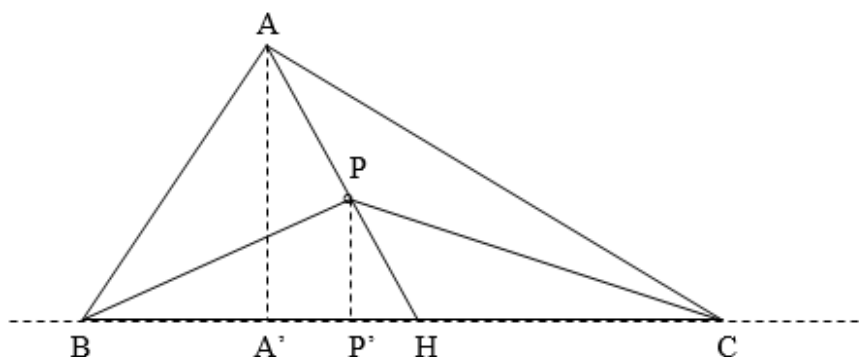


Sia $-(m+n) \cdot H$ il complementare di $m \cdot A$ e $n \cdot B$. Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo $I' = [m \cdot A, -(m+n) \cdot H, n \cdot B]$, risulta che il punto H è interno a (A, H, B) . Effettuando la differenza $I' - I = I''$, essendo $m + n = s + h$, si ha:

$$I'' = [s \cdot C, -(m+n) \cdot H, h \cdot D] = [s \cdot C, -(s+h) \cdot H, h \cdot D].$$

Anche in questo caso il punto H di $J'' = (C, H, D)$, sostegno dell'insieme completo I'' , è interno a (C, D) . Così, essendo gli insiemi di sostegno di $I' = [m \cdot A, -(m+n) \cdot H, n \cdot B]$ e $I'' = [s \cdot C, -(s+h) \cdot H, h \cdot D]$ coniugati interni, per la nota 1, caso a), $P(J)$ è un quadrilatero e $[A, B]$, $[C, D]$ sono le diagonali.

TH.4: Sia $J = (A, B, C, P)$ un insieme di punti appartenenti a Π . Se (A, P, H) e (B, H, C) sono coniugati alterni, (cioè H è interno di $[B, H, C]$ ed esterno di $[A, P, H]$), allora, l'insieme $(S_{PCB} \cdot A, S_{PCA} \cdot B, S_{ABP} \cdot C, -S_{ABC} \cdot P)$ è completo.



Siano A' e P' le proiezioni ortogonali di A e P su $[B,C]$.

Posto $d(A,A') = h_1$ e $d(P,P') = h_2$, si ha: $S_{ABH} = \frac{1}{2} d(B,H) \cdot h_1$ e

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} d(H,C) \cdot h_1 \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H)} \quad (2,5)$$

$$S_{PBH} = \frac{1}{2} d(B,H) \cdot h_2 \text{ e } S_{PCH} = \frac{1}{2} d(C,H) \cdot h_2 \text{ da cui:}$$

$$\frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{PCH}}{d(C,H)} \quad (2,6)$$

Sottraendo la (2,5) alla (2,6), si ha:

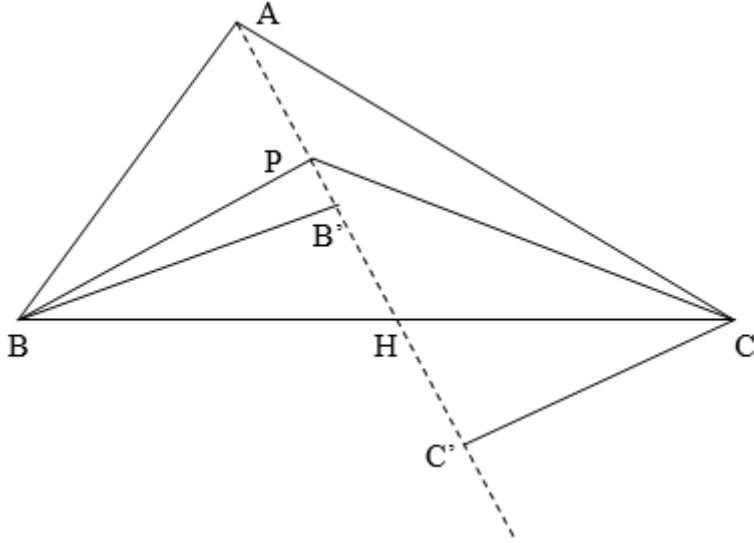
$$\frac{S_{ABH}}{d(B,H)} - \frac{S_{PBH}}{d(B,H)} = \frac{S_{AHC}}{d(C,H)} - \frac{S_{PCH}}{d(C,H)}.$$

Essendo

$S_{ABH} - S_{PBH} = S_{ABP}$ e $S_{AHC} - S_{PCH} = S_{APC}$, la precedente

relazione diviene: $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)}$

Posto $\frac{S_{ABP}}{d(B,H)} = \frac{S_{APC}}{d(H,C)} = \frac{1}{K'}$, si ha:



$$\begin{aligned} d(B,H) &= K' \cdot S_{ABP}, d(C,H) = K' \cdot S_{APC}, d(B,C) = \\ &= K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \end{aligned} \quad (2,7)$$

Analogamente, siano C' e B' le proiezioni ortogonali di C e B sulla retta s passante per (A,P) .

Posto $d(B,B') = h_3$ e $d(C,C') = h_4$; si ha:

$$\begin{aligned} S_{ABP} &= \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_3, S_{BPH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_3 \text{ da cui:} \\ \frac{S_{ABP}}{d(A,P)} &= \frac{S_{BPH}}{d(P,H)} \end{aligned} \quad (2,5')$$

$$\begin{aligned} S_{APC} &= \frac{1}{2} d(A,P) \cdot h_4, S_{PCH} = \frac{1}{2} d(P,H) \cdot h_4 \text{ da cui:} \\ \frac{S_{APC}}{d(AP)} &= \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \end{aligned} \quad (2,6')$$

Sommando membro a membro la (2,5') e la (2,6'), si ha:

$$\frac{S_{ABP}}{d(A,P)} + \frac{S_{APC}}{d(AP)} = \frac{S_{BPH}}{d(P,H)} + \frac{S_{PCH}}{d(P,H)} \quad \text{da cui, posto}$$

$$\frac{S_{ABP}+S_{APC}}{d(A,P)} = \frac{S_{BPC}}{d(P,H)} = \frac{1}{K''} , \text{ si ha:}$$

$$d(A,P) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) , d(P,H) = K'' \cdot S_{BPC} ,$$

$$d(A,H) = K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \quad (2,7')$$

Sostituendo le (2,7) e le (2,7') negli insiemi completi:

$I_1 = [d(H,C) \cdot B , - d(B,C) \cdot H, d(B,H) \cdot C]$ e $I_2 = [d(P,H) \cdot A , - d(A,H) \cdot P, d(A,P) \cdot H]$ si ha:

$$I_1 = [K' \cdot S_{APC} \cdot B, - K' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H, K' \cdot S_{ABP} \cdot C]$$

$$I_2 = [K' \cdot S_{BPC} \cdot A, - K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P, K'' \cdot (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H]$$

Dividendo I_1 per K' e I_2 per K'' si ottengono gli equivalenti

$$I' = [S_{APC} \cdot B , - (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H, S_{ABP} \cdot C]$$

$$I'' = [S_{BPC} \cdot A , - (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P, (S_{ABP} + S_{APC}) \cdot H]$$

Effettuando l'unione degli insiemi I' e I'' si ottiene:

$$I' \cup I'' = [S_{BPC} \cdot A, S_{APC} \cdot B , S_{ABP} \cdot C, - (S_{ABP} + S_{APC} + S_{BPC}) \cdot P].$$

Tenendo conto che $(S_{ABP}+S_{APC} + S_{BPC})=S_{ABC}$, si ha la tesi.

Così come i teoremi 2 e 3 sono strettamente collegati al TH.1, allo stesso modo, al TH.4 sono collegati i teoremi 5 e 6 che enunciamo omettendone la dimostrazione.

TH.5: Sia $J = (A,B,C,P)$ un insieme di punti del piano π . Se (A,P,H) e (B,H,C) sono coniugati alterni essendo P interno ad (A,H) ed H interno a $[B,C]$, allora, se $I'=(m \cdot A, n \cdot B, s \cdot C, -h \cdot P)$ è un insieme completo, le masse $m, n, s, h \in \mathbb{R}^*$ sono così definite:

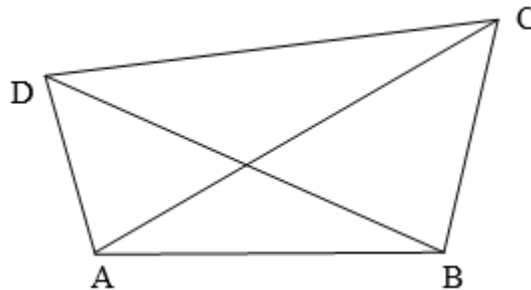
$$m = K \cdot S_{BCP}, n = K \cdot S_{ACP}, s = K \cdot S_{BPA}, h = K \cdot S_{ABC}$$

TH.6: Sia J il sostegno dell'insieme quaternario I contenente tre punti materiali di segno concorde ed un punto

di segno discorde rispetto ai precedenti. L'insieme J contiene un punto interno.

3 - Applicazioni

Applicazione 1: Siano (A,B,D) e (A,D,C) due insiemi ternari non adiacenti e risulti: $d(A,B) = 6$, $d(B,D) = 4\sqrt{5}$, $d(A,D) = 2\sqrt{5}$, $d(A,C) = 7\sqrt{2}$, $d(D,C) = 3\sqrt{10}$. Trovare $d(B,C)$.



L'insieme completo con sostegno $J = (A,B,C,D)$ è
 $(S_{BCD} A, S_{ACD} B, S_{ABD} C, S_{ABC} D)$.

Utilizzando la formula di Eulero:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \text{ si ha: } S_{ABD} = 12, S_{ACD} = 21.$$

Posto $S_{ABC} = x$, $S_{BCD} = y$, essendo: $S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$ si ha: $12 + y = 21 + x$ da cui $S_{BCD} = x + 9$. Affinché l'insieme $I = [(x + 9) A, -21 B, 12 C, -x D]$ sia completo deve risultare:

$$A \cdot I = D \cdot I.$$

Sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} & -21[d(A,B)]^2 + 12[d(A,C)]^2 - x[d(A,D)]^2 = (x+9)[d(D,A)]^2 \\ & -21[d(D,B)]^2 + 12[d(D,C)]^2 \end{aligned}$$

da cui $x = 21$. Sostituendo si ha: $S_{ABD} = 12, S_{ADC} = 21$,

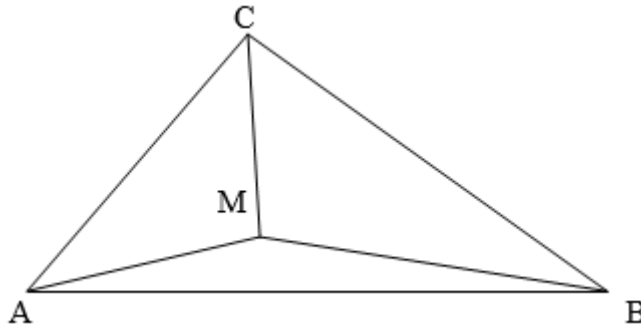
$S_{BCD} = 30$, $S_{ABC} = 21$ e l'insieme I diviene: $I = [30 \cdot A, -21 \cdot B, 12 \cdot C, -21 \cdot D]$.

Per calcolare $d(B,C)$ risolviamo l'equazione $B \cdot I = D \cdot I$:
 $30[d(B,A)]^2 + 12[d(B,C)]^2 - 21[d(B,D)]^2 = 30[d(DA)]^2$
 $-21[d(D,B)]^2 + 12[d(D,C)]^2$, da cui $d(B,C) = 5\sqrt{2}$.

Applicazione 2: Sia $J = (A,B,C,M)$ un insieme di punti del piano con M interno a J e risulti: $d(A,M) = 2\sqrt{5}$,
 $d(B,M) = 2\sqrt{17}$, $d(C,M) = 5\sqrt{2}$. Trovare $d(A,B)$, $d(B,C)$, $d(C,A)$.

Sapendo che si ha:

$$\frac{S_{BCM}}{9} = \frac{S_{CAM}}{5} = \frac{S_{ABM}}{4} = K \quad (3,1)$$



dalla (3,1) si ha: $S_{BCM} = 9 \cdot K$, $S_{CAM} = 5 \cdot K$, $S_{ABM} = 4 \cdot K$, $S_{ABC} = 18 \cdot K$, con $K \in \mathbb{R}^*$; per il TH.4, l'insieme $(9K \cdot A, 5K \cdot B, 4K \cdot C, -18K \cdot M)$ è completo e completo è l'equivalente
 $I = (9 \cdot A, 5 \cdot B, 4 \cdot C, -18 \cdot M)$ pertanto si ha: $A \cdot I = M \cdot I$, $B \cdot I = M \cdot I$, $C \cdot I = M \cdot I$, da cui

$$\begin{cases} 5[d(A,B)]^2 + 4[d(A,C)]^2 - 18[d(A,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,B)]^2 + 4[d(B,C)]^2 - 18[d(B,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \\ 9[d(A,C)]^2 + 5[d(B,C)]^2 - 18[d(C,M)]^2 = 9[d(M,A)]^2 + 5[d(M,B)]^2 + 4[d(M,C)]^2 \end{cases}$$

Posto $d(A,B) = x$, $d(B,C) = y$, $d(C,A) = z$, si ha:

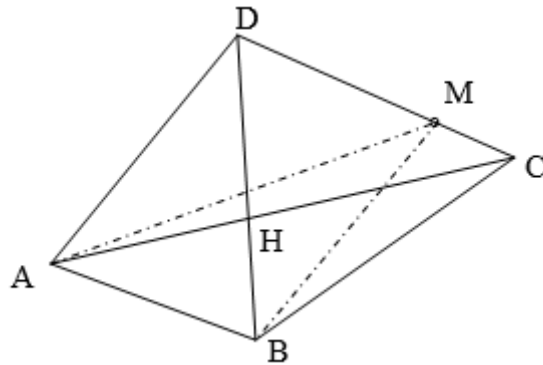
$$\begin{cases} 5x^2 + 4z^2 = 1080 \\ 9x^2 + 4y^2 = 1944 \\ 9z^2 + 5y^2 = 1620 \end{cases} \quad \text{da cui } x = 12, y = 9\sqrt{2}, z = 3\sqrt{10}$$

Applicazione 3: Sia H il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero T(J), con $J = (A,B,C,D)$, e risulti:

$$S_{CBD} = 36, S_{DAC} = 72, S_{BDA} = 108, S_{ACB} = 72 \quad (3,2)$$

Sia M un punto sul lato [D,C] e risulti: $\frac{d(D,M)}{d(M,C)} = 3$.

Trovare: S_{BMD} , S_{MDA} , S_{ABM} .



Per il TH.1 l'insieme completo con sostegno J è:

$$I' = (S_{CBD} \cdot A, -S_{DAC} \cdot B, S_{BDA} \cdot C, -S_{ACB} \cdot D) \text{ da cui}$$

$$I' = (36 \cdot A, -72 \cdot B, 108 \cdot C, -72 \cdot D).$$

L'insieme completo avente sostegno (C,M,D) è

$$I'' = (D, -4M, 3C). \text{ Ricaviamo l'insieme completo con sostegno}$$

$$J''' = (A,B,M,D): I''' = \{I' \cup [(-36)I'']\} = (36A, -108D, -72B, 144M).$$

Poiché, per il TH.2, deve risultare:

$$36 = K \cdot S_{BMD}, 108 = K \cdot S_{ABM}, 144 = K \cdot S_{BDA}, 72 = K \cdot S_{ADM} \quad (3,3)$$

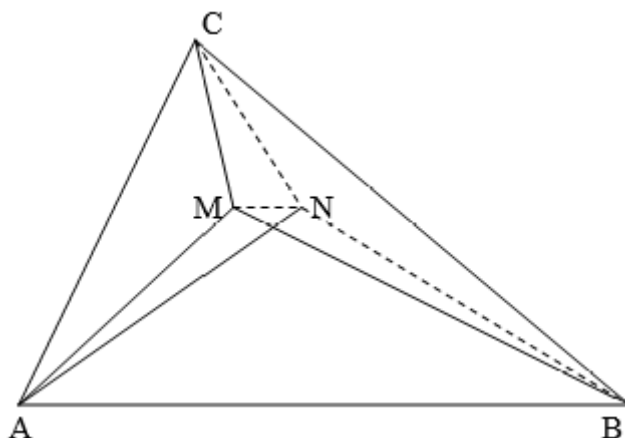
con $K \in \mathbb{R}^*$, essendo per le (3,2) $144 = K \cdot S_{BDA} = K \cdot 108$, si ha $K = \frac{4}{3}$; sostituendo la costante K così ricavata nelle (3,3), si ha:
 $S_{BDA} = 108, S_{BMD} = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27, S_{ABM} = 108 \cdot \frac{3}{4} = 81,$
 $S_{ADM} = 72 \cdot \frac{3}{4} = 54.$

Applicazione 4: Sia $J' = (A, B, C, M)$ un insieme di punti del piano con M interno a J' e risulti:

$$S_{ABM} = 64, S_{BCM} = 28, S_{AMC} = 20, S_{ABC} = 112 \quad (3,4)$$

Sia N interno di $J'' = (C, M, B, N)$ e risulti:

$$S_{MBN} = 12, S_{BCN} = 7, S_{MNC} = 9, S_{MBC} = 28. \text{ Trovare } S_{MNA}.$$



L'insieme completo I' , avente sostegno J' , è:
 $I' = (28 A, 20 B, 64 C, - 112 M).$

L'insieme completo I'' , avente sostegno J'' , è:
 $I'' = (9 B, 7 M, 12 C, - 28 N).$

Effettuando l'unione dei due insiemi I' e I'' moltiplicati, rispettivamente, per $\frac{9}{4}$ e per -5 , riducendo e dividendo per 7 si ha :

rid. $\left[\left(\frac{9}{4} I' \right) \cup (-5 I'') = (63 A, 45 B, 144 C, -252 M, -45 B - 35 M, -60 C, 140 N) == (63 A, 84 C, 140 N, -287 M) \right]$

Dividendo per 7 l'equivalente è: $(9 A, 12 C, 20 N, -41 M)$

Per il TH.4, essendo:

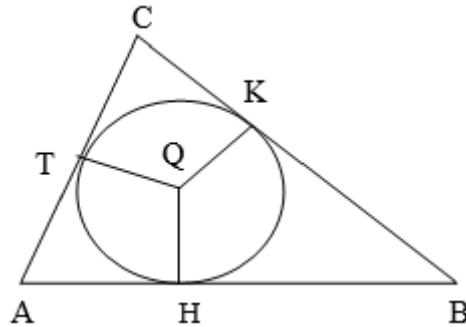
$$S_{ANM} = 12 \cdot K, S_{NCM} = K \cdot 9, S_{AMC} = K \cdot 20, S_{ANC} = K \cdot 41 \quad (3,5)$$

con $K \in \mathbb{R}^*$, tenendo conto della (3,4) si ha:

$$S_{ACM} = 20 = K \cdot 20 = S_{ACM} \text{ da cui } K = 1.$$

Sostituendo nelle (3,5) si ha: $S_{ANM} = 12 \cdot 1 = 12$.

Applicazione 5: Sia Q l'incentro del triangolo T(J') con $J' = (A, B, C)$. Siano H, K, T le proiezioni ortogonali di Q, rispettivamente, sui lati [A,B], [B,C], [C,A]. Trovare l'insieme completo I con sostegno $J = (A, B, C, Q)$.



Posto $d(A, B) = c$, $d(B, C) = a$, $d(C, A) = b$, essendo r il raggio della circonferenza inscritta in T(J), si ha:

$$S_{B,C,Q} = \frac{1}{2} a r, S_{CAQ} = \frac{1}{2} b r, S_{ABQ} = \frac{1}{2} c r,$$

$$S_{A,B,C} = S_{B,C,Q} + S_{CAQ} + S_{ABQ} = \frac{1}{2} (a+b+c) r.$$

Tenendo conto del TH.4 si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{2} a r \right) A, \left(\frac{1}{2} b r \right) B, \left(\frac{1}{2} c r \right) C, - \left(\frac{1}{2} (a+b+c) r \right) Q \right]$$

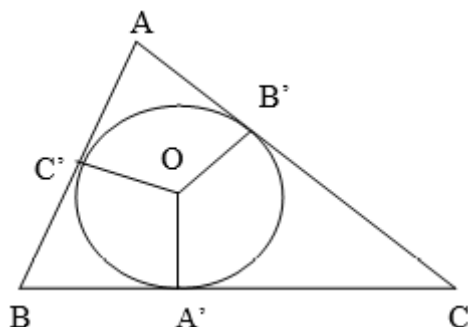
Moltiplicando per $\frac{2}{r}$ si ha l'equivalente:

$$I = [a \cdot A, b \cdot B, c \cdot C, -(a+b+c) \cdot Q].$$

Applicazione 6 Sia S la circonferenza di centro O inscritta nel triangolo $T(J)$, con $J = (A, B, C)$ e A', B', C' siano i punti di tangenza di S , rispettivamente, con i lati $[B, C]$, $[A, C]$, $[A, B]$.

Mostrare che: $S_{AOB} = K \cdot S_{A'O'B'}$, $S_{BOC} = K \cdot S_{B'O'C'}$,

$S_{COA} = K \cdot S_{C'O'A'}$ con $K \in \mathbb{R}$.



Dalla geometria elementare risulta:

$$d(A, C') = d(A, B') = u, d(B, C') = d(B, A') = v, d(C, A') = d(C, B') = w.$$

Tenendo conto dell'applicazione 5 l'insieme:

$I^0 = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O]$ risulta completo. Anche gli insiemi $I' = [vA, -(u + v)C', uB]$,

$I'' = [wB, -(w + v)A', vC]$, $I''' = [uC, -(u + w)B', wA]$, risultano completi. Dall'unione di I' , I'' , I''' si ottiene:

$$I^* = I' \cup I'' \cup I''' = [(v + w)A, (u + w)B, (v + u)C, -(u + v)C', -(w + v)A', -(u + w)B'].$$

Effettuando la differenza dei due insiemi $I^0 - I^*$ si ottiene:

$$\begin{aligned} I &= [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O - (v + w)A, - \\ &-(u + w)B, -(v + u)C, (u + v)C', (w + v)A', (u + w)B'] = \\ &= [(w + v)A', (u + w)B', (u + v)C', -2(u + v + w)O]. \end{aligned}$$

Confrontando i due insiemi completi

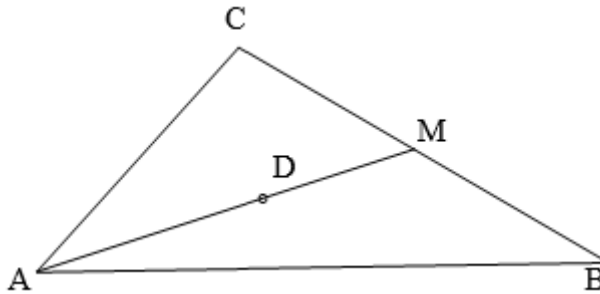
$$I^o = [(w + v)A, (u + w)B, (u + v)C, -2(u + v + w)O] \quad e$$

$$I = [(w + v)A', (u + w)B', (u + v)C', -2(u + v + w)O]$$

risulta che le masse di I^o , riferite ai punti A, B, C, O, sono uguali, rispettivamente, alle masse di A', B', C', O pertanto si ha:

$$S_{AOB} = K \cdot S_{A'O B'}, S_{BOC} = K \cdot S_{B'O C'}, S_{COA} = K \cdot S_{C'O A'}, \text{ con } K \in \mathbb{R}^*.$$

Applicazione 7: Sia D il punto interno di $J = (A, B, C, D)$, insieme contenente terne di punti non allineati del piano π . Risulti: $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, con $K \in \mathbb{R}^*$. Ricavare l'insieme completo con sostegno J e verificare che $d(A, D) = 2 d(D, M)$.



Essendo $S_{ABC} = 3 K$, $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{CAD} = K$, si ha:

$$(K \cdot A, K \cdot B, K \cdot C, -3K \cdot D).$$

Dividendo per K si ha:

$$I = (A, B, C, -3 \cdot D) \quad (3,6)$$

Indicando con $-2 M$ il complementare di (B,C) risulta completo l'insieme

$$I' = (B, -2 M, C) \quad (3,7)$$

da cui si deduce: $\frac{d(B, M)}{d(M, C)} = 1$.

Sottraendo la (3,7) alla (3,6) si ottiene l'insieme completo

$I'' = I - I' = (A, -3D, 2M)$ da cui si deduce: $\frac{d(A,D)}{d(D,M)} = 2$.

Nota 3. Dato un insieme quaternario completo

$I = (s_1 \cdot P_1, s_2 \cdot P_2, s_3 \cdot P_3, s_4 \cdot P_4)$ è sempre possibile trovare l'equivalente I' le cui masse siano espresse mediante due parametri: m, n . Infatti, moltiplicando le masse di I per un $K \in \mathbb{R}^*$ si ottiene un insieme completo equivalente a I' ; ponendo, ad esempio, $K = \frac{1}{s_3}$, si ha:

$$I' = \left(\frac{s_1}{s_3} \cdot P_1, \frac{s_2}{s_3} \cdot P_2, \frac{s_3}{s_3} \cdot P_3, \frac{s_4}{s_3} \cdot P_4 \right) \quad (3,8)$$

Effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\frac{s_1}{s_3} = m, \quad \frac{s_2}{s_3} = n, \quad \text{essendo} \quad \frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2}{s_3} + \frac{s_3}{s_3} + \frac{s_4}{s_3} = 0, \quad \text{si ha:}$$

$$m + n + 1 + \frac{s_4}{s_3} = 0$$

da cui $\frac{s_4}{s_3} = -(m + n + 1)$. Sostituendo nella (3,8) si ha:

$$I' = [m \cdot P_1, n \cdot P_2, 1 \cdot P_3, -(m + n + 1) \cdot P_4]$$

da cui risulta che le masse sono espresse mediante m e n . Naturalmente I' non è l'unico insieme equivalente a I . E' possibile ricavarne altri, formalmente distinti da I' , elaborando diversamente le masse di I .

Una ulteriore elaborazione di un insieme completo le cui masse siano espresse mediante due parametri è la seguente:

Nota 4. Siano $J' = (A, H, C)$ e $J'' = (B, H, D)$ i coniugati interni di un insieme quaternario del piano: $J = (A, B, C, D)$. Gli insiemi completi aventi sostegno J' e J'' sono:

$[m A, -(m + s) H, s C]$ e $[(n B, -(n + h) H, h D]$.
Dividendo i due insiemi, rispettivamente, per $(m + s)$ e per $(n + h)$ si ottiene:

$$\left(\frac{m}{m+s} A, -H, \frac{s}{m+s} C \right) \text{ e } \left(\frac{n}{n+h} B, -H, \frac{h}{n+h} D \right).$$

Sottraendo l'uno dall'altro si ha:

$$\left(\frac{m}{m+s} A, \frac{s}{m+s} C, -\frac{n}{n+h} B, -\frac{h}{n+h} D \right) \quad (3,9)$$

$$\text{Posto} \quad \frac{m}{m+s} = u \text{ e } \frac{n}{n+h} = v \quad (3,10)$$

si ha:

$$\frac{s}{m+s} = 1 - \frac{m}{m+s} = 1 - u \text{ e } \frac{h}{n+h} = 1 - \frac{n}{n+h} = 1 - v \quad (3,11)$$

Sostituendo le (3,10) e le (3,11) nella (3,9) si ha:

$$I = [u A, (1 - u)C, -v B, -(1 - v)D]$$

Risulta evidente che l'insieme completo I dipende da due parametri: u e v.

4 - L'equazione $I^2 = 0$ essendo I completo

Def.2: Il prodotto di due insiemi di punti materiali I' e I'' , e scriviamo $I' \cdot I''$, è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascun punto materiale di I' per ciascun punto materiale di I'' .

Nota 5. È facile mostrare che il prodotto di due insiemi di punti materiali gode della proprietà commutativa e distributiva.

$$I' \cdot I'' = I'' \cdot I'$$

$$I \cdot I^* = I \cdot (I' \cup I'') = (I \cdot I' + I \cdot I'')$$

essendo I' e I'' una partizione di I^* .

Def.3: È detto quadrato di un insieme di punti materiali, e scriviamo I^2 , il prodotto $I \cdot I$.

Th.7: Supponiamo che le masse degli elementi dell'insieme di punti materiali di ordine n , $H=(m_1Q_1 + m_2Q_2 + \dots + m_nQ_n)$, soddisfino la seguente condizione: $\sum m_i = 0$.

Il prodotto $H \cdot I$, essendo I un insieme completo di ordine s , è identicamente nullo.

Sia $I = (n_1 P_1, n_2 P_2, \dots, n_s P_s)$ un insieme completo.

Effettuando il prodotto $H \cdot I$, si ottiene:

$$H \cdot I = (m_1 Q_1 \cdot I + m_2 Q_2 \cdot I + \dots + m_n Q_n \cdot I) \quad (4,1)$$

Essendo I completo si ha: $Q_1 \cdot I = Q_2 \cdot I = \dots = Q_n \cdot I = K$, con $K \in R$.

Sostituendo nella (4,1), si ha:

$$H \cdot I = (m_1 \cdot K + m_2 \cdot K + \dots + m_n \cdot K) = K \cdot \sum m_i = K \cdot 0 = 0.$$

I teoremi successivi potrebbero essere riferiti ad insiemi completi di qualsiasi ordine. Preferiamo svolgerli prendendo in considerazione, esclusivamente, insiemi completi quaternari conformemente al contesto della trattazione.

Th.8: Se $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ è un insieme quaternario completo, si ha: $I^2 = 0$.

Svolgendo il quadrato si ha:

$$I^2 = m_1 P_1 \cdot I + m_2 P_2 \cdot I + m_3 P_3 \cdot I + m_4 P_4 \cdot I \quad (4,1')$$

La completezza di I implica che sia: $P_i \cdot I = K$, con $K \in R$ costante, pertanto la (4,1') diviene:

$$I^2 = (m_1 K + m_2 K + m_3 K + m_4 K) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) K.$$

Essendo I completo si ha: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$
da cui: $I^2 = 0$.

Th.9: Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ un insieme quaternario completo del IV ordine e I_i sia il sottoinsieme ternario: $I_i = I - m_i P_i$, per $i \in \{1,2,3,4\}$. Si ha, allora:

$$2 m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0 \text{ per } k \in \{1,2,3,4\}.$$

Per il *TH.8*, essendo $I^2 = 0$, si ha:

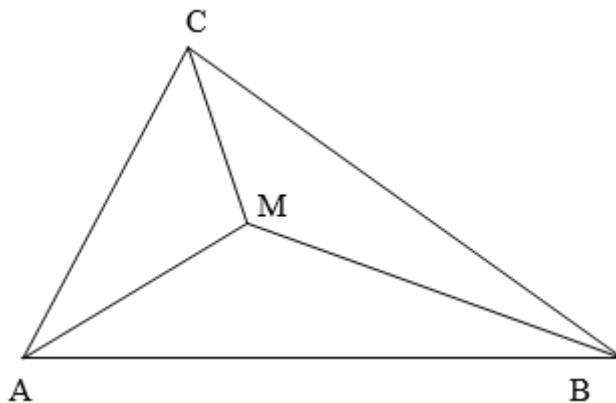
$$I^2 = [(m_i P_i) \cup I_i]^2 = (m_i P_i)^2 + 2 \cdot (m_i P_i) \cdot I_i + (I_i)^2 = 0.$$

Poiché $(m_i P_i)^2 = (m_i)^2 [d(P_i, P_i)]^2 = 0$ la precedente diviene:
 $2 m_i (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0$.

Inoltre, essendo $P_i \cdot I_i = P_i \cdot I = P_k \cdot I$, la precedente diviene:
 $2 m_i (P_k \cdot I) + (I_i)^2 = 0$ per qualsiasi $k \in \{1,2,3,4\}$.

Applicazione 8: Sia $J = (A, B, C, M)$ un insieme quaternario contenente terne di punti non allineati, complanari, con M punto interno. Siano $d(A, B) = 6$, $d(B, M) = 2\sqrt{5}$, $d(M, A) = 2\sqrt{2}$.

Sapendo che $S_{AMC} = 4$, $S_{BCM} = 5$, $S_{ABM} = 6$, $S_{ABC} = 15$, trovare: $d(A, C)$, $d(M, C)$, $d(B, C)$.



L'insieme completo avente sostegno J è: $I = (5A, 4B, 6C, -5M)$.

Scegliamo il sottoinsieme ternario I_C di I il cui sostegno $J_C = (A, B, M)$ contiene punti di cui si conoscono le distanze: $I_C = (5A, 4B, -15M)$. Per il TH.9, si ha:

$$I^2 = [(6 \cdot C) \cup I_C]^2 = (6 \cdot C)^2 + 2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I_C) + (I_C)^2 = 0$$

Essendo $(6 \cdot C)^2 = 0$ e $C \cdot I_C = C \cdot I$, la precedente diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (C \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \quad (4,2)$$

Il prodotto $(C \cdot I)$ della (4,2) contiene i quadrati dei seguenti moduli:

$d(C, A) = x$, $d(C, M) = y$, $d(C, B) = z$; il prodotto $(A \cdot I)$ contiene, invece, la lunghezza incognita del solo segmento $[C, A]$.

Per calcolare $d(C, A) = x$, essendo $(C \cdot I) = (A \cdot I)$, effettuiamo nella (4,2) la sostituzione:

$$2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \quad (4,3)$$

$$\begin{aligned} \text{Posto } d(A, C) = x, \text{ sviluppiamo separatamente } 2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) \\ \text{e } (I_C)^2 = 0 : 2 \cdot 6 \cdot (A \cdot I) = 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(A, A)]^2 + 4[d(A, B)]^2 + \\ 6[d(A, C)]^2 - 15[d(A, M)]^2\} = 2 \cdot 6 \cdot \{4[d(A, B)]^2 + 6[d(A, C)]^2 \\ - 15[d(A, M)]^2\} = 2 \cdot 6 \cdot \{4 \cdot 36 + 6x^2 - 15 \cdot 8\} = 2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\} \\ (I_C)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 [d(A, B)]^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15 [d(B, M)]^2 - 2 \cdot 5 \cdot 15 [d(M, A)]^2 = \\ = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 36 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 8 = 2 \cdot (-1080) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4,3) si ha: $2 \cdot 6 \cdot \{24 + 6x^2\} + 2 \cdot (-1080) = 0$ da cui $d(A, C) = \sqrt{26}$

Per calcolare $d(C, M)$ si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $M \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito $d(C, M) = y$. L'equazione diviene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 \cdot (M \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \text{ da cui } 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(M, A)]^2 + 4[d(M, B)]^2 \\ + 6[d(M, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot \{5 \cdot 8 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot y^2\} \\ + 2 \cdot (-1080) = 0 \text{ da cui } d(C, M) = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Per calcolare $d(C,B)$ si sostituisce nella (4,2) $C \cdot I$ con $B \cdot I$, prodotto contenente il solo elemento incognito $d(C,B) = z$. L'equazione diviene:

$$2 \cdot 6 \cdot (B \cdot I) + (I_C)^2 = 0 \text{ da cui } 2 \cdot 6 \cdot \{5[d(B, A)]^2 - 15 [d(B, M)]^2 + 6[d(B, C)]^2\} + (I_C)^2 = 2 \cdot 6 \cdot [5 \cdot 36 - 15 \cdot 20 + 6 \cdot z^2] - 2 \cdot 1080 = 0$$

da cui $d(C,B) = 5\sqrt{2}$.

Applicazione 9: Fra i punti dell'insieme $J = (A,B,C,D)$ sussistano le seguenti distanze:

$$d(A,B)=6, d(B,C)=2, d(A,C)=2\sqrt{10},$$

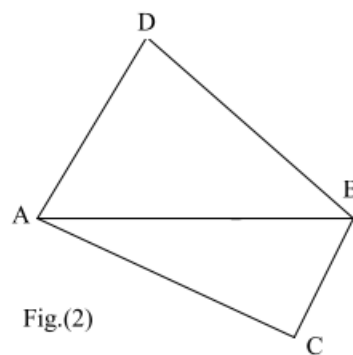
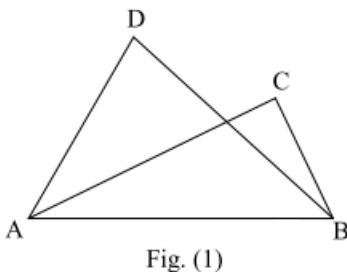
$$d(A,D)=2\sqrt{5}, d(B,D)=4\sqrt{2}.$$

Trovare l'insieme completo con sostegno J e la distanza (D,C) .

Formalmente,

$$[-m A, (m+n-1) B, -n C, D] \quad (4,4)$$

è l'insieme completo avente sostegno J indipendentemente dal fatto che le terne (A,B,C) e (A,B,D) siano adiacenti o non adiacenti



Nella fig. (1) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono non adiacenti;
nella fig. (2) le terne (A,B,C) e (A,B,D) sono adiacenti.

Come nell'esercizio precedente,
posto $I_D = [-m A, (m+n-1) B, -nC]$ si ha:

$$I^2 = [I_D \cup (I \cdot D)]^2 = (I_D)^2 + 2 \cdot (D \cdot I_D) + (D)^2 = 0 \quad (4,5)$$

Tenendo conto che $D \cdot I_D = D \cdot I$, $(D)^2 = 0$ e che, essendo I completo, si ha: $D \cdot I = A \cdot I = B \cdot I$, dalla (4,5) si ricavano le seguenti equazioni.

$$\begin{cases} (I_D)^2 + 2 \cdot (B \cdot I) = 0 \\ (I_D)^2 + 2 \cdot (A \cdot I) = 0 \end{cases} \quad (4,6)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \text{a) } (I_D)^2 &= [-m \cdot A, (m+n-1) \cdot B, -n \cdot C]^2 = \\ &= 2\{-m(m+n-1)[d(A,B)]^2 - n(m+n-1)[d(B,C)]^2 + m n [d(A,C)]^2\} = \\ &= 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) \\ \text{b) } 2 \cdot (B \cdot I) &= 2\{-m [d(B,A)]^2 + [d(B,D)]^2 - n [d(B,C)]^2\} = \\ &= 8(-9m + 8 - n) \\ \text{c) } 2 \cdot (A \cdot I) &= 2\{[d(A,D)]^2 - n [d(A,C)]^2 + (m+n-1)[d(A,B)]^2\} = \\ &= 8(9m - n - 4) \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (4,6), si ha:

$$\begin{cases} 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(-9m + 8 - n) = 0 \\ 8(-9m^2 + 9m - n^2 + n) + 8(9m - n - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{da cui } \begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \\ n_1 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m_2 = \frac{2}{3} \\ n_2 = -2 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) si ottengono i seguenti insiemi completi:

$$I' = (-2 A, 5 B, -6 C, 3 D) \quad \text{e} \quad I'' = (-2 A, -7 B, 6 C, 3 D)$$

contenenti entrambi punti esterni.

Per calcolare $d(D,C)$ svolgiamo le seguenti equazioni:

$$D \cdot I' = C \cdot I' \quad (4,7') \quad D \cdot I'' = C \cdot I'' \quad (4,7'')$$

Dalla (4,7') si ha:

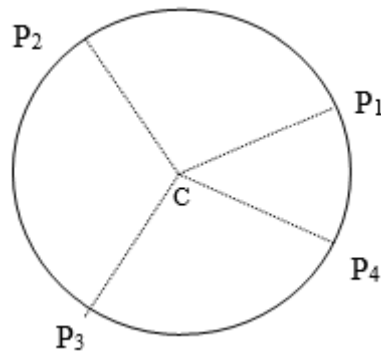
$$-2[d(D,A)]^2 + 5[d(D,B)]^2 - 6[d(D,C)]^2 = -2[d(C,A)]^2 + 5[d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$$

Posto $d(D,C) = x$, si ha $x = 2\sqrt{5}$;
 dalla (4,7'') si ha:
 $- 2 [d(D,A)]^2 - 7[d(D,B)]^2 + 6[d(D,C)]^2 = - 2[d(C,A)]^2 - 7 [d(C,B)]^2 + 3[d(D,C)]^2$
 Posto $d(D,C) = y$, si ha $y = 2\sqrt{13}$

5 - Insiemi completi divisori dello zero

In questo capitolo riprendiamo in considerazione gli insiemi completi, divisori dello zero, ai quali avevamo brevemente accennato, in modo esemplificativo, nell'articolo "Insiemi completi del IV ordine" di Francia F. contenuto nel Periodico di matematica, Vol.II (2). In quel lavoro veniva richiamata l'attenzione su insiemi quaternari completi, divisori dello zero, ottenuti dall'unione di due terne di punti materiali, completi e congruenti.

TH.10: Sia $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ un insieme di punti della circonferenza S con raggio R e centro C . Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ l'insieme completo avente sostegno J . Si ha: $Q \cdot I = 0$ essendo Q un qualsiasi punto dello spazio .



Se I è completo si ha: $Q \cdot I = C \cdot I = m_1 [d(CP_1)]^2 + m_2 [d(CP_2)]^2 + m_3 [d(CP_3)]^2 + m_4 [d(CP_4)]^2$.

Indicando con R il raggio della circonferenza, essendo $R = d(CP_1) = d(CP_2) = \dots = d(CP_n)$, la precedente diviene:
 $Q \cdot I = C \cdot I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots + m_n R^2 = R^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = R^2 \cdot 0 = 0$

TH. 11: Sia $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ un insieme di punti della circonferenza S con raggi R e centro C . Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$ l'insieme completo, divisore dello zero, avente sostegno J . Posto $I_i = (I - m_i P_i)$, si ha:

$$\begin{array}{llll} P_1 \cdot I_1 = 0 & & (I_1)^2 = 0 & \\ P_2 \cdot I_2 = 0 & & (I_2)^2 = 0 & \\ P_3 \cdot I_3 = 0 & (5,1) & (I_3)^2 = 0 & (5,2) \\ P_4 \cdot I_4 = 0 & & (I_4)^2 = 0 & \end{array}$$

Dal *TH.10* si ha: $Q \cdot I = 0$, essendo Q un qualsiasi punto dello spazio. Sostituendo Q con P_i si ha:

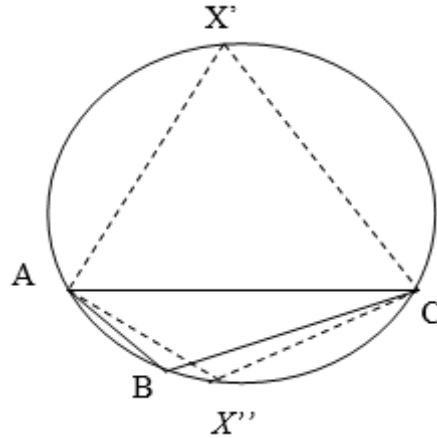
$$P_i \cdot I_i = 0 \quad (5,3)$$

da cui le (5,1).

Dal *TH.9* si ha:

$2 m_i (P_i \cdot I_i) + (I_i)^2 = 0$; sostituendo la (5,3) nella precedente equazione si ha: $(I_i)^2 = 0$ da cui le (5,2)

Applicazione 10: Sia S la circonferenza di centro O e raggio R passante per i punti A, B, C le cui distanze reciproche siano: $d(A,C) = 8$, $d(A,B) = \sqrt{2}$, $d(B,C) = 5\sqrt{2}$. Trovare $d(A,X) = d(C,X)$ essendo X un punto della circonferenza S equidistante da A e C . Trovare il raggio di S .



L'insieme completo con sostegno $J = (A, B, C, X)$ è:

$$[m \cdot A, 1 \cdot B, n \cdot C, - (m + n + 1) \cdot X] \quad (5,4)$$

Applicando il TH.11 si ha: $A \cdot I = 0, C \cdot I = 0,$

$$(m \cdot A, n \cdot C, 1 \cdot B)^2 = 0.$$

Sviluppando:

$$\begin{cases} [d(A, B)]^2 + n[d(A, C)]^2 - (m + n + 1)[d(A, X)]^2 = 0 \\ [d(C, B)]^2 + m[d(C, A)]^2 - (m + n + 1)[d(C, X)]^2 = 0 \\ mn[d(A, C)]^2 + n[d(B, C)]^2 + m[d(A, B)]^2 = 0 \end{cases}$$

Posto $d(A, X) = d(C, X) = x$, si ha:

$$\begin{cases} 2 + 64n - (m + n + 1)x^2 = 0 \\ 50 + 64m - (m + n + 1)x^2 = 0 \\ 64mn + 50n + 2m = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} n = m + \frac{3}{4} \\ 32m^2 + 50m + \frac{75}{4} = 0 \\ 2 + 64n - (m + n + 1)x^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$m_1 = -\frac{15}{16}, \quad n_1 = -\frac{3}{16}, \quad m_2 = -\frac{10}{16}, \quad n_2 = \frac{2}{16};$$

sostituendole nella (5,4) si ottengono i seguenti insiemi completi:

$$I' = (-15 \cdot A, 16 \cdot B, -3 \cdot C, 2 \cdot X') \text{ e } I'' = (-5 \cdot A, 8 \cdot B, C, -4 \cdot X'').$$

Per trovare $d(A, X')$, essendo (A, B, C, X') il sostegno di I' , si svolge l'equazione $A \cdot I' = 0$:

$$16 [d(A, B)]^2 - 3 [d(A, C)]^2 + 2 [d(A, X')]^2 = 0 \text{ da cui } d(A, X') = 4\sqrt{5}$$

Per trovare $d(A, X'')$, essendo (A, B, C, X'') il sostegno di I'' , si svolge l'equazione

$$A \cdot I'' = 0 : 8 [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - 4 [d(A, X'')]^2 = 0$$

$$\text{da cui } d(A, X'') = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Sia } I = I' - 2 I'' = (-5 \cdot A, -5 \cdot C, 2 \cdot X', 8 \cdot X'').$$

L'insieme I è un divisore dello zero e si ha:

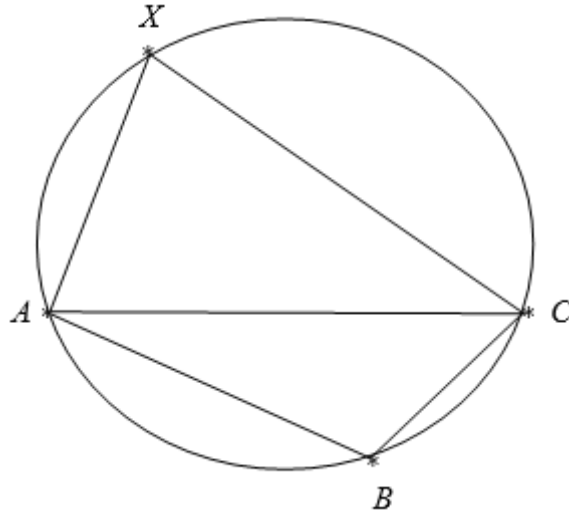
$$X' \cdot I = 0. \text{ Sviluppando risulta:}$$

$$-5 \cdot [d(A, X')]^2 - 5 \cdot [d(C, X')]^2 + 8 \cdot [d(X'', X')]^2 = 0$$

$$8 \cdot [d(X'', X')]^2 = 5 \cdot 80 + 5 \cdot 80 = 800 \text{ da cui } [d(X'', X')] = 10 \text{ e } R=5.$$

Applicazione 11: Sia $J = (A, B, C, P)$ un insieme quaternario di punti appartenenti alla circonferenza S . Siano $[X, A]$, $[A, B]$, $[B, C]$ i lati di $Q(J)$ e $[A, C]$ sia la diagonale. Risulti: $d(A, X) = 4\sqrt{10}$, $d(A, B) = 2\sqrt{10}$, $d(B, C) = 2\sqrt{5}$, $d(A, C) = 10$.

Calcolare $d(XC)$.



L'insieme completo con sostegno J può essere così rappresentato:

$$I = [m A, -B, n C, (-m - n + 1) X] \quad (5,4')$$

Per calcolare m e n svolgiamo il seguente sistema (TH.11):

$$\begin{cases} A \cdot I_A = 0 \\ [I - (-m - n + 1)X]^2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{aligned} -[d(A, B)]^2 + n[d(A, C)]^2 + (-m - n + 1)[d(A, X)]^2 &= 0 \\ -m[d(A, B)]^2 - n[d(B, C)]^2 + mn[d(A, C)]^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2m - n + 5nm = 0 \\ n = 2 - \frac{8}{3}m \end{cases}$$

Si hanno due soluzioni:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} , & n_1 = \frac{2}{3} \\ m_2 = \frac{3}{10} , & n_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Sostituendole nella (5,4') si ottengono i seguenti insiemi

$$I' = (3 A, -6 B, 4 C, -P), I'' = (3 A, -10 B, 12 C, -5 Q).$$

(Nei due insiemi, I' e I'' , la X è sostituita con P e Q).

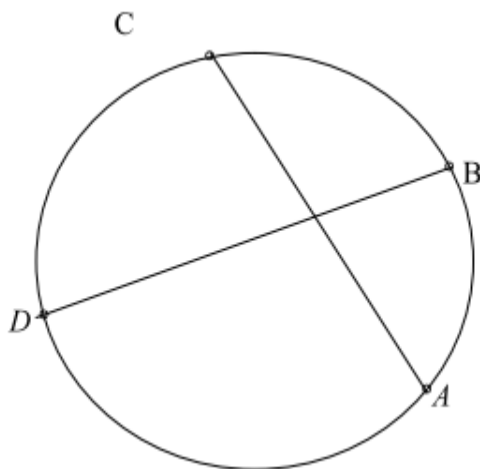
Per calcolare $d(P,C)$ e $d(Q,C)$ svolgiamo le due equazioni:

$$C \cdot I' \text{ e } C \cdot I'':$$

$$C \cdot I' = 3 [d(A,C)]^2 - 6 [d(B,C)]^2 - [d(P,C)]^2 = 0 \text{ da cui } d(P,C) = 6\sqrt{5}$$

$$C \cdot I'' = 3 [d(A,C)]^2 - 10 [d(B,C)]^2 - 5 [d(Q,C)]^2 = 0 \text{ da cui } d(Q,C) = 2\sqrt{5}$$

Applicazione 12: Siano $[A,C]$ e $[B,D]$ le diagonali del quadrilatero di vertici $J = (A,B,C,D)$ appartenenti alla circonferenza S . Sapendo che $d(A,B) = 10$, $d(B,C) = 6\sqrt{5}$, $d(C,D) = 2\sqrt{10}$, $d(A,D) = 6\sqrt{2}$, calcolare $d(A,C)$ e $d(B,D)$.



L'insieme completo avente sostegno J è:

$$I = [m A, (n - 1) B, (1 - m) C, - n D]$$

Per trovare le masse di I svolgiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A \cdot I = 0 \\ C \cdot I = 0 \end{cases} \quad (5,5)$$

Posto $d(A,C) = y$, si ha:

$$\begin{aligned} A \cdot I &= (n - 1) [d(A,B)]^2 + (1 - m)[d(A,C)]^2 - n [d(A,D)]^2 \\ &= (n-1)100 + (1 - m) y^2 - n 72 = 0 \end{aligned} \quad (5,6)$$

$$\begin{aligned} C \cdot I &= m [d(C,A)]^2 + (n - 1) [d(C,B)]^2 - n [d(C,D)]^2 = \\ &= m y^2 + (n - 1) 180 - n 40 = 0 \end{aligned} \quad (5,7)$$

Eliminando $m y^2$ fra le precedenti relazioni si ha:

$$y^2 = - 168 n + 280 \quad (5,8)$$

Sostituendo la (5,8) nella (5,7), si ha:

$$- 42 m n + 70 m + 35 n - 45 = 0 \quad (5,9)$$

Procedendo in modo analogo, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} D \cdot I = 0 \\ B \cdot I = 0 \end{cases} \quad (5,5')$$

Posto $d(D,B) = x$, si ha:

$$\begin{aligned} D \cdot I &= m [d(D,A)]^2 + (n - 1) [d(D,B)]^2 + (1 - m) \cdot \\ [d(D,C)]^2 &= m 72 + (n - 1) x^2 + (1 - m) 40 = 0 \end{aligned} \quad (5,6')$$

$$\begin{aligned} B \cdot I &= m [d(B,A)]^2 + (1 - m) [d(B,C)]^2 - n [d(B,D)]^2 \\ &= m 100 + (1 - m) 180 - n x^2 = 0 \end{aligned} \quad (5,7')$$

eliminando $n x^2$ fra le precedenti relazioni si ha:

$$x^2 = - 48 m + 220 \quad (5,8')$$

Sostituendo la (5,8') nella (5,7'), si ha:

$$12 m n - 20 m - 55 n + 45 = 0 \quad (5,9')$$

Mettendo a sistema la (5,9) e la (5,9') si ha:

$$\begin{cases} m(70 - 42n) = 45 - 35n \\ m(12n - 20) = 55n - 45 \end{cases} \quad , \quad \frac{9-7n}{35-21n} = \frac{11n-9}{6n-10}$$

da cui $n_1 = \frac{5}{7}$, $m_1 = \frac{1}{2}$

Sostituendo nell'insieme completo I si ottiene:

$$I = (7A, -4B, 7C, -10D)$$

Per calcolare $d(D,B)$ svolgiamo l'equazione

$$D \cdot I = 7[d(D,A)]^2 - 4[d(D,B)]^2 + 7[d(D,C)]^2 = 0$$

da cui $d(D,B) = 14$.

Per calcolare $d(A,C)$ svolgiamo l'equazione

$$A \cdot I = -4[d(A,B)]^2 + 7[d(A,C)]^2 - 10[d(A,D)]^2 = 0$$

da cui $d(A,C) = 4\sqrt{10}$.

Th.12: Sia I un insieme completo di ordine n ed

$$H = (m_1 Q_1, m_2 Q_2, \dots, m_j Q_j)$$

un insieme di punti materiali di ordine h e risulti $\sum m_i = 0$.

Si ha: $(I - H)^2 = H^2$.

Per il *TH.8* si ha: $I^2 = 0$ da cui segue:

$$0 = I^2 = [(I - H) + H]^2 = (I - H)^2 + 2(I - H) \cdot H + H^2 = (1 - H)^2 + 2(I \cdot H) - 2H^2 + H^2 = 0$$

Per il *TH.7* si ha: $I \cdot H = 0$ pertanto risulta: $(I - H)^2 - H^2 = 0$ da cui la tesi.

NOTA 6: Analizziamo un possibile procedimento per risolvere problemi di geometria mediante il *TH.12*.

Sia $J = (A,B,C,M)$ un insieme contenente terne di punti del piano non allineati, con M interno a J.

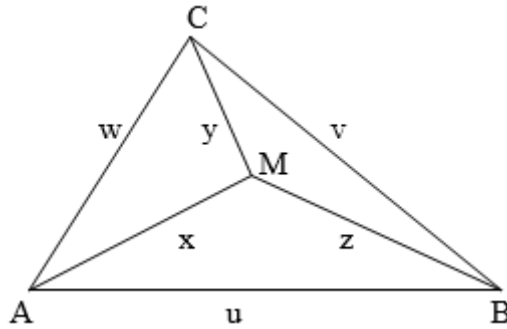
Sia

$$I = [m A, n B, s C, -(m + n + s) M] \quad (5,10)$$

l'insieme completo con sostegno J. Distanze note intercorrenti fra elementi di J siano: $d(A,B) = u$, $d(B,C) = v$, $d(A,C) = w$; quelle incognite siano: $d(A,M) = x$, $d(C,M) = y$, $d(B,M) = z$. Utilizziamo l'equazione

$$(I - H)^2 = H^2 \quad (5,11)$$

per ricavare le distanze incognite. Calcoliamo $d(A,M) = x$.



Osserviamo che le distanze incognite si riferiscono a segmenti aventi l'estremo M in comune; ricerchiamo, quindi, un insieme H soddisfacente le condizioni del Th.12 e tale che, sottraendolo ad I, permetta di ottenere un insieme, $I - H$, non contenente il punto M.

Con tale esclusione segue che, il primo membro della (5,11), $(I - H)^2$, elevato al quadrato, non contiene distanze incognite. Ad esempio, scelto

$$H = [-(m + n + s) M, (m + n + s) A] \quad (5,12)$$

il primo membro della (5,11) diviene:

$$\begin{aligned} (I - H)^2 &= \{[m A, n B, s C, -(m + n + s) M] - [-(m + n + s) M, \\ &\quad (m + n + s) A]\}^2 = \\ &= \{m A, n B, s C, -(m + n + s) M, + (m + n + s) M, - (m + n + s) A\}^2 = \end{aligned}$$

$$[m A, n B, s C, - (m + n + s) A]^2 = [- (n + s) A, n B, s C]^2 \quad (5,13)$$

Sostituendo la (5,12) e la (5,13) nella (5,11), si ha:

$$[-(n + s) A, n B, s C]^2 = [-(m + n + s) M, (m + n + s) A]^2 \quad (5,14)$$

Svolgendo il primo membro della (5,14), si ha:

$$[-(n + s) A, n B, s C]^2 = -n(n + s) [d(A,B)]^2 + n s [d(B,C)]^2 - s(n + s) [d(A,C)]^2 = -n(n + s) u^2 + n s v^2 - s(n + s) w^2.$$

Svolgendo il secondo membro della (5,14), si ha: $-(m + n + s)^2 [d(A,M)]^2 = -(m + n + s)^2 x^2$.

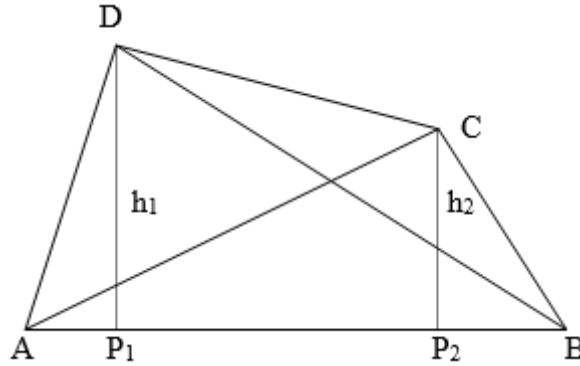
Dall'equazione $-(m + n + s)^2 x^2 = -n(n + s) u^2 + n s v^2 - s(n + s) w^2$ si ha:

$$x = d(A,M) = \frac{\sqrt{n(n+s)u^2 - nsv^2 + s(n+s)w^2}}{m+n+s}$$

Procedendo in modo analogo si calcola $d(C,M)$ e $d(B,M)$.

Applicazione 13: Siano $[A,C]$ e $[B,D]$ le diagonali del quadrilatero $Q(J)$ con $J = (A,B,C,D)$. Il rapporto fra le altezze $d(D,P_1) = h_1$ e $d(C,P_2) = h_2$, rispettivamente, dei due triangoli $T(J')$ e $T(J'')$ con $J' = (A,B,D)$ e $J'' = (A,B,C)$, riferite alla base comune $[A,B]$, è: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$. Sapendo che $d(A,D) = 2\sqrt{10}$,

$d(A,C) = 4\sqrt{5}$, $d(C,D) = 2\sqrt{10}$, $d(B,D) = 10$, trovare le masse di un insieme completo con sostegno J e calcolare la distanza $[A,B]$.



L'insieme completo, avente sostegno J, è:

$$(S_{BCD} \cdot A, -S_{ACD} \cdot B, S_{ABD} \cdot C, -S_{ABC} \cdot D) \quad (5,15)$$

Poiché dal testo risulta: $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$, posto $S_{ABC} = 2K$,

con $K \in R^*$, si ha: $S_{ABD} = 3K$.

Essendo $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$ sostituendo S_{ABC} e S_{ABD} , si ha:

$2K + S_{ACD} = 3K + S_{BCD}$. Posto $S_{BCD} = x \cdot K$ la precedente diviene: $S_{ACD} = K(1 + x)$.

Sostituendo le aree così ricavate nella (5,15) e dividendo per K , si ha:

$$I = [x \cdot A, - (1 + x) \cdot B, 3 \cdot C, - 2 \cdot D].$$

Iniziamo operando in modo che le incognite contenute nell'equazione

$$(I - H)^2 = H^2 \quad (5,16)$$

non siano le distanze dei punti di J ma le masse dei punti.

Ricerchiamo, quindi, un insieme H soddisfacente le condizioni del Th.12, tale che, sottraendolo ad I, permetta di ottenere un insieme, $I - H$, contenente punti le cui distanze siano note.

Posto $H = [- (1 + x) \cdot B, (1 + x) \cdot D]$, si ha:

$$(I - H)^2 = \{ [x \cdot A, - (1 + x) \cdot B, 3 \cdot C, - 2 \cdot D] - [- (1 + x) \cdot B, (1 + x) \cdot D] \}^2 =$$

$$= [x \cdot A, 3 \cdot C, - 2 \cdot D, - (1 + x) \cdot D]^2 = [x \cdot A, 3 \cdot C, - (3 + x) \cdot D]^2.$$

Sostituendo nella $(I - H)^2 = H^2$ si ha:

$$[x \cdot A, 3 \cdot C, - (3 + x) \cdot D]^2 = [- (1 + x) \cdot B, (1 + x) \cdot D]^2$$

sviluppando si ha

$$3x \cdot [d(A,C)]^2 - 3(3+x) [d(C,D)]^2 - x(3+x) \cdot [d(A,D)]^2 =$$

$$= - (1+x)^2 \cdot [d(B,D)]^2$$

$$3x \cdot 80 - 3(3+x) \cdot 40 - x(3+x) \cdot 40 = - (1+x)^2 \cdot 100 \text{ da cui}$$

$$3x^2 + 10x - 13 = 0.$$

Dalle due soluzioni: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{13}{3}$ derivano due insiemi completi:

a) $I' = [1 \cdot A, - 2 \cdot B, 3 \cdot C, - 2 \cdot D]$ essendo $x_1 = 1$;

b) $I'' = [- 13 \cdot A, 10 \cdot B, 9 \cdot C, - 6 \cdot D]$ essendo $x_2 = -\frac{13}{3}$.

Solo l'insieme completo I' contiene punti posizionati secondo le indicazioni del testo; infatti, solo in questo caso, $[A,C]$ e $[B,D]$ sono le diagonali del quadrilatero $Q(J)$, con $J = (A,B,C,D)$. Per calcolare $d(A,B)$ operiamo così: essendo $[A,B]$ e $[C,B]$ le distanze incognite degli elementi di J , attribuiamo all'insieme H dell'equazione (5,16), i seguenti punti materiali:

$H = (- 2 B, 2 A)$. Si ha:

$$[(1 \cdot A, - 2 \cdot B, 3 \cdot C, - 2 \cdot D) - (- 2 B, 2 A)]^2 = (- 2 B, 2 A)^2$$

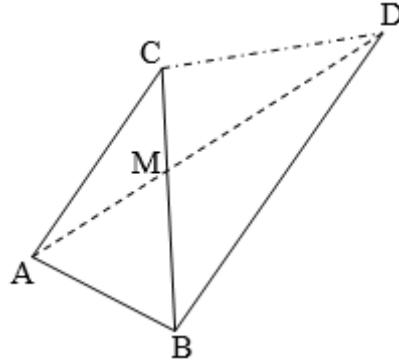
$$(- A, 3 \cdot C, - 2 \cdot D)^2 = (- 2 B, 2 A)^2$$

$$- 3 \cdot [d(A,C)]^2 - 6 \cdot [d(D,C)]^2 + 2 \cdot [d(A,D)]^2 = - 4 \cdot [d(A,B)]^2.$$

Posto $d(A,B) = x$ si ha: $d(A,B) = 10$

Applicazione 14: Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A,D]$ e $[C,B]$ del quadrilatero $Q(J)$, con

$J = (A, B, C, D)$. Sapendo che $d(A, B) = \sqrt{5}$, $d(A, C) = 2\sqrt{10}$,
 $d(B, C) = 7$, $d(B, D) = 3\sqrt{5}$ e che $\frac{d(A, M)}{d(M, D)} = \frac{2}{3}$ (5,17)
 calcolare $d(A, D)$.



Dalla (5,17) si ricava l'insieme completo: $I_1 = (3 \cdot A, -5 \cdot M, 2 \cdot D)$. Attribuito a M la massa -5 e al punto B la massa x , l'insieme completo avente sostegno (C, M, B) , formalmente, diviene:

$I_2 = [x \cdot B, -5 \cdot M, (5 - x) \cdot C]$. Sottraendo I_2 a I_1 si ricava l'insieme completo:

$$I = I_1 - I_2 = [3 \cdot A, 2 \cdot D, -x \cdot B, (x - 5) \cdot C].$$

Posto $H = (2 \cdot D, -2 \cdot B)$, applicando il TH.12 a I si ha:

$$(I - H)^2 = H^2, \text{ da cui: } [3 \cdot A, (2-x) \cdot B, (x-5) \cdot C]^2 = (2 \cdot D, -2 \cdot B)^2.$$

Svolgendo si ha:

$$49x^2 - 448x + 880 = 0 \text{ e quindi: } x_1 = \frac{44}{7}, \quad x_2 = \frac{20}{7}.$$

Sostituendo la x dell'insieme I con x_1 e x_2 si ottengono, rispettivamente, i due insiemi completi:

$$I' = (21 \cdot A, 14 \cdot D, -44 \cdot B, 9 \cdot C)$$

$$I'' = (21 \cdot A, 14 \cdot D, -20 \cdot B, -15 \cdot C).$$

Solo l'insieme completo I'' si riferisce al quadrilatero $Q(J)$.

Infatti, i punti di I' non sono tutti esterni pertanto non sono vertici di un quadrilatero.

Per calcolare $d(A,D)$ applichiamo ancora il TH.12:

$$[I''(-14 \cdot D, 14 \cdot A)]^2 = (-14 \cdot D, 14 \cdot A)^2.$$

Svolgendo l'equazione

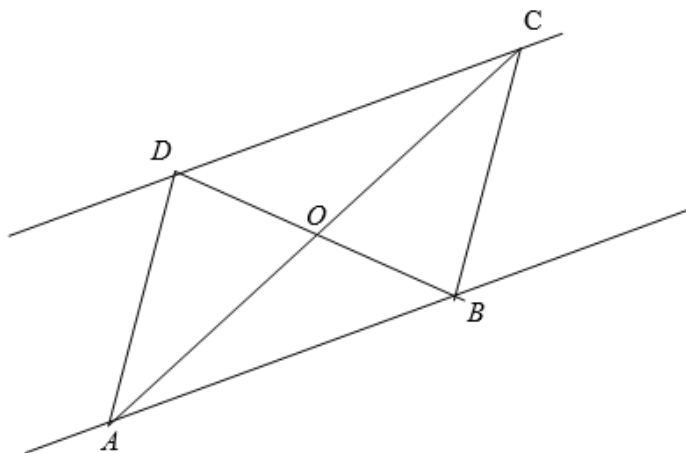
$$(35 \cdot A, -20 \cdot b, -15 \cdot c)^2 = (-14 \cdot D, 14 \cdot A)^2 \text{ si ha:}$$

$$-700 [d(A,B)]^2 + 300 [d(C,B)]^2 - 525 [d(A,C)]^2 = -14^2 d(A,D)^2$$

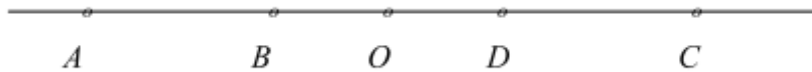
$$\text{da cui } d(A,D) = 5\sqrt{2}$$

6 - Figure geometriche elementari

Def.4: Un insieme quaternario J di punti del piano π è detto "insieme quaternario di punti paralleli" se ha un centro di simmetria.



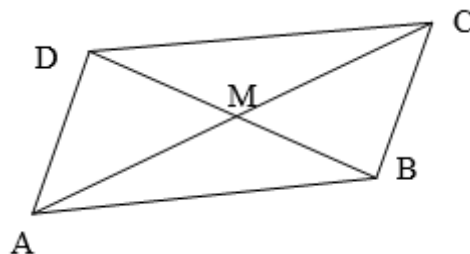
Nota 7: Sia $J = (A,B,C,D)$ un insieme quaternario di punti paralleli essendo A e C simmetrici rispetto al centro O , e così B e D . I segmenti $[A,C]$ e $[B,D]$ sono le diagonali del parallelogramma $P(J)$. Nel caso che J contenga punti allineati diciamo che $P(J)$ è un parallelogramma improprio.



Sia $P(J)$, con $J = (A, B, C, D)$, il parallelogramma le cui diagonali, intersecandosi nel punto medio O , siano $[A, C]$ e $[B, D]$. I punti degli insiemi $J_1 = (A, B, O)$ e $J_2 = (C, D, O)$, sono i vertici di triangoli congruenti così come $J_3 = (A, D, O)$ e $J_4 = (C, B, O)$; conseguentemente è facile dedurre che $d(A, B) = d(D, C)$ e $d(A, D) = d(B, C)$ e che le rette r_1 e r_2 , passanti, rispettivamente, per i lati opposti (A, B) e (D, C) del parallelogramma $P(J)$, sono parallele. Analogamente, anche le rette passanti per (A, D) e (B, C) sono parallele.

Def.5: I segmenti $[A, B]$ e $[C, D]$, lati opposti di un parallelogramma, sono detti paralleli e scriviamo: $[A, B] // [C, D]$

Th.13: Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A, C]$ e $[B, D]$ del poligono $P(J)$, con $J = (A, B, C, D)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $P(J)$ sia un parallelogramma è che risulti completo l'insieme $I = (A, C, - B, - D)$.



Condizione necessaria: Sia $P(J)$ un parallelogramma ed M il punto medio delle diagonali $[A, C]$ e $[B, D]$. Risultano completi

gli insiemi $I' = (A, -2M, C)$ e $I'' = (B - 2M, D)$. Effettuando la differenza dei due insiemi si ha: $I = I' \cup [(-1) I''] = (A, C, -B, -D)$.

Condizione sufficiente Sia $I = (A, C, -B, -D)$ un insieme completo; scelti due punti materiali di I , con masse eguali, ad esempio A e C , risulta completo l'insieme $I' = (A, -2X, C)$, essendo $2X$ il complementare di (A, C) . Sottraendo I' a I si ottiene l'insieme completo: $I'' = I' - I = (B, -2X, D)$.

Confrontando le masse di I' e I'' si deduce che X è il punto medio di (A, C) e (B, D) .

Nota.8: Il *TH.13* non solo permette di classificare, mediante l'insieme completo $I = (A, C, -B, -D)$, la figura geometrica avente per estremi i punti (A, B, C, D) , ma permette di riconoscere gli estremi di ciascuna diagonale e di ciascun lato del parallelogramma: coppie di punti materiali di segno concorde sono estremi di diagonali, coppie di punti materiali di segno discorde sono estremi di lati.

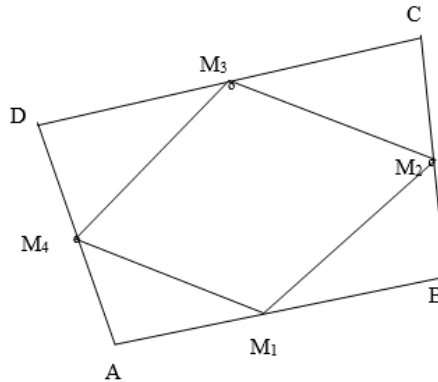
Applicazione 15: Siano $[A, C]$ e $[B, D]$ le diagonali di un quadrilatero $Q(J)$, con $J = (A, B, C, D)$.

Mostrare che i punti medi M_1, M_2, M_3, M_4 , rispettivamente, dei lati $[A, B], [B, C], [C, D], [D, A]$, sono i vertici di un parallelogramma.

Essendo M_1 punto medio di (A, B) risulta completo l'insieme $I_1 = (A, -2M_1, B)$.

Analogamente risultano completi gli insiemi $I_2 = (B, -2M_2, C)$, $I_3 = (C, -2M_3, D)$, $I_4 = (D, -2M_4, A)$.

Effettuando l'unione: $I_1 \cup [(-1) I_2] \cup I_3 \cup [(-1) I_4]$ si ha:



$$(A, -2 M_1, B, -B, 2 M_2, -C, C, -2 M_3, D, -D, 2 M_4, -A) = \\ = 2 (-M_1, M_2, -M_3, M_4) \text{ equivalente a } I = (-M_1, M_2, -M_3, M_4).$$

Per il TH.13 $Q(J)$, con $J = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, è un parallelogramma.

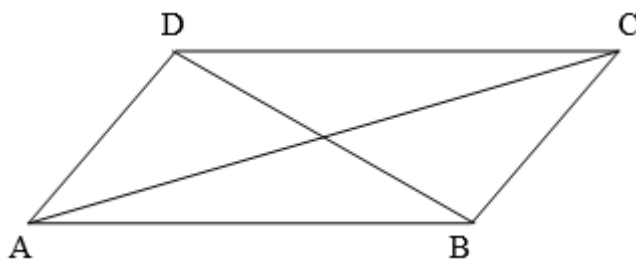
Def.6: È detto rettangolo il parallelogramma le cui diagonali sono congruenti.

Th.14: Se $P(J)$, con $J = (A, B, C, D)$, è un rettangolo, allora, l'insieme completo $I = (A, C, -B, -D)$, con sostegno J , è un divisore dello zero.

Infatti, essendo M il punto medio di entrambe le coppie (A, C) e (B, D) , si ha:

$d(A, M) = d(M, C) = d(B, M) = d(M, D) = r$ pertanto gli elementi di J appartengono ad una circonferenza di raggio eguale a r . Per il TH.10 si ha $P \cdot I = 0$.

Applicazione 16: Due lati consecutivi del parallelogramma $P(J)$, con $J = (A, B, C, D)$, siano $[A, B]$ e $[A, D]$. Sia nota una delle due diagonali di $P(J)$: $d(D, B) = c$; trovare la diagonale $d(A, C)$.



Sia $I = (A, -B, C, -D)$ l'insieme completo di $P(J)$. Per il *Th.12* si ha: $[I-(C,-A)]^2 = (C,-A)^2$ da cui $(2A,-B,-D)^2 = (C,-A)^2$.

Sviluppando si ha:

$$-2[d(A,B)]^2 + [d(B,D)]^2 - 2[d(A,D)]^2 = -[d(A,C)]^2.$$

Posto $d(A,B) = a$ e $d(A,D) = b$ la precedente diviene:

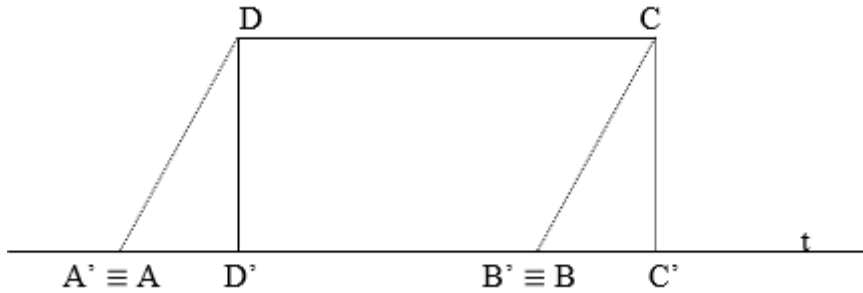
$$[d(A,C)]^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \quad \text{e} \quad d(A,C) = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Def.7: Sia $I = (A, -B, C, -D)$ un insieme completo e $J = (A,B,C,D)$ il relativo sostegno. Il prodotto di un punto di J per I , diviso per 2, è detto prodotto scalare del parallelogramma.

I prodotti scalari di I sono: $\frac{1}{2} A \cdot I, -\frac{1}{2} B \cdot I, \frac{1}{2} C \cdot I, -\frac{1}{2} D \cdot I$.

Th.15: Sia $I = (A, -B, C, -D)$ l'insieme completo avente sostegno $J=(A,B,C,D)$, insieme dei vertici del parallelogramma $P(J)$.

Siano A', B', C', D' (con $A' \equiv A, B' \equiv B$) le proiezioni ortogonali, rispettivamente, dei punti A, B, C, D sulla retta t passante per gli estremi del lato $[A, B]$ di $P(J)$.



Si ha:

1. $I^t = (A', -B', C', -D')$ è un insieme completo;
2. per un qualsiasi punto P si ha: $P \cdot I = P \cdot I^t$;
3. posto $d(A, D') = \delta$ e $d(A, B) = a$, si ha: $\frac{1}{2} A \cdot I = \pm \delta \cdot a$.

1. I punti dell'insieme $J^o = (D, C, D', C')$, essendo D' e C' le proiezioni ortogonali di D e C sulla retta t , sono i vertici del rettangolo $P(J^o)$ pertanto:

$I^o = (D, -C, C', -D')$ è completo ed è divisore dello zero:

$$P \cdot I^o = 0 \quad (6,1)$$

Indichiamo con I^t l'insieme completo, unione dei due insiemi completi: I e I^o , si ha:

$I \cup I^o = (A, -B, C, -D, D, -C, C', -D') = (A, -B, -D', C') = I^t \quad (6,2)$
da cui risulta che l'insieme $I^t = (A', -B', C', -D')$ è completo.

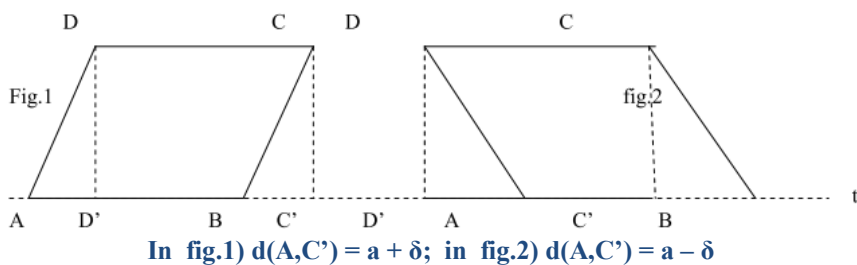
2. Dalla (6,2) si ha: $I \cup I^o = I^t$. Moltiplicando entrambi i membri per P si ha: $P \cdot (I \cup I^o) = P \cdot I^t$.

Svolgendo, tenendo conto della (6,1), si ha:

$$P \cdot I^t = P \cdot (I \cup I^o) = P \cdot I + P \cdot I^o = P \cdot I + 0 = P \cdot I \quad (6,3)$$

3. Posto $d(A, B) = d(D, C) = d(D', C') = a$, $d(A, D') = d(B, C') = \delta$, si ha:

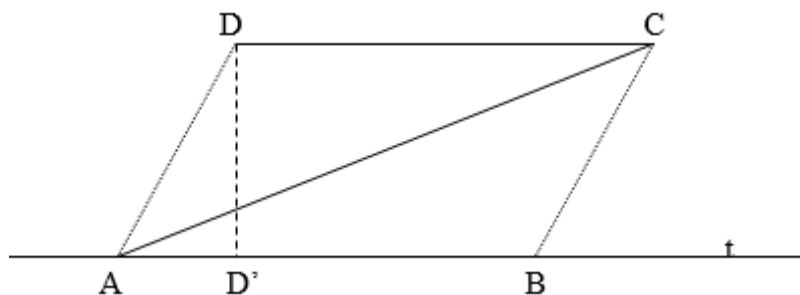
$$d(A, C') = a \pm \delta \quad (6,4)$$



Sostituendo A con P nella (6,3) si ha: $A \cdot I = A \cdot I^t$ da cui
 $A \cdot I = -[d(A,D')]^2 - [d(A,B)]^2 + [d(A,C')]^2 = -\delta^2 - a^2 + (a \pm \delta)^2$
 $= \pm 2 a \delta$ e quindi $\frac{1}{2} A \cdot I = \pm a \cdot \delta$.

Risultati analoghi si ottengono proiettando ortogonalmente i punti di J su rette passanti per (B,C), (C,D), (D,A).

Applicazione 17: Sia $[A,C]$ la diagonale del parallelogramma $P(J)$ con $J = (A,B,C,D)$ e risulti $D(A,C) = c$. Sia $[A,B]$ un qualsiasi lato di $P(J)$ e risulti $d(A,B) = d(D,C) = a$. Sia t la retta passante per A e B. Il punto D' sia la proiezione ortogonale di D su t ; essendo D' interno a $[A,B]$ risulti: $d(A,D') = \delta$. Trovare $d(A,D)$.



Essendo $I = (A, -B, C, -D)$ l'insieme completo con sostegno J , posto $d(A,D) = x$, si ha:

$$\frac{1}{2} A \cdot I = \frac{1}{2} \{-[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 - [d(A,D)]^2\} = d(A,D') \cdot d(A,B) \text{ da cui}$$

$$\frac{1}{2} (-a^2 + c^2 - x^2) = \delta \cdot a, \quad x^2 = c^2 - a^2 - 2\delta \cdot a$$

$$\text{da cui } d(A,D) = \sqrt{c^2 - a^2 - 2\delta \cdot a}$$

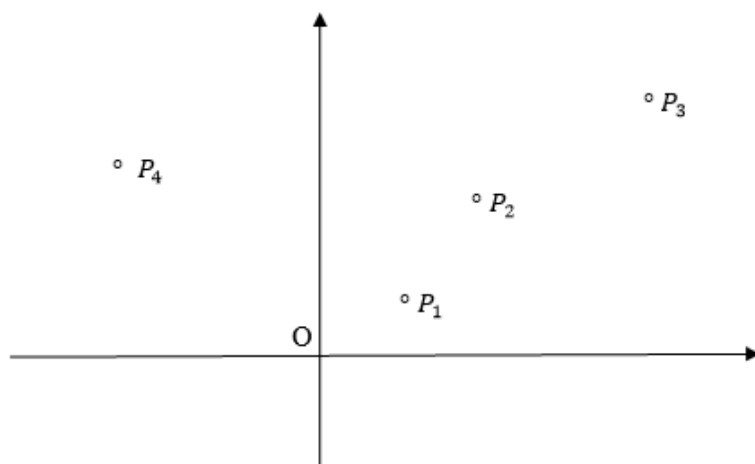
NOTA 9: Le proprietà degli insiemi completi permettono di risolvere problemi conoscendo sia le distanze sia le posizioni dei punti definite mediante coordinate cartesiane. Il metodo analitico di risoluzione dei problemi si fonda sul *TH.7* contenuto nell'articolo "*Insiemi completi del 3° ordine*" pubblicato sul N.1 della rivista "Periodico di matematica", giugno - dicembre 2019. Del *TH.7* ricordiamo, di seguito, l'enunciato:

Th.16: L'insieme $J = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ contenga terne di punti non allineati, appartenenti al piano π sul quale sia fissato un qualsiasi sistema cartesiano ortonormale (O, x, y) , mediante il quale risulti: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_4 = (x_4, y_4)$.

Condizioni necessarie e sufficienti affinché l'insieme

$I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4)$, con $m_i \in \mathbb{R}$, sia completo, sono le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 = 0 \end{cases}$$



Th.17 Mediante un sistema di assi ortonormali risulti così individuata una terna di punti del piano π : $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Affinché l'insieme $I = (A, -B, Q, -C)$ sia completo, essendo $P(J)$ un parallelogramma con $J = (A, B, C, Q)$, il punto Q deve risultare individuato dalle coordinate: $x = -x_1 + x_2 + x_3$, $y = -y_1 + y_2 + y_3$.

Se I è completo, posto $Q = (x, y)$, per il TH.16 deve risultare soddisfatto il seguente sistema:

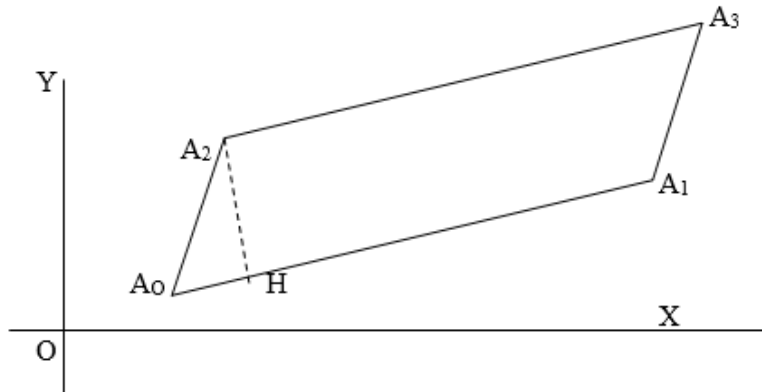
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x = 0 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y = 0 \end{cases} \quad \text{da cui la tesi: } \begin{cases} x = -x_1 + x_2 + x_3 \\ y = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

Ricaviamo nella successiva applicazione 18 il prodotto scalare essendo note le coordinate del parallelogramma.

Applicazione 18: Sia $I = (A_0, -A_1, -A_2, A_3)$ un insieme completo e risulti:

$$A_0 = (x_0, y_0), A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2).$$

Calcolare $d(A_0, A_1) \cdot d(A_0, H)$ essendo H la proiezione ortogonale di A_2 su $[A_0, A_1]$



Essendo I completo, dal TH. 17, posto $A_3 = (x, y)$, si ha:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 - x_2 + x = 0 \\ y_0 - y_1 - y_2 + y = 0 \end{cases}$$

da cui $A_3 = (-x_0 + x_1 + x_2, -y_0 + y_1 + y_2)$.

Per il TH.15 si ha:

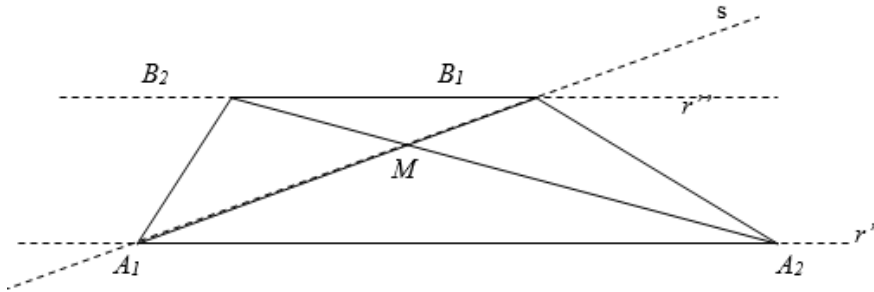
$$\begin{aligned} d(A_0, A_1) \cdot d(A_0, H) &= \frac{1}{2} A_0 \cdot I = \frac{1}{2} O \cdot I = \\ &= \frac{1}{2} \{ [d(O, A_0)]^2 - [d(O, A_1)]^2 - [d(O, A_2)]^2 + [d(O, A_3)]^2 \} = \\ &= \frac{1}{2} [(x_0)^2 + (y_0)^2 - (x_1)^2 - (y_1)^2 - (x_2)^2 - (y_2)^2 + (-x_0 + x_1 + x_2)^2 \\ &\quad + (-y_0 + y_1 + y_2)^2] \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \frac{1}{2} O \cdot I = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_2).$$

Naturalmente, se $A_0 = (0, 0)$, si ha: $\frac{1}{2} A_0 \cdot I = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

7- Il trapezio

Def.8: I punti B_1, B_2 siano i corrispondenti, rispettivamente, di A_1, A_2 secondo l'omotetia $\sigma_{M,K}$ di centro M e rapporto K : $\sigma_{M,K}(A_i) = (B_i)$. Il quadrilatero $P(J)$, essendo $J = (A_1, A_2, B_1, B_2)$, è detto trapezio.



NOTA 10: Nel caso di omotetia inversa, essendo:
 $\sigma_{M,K}(A_1) = (B_1)$, $\sigma_{M,K}(A_2) = (B_2)$, i segmenti $[A_1, B_1]$ e $[A_2, B_2]$ sono
 le diagonali del trapezio. Corrispondendosi gli insiemi
 $J_1 = (A_1, A_2, M)$ e $J_2 = (B_1, B_2, M)$ mediante omotetia, i triangoli
 $T(J_1)$, $T(J_2)$ sono simili, posto $d(A_1, A_2) = a$, $d(B_1, B_2) = b$, si ha:

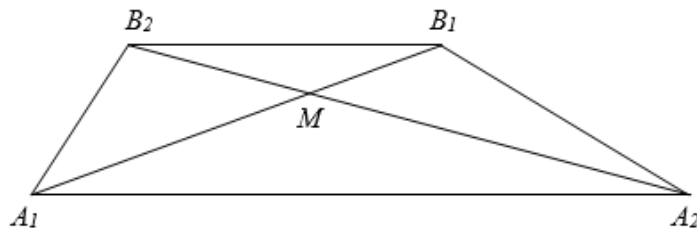
$$\frac{d(A_1 M)}{d(B_1 M)} = \frac{d(A_2 M)}{d(B_2 M)} = \frac{d(A_1 A_2)}{d(B_1 B_2)} = \frac{a}{b}$$

Dalla corrispondenza indotta dalla omotetia $\sigma_{M,K}$ risulta,
 inoltre, che le rette r' e r'' , passanti, rispettivamente, per
 (A_1, A_2) e (B_1, B_2) , sono parallele.

TH.18: Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A_1, B_1]$
 e $[A_2, B_2]$ di un quadrilatero $T(J)$ con $J = (A_1, A_2, B_1, B_2)$. La
 completezza di

$$I = (b A_1, -b A_2, a B_1, -a B_2) \quad (6,5)$$

essendo $d(A_1, A_2) = a$, $d(B_1, B_2) = b$, è condizione necessaria e
 sufficiente affinché $T(J)$ sia un trapezio.



Condizione necessaria: Essendo $T(J)$ un trapezio, i triangoli $T(J')$ e $T(J'')$, con $J' = (A_1, A_2, M)$ e $J'' = (B_1, B_2, M)$, per la *nota 10*, sono simili. Posto $d(A_1, A_2) = a$, $d(B_1, B_2) = b$, si ha, quindi:

$$\frac{d(A_1 M)}{d(B_1 M)} = \frac{d(A_2 M)}{d(B_2 M)} = \frac{d(A_1 A_2)}{d(B_1 B_2)} = \frac{a}{b}.$$

Essendo $\frac{d(A_1 M)}{d(B_1 M)} = \frac{a}{b}$ risulta completo l'insieme

$$I' = [b A_1, - (a + b) M, a B_1].$$

Essendo $\frac{d(A_2 M)}{d(B_2 M)} = \frac{a}{b}$ risulta completo l'insieme

$$I'' = [b A_2, - (a + b) M, a B_2].$$

Sottraendo: $I' - I'' = I = [b A_1, - (a + b) M, a B_1, - b A_2, (a + b) M, - a B_2]$ si ottiene l'insieme completo:

$$I = (b A_1, a B_1, - b A_2, - a B_2).$$

Condizione sufficiente: Sia $-(a + b) M$ il complementare dei punti materiali $b A_1, a B_1$ di I ; l'insieme

$I' = [b A_1, - (a + b) M, a B_1]$ è completo. Anche l'insieme

$I'' = I' - I = [b A_1, - (a + b) M, a B_1, -b A_1, b A_2, -a B_1, a B_2] = [a A_2, - (a + b) M, a B_2]$ è completo.

Per le proprietà degli insiemi ternari completi, essendo:

$I' = [b A_1, - (a + b) M, a B_1]$ completo, si ha $\frac{d(A_1 M)}{d(B_1 M)} = \frac{a}{b}$;

analogamente essendo $I'' = [a A_2, - (a + b) M, a B_2]$ completo, si

ha $\frac{d(A_2 M)}{d(B_2 M)} = \frac{a}{b}$. L'eguaglianza dei due rapporti,

$$\frac{d(A_1 M)}{d(B_1 M)} = \frac{d(A_2 M)}{d(B_2 M)} \quad \text{evidenzia la corrispondenza } \sigma_{M,K} \text{ fra } A_1,$$

B_1 e A_2, B_2 pertanto, per la definizione 8, $T(J)$ è un trapezio.

Nota.11: Il *TH.18*, non solo permette di classificare, mediante l'insieme completo $I = (a A_1, - a A_2, b B_1, - b B_2)$, la

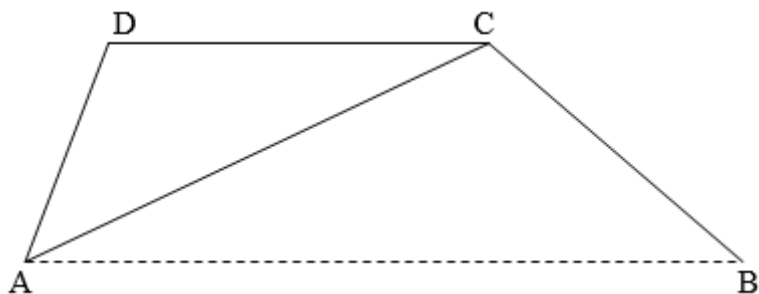
figura geometrica avente per estremi i punti (A,B,C,D) , ma permette di riconoscere gli estremi di ciascuna diagonale e di ciascun lato obliquo del trapezio: punti di I , con masse di segno concorde, sono posizionati agli estremi di una diagonale, punti materiali con massa opposte sono posizionati agli estremi di ciascuna base.

TH.19: Sia $I = (x A, -x B, y C, -y D)$ l'insieme completo avente sostegno $J = (A,B,C,D)$, insieme dei vertici del trapezio $T(J)$. Siano A', B', C', D' le proiezioni ortogonali, rispettivamente, dei punti A, B, C, D sulla retta passante per gli estremi del lato $[A,B]$ di $T(J)$. Si ha:

- 1) $I = (x A', -x B', y C', -y D')$ è un insieme completo;
- 2) qualunque sia P si ha $P \cdot I = P \cdot I'$;

È stata omessa la dimostrazione del teorema essendo simile a quella del *TH.15*.

Applicazione 19: Siano $[A,D]$ e $[B,C]$ i lati obliqui del trapezio $P(J)$ con $J = (A,B,C,D)$ e risulti $d(A,D) = 3\sqrt{5}$, $d(B,C) = 6\sqrt{2}$. Sia $[D,C]$ la base minore e $[A,C]$ una diagonale di $P(J)$ e risulti: $d(D,C) = 5$, $d(A,C) = 10$. Trovare $d(A,B)$ e $d(D,B)$ essendo $[A,B]$ la base maggiore e $[D,B]$ la diagonale di $P(J)$.



Posto $d(A,B) = x$, per il TH.8, l'insieme completo con sostegno J è: $I = (5 A, -5 B, x C, -x D)$.

Determiniamo la x utilizzando il TH.12:

$$[I - (5 C - 5 B)]^2 = (5 C - 5 B)^2. \text{Sviluppando:}$$

$$[5 A, (x - 5) C, -x D]^2 = -25 [d(B,C)]^2$$

$$5(x-5) [d(A,C)]^2 - x(x-5)[d(D,C)]^2 - 5x[d(D,A)]^2 = -25 [d(B,C)]^2.$$

Sostituendo i dati numerici: $x^2 - 16 x + 28 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = 14$ e $x_2 = 2$

Caso a) Per $x_1 = 14$ si ha $I_1 = (5 A, -5 B, 14 C, -14 D)$.

Per calcolare $d(A,B)$ applichiamo il TH.12; si ha:

$$[I_1 - (5 A, -5 B)]^2 = (5 A, -5 B)^2 \text{ e quindi}$$

$$(14 C, -14 D)^2 = (5 A, -5 B)^2, 25 d(A,B)^2 = 196 \cdot 25, d(A,B)=14.$$

Procedendo in modo analogo calcoliamo $d(B,D)$:

$$[I_1 - (5 D, -5 B)]^2 = (5 D, -5 B)^2.$$

Sviluppando si ha: $(5 A, 14 C, -19 D)^2 = (5 D, -5 B)^2$ da cui $d(B,D) = \sqrt{157}$

Caso b) Per $x_2 = 2$ l'insieme completo è

$I_2 = (5 A, -5 B, 2 C, -2 D)$. Per il calcolo delle distanze $d(A,B)$ e $d(D,B)$ si procede come nel caso a).

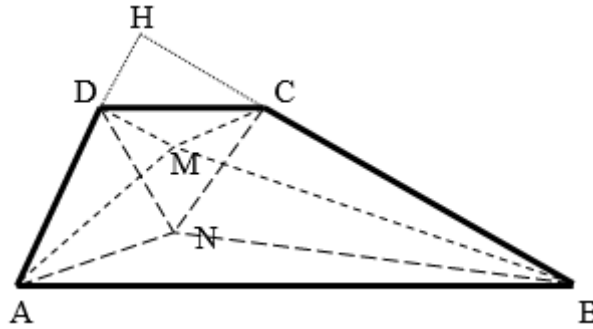
Applicazione 20: Sia

$$I = (x A, -x B, y C, -y D) \quad (6,6)$$

l'insieme completo con sostegno $J = (A,B,C,D)$. Siano r e s le rette passanti per (A,D) e (B,C) ; essendo $r \cap s = H$, si ha: $d(H,D) = 2\sqrt{5}$. Essendo M e N due punti del piano π contenente J , si ha: $d(M,A) = 3\sqrt{2}$, $d(M,B) = \sqrt{17}$,

$d(M,C) = 3\sqrt{5}$, $d(M,D) = 3$, $d(N,A) = \sqrt{29}$, $d(N,B) = 2\sqrt{26}$,
 $d(N,C) = 4\sqrt{2}$, $d(N,D) = 2\sqrt{5}$. Rappresentare la figura
 geometrica $T(J)$ e calcolare $d(A,D)$ e $d(B,C)$.

Risulta (vedere *TH.18* e *nota 11*) che $T(J)$ è un trapezio: $[A,C]$
 e $[B,D]$ sono le diagonali, $[A,D]$ e $[B,C]$ sono i lati obliqui,
 $[A,B]$, $[D,C]$ sono le basi, pertanto si ha:



Essendo I completo si ha: $M \cdot I = N \cdot I$. Sviluppando si ha:
 $x [d(M,A)]^2 - x [d(M,B)]^2 + y [d(M,C)]^2 - y [d(M,D)]^2 =$
 $= x [d(N,A)]^2 - x [d(N,B)]^2 + y [d(N,C)]^2 - y [d(N,D)]^2.$

Sostituendo si ha:

$$-135x + 36y = -75x + 12y \text{ da cui } y = \frac{5}{2}x.$$

Posto $y = 5$ si ha: $x = 2$ e la (6,6) diviene

$I = (2A, -2B, 5C, -5D)$. Tenendo conto della *nota 10* si ha:

$$\frac{d(A,B)}{d(C,D)} = \frac{5}{2}. \text{ Essendo simili i triangoli di vertici } (A,B,H) \text{ e}$$

$$(D,C,H) \text{ si ha: } \frac{d(H,A)}{d(H,D)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)} = \frac{5}{2} \text{ da cui:}$$

$$d(H,A) = d(H,D) \cdot \frac{5}{2} = 5\sqrt{5}.$$

Analogamente, essendo $\frac{d(H,B)}{d(H,C)} = \frac{5}{2}$, posto $d(H,C) = 2z$, si
 ha

$$d(H,B) = 5z \quad (6,7)$$

Essendo $M \cdot I = H \cdot I$ si ha:

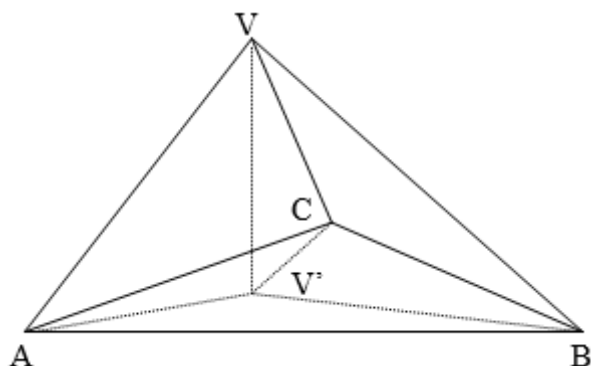
$$\begin{aligned} & 2 [d(M,A)]^2 - 2 [d(M,B)]^2 + 5 [d(M,C)]^2 - 5 [d(M,D)]^2 = \\ & = 2 [d(H,A)]^2 - 2 [d(H,B)]^2 + 5 [d(H,C)]^2 - 5 [d(H,D)]^2 \\ & 2 \cdot 18 - 2 \cdot 153 + 5 \cdot 45 - 5 \cdot 9 = 2 \cdot 125 - 50 \cdot z^2 + 20 \cdot z^2 - 5 \cdot 20 \quad \text{da} \\ & \text{cui } z^2 = 8. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (6,2) si ha: $d(H,C) = 4\sqrt{2}$, $d(H,B) = 10\sqrt{2}$.

I lati obliqui sono: $d(A,D) = d(H,A) - d(H,D) = 3\sqrt{5}$, $d(B,C) = d(H,B) - d(H,C) = 6\sqrt{2}$.

NOTA 12: Un insieme completo di punti materiali avente per sostegno una terna di punti allineati permette di risolvere problemi geometrici sia nell'ambito dello spazio bidimensionale che tridimensionale; altrettanto un insieme completo di punti materiali avente per sostegno una quaterna di punti complanari non solo può essere impiegato per la risoluzione di problemi nello spazio bidimensionale ma anche tridimensionale.

Applicazione 21: Sia V il vertice di una piramide con base triangolare $T(J)$ con $J = (A,B,C)$ essendo $d(A,B) = 8$, $d(B,C) = 2\sqrt{5}$, $d(A,C) = 2\sqrt{13}$. Sapendo che $d(V,A) = 6$, $d(V,B) = 2\sqrt{5}$, $d(V,C) = 2\sqrt{3}$, trovare l'altezza della piramide relativa alla base T .



Sia V' la proiezione ortogonale di V sul piano π individuato da A, B, C . Posto $d(V, V') = y$, si ha:

$[d(A, V')]^2 = [d(A, V)]^2 - [d(V, V')]^2 = 36 - y^2$. Analogamente, si ha: $[d(B, V')]^2 = 20 - y^2$, $[d(C, V')]^2 = 12 - y^2$. L'insieme completo avente sostegno $J = (A, B, C, V')$ è:

$I = [m A, n B, C, - (n + m + 1) V']$. Per calcolare m e n risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A \cdot I = B \cdot I \\ B \cdot I = C \cdot I \end{cases} \quad \text{Sviluppando si ha:}$$

$$\begin{cases} n[d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2 - (m + n + 1)[d(A, V')]^2 = \\ = m[d(A, B)]^2 + [d(CB)]^2 - (m + n + 1)[d(V', B)]^2 \\ m[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 - (m + n + 1)[d(B, V')]^2 = \\ = m[d(A, C)]^2 + n[d(B, C)]^2 - (m + n + 1)[d(V', C)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3n - 5m + 1 = 0 \\ n + m - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad m = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n = \frac{1}{2}$$

Sostituendo in I e moltiplicando per 2 si ha: $I = (A, B, 2C, -4V')$. Applicando il *TH.12* si ha:

$$[(A, B, 2C, -4V') \cup (4V', -4A)]^2 = (4V', -4A)^2$$

$$\begin{aligned}
 (B, 2C, -3A)^2 &= (4V', -4A)^2 \\
 [-3d(A,B)]^2 + 2[d(B,C)]^2 - 6[d(A,C)]^2 &= -16[d(V',A)]^2 \text{ da cui} \\
 [d(V',A)]^2 &= 29; \\
 \text{essendo } [d(V,V')]^2 &= [d(V,A)]^2 - [d(V',A)]^2 \text{ si ha } d(V',V) = \sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). "Insiemi di punti materiali", «*Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). "Insiemi completi del terzo ordine". «*Periodico di Matematica*», Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019.

Marco Andreatta



LA FORMA DELLE COSE

L'alfabeto della geometria

RACCONTARE LA MATEMATICA

il Mulino

Un matematico tra politica e storia

Renato Caccioppoli oltre la Matematica e la Musica. Impegno politico e revisione della Storia del Risorgimento, oggi attuale

Ferdinando Casolaro* Alessandra Rotunno**

*Direttore di redazione Periodico di Matematica;

ferdinando.casolaro@unina.it

** Liceo Scientifico "Labriola" Napoli e professore a contratto al

Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II;

alessandra.rotunno@unina.it



DOI : 10.53159 / PdM(IV).v3n1.091

Sunto: Si propone una ricerca di episodi relativi all'attività politica di Renato Caccioppoli ed al suo giudizio sulla storia dell'Italia per un intero secolo - dal 1861 al 1959 - anno della sua scomparsa. Si richiamano, in particolare, due figure carismatiche per la formazione di Renato: il matematico Mauro Picone ed il comunista Mario Palermo. Un paragrafo a parte è dedicato al matematico Lucio Lombardo Radice, fondatore del "Movimento dei Partigiani per la Pace" in cui Renato ha militato negli ultimi anni del suo percorso di vita. Il lavoro è stato presentato al liceo "R. Caccioppoli" di Napoli a maggio 2022 nell'ambito della manifestazione in occasione del 63-esimo anniversario della sua morte (8 maggio 1959).

Parole Chiave: Caccioppoli, Napoli, Politica, Storia,

Abstract: *We propose a search for episodes relating to the political activity of Renato Caccioppoli and his judgment on the history of Italy for an entire century - from 1861 to 1959 - the year of his death. In particular, two charismatic figures refer to Renato's education: the mathematician Mauro Picone and the communist Mario Palermo. A separate paragraph is dedicated to the mathematician Lucio Lombardo Radice, founder of the "Movement of Partisans for Peace" in which Renato played in the last years of his life. The work was presented at the "R. Caccioppoli" in Naples in May 2022 as part of the event on the occasion of the 63rd anniversary of his death (May 8, 1959).*

Keywords: *Caccioppoli, Naples, Politics, History*

1 - Introduzione

Renato Caccioppoli è l'essenza stessa dei napoletani, uno spirito di creazione, uno spirito di ribellione contro le ingiustizie, un personaggio favoloso. Ha sfidato sempre con intelligenza, è stato un emblema di tutte le lotte interne ed esterne dei napoletani.

Dovrebbe essere nello spirito dei napoletani ricordato a livello di Maradona.

Jean Noel Schifano

Sulla biografia e sul genio matematico di Renato Caccioppoli è stato scritto tanto, si può dire tutto: la vita, il matematico, il musicista, il letterato,... ma forse si è detto poco su due aspetti essenziali del suo pensiero che hanno caratterizzato interamente la sua attività "Oltre la matematica":

- il suo giudizio sulla Storia dell'Italia dalla seconda metà del XIX secolo alla seconda metà del XX secolo, in particolare

sul “cosiddetto Risorgimento”. È stato realmente “Risorgimento” o “Saccheggio” dello Stato meridionale?

- l'attualità - con gli eventi di oggi - del suo pensiero politico che ha influito molto sulle coscienze dei cittadini che ebbero la fortuna di ascoltare le sue lezioni perché, come vedremo nei paragrafi successivi di questo lavoro, non rinunciava ad esporre con determinazione le proprie idee agli studenti.

In questo contesto si inseriscono due periodi del suo percorso di vita a Napoli, dai quali emerge in modo completo la figura umana di Renato: il decennio degli anni ‘Trenta’, in particolare dal ritorno a Napoli nel 1934 all’inizio del secondo conflitto mondiale nel 1939, con l’amarezza del silenzio dei napoletani davanti ai crimini fascisti, e il decennio degli anni ‘Cinquanta’ con l’impegno nel Movimento dei “Partigiani della pace”, nato ufficialmente a Parigi nell’aprile 1949, ed organizzatosi qualche anno dopo anche in Italia per merito di Lucio Lombardo Radice¹.

2 – Lucio Lombardo Radice e il Movimento dei Partigiani per la Pace

Lucio Lombardo Radice, negli anni ‘Cinquanta’, è stato molto vicino a Renato per la collaborazione e divulgazione delle attività del Movimento dei “Partigiani della pace”.

Per la sua duttilità di conoscenze, che andava oltre la matematica e la fisica, fu uno dei maggiori esponenti della

¹ Lucio Lombardo Radice (1916-1982) è stato un matematico, pedagogista, politico, dirigente comunista italiano. Allievo di Guido Castelnuovo e Federico Enriques

cultura italiana nei decenni successivi al secondo conflitto mondiale. Politico con militanza attiva nel Partito Comunista negli anni del dopoguerra, già precedentemente nel 1939 non poté prendere servizio come assistente alla cattedra di Geometria analitica perché fu arrestato e condannato a quattro anni di reclusione, in quanto oppositore al regime fascista (Casolaro, Cirillo, 2018)

Solo nel 1945 fu ammesso come assistente all'Università "La Sapienza" di Roma e fu l'inizio di una brillante carriera come professore universitario.

La sua duttilità si intravede in tutta la produzione culturale-scientifica che ha lasciato. Tra i matematici di quel periodo, Lucio Lombardo Radice fu tra i più convinti propositori dell'insegnamento di una geometria più ampia rispetto al modello euclideo, come si evince dai volumi prodotti con Lina Mancini Proia² "Il metodo matematico" e adottati in tante scuole. Si dedicò con successo alla divulgazione scientifica e matematica, ma fu contemporaneamente pedagogista, didatta e, in qualità di scrittore, fu autore di libri di giochi per bambini e ragazzi.

Partecipò anche a programmi radiofonici e trasmissioni televisive; particolarmente significativa la collaborazione con la RAI, tra il 1970 e il 1973, in qualità di consulente scientifico, per il film in tre puntate "Non ho tempo", incentrato sulla figura di Evariste Galois, nel quale lo stesso Lucio recitò nel

² Lina Mancini Proia (Roma 1913-2002) è stata una matematica italiana. Allieva di G. Castelnuovo e F. Enriques, collaborò a lungo con L. Lombardo Radice, nell'elaborazione del Progetto "Il metodo matematico" - pubblicato nel 1977 - nel quale riveste un ruolo importante l'impianto geometrico a partire dal concetto di "trasformazione".

ruolo del professor Louis Paul Emile Richard, universalmente riconosciuto come maestro di Galois.

Per Renato Caccioppoli, Galois rappresentava il simbolo della ribellione alle ingiustizie (Gatto, Toti Rigatelli, 2009).

Un anno prima della sua morte, il 24 ottobre 1981, Lombardo Radice in collaborazione con il Movimento dei Cristiani per il socialismo, fondò il “Comitato di coordinamento dei Movimenti per la Pace”. Grande partecipazione e consenso ci fu in quell’anno alla grande Manifestazione che si svolse a Napoli il 16 novembre 1981³, con la partecipazione di importanti esponenti della Letteratura, in particolare Eduardo De Filippo. Dagli anni del dopoguerra Eduardo aveva avuto una frequentazione ed un’intesa intellettuale con Renato che fu la prima persona a cui aveva fatto leggere la sua grande opera “Napoli Milionaria”, prima che venisse presentata in teatro.

In realtà, più che far leggere ad opera finita, Eduardo ebbe l’opportunità di spiegargli le finalità ed i momenti essenziali della sua opera durante la stesura in quanto, rientrato a Napoli nel 1945, fu ospitato per alcuni giorni da Renato nella sua casa di Palazzo Cellammare a Via Chiaia.

Anche precedentemente (dall’inizio degli anni Cinquanta) le manifestazioni degli aderenti al “Movimento per la Pace” si svolgevano in molte parti d’Europa. Significativo il Congresso Mondiale dei Partigiani della Pace nel marzo 1950 a Stoccolma, cui riuscì a partecipare il poeta Pablo Neruda dopo tante peripezie negli spostamenti, perché il governo

³ L’Unità - Roma, Regione - 15 novembre 1981, pagina 16. “Insieme per la Pace”. In scena Eduardo e Carmelo Bene.

cileno gli aveva negato il visto per lasciare il Cile in quanto aderente al partito comunista.

Alla manifestazione, presieduta ed introdotta da Frédéric Joliot-Curie⁴, con il manifesto del congresso rappresentato dalla famosa “Colomba della Pace” disegnata da Picasso, parteciparono anche Albert Einstein, Pietro Nenni, Renato Guttuso, Salvatore Quasimodo, Natalia Ginzburg, ... ed altri esponenti significativi della cultura italiana.

Lombardo Radice morì a Bruxelles, colto da infarto, mentre partecipava ai lavori di preparazione della II Conferenza per il disarmo.

3 – Il ribelle contro il potere. È così?

No, Renato non protestava genericamente contro il ‘potere’, ma nei confronti delle ingiustizie che vedeva nei misfatti del regime fascista negli anni prima del secondo conflitto mondiale e nella politica delle istituzioni a Napoli nel periodo successivo alla guerra.

Egli aveva grande rispetto per gli esponenti istituzionali che, fino all’età di diciotto anni, erano rappresentati dai genitori e dai professori delle scuole che frequentava, in particolare negli anni della scuola superiore all’Istituto per geometri G.B. Della Porta di Napoli. Ebbene, fino al 1922 – anno di nascita del fascismo – non si riscontrano particolari proteste nei confronti sia della Scuola che della famiglia.

⁴ Jean Frédéric Joliot-Curie (1900-1958) è stato un fisico francese e marito di Irène Joliot-Curie (figlia del Premio Nobel per la Fisica Marie Curie), con la quale è stato insignito del Premio Nobel per la chimica nel 1935 per la loro scoperta della radioattività indotta.

Infatti aveva accettato le imposizioni del padre Giuseppe che all'età di 14 anni lo obbligò a frequentare l'Istituto per Geometri e non il liceo, così come a 18 anni gli impose di iscriversi alla facoltà di Ingegneria contro la sua volontà di iscriversi, su consiglio di Benedetto Croce, al Corso di laurea in Matematica.

Pertanto la "protesta nei confronti del potere" andrebbe sostituita con "protesta nei confronti delle ingiustizie".

Ma la testimonianza principale della convinzione di Caccioppoli al rispetto delle Istituzioni ci viene dal rapporto di grande stima (ed anche affetto) nei confronti di Mauro Picone, suo professore che non si era mai posto contro il fascismo, anzi ne approvava alcune decisioni.

Tra il comunista Caccioppoli ed il fascista Picone, relatore della sua tesi e responsabile dell'assegnazione della cattedra a Napoli, non ci è mai stato un minimo screzio ma solo affetto e rispetto come dimostrano tutti i documenti dei rapporti epistemologici e scientifici tra i due (Gatto, Toti Rigatelli 2009).

A Picone fu risparmiato il processo contro gli aderenti al fascismo nel 1947 solo per il rapporto che aveva con Renato.

4 – Col prof. Picone: allievo e maestro

L'influenza di Picone sulla formazione matematica di Caccioppoli fu determinante per la sua evoluzione scientifica. In una lettera del 1962 di Picone a Gianfranco Cimmino (1908-1989), suo allievo e poi assistente insieme a Carlo Miranda, si legge:

Quando nel lontano 1925 arrivai all'Università di Napoli trovai Renato al suo terzo anno di studi universitari alle

prese con la sua tesi di laurea sui sistemi pfaffiani , disgustato della matematica e in forse se proseguire nello studio di essa o darsi alla carriera di direttore d'orchestra. Egli veniva alle mie lezioni di analisi superiore nelle quali svolgevo la teoria dell'integrale di Lebesgue e ricordo benissimo che si palesò a me in una lezione nella quale assegnavo ai miei uditori il compito di trovare un esempio in virtù del quale un'ipotesi formulata per un certo teorema dovesse dimostrarsi essenziale. Ebbene finita la lezione mi vedo rincorrere da un giovane arruffato e sciattamente vestito il quale mi diceva balbettando di avere trovato l'esempio richiesto. Lo invitai a venire nel mio studio ed egli mi espose un elegantissimo esempio che risolveva completamente la questione nel senso affermativo. Era Renato col quale tenni una lunga conversazione. Ne intuì subito il possente ingegno e d'allora in poi mi legai a lui da quell'amicizia che non doveva più estinguersi. Cominciammo a vederci quasi tutti i giorni ed io gli parlavo della moderna analisi funzionale e delle sue applicazioni ai problemi di integrazione delle equazioni differenziali.... Naturalmente messosi Renato nella nuova via che io gli avevo indicato, fece passi da gigante e devo riconoscere che dopo qualche tempo si invertirono le parti e cioè egli divenne il maestro ed io il discepolo.

Sono tanti i dialoghi epistemologici tra Caccioppoli e Picone; il più significativo si riscontra nel 1953 quando fu assegnato a Renato il “Premio Reale”, un premio nazionale conferito dal Presidente della Repubblica che, in passato, avevano conseguito Salvatore Pincherle, Corrado Segre, Vito Volterra, Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, fino a Mauro Picone nel 1938 (Gatto, Toti Rigatelli 2009).

Al telegramma redatto da Picone: Premio del Presidente a te dovuto, conferitoti oggi da Accademia Lincei; seguì immediatamente il telegramma di Renato: Nulla mi è dovuto, so quanto ti devo.

5 – Renato sull’Unità d’Italia: Risorgimento o Saccheggio?

Il giudizio di Renato sulla Storia dell’Italia dalla seconda metà del XIX secolo alla seconda metà del XX secolo - in particolare del Risorgimento - è totalmente diverso da come ci è stata proposta nell’insegnamento scolastico nei decenni successivi al secondo conflitto mondiale.

Ancora oggi, anche se alcuni storici propongono una revisione del giudizio di quegli anni, prevale un insegnamento che definisce Giuseppe Garibaldi “eroe dei due monti” ed i Savoia “benefattori che hanno riunito l’Italia centro-settentrionale con il Regno delle due Sicilie”.

In questa Presentazione gli autori riportano solo documenti che, anche se quasi totalmente condivisi, non rappresentano la certezza del pensiero per mancanza di ulteriori dati, in quanto si sono formati nella Scuola degli anni ‘Sessanta’ (e successivi) che dà una descrizione di questa storia completamente diversa e non hanno ancora completato una esaustiva conoscenza della revisione dei fatti.

Pertanto riteniamo questa nota solo un invito ai docenti a proporre ai propri allievi ricerche in proposito, relative alla revisione degli storici negli ultimi decenni.

Dall’analisi di documenti pubblicati dallo scrittore francese J. Noël Schifano⁵ su alcune lezioni di Renato agli studenti, si

⁵ Jean Noel Schifano (1947) è uno scrittore francese di padre siciliano. Dal 1994 è cittadino onorario di Napoli, dove nel periodo 1992-1998 ha diretto l’Istituto francese di Napoli. Ha tradotto alcuni grandi autori italiani, tra cui Umberto Eco, Leonardo Sciascia, Italo Svevo, Elsa Morante, Anna Maria Ortese, Elena Ferrante.

evincesse la seguente domanda: è stato realmente Risorgimento o Saccheggio dello Stato meridionale?

Rifacendosi a Gramsci, Renato polemizzava contro i Savoia e contro l'unificazione del paese e vedeva nel regime fascista solo una metamorfosi, un passaggio di consegne che perpetuava la subordinazione politica e lo svilimento culturale del Mezzogiorno.

Quanto segue è estratto dalla traduzione in italiano del volume di Schifano "Le coq de Renato Caccioppoli" (Il gallo di Renato Caccioppoli), pubblicato nel 2018 e centrato sul noto episodio del 1938, quando Renato, per protesta ad uno stupido decreto del regime fascista, che vietava di portare cani a passeggio per le strade, uscì da via Chiaia con un gallo al guinzaglio.

La traduzione in italiano è di aprile 2020, "Il gallo di Renato Caccioppoli", autore Roberto D'Ajello⁶ - edizione Colonnese, Napoli. In riferimento alla traduzione di D'Ajello, a pagina 52 viene descritta una lezione di Renato agli studenti.

"Un giorno, mentre andava avanti e indietro davanti alla sua cattedra com'era solito, introdusse la lezione sulle irregolarità isoperimetriche scagliando queste parole che stupirono l'aula gremita e muta...":

Per arrivare qui, sono passato per via dei Mille (elegante strada ai piedi di Corso Vittorio Emanuele), risbucando a piazza del Plebiscito ho preso un caffè, un espresso doppio, al Gambrinus e siccome non avevo raggiunto la mezz'ora di

⁶ Roberto D'Ajello (1934) è un ex magistrato, scrittore e traduttore di opere in dialetto napoletano, vincitore nel 2015 del Premio "Award of Excellence" a New York per la traduzione in napoletano di "Alice nel Paese delle Meraviglie".

ritardo che vi concedo per carità cristiana, mi sono spinto fino a piazza Garibaldi facendo il Rettifilo, detto anche Corso Umberto I di Savoia...

Non pensate che noi, i Napoletani, siamo gli unici al mondo a riverire con una simile costanza i nostri carnefici da ormai settantotto anni?... (1861-1939). Favola dell'Unità, mentre non si tratta che di una colonizzazione di predatori senza morale, attenti solo ai loro profitti... Mille tagliatori di gole, il Plebiscito del 1860 sotto la minaccia e la menzogna assoluta, Garibaldi, che solo la sua doppia appartenenza alla Massoneria d'Uruguay e di Scozia, entrambe le volte con il grado supremo, protegge dai crimini di brigantaggio che la sua stessa famiglia non esita a denunciare, i Savoia, detti anche la rovina del Sud, e il fascismo di oggi: la camicia rossa di Garibaldi passa nella tintoria dei Savoia e ci dà la camicia nera di Mussolini...

La considerazione e grande ammirazione di Schifano per Renato Caccioppoli la si riscontra anche in altri interventi pubblici. Significative le parole pronunciate nella conferenza tenuta il 2 ottobre 2020 a Villa Campolieto ad Ercolano⁷ dove associa due grandi geni che hanno dato gloria alla nostra città:

... e questo è un personaggio favoloso, un personaggio che dovrebbe essere nello spirito dei napoletani" a livello di Maradona, i napoletani che non lo conoscono che l'hanno seppellito perché era un personaggio fuori legge, fuori norme, fuori tutto, salvo della sua napoletanità che faceva fiorire con i suoi studenti, con il mondo intero in un modo favoloso.

Relativamente al Plebiscito del 21 ottobre 1860 che si svolge nel Regno delle Due Sicilie per l'annessione al Piemonte,

⁷ Wikipedia: Video della conferenza "Schifano torna a parlare di Napoli e lo fa in napoletano" - 2 ottobre 2020

Renato fa notare come il risultato è conseguenza di un'organizzazione con brogli. Si legge in Schifano, pagina 54:

... senza la camorra nessuna vittoria del SI al Plebiscito, dei SI cento volte più numerosi degli abitanti autorizzati a votare e qualche NO aggiunto nell'urna per simulare il vero...

... senza la camorra nessun ingresso di Garibaldi a Napoli, ... senza la camorra nessuna ovazione al presunto "eroe dei due mondi", quando arriva in un vagone del primo treno della prima ferrovia d'Italia...

6 – L'attività politica e l'opposizione al fascismo

La totale visione della Cultura "Oltre la Matematica" - che lo rendeva protagonista della vita politica e culturale a Napoli nelle manifestazioni pubbliche - è riassunta in un estratto dell'intervento dell'avvocato Gerardo Marotta⁸ nella "Giornata di Studi per iniziativa dell'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici e della Scuola Normale di Pisa il 10 aprile 1987":

Renato era Presidente del Circolo napoletano del Cinema che egli stesso aveva fondato e, come intellettuale di universale prestigio, sosteneva a Napoli le attività dell'associazione "Cultura Nuova" e i Cicli di riunione del "Gruppo Gramsci" sulla Storia dell'Italia moderna. La sua figura di combattente politico era notissima: aveva rivestito un ruolo di primo piano nelle battaglie per la Repubblica e nelle aspre lotte politiche degli anni 'Cinquanta', e si

⁸ Gerardo Marotta (1927-2017), avvocato e filosofo italiano è stato una figura di spicco della resistenza e dell'antifascismo. Nel 1975 fondò l'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, di cui è stato Presidente fino alla morte.

impegnava con energia e passione nel Movimento dei Partigiani per la Pace (G. Marotta ed altri, 1989).

Nel 1931, dopo quattro anni di insegnamento come professore incaricato al Dipartimento di Matematica a Napoli, Renato vince la cattedra di Analisi Matematica all'Università di Padova. Dopo tre anni - nel 1934 - ritorna a Napoli e rimane deluso dall'atmosfera politica, priva di qualunque elemento di resistenza al fascismo. È profondamente addolorato dall'inerzia mostrata dai suoi concittadini in occasione dell'aggressione dell'Etiopia del 1935: trecentomila cittadini trucidati a terra dai fascisti, al canto dell'inno «faccetta nera» lo rattristò profondamente.

In tale circostanza confidò alla zia Mariussa (persona di famiglia più influente su Renato):

Napoli è una palude e noi siamo la fauna malata di questa palude. La vigliaccheria ci fa ingrassare e ci uccide contemporaneamente.

La madre Giulia Sofia, preoccupata dello stato psicologico che alimentava in Renato il desiderio di ribellarsi al regime, l'affidò all'avvocato Mario Palermo⁹, figura di spicco dell'antifascismo napoletano. Sofia confidò a Mario Palermo:

La solitudine politica lo sta facendo ammattire.

Renato iniziò una costruttiva collaborazione con l'avvocato Palermo e aderì all'invito di Togliatti di non lasciare l'Università in mano ai fascisti ed essere presente per opporsi con la propria opera.

⁹ Mario Palermo (1898-1985) Figlio del Presidente della Camera degli avvocati penali di Napoli, fu allievo alla Scuola Militare Nunziatella di Napoli, e quindi seguì le orme paterne laureandosi in giurisprudenza e iniziando ad esercitare come avvocato penalista.

Il legame con Mario Palermo portò Renato a collaborare con i gruppi antifascisti di Napoli che, sotto la guida di Palermo, tenevano gli incontri segreti nel retro della libreria “Guida” di Port’Alba, nella sede dell’Unità, al “Gambrinus” o in qualche trattoria fino a notte inoltrata. Commoventi ed oggi attuali, le appassionante discussioni politiche con i giovani intellettuali: Francesca Spada, Ermanno Rea, Mariano D’Antonio, ... ecc.

Testimonianze in proposito le ha lasciato lo scrittore Ermanno Rea che nella sua opera «Mistero napoletano» scrive:

... Ma l’operare di nascosto non si addiceva a Caccioppoli, che sentiva l’esigenza di una ribellione aperta. Pur essendo sostanzialmente un non-violento, soleva ripetere a se stesso: “Occorre che mi esibisca, che salga su un palcoscenico senza occuparmi troppo delle conseguenze, occorre parlare alla gente a voce alta” (Ermanno Rea, 1995).

Pertanto trascorreva molto tempo delle sue giornate nelle sezioni del Partito Comunista, nella sede napoletana de “l’Unità” ed a tenere comizi per il partito. Pur non essendo iscritto al partito, lo vedeva come la forza in grado di rigenerare il Paese e dargli una prospettiva di trasformazione.

7 -Mario Palermo, militare, comunista e l’influenza su Renato

Chi era l’avvocato Mario Palermo e quale peso politico e morale ebbe su Renato?

Mario Palermo, dopo aver condiviso inizialmente alcune scelte del regime, dopo l'assassinio di Giacomo Matteotti nel 1924 diede inizio ad una forte opposizione e nel 1930 aderì al Partito Comunista. Da avvocato difese i detenuti confinati dal regime fascista. Nel 1943 divenne membro del CLN (Comitato Liberazione Nazionale) ed ottenne la nomina a sub-commissario all'Annona e al Corso Pubblico del Comune di Napoli.

Terminata la guerra, fu dal settembre 1945 a giugno 1946 membro della Consulta Nazionale¹⁰ e consigliere comunale di Napoli (1946-1960). Senatore nel gruppo del Partito Comunista Italiano per un ventennio (1948-1968), è stato vicepresidente della commissione difesa dal 1953 al 1968.

Da sottosegretario alla Guerra, riuscì a non far chiudere la scuola militare «Nunziatella» dopo la seconda guerra mondiale. Le sanzioni imposte dagli Alleati prevedevano un forte ridimensionamento delle Forze Armate italiane con la chiusura delle tre Scuole militari di Roma, Milano e Nunziatella a Napoli. Grazie a Palermo, la Nunziatella fu preservata, mentre le Scuole Militari di Roma e di Milano vennero cancellate.

8 – Il Movimento dei Partigiani per la Pace

¹⁰ La Consulta nazionale fu un'assemblea legislativa del Regno d'Italia di natura provvisoria e non elettiva, istituita dopo la fine della seconda guerra mondiale, allo scopo di sostituire il Parlamento del Regno d'Italia fino alle elezioni nazionali del 2 giugno 1946, quando vennero eletti i membri dell'Assemblea Costituente

Negli anni 'Cinquanta' l'impegno più forte di Renato è per il Movimento dei "Partigiani della Pace", nato ufficialmente a Parigi nell'aprile 1949. In Italia il Movimento ha avuto il suo maggiore esponente in Lucio Lombardo Radice, con l'obiettivo dell'interdizione all'arma atomica e di un patto di pace - fra le cinque grandi potenze - capace di evitare il pericolo di una nuova disastrosa guerra alimentato dal clima di "guerra fredda".

Il 15 dicembre 1953, su invito di Maurizio Valenzi¹¹, Renato tenne una conferenza al teatro "Piccinni" di Bari, impostata completamente sull'attività della "Associazione dei Partigiani per la pace". Introdusse il suo discorso con le commoventi parole, dalle quali esplode tutta la sua umanità:

Sono venuto per parlarvi della pace. Io ne sono un partigiano, cioè un convinto assertore che la pace non è una dimensione lontana dalla nostra portata. Spinoza asseriva: "la pace non è assenza di guerra: è una virtù, uno stato d'animo, una disposizione alla benevolenza, alla fiducia, alla giustizia". L'ultima guerra mondiale ci ha insegnato, fra l'altro, che non possiamo permettercene una terza. Sarebbe l'eclisse del pianeta. Un'eclisse definitiva e senza ritorno. Come intervenire perché ciò non accada? È a questo scopo che è sorta, da alcuni anni, l'Associazione dei Partigiani per la Pace. Vedete, essa è rappresentata da una colomba che il grande pittore Pablo Picasso ha voluto disegnare per noi e che, sicuramente, avrete visto riprodotta nei manifesti e negli opuscoli. Questo nostro incontro di stasera

¹¹ Maurizio Valenzi (1909-2009), esponente carismatico del Partito Comunista, è stato Senatore dal 1953 al 1968, consigliere comunale a Napoli dal 1970 al 1975, anno in cui fu eletto sindaco, carica che mantenne fino al 1983. Antifascista ed eroe della Resistenza, nel novembre 1941 fu arrestato dai fascisti e condannato all'ergastolo ed ai lavori forzati. Fu liberato dagli alleati nel marzo 1943.

è una riprova che qualcosa per tenerci stretta questa pace possiamo e dobbiamo farla anche noi. Tutti quanti noi.

Purtroppo oggi, quasi settanta anni dopo, ci ritroviamo con il grande rischio che si possa ripetere una tragedia del genere.

Le cause? Note a tutti per il secondo conflitto mondiale, provocato dal desiderio dei regimi nazi-fascista ad occupare territori di altri. Cause che hanno origine prima del 1939, inizio della guerra, con campagne provocatorie della stessa Italia nei paesi nord-africani, in particolare la campagna in Etiopia del 1935, già citata nel paragrafo precedente.

Anche oggi le cause del rischio di guerra sono le stesse. I gravissimi attacchi di Putin all'Ucraina per l'occupazione di alcuni territori, ma anche in questo caso - analogie nella storia - le cause sono da ricercare nel desiderio di sopraffazione già emerso negli anni precedenti, questa volta da entrambi i contendenti, come si evince da un'intervista a Papa Francesco pubblicata sul Corriere della sera il 3 maggio 2022, in cui il quotidiano scrive: "la preoccupazione di Papa Francesco è che Putin, per il momento, non si fermerà. Il Santo padre, tenta anche di ragionare sulle radici di questo comportamento, sulle motivazioni che lo spingono a una guerra così brutale".

Dice testualmente il Papa: Forse 'l'abbaiare della Nato alla porta della Russia ha indotto il capo del Cremlino a reagire male e a scatenare il conflitto. Un'ira che non so dire se sia stata provocata - si interroga - ma facilitata forse sì".

Il riferimento è ai Patti del 1990 (caduta del Muro di Berlino) ed all'influenza della NATO nella gestione delle elezioni 2014 in Ucraina.

In questo passaggio, il Santo Padre evidenzia un fatto che, in questi mesi, è stato dimenticato da tanti commentatori: le guerre non scoppiano mai per caso. Quasi sempre non si tratta della pazzia di un uomo. Ci sono sempre motivazioni profonde - le radici di cui parla Papa Francesco - dietro ai conflitti. E il Santo padre, per la guerra in Ucraina, le individua sia nell'espansione della Nato verso Est, che nel desiderio di Putin di riportare la Russia alle condizioni stabilite con il patto di Varsavia del 1955.

9 - Il rapporto con la Napoli degli anni Cinquanta

Da tutti i documenti degli anni 'Cinquanta' si evince il forte amore di Renato per Napoli. Come già accennato nel paragrafo precedente, Renato fu molto attivo nella collaborazione con il Movimento dei Partigiani della Pace, oltre a dare continuità all'impegno politico con gli intellettuali del tempo, partecipando anche ai comizi del Partito Comunista. In particolare, si soffermava sulla funzione della Cultura e l'esigenza di dare a tutti i ragazzi la possibilità di frequentare la Scuola, per l'evoluzione verso una società più giusta.

A tal proposito, racconto un episodio in cui uno degli autori (Casolaro) è stato presente.

Era uno degli anni 1957 o 1958, qualche mese prima delle elezioni comunali a Napoli. In adiacenza della cosiddetta "fontana delle paparelle"¹² a piazza Cavour, c'era uno spazio

¹² Fontana da giardino con arredo esterno circolare in cui galleggiano le oche, dette "paparelle" in dialetto napoletano.

che, da scugnizzi della strada, utilizzavamo come campo di calcio. In un pomeriggio ci recammo al cosiddetto "campo" per giocare a calcio e trovammo lo spazio occupato da un palco dove era in corso un comizio del Partito Comunista. Per curiosità restammo ad ascoltare proprio nel momento in cui un signore salì sul palco, prese il microfono e, rivolto ai candidati che chiedevano il voto in qualità di consiglieri comunali, con voce determinata disse qualcosa il cui significato è: *Se sarete eletti al comune, avete il dovere di chiedere la costruzione di aule scolastiche. La scuola è l'unica soluzione per la crescita dei nostri ragazzi!...*

Era 'O professore', come ci chiarì un signore presente: *è nu professore e matematica, è nu' genio!*

Nessuno dei ragazzi fece caso all'evento (frequentavamo il primo o il secondo anno della scuola di avviamento)¹³, anche se tra di noi ci fu uno - non molto appassionato allo studio - che disse: *chist' ce vo' manna' a scola, iammuncenn'* (questo ci vuole mandare a scuola, andiamocene). Stranamente rimasi colpito da quelle parole, per cui ne parlai a casa durante la cena serale. Fu grande la sorpresa nel sentire che mio padre - operaio che seguiva le vicende politiche, in particolare le attività del Partito Comunista - conosceva l'impegno politico

¹³ La Scuola di Avviamento, alla cui conclusione non si poteva accedere ad alcun corso quinquennale, ma solo ad una Scuola professionale della durata di due anni con la definitiva conclusione del curriculum di studi, consisteva in un percorso sostitutivo dei tre anni della Scuola media. Ufficialmente accedevano i ragazzi meno motivati per lo studio; in realtà erano frequentati dai figli delle persone meno abbienti che ritenevano di non avere i mezzi economici per permettere ai propri figli di proseguire negli studi. Fu soppressa dalla legge del 31 dicembre del 1962 che istituiva la scuola media unificata.

di quel professore di matematica e ci raccontò qualche ulteriore dettaglio.

Ricordai l'episodio nel 1976, con l'ascesa a sindaco di Napoli di Maurizio Valenzi, il primo sindaco comunista della città di Napoli, che avrebbe realizzato il Progetto "mille aule in un anno". Renato era stato un precursore.

Renato credeva molto nelle idee del comunismo anche se non si era mai iscritto al partito e la sua attività, come già detto nel paragrafo precedente, si svolgeva in collaborazione con gli ambienti comunisti di Napoli.

Negli anni 'Cinquanta' a Napoli prevaleva un anticomunismo che portava addirittura a tenere sotto controllo gli esponenti del partito o, come Renato, vicini al partito (vedi in proposito: Gatto-Toti Rigatelli 2009, pagina 131, *Un processo del 1958*). In tali condizioni si era creato un clima di ostracismo nei confronti dei comunisti che erano controllati quasi come fossero dei sovversivi.

Alle elezioni del 1952 che portarono il monarchico Achille Lauro a sindaco di Napoli, i partiti anticomunisti numericamente più forti (Democrazia Cristiana, Partito Nazionale Monarchico e Movimento Sociale Italiano) toccavano il 65% dei voti, l'area di sinistra costituita da comunisti, socialisti e indipendenti (oltre a piccole rappresentanze di passaggio), arrivava appena al 27%.

Pertanto, anche se questo 27% comprendeva la componente culturale e intellettuale di Napoli impegnata nel rinnovamento, in quel periodo non si riuscì ad evitare il fenomeno delle cosiddette "Mani sulla città" da parte di ceti parassitari privi di scrupoli e di speculatori edili, le cui

espressioni politiche sono da ricercare nel “laurismo”¹⁴ prima e nel “gavismo” poi.

Alla mancanza di peso del Partito Comunista e della Sinistra in generale sull’opinione pubblica contribuì sicuramente la suddivisione dell’Europa nei due blocchi: occidentale (Alleanza Atlantica NATO) e orientale (Patto di Varsavia). La presenza delle forze americane a Napoli favoriva sicuramente il potere anticomunista, di cui Lauro e Gava erano tra gli esponenti più significativi.

Questo contesto era individuato da Renato come *l’«ammiraglio» che consegna la città agli americani per farne la capitale militare dell’alleanza atlantica nel Mediterraneo.*

10 - Appendice e Conclusioni

Con alcuni personaggi Renato si sentiva in sintonia e provava grande ammirazione. In particolare, nelle opere e nei risultati del poeta francese Arthur Rimbaud (1854-1891) e del matematico francese Evariste Galois (1811-1832), vissuti nel secolo precedente, vedeva probabilmente il suo carattere. Con lo scrittore francese André Gide (1869-1951), Premio Nobel per la Letteratura nel 1947, si era frequentato.

Inoltre, è stato significativo il rapporto epistolare con Eduardo De Filippo, a cui fece leggere in anteprima la sua opera “Napoli milionaria”.

¹⁴ L’espressione “Laurismo” caratterizza il periodo del potere di Achille Lauro a sindaco di Napoli (1952-1957 e rieletto nel 1961). L’espressione “Gavismo” caratterizza il potere della famiglia Gava nell’area napoletana e nella provincia di Napoli nel periodo successivo all’era “Lauro” fino al 1992 con l’avvento di “Mani Pulite”.

Anche se questi personaggi hanno avuto una certa influenza sul pensiero politico e sulla personalità di Renato, non ci siamo soffermati in questo lavoro perché citati in modo esaustivo in letteratura, sia nelle varie enciclopedie e monografie, che sui siti informatici.

Bibliografia

CASOLARO Ferdinando, CIRILLO Luca (2018). "Cinquant'anni di attività della Mathesis tra evoluzione politica e sviluppo scientifico: dal 1959 al 2008", «ArteScienza» N. 10 dicembre 2018 pp.107-146.

GATTO Romano, TOTI RIGATELLI Laura (2009). *Renato Caccioppoli tra mito e storia*, Messina: Edizione Sicania.

MAROTTA Gerardo e altri (1989). "Il pensiero matematico del XX secolo e l'opera di Renato Caccioppoli". *Atti della giornata di studi tenuta a Pisa il 10 aprile 1987 per iniziativa dell'Istituto Italiano degli Studi Filosofici e della Scuola Normale di Pisa*.

REA Ermanno (1995). *Mistero napoletano*. Milano: Feltrinelli.

SCHIFANO Jean Noel (2020). *Le coq de Renato Caccioppoli con la traduzione di Roberto D'Ajello, Il gallo di Renato Caccioppoli*, Napoli: Edizione Colonnese.

Una proposta didattica per l'insegnamento della relatività

Andrea Lanzillo*

*Docente nel liceo scientifico-linguistico A.M De Carlo di Giugliano (Na);
alanzillo@libero.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.092

Sunto: *Questo articolo descrive una proposta didattica riguardante la teoria della relatività di Einstein. A partire dalle trasformazioni galileiane e con una semplice ipotesi, si ricava il fattore gamma e quindi le trasformazioni di Lorentz, da qui si determinano le leggi della contrazione della lunghezza e quella della dilatazione dei tempi. Poi, dopo aver introdotto il principio di equivalenza, si considera il fenomeno della dilatazione dei tempi in prossimità della massa e infine se ne dà un'applicazione ai satelliti GPS*

Parole Chiave: Lorentz, contrazione, dilatazione, massa

Abstract: *This article describes a didactic proposal regarding Einstein's theory of relativity. Starting from the Galilean transformations and with a simple hypothesis, we obtain the gamma factor and therefore the Lorentz transformations, from here we determine the laws of length contraction and that of time dilation. Then, after introducing the principle of general relativity, the phenomenon of time dilation near the mass is considered and finally applied to GPS satellite.*

Keywords: Lorentz, contraction, dilation, mass

1 - Premessa

Le Indicazioni nazionali per il Liceo scientifico prevedono al quinto anno lo studio della relatività ristretta e le leggi della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi. Solitamente i libri di testo riportano questi argomenti seguendo più o meno lo stesso percorso che si concretizza nelle seguenti fasi: descrizione dell'esperienza di Michelson e Morley, tempo misurato da un orologio a luce e deduzione del fattore gamma, derivazione della legge di dilatazione dei tempi e quella della contrazione delle lunghezze, vengono poi proposte le conferme sperimentali. Si aggiunge quindi a questo percorso il riferimento alle trasformazioni galileiane affermando che esse non sono più valide in generale e vanno quindi modificate. Vengono quindi enunciate le trasformazioni di Lorentz che, per basse velocità, restituiscono proprio quelle galileiane. Questo approccio può essere definito come la scaletta della tradizione didattica "alla Resnick"¹ che così si compone:

- situazione di fine '800 (esperimento di Michelson-Morley)
- la relatività come la teoria che ha permesso di risolvere i problemi aperti di fine '800
- i postulati e le sue conseguenze (effetti relativistici)
- prove sperimentali e applicazioni tecnologiche

La scaletta ricalca la struttura dell'articolo di Einstein del 1905 (salvo alcuni importanti cambiamenti, come il ruolo dell'esperimento di M&M).

¹https://www.lfns.it/STORIA/Scuola_2017/20_febbraio/3levrini_RR/Levrini_Cagliari_RR.pdf

A mio avviso, si può proporre lo studio degli argomenti di relatività previsti dalle Indicazioni nazionali con un percorso alternativo che si fonda su alcune conoscenze di fisica già possedute dagli alunni e su una tecnica, utilizzata spesso anche in geometria analitica, che è quella del calcolo del valore di un parametro corrispondente a condizioni assegnate. Il percorso che propongo mi sembra molto lineare e costituisce un modo diretto per arrivare ai risultati della relatività. Inoltre, sempre perché utilizzo degli strumenti concettuali molto semplici e quindi anche alla portata degli alunni, mi spingo a fare qualche considerazione su un aspetto della relatività generale che è quello della dilatazione dei tempi dovuto alla gravità, che non sempre si trova nei libri di testo. Beninteso, se si vuole poi discutere anche dei tentativi fatti dai fisici per conciliare i risultati della fisica classica con quelli derivanti dalle equazioni di Maxwell considerando, in particolare, l'esistenza dell'etere e di un sistema di riferimento assoluto ad esso solidale, occorrerà progettare un altro intervento didattico e contestualizzarlo in un percorso diverso come potrebbe essere, ad esempio, quello riguardante la vita di una teoria fisica.

In quello che segue si troveranno le fasi che compongono il percorso da me proposto:

1. Passaggio dalle trasformazioni galileiane a quelle di Lorentz
2. Dilatazione dei tempi
3. Contrazione delle lunghezze
4. Dilatazione del tempo dovuto alla gravità
5. I satelliti GPS

2 - Dalle trasformazioni galileiane a quelle di Lorentz (con una semplice ipotesi)

Di solito in un liceo scientifico le trasformazioni galileiane vengono trattate al terzo anno, durante lo studio della cinematica del punto, quindi sono un prerequisito che si può ritenere posseduto dagli alunni e, riprendendo perciò tale conoscenza, l'insegnante può riproporre le loro espressioni articolando un discorso come il seguente:

Le trasformazioni di Galilei sono:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (1)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1)$$

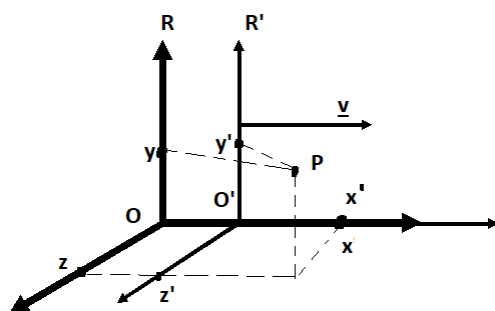


Fig. 1

Per come sono stati fissati i due sistemi di riferimento e per come è diretta la velocità del sistema in moto (parallelamente all'asse x) le coordinate y e z restano legate dalle stesse relazioni e quindi non influiscono su quanto si dirà in seguito. Quindi possiamo scrivere le (1) in modo più sintetico considerando solo la prima e l'ultima equazione dei sistemi precedenti ottenendo:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases} \quad (2)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \quad (2.1)$$

Queste equazioni evidenziano che il tempo misurato dall'osservatore O e quello misurato dall'osservatore O' sono uguali, ossia due orologi identici segnano lo stesso tempo. Adesso occorre innanzitutto osservare che, se si ammettono i postulati della relatività ristretta, i tempi non possono fluire allo stesso modo in sistemi di riferimenti in moto reciproco.

Per evidenziare ciò si possono enunciare i due postulati della relatività ristretta:

Primo principio della relatività ristretta: le leggi e i principi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Secondo principio (principio di invarianza della velocità della luce): la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

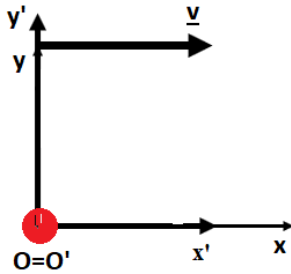


Fig. 2

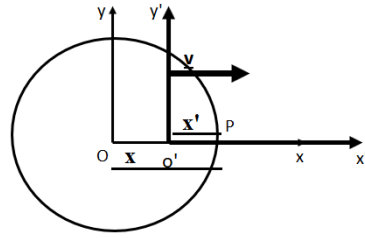


Fig 3

Poi, considerando le figure 2 e 3, dove sono rappresentati il sistema di riferimento fisso $R=xOy$ e quello in moto $R'=x'O'y'$ in due istanti diversi, si può argomentare dicendo che se nell'istante $t=t'=0$ i due sistemi sono sovrapposti e se in questo istante viene inviato dall'origine un segnale luminoso, questo si propagerà nello spazio, supposto isotropo, secondo una sfera e, dopo che è trascorso un intervallo di tempo Δt per l'osservatore in R e corrispondentemente un tempo $\Delta t'$ per l'osservatore in R' il raggio si troverà nel punto P che avrà ascissa x rispetto al riferimento fisso R e ascissa x' rispetto a quello in moto R' , con $x \neq x'$ come si vede dalla figura. Dato che le ascisse di P in R e R' rappresentano anche lo spazio percorso dal raggio luminoso si ha

$$x = c \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad x' = c \cdot \Delta t'$$

E poiché $x \neq x'$ non può essere $\Delta t = \Delta t'$

Questo dimostra che il tempo misurato dai due osservatori non può fluire allo stesso modo. Quindi non è possibile postulare l'esistenza di un tempo assoluto e occorre trovare una relazione tra i tempi misurati dai due osservatori O ed O' , indichiamo per il momento tali relazioni in modo generico così: $t = t(\text{variabili})$ (invece di $t=t'$) e $t' = t'(\text{variabili})$ (invece di $t'=t$)

Adesso occorre modificare le trasformazioni galileiane in modo che sia rispettato il secondo principio della relatività ristretta e sia formulabile una legge che metta in relazione i tempi nei due sistemi di riferimento. E' ovvio che vi sono molteplici possibilità di modificare un'espressione, però ci si può limitare ad una delle più semplici, se non la più semplice, che consiste nell'introdurre un parametro moltiplicativo k . Pertanto si può modificare la prima delle equazioni galileiane (2) moltiplicandola per un parametro positivo k il cui valore è da calcolare imponendo che la velocità della luce sia c nei due sistemi di riferimento R e R' in moto relativo. Introducendo la costante k e osservando che non è possibile postulare l'esistenza di un tempo assoluto, le (2) diventano

$$\begin{cases} x = k(x' + vt') \\ t = t(\text{variabili}) \end{cases} \quad (3)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) \\ t' = t'(\text{variabili}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Adesso si consideri l'istante $t=0$ e si ammetta che i due sistemi di riferimento siano coincidenti in questo istante, se in tale istante viene emesso un raggio luminoso dall'origine, esso si muoverà con velocità c sia in R che in R' , perciò dopo un intervallo di tempo $t=t-0$ per l'osservatore O e dopo un intervallo di tempo $t'=t'-0$ per l'osservatore O' , il raggio luminoso avrà percorso una distanza x in R e una distanza x' in R' , applicando la definizione di velocità si ha:

$$c = \frac{x}{t} \text{ in } R \quad (4)$$

$$\text{e } c = \frac{x'}{t'} \text{ in } R' \quad (4.1)$$

Da qui si ricava rispettivamente:

$$x = c \cdot t \quad \text{e} \quad x' = c \cdot t'$$

Sostituendo nella prima delle (3) e (3.1) si ha

$$x = k(c \cdot t' + vt') = kt'(c + v) \quad \text{e}$$

$$x' = k(c \cdot t - vt) = kt(c - v),$$

moltiplicando membro a membro si ha

$$x \cdot x' = k^2 t' t (c^2 - v^2)$$

e dividendo per tt' si ottiene:

$$\frac{xx'}{tt'} = k^2 (c^2 - v^2)$$

ossia

$$\frac{x}{t} \frac{x'}{t'} = k^2 (c^2 - v^2)$$

e ricordando le (4) si ha:

$$c^2 = k^2 (c^2 - v^2) \quad (5)$$

da cui

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

e quindi:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

che è il fattore gamma

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Adesso occorre determinare la relazione tra i tempi dei due osservatori O ed O'.

Dalla prima delle (4) si ha:

$$t = \frac{x}{c} = \frac{\gamma(x' + vt')}{c} = \gamma \left(\frac{x'}{c} + \frac{vt'}{c} \right) \quad (7)$$

dalla (4.1) si ha $\frac{x'}{c} = t'$, cioè $ct' = x'$ e dividendo per c^2

si ha: $\frac{t'}{c} = \frac{x'}{c^2}$ e sostituendo nella (7) si ottiene

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

Pertanto si ricavano le equazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

e le inverse

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases} \quad (8.1)$$

Da queste relazioni si possono determinare quella della dilatazione dei tempi e l'altra, della contrazione delle lunghezze.

3 - Dilatazione dei tempi

Occorre prima precisare il concetto di tempo proprio e di tempo non proprio di un fenomeno. Il tempo proprio è la durata del fenomeno misurata da un osservatore che si trova nello stesso riferimento in cui si svolge il fenomeno, mentre il tempo non proprio è la durata misurata da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento in moto rispetto a quello in cui avviene il fenomeno. Per trovare la relazione tra questi due tempi consideriamo i due sistemi di riferimento R ed R' con R' in moto rispetto a R con velocità $\vec{v}$. Se un fenomeno avviene in R' allora l'osservatore O' ne misurerà il tempo proprio, Δt_0 , mentre O misurerà quello non proprio, Δt . Si vuole dimostrare la relazione:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0. \quad (9).$$

A questo scopo detta x' la posizione dell'osservatore O' in R', si può affermare che l'evento consistente nell'inizio del

fenomeno ha coordinate spaziotemporali (x', t'_i) mentre l'evento finale avrà coordinate (x', t'_f) . Invece le coordinate spaziotemporali dell'inizio e della fine del fenomeno nel sistema R saranno (x_i, t_i) e (x_f, t_f) rispettivamente. Passando al calcolo degli intervalli si ha:

$\Delta t = t_f - t_i$ mentre $\Delta t_0 = t'_f - t'_i$. Per trovare la (9), calcolo Δt applicando la seconda delle (8):

$$\begin{aligned}\Delta t = t_f - t_i &= \gamma \left(t'_f - \frac{vx'_f}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_i - \frac{vx'_i}{c^2} \right) = \\ &= \gamma \left(t'_f - \frac{vx'_f}{c^2} - t'_i + \frac{vx'_i}{c^2} \right)\end{aligned}$$

e riducendo i termini opposti si ottiene

$$\Delta t = \gamma(t'_f - t'_i) = \gamma \Delta t_0$$

e cioè la (9).

(Si sarebbe potuto partire dal calcolo di Δt_0 e ottenere lo stesso risultato con qualche considerazione in più).

Per il prosieguo può essere utile la seguente considerazione: essendo $\gamma > 1$ segue che $\Delta t > \Delta t_0$ e cioè l'intervallo misurato dall'orologio in moto è più piccolo di quello misurato da un orologio fisso, in altre parole l'orologio in moto rallenta rispetto a quello fisso.

4 - La contrazione delle lunghezze

Occorre definire prima la lunghezza a riposo di un oggetto e poi la sua lunghezza in moto. La lunghezza a riposo di un oggetto è quella misurata da un osservatore rispetto a cui l'oggetto è in quiete, mentre quella in moto è misurata da un osservatore rispetto a cui l'oggetto è in movimento. Per trovare la relazione tra queste due lunghezze consideriamo

ancora i due sistemi di riferimento R e R' con R' in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto ad R. Sia AB un segmento parallelo all'asse x e solidale ad R' segue subito che AB è in moto rispetto al riferimento R, perciò l'osservatore O' di R' misurerà la lunghezza a riposo l_0 di AB mentre l'osservatore O di R misurerà quella in moto l dello stesso segmento AB. Si vuole dimostrare la relazione:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \quad (10)$$

A questo scopo consideriamo l'osservatore O, egli per poter determinare la lunghezza di AB deve conoscere le ascisse degli estremi in uno stesso istante t siano esse x_A e x_B , segue che le coordinate spaziotemporali degli estremi in R saranno (x_A, t) , (x_B, t) e la lunghezza in moto sarà:

$$l = x_B - x_A. \quad (11)$$

Adesso consideriamo l'osservatore O', fermo rispetto al segmento AB, egli troverà per gli estremi di AB le coordinate x'_A e x'_B e determinerà la lunghezza a riposo

$$l_0 = x'_B - x'_A. \quad (12)$$

Ciò premesso e ricordando la prima delle 8.1 si ha:

$$x'_A = \gamma \cdot (x_A - vt) \text{ e } x'_B = \gamma \cdot (x_B - vt)$$

e quindi dalla (12)

$$\begin{aligned} l_0 &= x'_B - x'_A = \gamma \cdot (x_B - vt) - \gamma \cdot (x_A - vt) = \\ &= \gamma \cdot (x_B - vt - x_A + vt) = \gamma \cdot (x_B - x_A) = \gamma \cdot l \end{aligned}$$

ossia:

$$l_0 = \gamma \cdot l$$

e dividendo per γ si ha la (10).

(Si sarebbe pure potuto iniziare dalla (11) e, con qualche passaggio in più, si sarebbe pervenuti alla stessa conclusione).

5 - La dilatazione del tempo dovuta alla gravità

Poiché le argomentazioni precedenti mi sembrano alla portata di studenti del quinto anno di liceo, mi spingo a fare qualche considerazione, con lo stesso livello di difficoltà, anche sulla relazione che c'è tra tempo e massa.

Una conseguenza dei principi della relatività generale è che gli orologi rallentano in prossimità delle masse: se due osservatori sono a distanze diverse da una stessa massa accade che il tempo scorre più lentamente per l'osservatore più vicino alla massa e più velocemente per quello più lontano. Questo effetto è evidente anche in prossimità della terra e interessa, in particolare, i sistemi di posizionamento satellitari o GPS (Global Positioning System). Infatti, si può notare sperimentalmente che per i satelliti del GPS, che viaggiano a circa 20.000Km di altezza, il tempo fluisce più rapidamente, cioè gli orologi sono in anticipo, di circa 46 microsecondi al giorno a causa della loro distanza dalla terra.

Per comprendere come si possa stabilire una relazione tra i tempi misurati da due orologi a distanze diverse da una massa, occorre prima considerare il principio di equivalenza enunciato da Einstein: *un sistema di riferimento inerziale in cui è presente un campo gravitazionale è equivalente a un sistema di riferimento accelerato*. Esso si può anche enunciare dicendo che: *la descrizione di un fenomeno fatta in un sistema di riferimento inerziale in cui è presente un campo gravitazionale, si può sostituire con quella fatta in un sistema accelerato con un'accelerazione opposta a quella del campo*.

Quindi, un osservatore inerziale solidale alla massa che genera un campo gravitazionale $\vec{g}$, descriverà i fenomeni allo stesso modo di un altro osservatore, ancora solidale alla

massa, che si muove però con accelerazione $-\vec{g}$. Pertanto, considerare un osservatore in un sistema inerziale soggetto ad un'accelerazione $\vec{g}$, dovuta alla massa, equivale a considerare un osservatore in moto con accelerazione $-\vec{g}$.

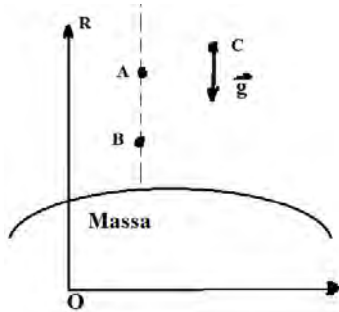


Fig. 4

O è inerziale e solidale alla massa che genera il campo $\vec{g}$. A, B e la massa sono fissi e C è in moto con accelerazione $\vec{g}$.

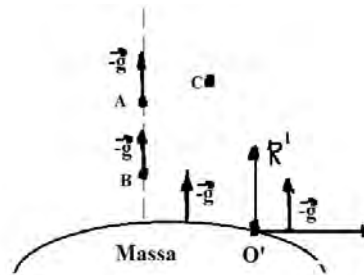


Fig. 5

O' si muove con accelerazione $-\vec{g}$ assieme alla massa e ai punti A e B. Il punto C è fermo.

Premesso ciò, consideriamo due punti A e B posti sulla stessa verticale, con B più vicino alla massa, e supponiamoli ad una distanza AB tale che l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ si possa ritenere costante lungo il segmento verticale AB, consideriamo ora un terzo osservatore C che cade verso la massa con accelerazione $\vec{g}$. La fig. 4 descrive la situazione vista da un osservatore inerziale solidale alla massa che genera il campo gravitazionale. Per il principio di equivalenza, è possibile descrivere la stessa situazione in modo diverso e cioè: eliminare il campo gravitazionale e

considerare un osservatore O' che si muova verso l'alto con accelerazione $-\vec{g}$ assieme alla massa e ai punti A e B (vedi Fig.4 e 5). Specificando meglio il punto di vista di O' si può affermare che A e B si muovono di moto accelerato verso l'alto con accelerazione g mentre C è fermo.

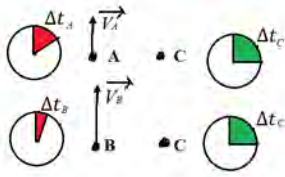


Fig. 6 Gli orologi in A e B segnano un tempo inferiore a quello in C

Man mano che O' sale verso l'alto anche A e B salgono e, ad un certo punto, prima A e poi B passeranno vicino a C con velocità diverse (Fig. 6). Adesso consideriamo la situazione in cui A sta passando accanto a C, sia Δt_C un intervallo di tempo misurato da C,

corrispondentemente A misurerà un intervallo pari a Δt_A e, ricordando che C è in quiete mentre A è in moto, la relazione tra i due sarà:

$$\Delta t_C = \gamma_A \cdot \Delta t_A \quad (13.1)$$

Analogamente procediamo per B, quindi anche quando B passa accanto a C questi misura lo stesso intervallo Δt_C , mentre B misurerà corrispondentemente un intervallo Δt_B e i due intervalli saranno nella relazione

$$\Delta t_C = \gamma_B \cdot \Delta t_B \quad (13.2)$$

dove il fattore γ non è lo stesso per A e B in quanto le velocità di questi due punti non sono le stesse quando passano vicino a C. A causa del loro moto accelerato, si ha infatti:

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \text{ e } \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}} \quad (14)$$

Calcolando il rapporto membro a membro delle (13.1) e (13.2) si ottiene:

$$\frac{\Delta t_C}{\Delta t_C} = \frac{\gamma_A \cdot \Delta t_A}{\gamma_B \cdot \Delta t_B} \text{ ossia } \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{\gamma_B}{\gamma_A} \quad (15)$$

Ricordando che vale l'approssimazione $(1+x)^\alpha = (1+\alpha x)$ quando x è molto piccolo, possiamo esprimere il fattore gamma diversamente:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

e perciò la (15) si può scrivere così:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} &= \frac{\gamma_B}{\gamma_A} = \frac{\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{v_B^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{v_B^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(1 - \frac{v_A^2}{2c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{v_B^2}{2c^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{v_B^2}{2c^2} - \frac{v_A^2}{2c^2} - \frac{v_A^2}{2c^2} \cdot \frac{v_B^2}{2c^2} \end{aligned}$$

e, osservando che il prodotto $\frac{v_A^2}{2c^2} \cdot \frac{v_B^2}{2c^2}$ si può considerare infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri due, risulta:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 1 + \frac{1}{2c^2} (v_B^2 - v_A^2) \quad (16)$$

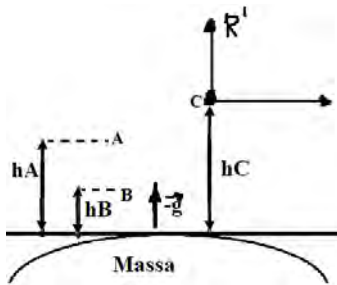


Fig.7

Ricordando che il moto di A e B è uniformemente vario si può considerare la relazione $v = \sqrt{2as}$, dove v è la velocità, a è l'accelerazione e s è lo spazio percorso. Quindi dalla fig. 7 si ha:

$$v_A = \sqrt{2g(h_C - h_A)} \quad \text{e} \quad v_B = \sqrt{2g(h_C - h_B)} \quad (17)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} v_B^2 - v_A^2 &= 2g(h_C - h_B) - 2g(h_C - h_A) = \\ &= 2g(h_A - h_B) \end{aligned} \quad (18)$$

e, sostituendo nella (16), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} &= 1 + \frac{g(h_A - h_B)}{c^2} \quad \text{da cui:} \\ \Delta t_A &= \Delta t_B \left(1 + \frac{g(h_A - h_B)}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Questa uguaglianza mette in evidenza la relazione che intercorre tra la durata di un fenomeno misurata da un osservatore B, vicino alla massa, e la durata dello stesso fenomeno misurata da un osservatore A più lontano dalla stessa massa. Si nota che la quantità in parentesi tonde è maggiore di uno e quindi il tempo trascorso per l'osservatore A è superiore a quello trascorso per l'osservatore B. In altre parole l'orologio in A, più distante dalla massa, è più veloce dell'orologio in B, più vicino alla massa. Più in generale, detta h la distanza verticale tra due punti a distanza diversa da una massa, indicata con Δt_g e Δt le durate misurate rispettivamente da un osservatore più vicino alla massa e da uno più distante si ha la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_g \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right) = \Delta t_g + \Delta t_g \frac{gh}{c^2} \quad \text{ossia} \\ \frac{\Delta t - \Delta t_g}{\Delta t_g} &= \frac{gh}{c^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Formula che esprime la relazione tra la variazione relativa delle durate di uno stesso fenomeno misurate da osservatori posti a distanze diverse da una massa.

Come precisato all'inizio, l'accelerazione $\vec{g}$ è supposta costante tra A e B, naturalmente ciò è tanto più vero quanto più i punti A e B sono vicini tra loro. Pertanto risulta altrettanto vera la relazione tra quantità infinitesime:

$$\frac{dt-dt_g}{dt_g} = \frac{gdh}{c^2} \quad (21)$$

dove dh indica la variazione infinitesima di altezza.

Questa relazione consente di calcolare il legame intercorrente tra le durate temporali misurate da due osservatori A e B posti a distanza h_A e h_B da una massa attraverso l'integrale seguente:

$$\frac{\Delta t_g - \Delta t}{\Delta t} = \int_{h_B}^{h_A} g(h) \frac{dh}{c^2} \quad (22)$$

Dove $g(h)$ è la funzione che esprime la relazione esistente tra l'accelerazione di gravità e l'altezza, essa si può ricavare dalla legge di gravitazione universale:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (23)$$

Dove r è la distanza dal centro del pianeta, m e M sono rispettivamente la massa di un corpo e la massa del pianeta. Interpretando la F come il peso del corpo mg , si ottiene:

$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ da cui $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$ e, detto R il raggio della massa e h la distanza del corpo dalla superficie terrestre si ha:

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \quad (24)$$

Sostituendo nella 22 si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_g - \Delta t}{\Delta t} &= \int_{h_B}^{h_A} G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \frac{dh}{c^2} = - \left[\frac{G}{c^2} \cdot \frac{M}{R+h} \right]_{h_B}^{h_A} = \\ &= - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{R+h_A} - \frac{1}{R+h_B} \right] = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{h_A - h_B}{(R+h_A)(R+h_B)} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Questo rapporto dipende dall'altezza (o distanza verticale) che separa i due punti A e B, posto $k = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{h_B - h_A}{(R+h_A)(R+h_B)} \right]$ si può

ricavare la durata Δt misurata dall'osservatore più distante dalla massa. Si ha: $\frac{\Delta t_g - \Delta t}{\Delta t} = k$

e l'espressione di Δt diventa:

$$\Delta t = \frac{1}{k+1} \Delta t_g \quad (26)$$

Questo vuol dire che se un osservatore posto sulla superficie del pianeta misura una durata Δt_g , quello che si trova ad un'altezza $h_A - h_B$ misura una durata data dalla (26).

6- Il tempo dei satelliti del GPS

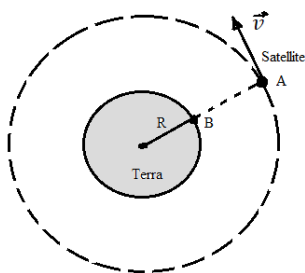


Fig. 8 Satellite GPS

Il navigatore satellitare è un dispositivo molto comune e permette di determinare la posizione di uno o più punti sulla superficie terrestre assieme ad un percorso che li colleghi. Il funzionamento di questo apparecchio è possibile perché è in grado di collegarsi con alcuni satelliti artificiali

che ruotano intorno alla terra ad un'altezza di circa 20.000Km, con una velocità di circa 4Km/s^2 e che fanno parte di una rete di satelliti che formano il Global Positioning System.

È esperienza comune il fatto di constatare che le informazioni fornite da un navigatore satellitare siano molto precise e ciò richiede una considerevole sincronizzazione tra il

²Dati esposti in: [https://web.infn.it/fisicainbarca2011 /images/stories/napoli/gps_infn.pdf](https://web.infn.it/fisicainbarca2011/images/stories/napoli/gps_infn.pdf)

tempo misurato dal satellite e quello misurato dal navigatore. Tale sincronizzazione non è affatto scontata, vista la considerevole altezza a cui si trovano i satelliti e considerata la velocità abbastanza elevata con cui essi si muovono. Infatti, come poco più avanti vedremo, l'orologio di un satellite è in anticipo di circa $46\mu s$ al giorno rispetto ad un orologio terrestre, a causa della sua altezza e, contemporaneamente, è in ritardo di circa $8\mu s$ circa al giorno a causa della sua velocità. Pertanto ogni giorno occorre apportare una modifica all'ora del satellite pari a $46\mu s - 8\mu s = 38\mu s$, ossia occorre aggiungere all'ora del satellite $38\mu s$ al giorno per mantenere in sincronia gli orologi satellitari con quelli del navigatore.

Adesso vediamo un'applicazione di alcune formule ricavate precedentemente per ricavare questi valori del tempo.

6.1 - Anticipo dovuto all'altezza del satellite

Per un satellite del GPS che orbita ad un'altezza di circa 20.000Km si ha che il punto A coincide col satellite mentre il punto B si trova sulla superficie terrestre perciò:

$h_A - h_B = 20.000\text{Km} = 2 \cdot 10^7\text{m}$ e, considerando per la massa della terra il valore $M = 5,972 \cdot 10^{24}\text{Kg}$, per il raggio della terra $R = 6370\text{Km} = 6,37 \cdot 10^6\text{m}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$, $\Delta t_g = 86400\text{s}$ e $c = 3 \cdot 10^8\text{m/s}$

Si ottiene per il rapporto il valore:

$$k = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{h_A - h_B}{(R + h_A)(R + h_B)} \right] \frac{\Delta t - \Delta t_g}{\Delta t_g} = 5,26967 \cdot 10^{-10} \quad (27)$$

Da ciò si può calcolare lo sfasamento corrispondente alla durata di un giorno. Se l'osservatore della terra misura per un

giorno la durata di 86.400s, quello posto sul satellite ne misura una data dalla (26) e cioè:

$$\Delta t = \frac{1}{k+1} \Delta t_g = 86399,999954470$$

e da qui $\Delta t_g - \Delta t = 0,00004552995960693810 \approx 46\mu s$

e si può dire che la durata di un giorno solare medio misurata da un osservatore sul satellite è circa $46\mu s$ più breve di quella misurata da un osservatore sulla superficie terrestre.

6.2 – Ritardo dovuto alla velocità del satellite

La misura del tempo di un satellite GPS differisce da quella fatta da un osservatore terrestre anche per la velocità con cui il satellite si muove. Se un osservatore terrestre misura per il giorno solare medio una durata di 86400s, quello sul satellite ne misurerà una diversa. Più precisamente la durata misurata dall'osservatore sulla terra è il tempo proprio mentre quella dell'osservatore sul satellite è quella non propria e perciò la relazione esistente tra i due tempi è data dalla (9)

$$\Delta t_{satellite} = \gamma \cdot \Delta t_{terra}$$

Con il fattore γ dato da:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4000^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}} = 1,000000000088890000000000000000$$

Da cui la durata del giorno solare medio misurato dal satellite è dato da

$$\Delta t_{satellite} = \gamma \cdot \Delta t_{terra} =$$

$$=1,000000000088890000000000000000*86400=$$

$$=86400,000007680$$

E la differenza tra i due tempi è data da:

$$86400,000007680-86400=0,000007680\approx 8\mu s$$

Queste considerazioni fatte sul tempo misurato dal satellite e quello misurato da terra porta a concludere che l'osservatore satellitare deve aggiungere circa $46\mu s$ a causa della propria posizione nel campo gravitazionale e sottrarre $8\mu s$ a causa della sua velocità rispetto ad un osservatore terrestre, per cui si ha uno sfasamento temporale di $46\mu s - 8\mu s = 38\mu s$, che è coerente con il valore osservato sperimentalmente.

Bibliografia

NOLAN Peter J. (2000) - *Complementi di fisica - fisica moderna* - pp 1023-1025 e 1084 e 1089. Bologna: Zanichelli

Sitografia

https://www.lfns.it/STORIA/Scuola_2017/20_febbraio/3levrini_RR/Levrini_Cagliari_RR.pdf

https://web.infn.it/fisicainbarca2011/images/stories/napoli/gps_infn.pdf

Primo introntro con l'unità immaginaria

Nell'opera "Algebra" in 3 volumi, pubblicata tra il 1572 e il 1579, di Raffaele Bombelli (1526-1572) si ha il primo incontro con l'immaginario. Bombelli introduce due simboli pdm (+i) e mdm (-i) che definisce come segue $(pdm)^2 + 1 = 0$, $pdm + mdm = 0$. Tratta dunque l'equazione:

$$x^3 - 15x = 4$$

alla quale applicando "il procedimento messo a punto dal Signor Girolamo Cardano" si ha:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11pdm} + \sqrt[3]{2 - 11pdm} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

questo punto Bombelli dichiara che con sue procedure ha provato che :

$$(2 + pdm)^3 = 2 + 11pdm \quad , \quad (2 + mdm)^3 = 2 + 11mdm$$

che in simboli attuali è ovviamente:

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i \quad , \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

così che risulta:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11pdm} + \sqrt[3]{2 - 11pdm} = 2 + pdm + 2 + 11mdm = 2 + i + 2 - i = 4.$$

Cfr. Bagni G.T. (2006). *Ma+ema+1C1*, Ed.Antilia, Treviso. pp.126-129.

Critica. Sia pure con una disinvolta trattazione della radice cubica, che in campo complesso è più complicata, e che in tal caso si userebbe la cosiddetta radice principale, Bombelli esprime il fatto generale che per utilizzare, a pieno, le formule di Cardano occorre per: $x^3 + p x + q = 0$, trovare a, b tali che:

$$(a+ib)^3 = p^3/27 + q^2/4.$$

In ogni caso Bombelli perde le due soluzioni immaginarie, ma quello che fa è un "miracolo del suo tempo"!

Franco Eugeni

La scomparsa di Tonia Olivello

Nelle parole dei suoi più cari amici

Loredana Biacino, Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Valeria Facchini, Francesca Gialanella, Andrea Lanzillo, Alessandra Rotunno Maria Talamo, Roberto Tortora, Annalaura Trampetti



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v4n3.093



1 – Ferdinando Casolaro

Il 17 settembre scorso (2022) ci ha lasciato la prof.ssa Tonia Olivello, esponente storica dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli" dagli anni 'Settanta' a tutt'oggi.

Al nome del prof. Aldo Morelli, Presidente carismatico della sezione di Napoli e vice-presidente nazionale, è legata la sua storia nella Mathesis, essendo stata la vice-presidente per molti anni fino al momento della scomparsa nel 2005 e sua prima collaboratrice con Seminari e Conferenze in vari convegni.

Già dall'inizio degli anni 'Settanta', parallelamente all'attività didattica di docente di Matematica nella Scuola Superiore (oggi Secondaria di secondo grado), teneva in contemporanea lezioni di Analisi Matematica al Dipartimento di Ingegneria dell'Università di Napoli "Federico II" in qualità di Esercitatrice del prof. Amilcare Pozzi.

Dell'attività universitaria svolta anche nei decenni successivi, in qualità di Formatrice nei corsi di Perfezionamento in "Didattica della Matematica" e nei corsi delle SSIS (Scuola Specializzazione Insegnamento Secondaria) al Dipartimento di Matematica dell'Università "Federico II", si hanno le tante testimonianze di giovani docenti che hanno avuto il piacere di formarsi con lei nell'intero percorso di due anni.

Ancora oggi incontro tanti docenti che sono stati suoi allievi all'Università o al liceo Scientifico "Mercalli" di Napoli, dove era per tutti un monumento istituzionale, per le sue competenze e per la dolcezza nel rapporto con gli studenti. Tutti sono orgogliosi di aver ricevuto un insegnamento esemplare anche dal punto di vista etico, ma principalmente si vantano di essere portatori ai propri studenti del "Metodo di insegnamento della Geometria della professoressa Tonia Olivello".

Tonia ha pubblicato vari lavori su temi presentati a convegni in Didattica della Matematica, in alcuni dei quali sono stato coautore. Motivo di orgoglio, per me, resta il volume “Aldo Morelli: Raccolta di scritti per l’insegnamento” pubblicato a due nomi “Casolaro-Olivello” nel 2002 e presentato al Convegno in onore del nostro Professore nell’anno del pensionamento. Il volume, in 270 pagine, raccoglie gran parte degli articoli pubblicati dal prof. Aldo Morelli.

Sicuro di interpretare il pensiero di tutti coloro che si sono pregiati della sua conoscenza e del suo insegnamento, rivolgo un affettuoso abbraccio alla sorella Titti che, come Tonia, ha dedicato il suo percorso professionale alla Scuola in qualità di docente di discipline linguistiche.

Cara Tonia, abbiamo condiviso decenni di collaborazione, con l’amicizia e l’affetto che ci legano da sempre. Oggi ogni parola è superflua, ma ogni pensiero è attaccato in modo indelebile in un angolo del mio cuore.

2 – Roberto Tortora

Ho avuto il piacere di conoscere Tonia Olivello tanti anni fa, quando seguendo le orme di Aldo Morelli ho cominciato a interessarmi alla didattica della matematica. Intorno al prof. Morelli si raccoglieva un gruppo di entusiasti professori di scuola, e forse anche il vedere queste persone lavorare insieme così motivate e coese ha contribuito a orientare da quel momento le mie scelte professionali. Tonia era fra queste persone, anzi una delle figure più attive e influenti. Negli anni ho stretto con lei, e con gli altri, un rapporto che non è mai

venuto meno, di collaborazione, ma anche di sincera amicizia, di reciproca stima e simpatia. Con Tonia ho collaborato in particolare negli anni “gloriosi” della SICSI (Scuola Interuniversitaria Campana Specializzazione Insegnamento), quando la cooperazione fra docenti universitari e di scuola si è concretizzata in un vero rapporto paritetico. La ricordo, Tonia, sempre gentile, sorridente, disponibile. Posso senz’altro testimoniare che è stata una di quelle persone che ha fatto del suo lavoro una vera missione cui si è dedicata interamente con generosità e passione. Addio, cara Tonia, la tua competenza e il tuo sorriso ci mancheranno.

3 – Maria Talamo

Ero una giovane insegnante (parecchi anni fa!!!), entusiasta e piena di desiderio di fare al meglio il proprio lavoro, per questo mi affidai al Prof. Aldo Morelli, serio, impegnato e innovativo, che guidava il Nucleo di Ricerca Didattica al Dipartimento di Matematica dell’Università di Napoli “Federico II”.

In questo contesto rimasi affascinata nell’ascoltare le comunicazioni della Prof. Tonia Olivello e desiderai (sognai) di poterla frequentare, di intessere un giorno con lei un legame; quando ciò è avvenuto, ho provato emozione ed orgoglio, una gioia consapevole che si è ripetuta uguale per trenta e più anni ogni volta che siamo state insieme

Lo spessore umano, culturale e professionale di Tonia è noto e lo commentano i fatti e la stima di tanti, in primis dei ragazzi che l'hanno avuta come insegnante. Vorrei allora ricordarla per il suo garbo.

Da lei ho imparato che il garbo è una gentilezza, mai costruita o sterile, che viene dal cuore, è accoglienza, è amore gratuito per l'altro, è libertà e pulizia interiore, è umiltà, è fede; Tonia ne era piena e questo la rendeva un'insegnante e un'amica speciale

Quando la penso, sorrido ricordando la sua raffinata ironia e le sue esilaranti barzellette, m'illumino pensando alla sua naturale femminilità ed eleganza, sento il suo tono di voce morbido e rassicurante, capace di dare calma e pace e vorrei come lei continuare a cercare il bello in ogni cosa e persona per valorizzarlo, vorrei non offendere ed offendermi mai.

Tonia rimarrà in ognuno di noi come se non fosse mai andata via.

E sarà facile farsi ancora contagiare dalla sua allegria.

4 – Loredana Biacino

Non ricordo a quanto tempo fa risalga la mia conoscenza di Tonia, certo a molti anni fa, ma in quel tempo lontano eravamo coinvolte in attività diverse e quindi ci conoscevamo di vista, incontrandoci nei corridoi della facoltà.

Dal momento in cui ho cominciato a partecipare al Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica e poi alla SICSI e mi sono iscritta alla Mathesis, i nostri contatti si sono moltiplicati e rafforzati poichè Tonia era molto presente e costantemente impegnata in tali attività.

Nel 2010 decidemmo di fare un lavoro insieme. Seguì un periodo di lavoro, un susseguirsi di incontri e discussioni in cui si mescolavano, oltre a questioni di matematica, ricordi di vita personale e progetti per l'avvenire: in quell'occasione

sono emerse, oltre alla bravura e alla competenza, le doti di Tonia di gentilezza, amicizia e onestà intellettuale.

Addio Tonia, ti ricorderò con grande affetto.

5 - Franco Eugeni

La mia conoscenza con Tonia Olivello, squisita collega, non è disgiunta ai molteplici incontri che a suo tempo ebbi con Aldo Morelli. La sua presenza era discreta ma significativa, traspariva il messaggio: se avete bisogno io ci sono. Dote questa rara e speciale. Era qualche tempo che non ci si vedeva e la notizia avuta da Ferdinando è stata inaspettata. Purtroppo alcune persone del nostro mondo ci stanno recentemente lasciando: Peppe, Eliano, Alberto, ora Tonia. Noi stiamo vivendo qualche anno in più, l'unica cosa che possiamo fare è lasciare un messaggio ai più giovani, per ricordare queste persone che accanto a loro hanno creato un mondo di stima, cortesia, simpatia, efficienza, principalmente di amore fraterno, con questo breve ricordo, un addio a luoghi e momenti che non sappiamo se ci saranno!

6 - Andrea Lanzillo

Il primo ricordo di Tonia risale a quando ero uno studente di matematica e stavo eseguendo la prova scritta dell'esame di Matematiche complementari col Prof. Morelli. Tonia allora era una giovane professoressa che collaborava nella vigilanza durante la prova scritta. Attenta a che ciascuno svolgesse il compito in modo autonomo. Poi, dopo diversi anni, l'ho

incontrata nel Nucleo di Ricerca Didattica del prof. Morelli, mi hanno colpito la dedizione all'insegnamento e l'interessamento alle problematiche ad esso connesse. Inoltre, è impossibile non ricordare il suo impegno nelle attività della Mathesis di cui è stata una delle colonne. La sua inaspettata dipartita lascia un velo di tristezza.

7 – Alessandra Rotunno

Quando la mattina del 17 settembre 2022 ho avuto la notizia della scomparsa di Tonia, un vuoto immenso si è aperto dentro di me. Ho conosciuto Tonia quando ancora studentessa iniziavo a frequentare lo studio del Prof Aldo Morelli, Presidente dell'Associazione Mathesi di Napoli, che in quegli anni è stato per me il professore di Matematiche Complementari e successivamente il mio grande maestro.

Anche Tonia lo chiamava così, "il nostro Maestro".

Il mio ricordo di Tonia è intriso di sentimenti di rispetto, di stima verso una docente di Matematica di grande spessore culturale, ma anche di una grande umanità. Nei miei confronti, all'inizio allieva universitaria, e successivamente docente e quindi sua collega, ha sempre mostrato affetto, disponibilità, incoraggiamento; ha sempre dato consigli affinché noi giovani, allievi della scuola di Morelli e docenti in erba, studiassimo sempre, ci aggiornassimo per avere spazio per poterci realizzare.

Mi ha sempre incoraggiato a lavori di ricerca, a partecipazione a convegni, con l'entusiasmo che l'ha sempre contraddistinta e che talvolta mi chiedevo come potesse avere una docente dopo tanti anni di insegnamento. A tal proposito,

nel 2004, ho partecipato, in qualità di coautrice, ad un interessante lavoro.

Il sorriso, la gioia di trasmettere conoscenze, il piacere di stare con gli alunni, lo studio continuo, la grande preparazione culturale sono stati per me di grande esempio.

La sua presenza affettuosa mi ha accompagnata anche nella mia vita personale, con semplici e sentiti consigli.

E' una grande perdita per tutti, ma noi che l'abbiamo conosciuta abbiamo il piacere, il desiderio e anche il dovere di trasmettere ai nostri allievi e non solo il suo immenso bagaglio di conoscenze, ma anche la grande umanità, il piacere di stare con gli studenti e trasmettere conoscenze, curiosità, e divertimento, con la consapevolezza che il nostro non è un mestiere ma una passione.

8 – Valeria Facchini

Mi sono sempre sentita legata a Tonia con un doppio filo. Ho conosciuto Tonia in quel piccolo e immenso studio del prof. Morelli in cui sono entrata timidamente sentendomi al cospetto di grandi. Sono stata accolta con grande gentilezza da tutti, e sono rimasta colpita dalla personalità di Tonia. Allegra, coinvolgente, innamorata del suo mestiere, curiosa verso ogni nuova attività di studio. Mi ha tanto incoraggiata e gratificata e spesso le sentivo farmi tanti complimenti e ne restavo sorpresa. Io restavo incantata dai suoi racconti, dalle sue esperienze universitarie e scolastiche. E in uno di questi racconti scopri che lei era stata l'insegnante di matematica del biennio del liceo di mio marito!

Ecco il doppio filo. E quanto ne era felice Tonia a ricordarlo.

Quando ho riportato il racconto a mio marito gli si sono illuminati gli occhi: mi ha letteralmente detto che è stata l'insegnante che gli ha fatto scoprire la matematica e che, pur se in giovanissima età, era stata in grado di risollevare una classe altrimenti disperata.

Ecco quindi la sua grandezza: bravissima come studiosa, bravissima come divulgatrice, generosa nei rapporti.

La sua voce, i suoi colori, i suoi insegnamenti, i suoi racconti che ho avuto la fortuna di ascoltare sono stati un grande regalo che serberò nei miei pensieri e che continueranno ad accompagnarmi nel suo/mio mestiere.

9 – Annalaura Trampetti

Di Tonia mi hanno sempre colpito l'entusiasmo, la gioia di vivere, la passione per il suo lavoro, il profondo amore per la sua famiglia e la grande empatia che ha dimostrato ad amici e, soprattutto, alunni.

L'affetto che ha sempre avuto nei miei confronti mi ha accompagnato per tanti anni, da quando ho partecipato per la prima volta ad un Convegno della Mathesis. Durante i nostri incontri abbiamo sviluppato un interessante lavoro per la didattica.

Non posso non ricordare la testimonianza della sua fede cristiana, che ha ispirato la sua vita e permeato il suo modo di essere, fino alla fine, quando, in clinica, ha desiderato ricevere i Sacramenti perché "aveva bisogno di Gesù e lo aspettava".

Sono certa che la nostra carissima amica Tonia continuerà ad accompagnarci con il suo amore e la sua preghiera.

10 – Francesca Gialanella

Ci sono persone che lasciano un segno nella nostra vita e per questo, anche quando se ne vanno, restano sempre con noi.

Ho incontrato Tonia tanti anni fa, subito dopo la laurea, e rivista in più occasioni all'università, a scuola, ai convegni o a cene con amici comuni. Tonia era sempre solare, empatica, disponibile, una donna colta e carismatica.

Tonia era così ed è così che la ricorderò sempre, con piacere, affetto e grande stima.

*Caro Ferdinando,
grazie mille per la mail. Ho saputo solo ora della scomparsa di Tonia e ne sono profondamente addolorato e triste. Mi dispiace non poter essere presente alla messa del trigesimo, ma sono in Uk in questi giorni.*

Ti prego di far avere a Titti i miei abbracci e la mia vicinanza. Spero ci sarà una occasione meno triste per incontrarci.

Un abbraccio

Massimo Marrelli

Massimo Marrelli(PhD Econ York University)

Emeritus Professor Public Economics

Former Rector of The University of Naples Federico II

Profili biografici degli autori

Giordano Bruno (Roma) - gibrun84@gmail.com

Docente di Sistemica presso l'ISIA di Roma. Ha insegnato Analisi Matematica e Calcolo delle probabilità e statistica nella Facoltà di Ingegneria dell'Università "Sapienza" di Roma. Successivamente è stato Direttore dell'Istituto Superiore delle Industrie Artistiche della sede di Roma e di quella di Pescara. È Presidente della Fondazione "MORFE", che si occupa di diffondere la cultura del design e favorisce la creazione di start-up. È presidente onorario dell'associazione "Arte e Scienza" e direttore onorario del periodico «ArteScienza». Esperto e divulgatore della Teoria dei Sistemi, ha organizzato mostre e convegni nei settori della matematica applicata e del design.

Ferdinando Casolaro (Napoli) -
ferdinando.casolaro@gmail.com

È stato professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 docente a contratto presso varie Università. Dalla seconda metà degli anni 'Novanta' al 2020 ha tenuto corsi di Analisi Matematica presso l'Università del Sannio ed il Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Dal 1973 è socio Mathesis, associazione di cui è stato consigliere e Segretario nazionale e, nel periodo 2017-2019, Presidente della sezione di Napoli. È autore di oltre centoventi pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e vari libri. È Direttore di redazione del "Periodico di Matematica", Editorial Board della Rivista Science & Philosophy e del "Bollettino" dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU). In ambito di ricerca, si è interessato in passato di Analisi Matematica con risultati relativi a "problemi di decisione per integrali indefiniti".

Attualmente, i suoi interessi riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

Franco Francia (La Spezia) – franco.francia40@virgilio.it

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguito la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo "G.Mazzini" di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali* – «Archimede», N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche», Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

Andrea Lanzillo (Giugliano Campania-Na) – alanzillo@libero.it

Andrea Lanzillo è docente di Matematica e Fisica da oltre trent'anni presso il Liceo Scientifico Linguistico "A. M. De Carlo di Giugliano" in Campania. Laureato in Matematica (indirizzo didattico) presso l'Università Federico II di Napoli ha seguito un corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica diretto dal prof. Roberto Tortora e numerosi corsi di aggiornamento proposti dall'Università e da altre strutture formative riguardanti la didattica della Matematica e della Fisica. Ha partecipato al Nucleo di Ricerca Didattica coordinato dal prof. Aldo Morelli ed è intervenuto in vari Convegni dedicati alla Didattica della Matematica e della Fisica. Ha partecipato come formatore ad alcuni corsi organizzati dall'ente

APAV svoltisi presso l'Università di Architettura di Napoli. Il suo interesse è rivolto al fenomeno dell'insegnamento-apprendimento, alle nuove tecnologie, al coding e all'acquisizione e implementazione di quelle strategie che semplificano il complesso. Da circa 30 anni è socio dell'associazione Mathesis Napoli "Aldo Morelli", di cui è stato componente del Consiglio direttivo fino al 2019. In tale ambito ha prodotto pubblicazioni di carattere didattico-metodologico.

Paolo Manca (Pisa)- paolo.severino.manca@gmail.com

Già professore ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa e direttore del Master in Mercati Finanziari dell'Università di Pisa e Fondazione Casse di Risparmio. Di recente ha scritto *Te la do io la probabilità* (Goware editore) e *Il giallo del teorema dei quattro colori* (ETS editore). Attualmente si occupa di teologia e ha pubblicato con successo *Ma Dio c'è?* (Goware editore). Nel passato ha esercitato anche la professione di maestro di sci. Come tenore e romanziere si presenta come Paolo Severino Nonchè (vedi YouTube e Amazon).

Luca Nicotra (Roma) - luca.nicotra1949@gmail.com

Ingegnere meccanico e giornalista pubblicista. Autore di circa 400 articoli, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (Livorno:Belforte, 2008), la prima biografia mondiale del grande scienziato. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore e nel settore dei sistemi di guerra elettronica. Esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy»,

fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «ArteScienza_magazine», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Alessandra Rotunno (Napoli) -

alessandra.rotunno@unina.it

Laureata in Matematica, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica presso il Liceo scientifico "Labriola" di Napoli e professore a contratto sul Corso di Geometria al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli "Federico II". Al Dipartimento di matematica dello stesso ateneo, è stata docente alla SSIS del Corso di Storia della Matematica nell'anno accademico 2007-2008 e dal 1994 al 2005 ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica presieduto dal Prof Aldo Morelli. Dall'anno 2003-2004 al 2018-2019 è stata cultore e commissario d'esame nei corsi di Metodi Matematici per Economia e Finanza al Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio tenuto dal prof. Ferdinando Casolaro. Relatrice a vari convegni in didattica della matematica, è autrice di dodici pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali principalmente inerenti al settore Geometria e ai suoi possibili ambiti di applicazione.