

Funzioni iterate, sistemi dinamici e caos deterministico

Gian Italo Bischi*

*Professore Ordinario di Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie presso la Facoltà di Economia dell'Università di Urbino "Carlo Bo"; gian.bischi@uniurb.it



DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n4.122

Sunto: *In questo articolo si illustra in modo didattico e operativo come ottenere dinamiche caotiche mediante l'applicazione ripetuta (o iterazione) di semplici funzioni non lineari. Nel contempo vengono introdotti termini e concetti che caratterizzano la teoria dei sistemi dinamici, attraverso il loro sviluppo storico e utilizzando rappresentazioni grafiche sia per sistemi dinamici discreti unidimensionali e bidimensionali.*

Parole Chiave: *Sistemi dinamici discreti, Non linearità, Caos, Attrattori.*

Abstract: *This paper illustrates, in a didactic and operational way, how to obtain chaotic dynamics by repeated application (or iteration) of simple nonlinear functions. At the same time, terms and concepts that characterize the theory of dynamical systems are introduced, through their historical development and using graphical representations for both one-dimensional and two-dimensional discrete dynamical systems.*

Keywords: *Discrete dynamical systems, Nonlinearity, Chaos, Attractors.*

1 - Introduzione

Il concetto di caos deterministico si presenta come un ossimoro: “caos” significa assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità, mentre l’aggettivo “deterministico” significa regolare, prevedibile, e viene riferito a fenomeni ordinati e pianificabili. La scoperta del caos deterministico, nell’ambito della teoria matematica dei sistemi dinamici non lineari, spezza questa dicotomia, in quanto ci mostra come si possano generare successioni di numeri apparentemente casuali mediante l’applicazione ripetuta (iterazione) di semplici funzioni, anche di quelle che si studiano nelle scuole medie superiori. L’irregolarità delle sequenze così generate, unitamente al fatto che modifiche anche impercettibili del valore da cui inizia il processo iterativo possono causare cambiamenti notevoli nei valori successivi (la cosiddetta sensitività rispetto alle condizioni iniziali), se da una parte diminuiscono la capacità di fare previsioni sul comportamento asintotico dei modelli dinamici non lineari, dall’altra suggeriscono che fenomeni del mondo reale che evolvono in modo apparentemente casuale potrebbero essere simulati matematicamente mediante l’iterazione di semplici schemi deterministici. Questo ha destato la curiosità anche dei non addetti ai lavori, tanto che la cosiddetta “teoria del caos” è recentemente entrata, anche se talvolta in maniera un po’ impropria, in settori esterni alla letteratura scientifica, dai testi di divulgazione della scienza ai romanzi, dalla pittura al cinema ai salotti culturali.

Anche se Henri Poincaré descrive in modo chiaro il fenomeno del caos deterministico a fine Ottocento, studiando il problema di tre corpi che interagiscono attraverso la forza di gravità, i suoi risultati sono probabilmente troppo avanzati

per i suoi tempi, e non suscitano subito l'interesse che meritano. Un decisivo contributo alla diffusione e crescente popolarità di questo settore della matematica arriva negli anni Settanta grazie alla pubblicazione degli articoli del matematico e meteorologo americano Edward Lorenz (1963) e poi con l'articolo del fisico e studioso di biologia Robert May (1976) che ha mostrato come comportamenti caotici possono essere ottenuti mediante l'applicazione ripetuta di semplici funzioni di una variabile. Questo conduce, a partire dagli anni Ottanta, alla pubblicazione di tanti libri e articoli, sia specialistici che divulgativi, dedicati al fenomeno del caos deterministico e le sue implicazioni, sia dal punto di vista dei modelli matematici che descrivono sistemi reali che si evolvono nel tempo (la turbolenza nei fluidi, il fluttuare irregolare dei prezzi nei mercati finanziari, le variazioni annuali del numero d'insetti di un ecosistema, i mutamenti nelle condizioni atmosferiche...) sia dal punto di vista filosofico ed epistemologico. Anche la stampa non specializzata si è occupata spesso di questioni relative a fenomeni non lineari tipici della teoria dei sistemi complessi, ma raramente nelle pubblicazioni di carattere divulgativo è possibile trovare, in forma sufficientemente esauriente, esempi che illustrino, concretamente e operativamente, come possano insorgere comportamenti caotici. Questo potrebbe indurre a ritenere che i modelli matematici usati per descrivere dinamiche caotiche siano necessariamente governati da un sistema complicato di parametri e variabili, e di conseguenza che il loro studio richieda non solo l'uso di potenti computer ma anche di conoscenze e metodi matematici molto avanzati. Ciò è certamente vero in molti casi, ma è anche vero che è possibile osservare comportamenti caotici, capirne il si-

gnificato, l'importanza, le cause, la natura e "toccarne con mano" le principali proprietà che li caratterizzano, partendo da modelli molto semplici in cui compare una sola variabile dinamica e un solo parametro.

Scopo di questo articolo è mostrare come l'evoluzione dei fenomeni caotici può essere studiata mediante l'applicazione ripetuta (o "iterazione") di semplici funzioni non lineari, per esempio funzioni algebriche di secondo grado, cioè quelle che gli studenti incontrano nelle aule di scuola. Nonostante la loro semplicità, questi modelli consentono di studiare molti dei fenomeni tipici della non linearità (si vedano, ad esempio, May (1976) e alcuni testi rivolti a insegnanti e studenti, quali il volume di Bischi, Carini, Gardini e Tenti (2004)) seguendo la scia dell'appassionato appello che Robert M. May nel 1976 rivolgeva agli insegnanti di matematica dalle pagine della rivista «*Nature*», dove caldeggiava l'introduzione nei corsi di matematica elementare del procedimento di iterazione di semplici funzioni, ritenendo che l'intuizione degli studenti potesse trarre alimento da certe stravaganze evidenziabili mediante semplici equazioni non lineari, in modo da mostrare come una semplice funzione non lineare potesse essere iterata anche solo "a mano" o col semplice ausilio di una calcolatrice tascabile portando alla scoperta di risultati, a dir poco, sorprendenti.

2 - Iterare funzioni

Ogni studente di scuola media superiore incontra, nel corso dei propri studi di matematica, il concetto di funzione reale di variabile reale: dato un numero x (variabile indipendente) preso da un certo dominio, l'applicazione di una funzione

produce come risultato un unico numero, $y = f(x)$, detto immagine di x mediante f . Se al risultato così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione f (ammesso che ciò sia possibile, ovvero se anche y appartiene al dominio della funzione) si ottiene un terzo numero $z=f(y)=f(f(x))=f^2(x)$. Si tratta di comporre la funzione f con se stessa, cioè applicare due volte la stessa funzione. Se anche z sta nel dominio di f nessuno ci impedisce di calcolare $f(z)=f^3(x)$ e così via. Si viene così a generare una successione infinita di valori: partendo dalla condizione iniziale (o punto seme della successione) x_0 : ogni valore successivo si ottiene in modo univoco (quindi perfettamente deterministico) dal valore precedente secondo lo schema *induttivo* (o iterativo) $x_{n+1} = f(x_n)$, che consiste nell'applicazione ripetuta della funzione prendendo ogni volta come ingresso il valore uscito dall'applicazione precedente.

Il caso più semplice consiste nell'iterare una funzione lineare, cioè nella forma $f(x)=ax$, dove a è una costante. In tal caso è facile calcolare i valori che si susseguono conoscendo solo il valore iniziale x_0 : $x_1 = ax_0$; $x_2=ax_1=a(ax_0)=x_0a^2$; ... $x_n=x_0a^n$. Si tratta di una successione esponenziale, detta anche progressione geometrica di ragione a . Si riesce quindi a calcolare direttamente l'elemento ennesimo della successione solo conoscendo il valore di partenza, e si può anche dedurre l'andamento asintotico, cioè per $n \rightarrow \infty$: se $-1 < a < 1$ allora x_n converge a 0, se $a > 1$ oppure $a < -1$ allora x_n diverge. Più precisamente, se $a > 0$ si ha una successione monotona (decrecente per $0 < a < 1$, crescente per $a > 1$) mentre se $a < 0$ l'andamento è di tipo oscillatorio, essendo in tal caso a^n positivo per n pari e negativo per n dispari. Nel caso particolare $a = -1$ si ottiene un andamento oscillatorio fra i valori x_0 (per n pari) e $-x_0$ (per n dispari) e si

dice che la successione ha un andamento ciclico di periodo 2 (perchè ogni due iterazioni si ottiene il medesimo valore).

Per un qualunque valore del parametro a è facile generare questa successione, usando una calcolatrice tascabile, partendo da un dato valore iniziale e moltiplicando per il fattore a quante volte si vuole. Premendo ripetutamente un tasto della calcolatrice si possono facilmente iterare anche altre funzioni, ad esempio la funzione $f(x)=\sqrt{x}$: partendo da $x_0=3$ e spingendo il tasto “radice quadrata” si ottiene $x_1=\sqrt{3} \cong 1.732$ e poi, spingendo ancora lo stesso tasto, $x_2=\sqrt{x_1} \cong 1.316$ e quindi valori decrescenti che si avvicinano sempre più al valore limite 1, che costituisce l'estremo inferiore per la successione generata; partendo invece da $x_0=0.5$ si ottiene $x_1=\sqrt{0.5} \cong 0.707$ e poi valori crescenti che si avvicinano sempre più (per difetto) all'estremo superiore 1 (si veda la figura 1, in cui sull'asse delle ascisse viene riportato l'indice n che conta le iterazioni, sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori x_n). È ovvio che partendo da $x_0=1$ si ottiene una successione perfettamente costante: $x_n=1$ per ogni n . Si dice allora che $x=1$ è un punto fisso, o di equilibrio: se da lì si parte, lì si resta. In questo caso diciamo anche che si tratta di un equilibrio attrattivo, nel senso che se la condizione iniziale viene presa in un suo intorno la successione generata si avvicinerà sempre di più ad esso. Anche $x=0$ è un punto fisso, ma ogni piccolo spostamento da esso, ottenuto prendendo un punto seme x_0 positivo e piccolo, genera una successione crescente che si allontana definitivamente dal punto fisso, per andare poi a convergere all'altro equilibrio, $x=1$.

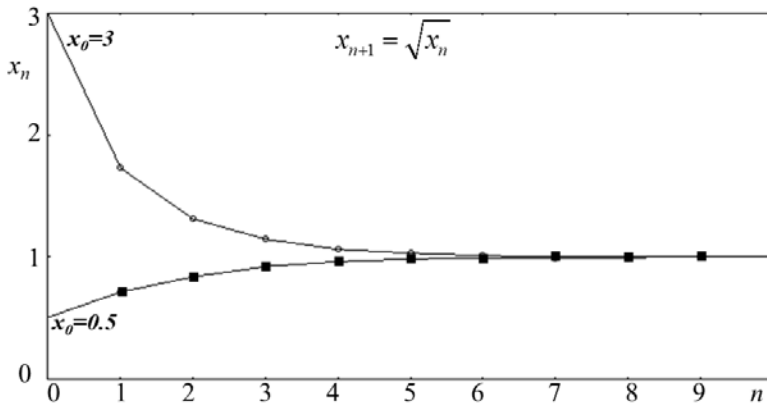


Fig. 1

In base a questa definizione possiamo affermare che nel caso delle funzioni lineari $f(x) = ax$ descritte sopra $x=0$ è l'unico punto di equilibrio, che risulta essere attrattivo se $-1 < a < 1$, repulsivo se $a < -1$ oppure $a > 1$.

Lo studio dei possibili comportamenti delle successioni generate mediante l'applicazione ripetuta di una funzione può essere utile nella descrizione matematica di fenomeni reali che evolvono nel tempo. Infatti, se vogliamo studiare come cambia lo stato di un sistema nei periodi successivi di tempo $t = 0, 1, \dots, n, \dots$, e se la variabile x_n viene interpretata come misura dello stato del sistema nell'intervallo di tempo $t=n$, allora la funzione f assume il significato di operatore di avanzamento del tempo (o legge di evoluzione). Lo schema iterativo $x_{n+1} = f(x_n)$ diventa allora un modello dinamico, nel senso che permette di calcolare lo stato del sistema in un certo periodo di tempo conoscendo lo stato nel periodo precedente. Se, come nel caso della funzione lineare $f(x)=ax$, si riesce a esprimere direttamente lo stato x_n a partire dalla condizione iniziale x_0 allora si dice che il modello dinamico è stato risolto in modo e-

splicito. Questo è ciò che accade, ad esempio, nel calcolo degli interessi in banca. Se oggi una somma di x_0 euro viene depositata in banca a un tasso di interesse fisso del 3%, tra un anno avremo, oltre al capitale iniziale x_0 , anche gli interessi maturati, cioè $x_1 = x_0 + r x_0 = (1+r)x_0$, dove $r = 3/100 = 0.03$ è il tasso di interesse. Dopo due anni avremo $x_2 = x_1 + r x_1 = (1+r)^2 x_0$, e così via. In altre parole, la legge di evoluzione del conto in banca è $x_n = (1+r)x_{n-1}$, una tipica legge lineare, la cui soluzione è la progressione geometrica $x_n = x_0(1+r)^n$. Quindi un impiegato di banca non avrebbe alcuna difficoltà a fornire una risposta chiara al cliente che gli chiedesse: se oggi deposito 1000 euro al 3% quanto avrò fra 10 anni?

Nel caso della funzione non lineare $f(x) = \sqrt{x}$, considerata sopra, abbiamo $x_1 = x_0^{1/2}$; $x_2 = x_1^{1/2} = x_0^{1/2^2}$; ... $x_n = x_0^{1/2^n}$ che tende a 1 se n va all'infinito. In effetti eravamo riusciti a intuire quale fosse il comportamento asintotico della successione generata anche in modo "sperimentale", ovvero iterando con la calcolatrice: partendo da qualunque $x_0 > 0$ si va sempre a convergere a 1, proprietà che si esprime dicendo che si tratta di un *attrattore* globalmente attrattivo.

Attraverso questi semplici esempi siamo probabilmente in grado di apprezzare la seguente affermazione di Pierre Simon de Laplace (1776), riferita alle leggi dei moti planetari, diventata il manifesto del determinismo:

Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le dispo-

zioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro.

Ovviamente Laplace sapeva che la conoscenza delle diverse entità (quelle che ora chiamiamo variabili di stato) ad un certo istante non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo il frutto di processi di misura. Tuttavia, come spesso si assume in base a regole di buon senso, Laplace considerava ovvio il fatto che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avesse altrettanto piccole conseguenze nell'evoluzione del sistema, e quindi il calcolo dello stato futuro risultasse di poco alterato.

Ma con le funzioni non lineari la situazione può diventare molto più complicata, anche utilizzando uno dei più semplici esempi di non linearità, come l'elevamento al quadrato, per esempio $x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 - b$. In questo caso, se volessimo calcolare direttamente x_{10} in funzione di x_0 occorrerebbe calcolare un polinomio completo di grado 1024: infatti $x_1 = x_0^2 - b$ è di grado 2; $x_2 = x_1^2 - b = (x_0^2 - b)^2 - b = x_0^4 - 2bx_0 + b^2 - b$ di grado $2^2=4$, $x_3 = x_2^2 - b = (x_0^4 - 2bx_0 + b^2 - b)^2 - b$ di grado $2^3 = 8$ e così via fino a $2^{10} = 1024$.

In altre parole, il calcolo è perfettamente deterministico, e semplice, ad ogni iterazione, ma per conoscere ad esempio x_{50} occorre calcolare la funzione 49 volte, ed è difficile a priori sapere come andrà a finire. Facciamo qualche "esperimento numerico", ad esempio utilizzando una calcolatrice tascabile (tasto x^2 e poi si sottrae il parametro costante b). Con $b=0$ è facile rendersi conto che ci sono due punti fissi: $x=0$ (attraente) e $x=1$ (repulsivo) e l'iterazione converge a 0 se $x_0 \in (-1,1)$ altrimenti diverge a + infinito.

Se $b=1$ ci sono ancora due punti fissi, anche se non sono subito evidenti: in generale i punti fissi si possono calcolare imponendo la condizione di equilibrio $x_{n+1}=x_n$, cioè risolvendo l'equazione $x=f(x)$, che nel nostro caso diventa $x=x^2-1$, da cui si ottengono le soluzioni $(1-\sqrt{5})/2$ e $(1+\sqrt{5})/2$. Prendendo condizioni iniziali vicine a questi valori ci si può subito rendere conto che entrambi sono equilibri repulsivi e che, a seconda delle condizioni iniziali scelte, le successioni generate divergono oppure continuano ad oscillare avvicinandosi sempre più ad un ciclo periodico di periodo due, dato dall'alternarsi dei valori $\{-1,0\}$ (figura 2). In effetti, iniziando l'iterazione da uno di quei due valori, ad esempio $x=0$, si ottiene una sequenza perfettamente periodica: $x_1 = x_0^2 - 1 = -1$; $x_2 = x_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$; invece, partendo da $x_0 = 2$ si ottiene $x_1 = 2^2 - 1 = 3$; $x_2 = 3^2 - 1 = 8$ e poi valori sempre più grandi.

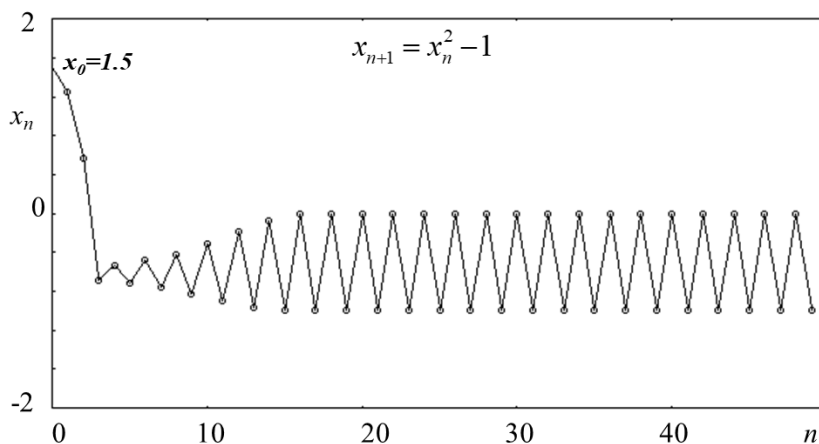


Fig. 2

3 - Il caos deterministico

Le cose sono ancor più complicate ponendo $b=2$. In questo caso, partendo dalla condizione iniziale $x_0=0.5$, si ottiene un andamento oscillatorio ma (almeno apparentemente) non periodico (figura 3). L'andamento ottenuto risulta talmente irregolare che se non conoscessimo il procedimento con cui l'abbiamo generato potremmo pensare che sia stato ottenuto prendendo una sequenza di valori estratti a caso nell'intervallo $[-2,2]$.

C'è poi un altro problema, legato all'effetto di una piccola variazione della condizione iniziale. Nella figura 3 in basso è rappresentata la traiettoria che si ottiene modificando leggermente la condizione iniziale, precisamente prendendo $x_0=0.499$ anziché $x_0=0.5$. Come si può facilmente notare, questa differenza dello 0.2% produce dapprima dei valori quasi uguali nel corso delle prime 10 iterazioni, ma poi i valori che si susseguono si discostano sempre di più da quelli della prima successione, fino a perdere ogni correlazione fra i valori delle due sequenze. Questa è l'essenza del caos deterministico.

Considerando il fatto che in un sistema reale (della fisica, biologia o scienze sociali) non esiste la possibilità di effettuare misure infinitamente precise, si deduce che la capacità di effettuare previsioni mediante modelli dinamici non lineari in regime caotico è piuttosto limitata.

Ed è proprio questa proprietà a creare stupore: pur essendo lo schema iterativo così semplice e perfettamente deterministico (ogni valore è ottenuto calcolando il quadrato del precedente e sottraendo 2) risulta molto difficile ottenere due sequenze identiche, in quanto minime differenze fra le condi-

zioni iniziali possono anche essere introdotte a causa della precisione limitata con cui vengono rappresentati i numeri.

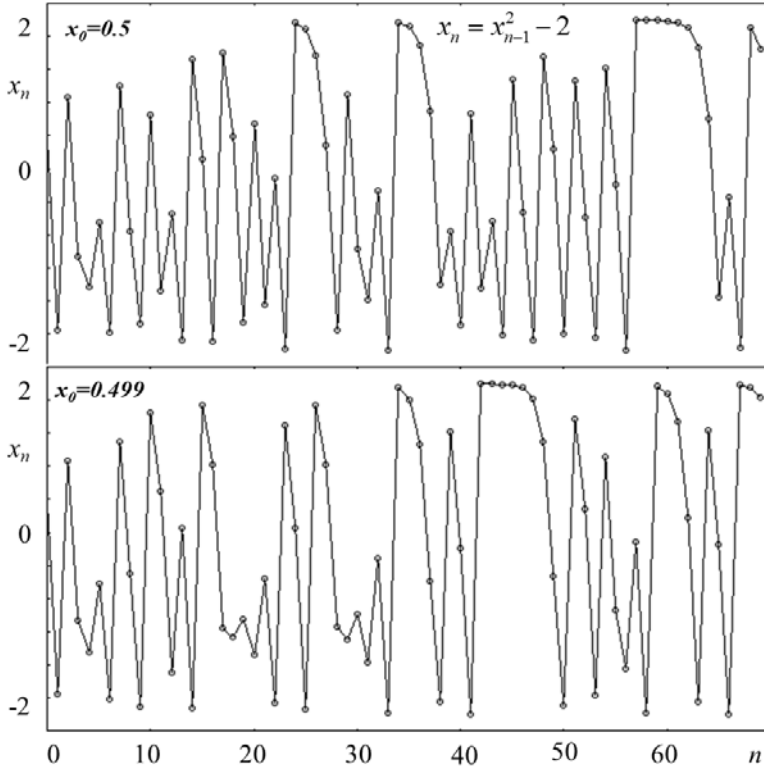


Fig. 3

Siamo quindi ben lontani dalla visione di Laplace, che comunque è vera nel caso di sistemi dinamici lineari, e anche non lineari purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Infatti, in condizioni di convergenza a un punto di equilibrio stabile (come in figura 1) o a un ciclo periodico (come in figura 2) piccole perturbazioni non comportano grandi conseguenze nel comportamento del sistema nel lungo periodo.

Questo è ciò che ci si aspetta in ogni sistema che evolve in modo regolare: se lo stato di un sistema viene leggermente perturbato ci aspettiamo che il conseguente cambiamento che si osserverà nell'evoluzione successiva del sistema sia anch'esso piccolo, o per lo meno proporzionale alla perturbazione introdotta. Invece Poincaré (1908) scriveva:

Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile ...

La rivoluzione scientifica provocata dalla scoperta del caos deterministico comincia però a manifestarsi solo negli anni Sessanta, quando il meteorologo Edward Lorenz ritrova questi risultati studiando modelli dinamici costituiti da equazioni differenziali, che venivano risolte numericamente per descrivere i movimenti di masse d'aria nell'atmosfera. Secondo il racconto riportato nel libro divulgativo *Chaos* di James Gleick (1987) Lorenz scoprì accidentalmente il comportamento caotico delle soluzioni nel 1961, quando analizzando lunghe sequenze di numeri che rappresentavano gli andamenti delle variabili utilizzate per le previsioni del tempo, un giorno provò a ripetere una di queste simulazioni iniziando però da

un valore intermedio ricopiato dai tabulati ottenuti in precedenza. Lorenz si accorse che la nuova sequenza ottenuta differiva in modo significativo dalla precedente, fino a non percepire più alcuna somiglianza fra le due. All'inizio pensò a un malfunzionamento del computer, ma poi si rese conto che il problema era legato al fatto che non aveva immesso le condizioni iniziali con sufficiente precisione: il computer utilizzava nei calcoli numeri con sei cifre decimali, mentre i risultati venivano stampati con tre cifre decimali soltanto, e Lorenz aveva utilizzato questa precisione ridotta per ripetere le simulazione numerica.

Lorenz si appassionò a questo fenomeno, e lo ricollegò agli studi di Poincaré, che citò nel suo articolo *Deterministic Nonperiodic Flow* del 1963. Comunque l'attenzione dei non specialisti fu attratta soprattutto dal titolo della sua comunicazione in un convegno del 1972: *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? (Il battito di ali di una farfalla in Brasile può provocare un tornado in Texas?)*. Dopo questo efficace titolo, il termine "effetto farfalla" (butterfly effect) è diventando un'espressione ricorrente per indicare il fenomeno della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Ovviamente il fatto che il caos deterministico sia stato osservato proprio nel contesto delle previsioni meteorologiche ha favorito la sua diffusione e popolarità anche fra i non specialisti, tanto che lo troviamo sempre più spesso citato nei quotidiani, al cinema, nei romanzi, a teatro. Come esempio riportiamo le parole di Ian Malcom, il matematico protagonista del popolare romanzo *Jurassic Park* di Michael Crichton (1990):

I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann, il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. [...]. La teoria del caos manda all'aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se

non per pochi giorni. [...] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche a lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni - è buttato via. È un'impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo.

Ovviamente il fenomeno dell'effetto farfalla non è nuovo, tutti constatiamo come nella realtà piccoli eventi possono avere enormi ripercussioni. Fatto evidenziato anche da tanti storici, scrittori, poeti. Un esempio di particolare efficacia e chiarezza lo troviamo nel seguente brano di Edgar Allan Poe, tratto da *Il mistero di Marie Rogêt* (1842):

Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti; proprio come in aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero.

La vera novità consiste nell'aver inglobato questo concetto all'interno di un settore della matematica e di aver mostrato che comportamenti apparentemente caotici possono essere generati anche da modelli dinamici molto semplici e perfettamente deterministici.

4 - Un metodo grafico per iterare funzioni

Per capire meglio il comportamento qualitativo delle successioni generate dall'iterazione di una funzione, senza ricor-

rere a calcoli numerici, si può utilizzare un comodo metodo grafico basato sulla conoscenza della curva che rappresenta la funzione sul piano cartesiano. Infatti, l'esistenza e la stabilità dei punti di equilibrio possono essere facilmente dedotti mediante la rappresentazione del grafico della funzione iterata, e lo studio delle modificazioni nella forma del grafico, indotte da variazioni dei valori di eventuali parametri presenti nell'espressione della funzione, può fornire importanti indicazioni su eventuali drastici cambiamenti negli andamenti delle successioni generate. Tali cambiamenti sono spesso chiamati biforcazioni, e rappresentano uno di principali temi nello studio dei sistemi dinamici.

Consideriamo il grafico di una generica funzione $y=f(x)$, come in figura 4, e sovrapponiamo ad esso il grafico della bisettrice $y=x$. Per calcolare $x_1 = f(x_0)$ seguiamo l'usuale metodo per ottenere l'immagine di un punto mediante una funzione: prendiamo la condizione iniziale x_0 sull'asse delle ascisse, tracciamo un segmento verticale fino a incontrare il grafico della funzione, e poi procediamo in orizzontale fino all'asse delle ordinate per ottenere x_1 . Per procedere nell'iterazione occorre ora riportare x_1 sull'asse delle ascisse, in quanto dovrà diventare il nuovo argomento della funzione per ottenere $x_2 = f(x_1)$. Questo può essere ottenuto sfruttando la presenza della bisettrice, che essendo il luogo di equazione $y=x$ permette di riportare x_1 sull'asse orizzontale mediante uno spostamento orizzontale verso destra e poi uno verticale verso il basso, usando la bisettrice come punto di svolta (figura 4). Ora siamo pronti a ripetere lo stesso procedimento per ottenere $x_2=f(x_1)$ e così via. Si può notare l'inutilità dei segmenti tratteggiati, cioè del segmento orizzontale che congiunge il grafico della fun-

zione con l'asse delle ordinate, che viene subito ripercorso all'indietro verso la bisettrice, e i segmenti verticali tra il grafico e l'asse delle ascisse. Questo permette di ottenere un'ulteriore semplificazione: si può usare la bisettrice come unico asse di riferimento, prendendo direttamente su di essa la condizione iniziale e muovendosi in verticale fino al grafico, poi in orizzontale verso la bisettrice, poi di nuovo in verticale fino al grafico ecc. I punti toccati sulla bisettrice sono i punti della successione generata. Tutto ciò viene fatto in modo grafico, senza effettuare calcoli. Questa costruzione viene anche chiamata diagramma a scala o a ragnatela, nome più appropriato quando vengono iterate funzioni decrescenti, come nel pannello a destra nella figura 4.

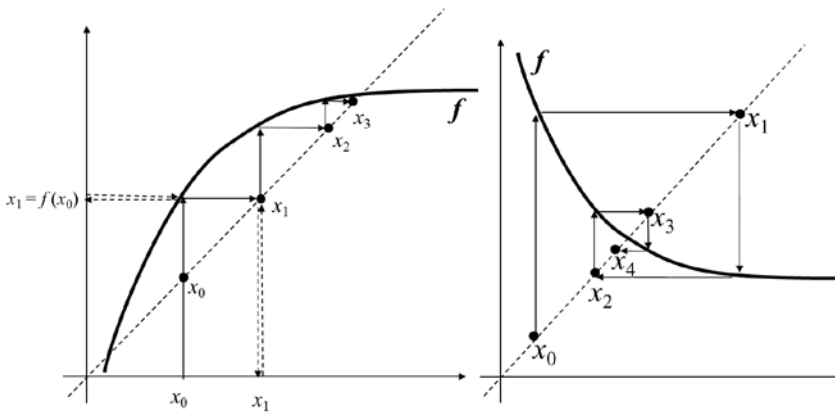


Fig. 4

Applichiamo ora questo metodo alla funzione $f(x)=x^2-b$, le cui iterazioni sono state studiate nel paragrafo precedente. Il suo grafico è una parabola convessa, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e con vertice in $(0,-b)$, si veda fig.5. Nella

figura di sinistra, ottenuta con il valore del parametro $b=0$, sono rappresentate, mediante il diagramma a scala, due traiettorie: una inizia da $x_0=0.7$ e converge al punto di equilibrio attrattivo $p^*=0$, l'altra inizia da $x_0=-1.1$ e, dopo aver "scavalcato" il punto di equilibrio repulsivo $q^*=1$ diverge a $+\infty$. Disegnando alcuni diagrammi a scala ci rendiamo facilmente conto che i due equilibri si comportano diversamente, nel senso che da una condizione iniziale in un intorno di q^* la traiettoria si allontana da esso, mentre partendo da una condizione iniziale vicina a p^* la traiettoria generata gli si avvicina asintoticamente. La differenza fra i due equilibri si può capire osservando la pendenza con cui il grafico della funzione attraversa la bisettrice in corrispondenza dei punti fissi: in q^* la pendenza è superiore a quella della bisettrice, cioè il coefficiente angolare della retta tangente al grafico è maggiore di 1, e quindi in un intorno del punto fisso $q^*=f(q^*)$ si comporta come una funzione lineare di ragione maggiore di 1 (una progressione geometrica espansiva) essendo $f(x)=2x$ e quindi $f'(1)=2$. Applicando lo stesso ragionamento all'equilibrio p^* (dove la pendenza è addirittura 0) possiamo dire che l'approssimazione lineare della funzione in un suo intorno si comporta come una progressione geometrica contrattiva, essendo il coefficiente angolare della tangente minore di uno in valore assoluto. Un discorso analogo può essere fatto nella situazione rappresentata nella figura di destra, ottenuta per $b=0.5$. In questo caso la pendenza della tangente nel punto fisso p^* è negativa e possiamo notare un diagramma a ragnatela convergente, ovvero una convergenza attraverso oscillazioni smorzate. In effetti, essendo $p^*=(1-\sqrt{3})/2$ la pendenza in esso è data da

$f'(p^*)=2p^*= (1-\sqrt{3})$, quindi $-1 < f'(p^*) < 0$. Comunque in entrambe le situazioni presentate in fig.2 la stabilità di p^* è locale, in quanto si ha convergenza solo per le traiettorie che partono da condizioni iniziali prese sufficientemente vicine all'equilibrio. Una domanda spontanea che sorge è "quanto vicine?". Questo porta al concetto di bacino di attrazione definito come l'insieme dei punti che generano traiettorie convergenti a un dato attrattore. Nel nostro caso il bacino è delimitato a destra dal punto fisso repulsivo q^* e a sinistra dalla sua preimmagine, indicata con q_{-1}^* in figura 5, dove la preimmagine è definita come un punto tale che $f(q_{-1}^*) = q^*$ (linea tratteggiata in figura 5). Si hanno quindi due tipi di dinamiche asintotiche a seconda della condizione iniziale: se $x_0 \in]q_{-1}^*, q^*[$ allora la traiettoria converge all'equilibrio p^* , mentre se $x_0 > q^*$ oppure $x_0 < q_{-1}^*$ la traiettoria diverge. Entrambi i valori di equilibrio, così come la pendenza della tangente in essi, dipendono dal parametro b : se questo aumenta il grafico della funzione in corrispondenza del punto fisso p^* diventa via via più ripido, fino a che la pendenza raggiunge il valore -1 , cioè la tangente diventa perpendicolare alla bisettrice. Questo accade per $b = 3/4$, essendo $p^* = -1/2$ e $f'(-1/2) = -1$.

Se b aumenta ulteriormente il punto fisso p^* da attrattivo diventa repulsivo, e si dice che $b = 3/4$ costituisce un valore di biforcazione. Ma la perdita di attrattività di p^* non è l'unica conseguenza della biforcazione.

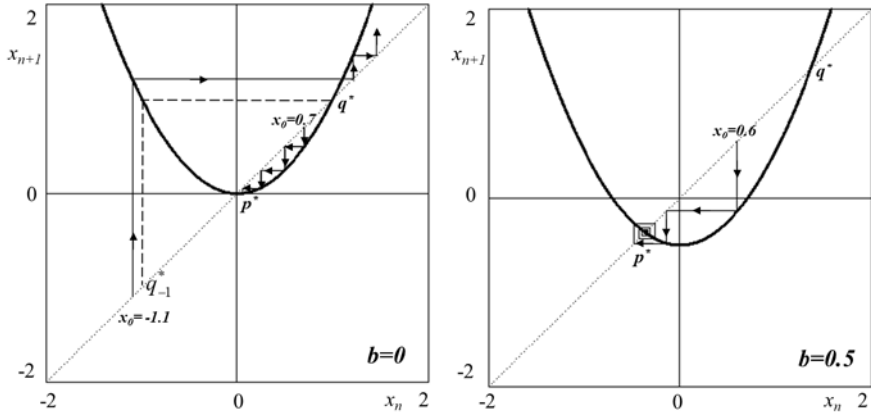


Fig. 5

Infatti, se esaminiamo il comportamento delle traiettorie per valori di b poco maggiori di $3/4$ e con condizione iniziale prossima a p^* ci rendiamo conto che la traiettoria si allontana da p^* oscillando, e tende asintoticamente a una oscillazione fra due punti periodici. Si veda ad esempio il pannello a sinistra nella figura 6, ottenuta per $b=1$, dove il ciclo periodico è costituito dai punti $\{-1,0\}$. Partendo da uno di questi due punti la traiettoria continua a saltellare tra essi, essendo $f(-1) = 0$ e $f(0) = -1$ e allo stesso ciclo di periodo due tende asintoticamente ogni traiettoria che parte da una condizione iniziale $x_0 \in]q^*, q_{-1}^*[$, esclusa $x_0 = p^*$, naturalmente. Questo tipo di biforcazione si chiama “biforcazione con raddoppio del periodo” o, più brevemente, “biforcazione flip”. Per capire meglio quello che accade, consideriamo la funzione composta $f^2(x) = f(f(x))$, il cui grafico è mostrato in figura 6 a destra. Poiché $f^2(x)$ è un polinomio di quarto grado, il suo grafico può avere fino a 4 intersezioni con la bisettrice, ossia quattro punti fissi, di cui due sono necessariamente gli stessi di $f(x)$, ossia q^* e p^* , mentre al-

tri punti fissi di $f^2(x)$ corrispondono ai punti periodici del ciclo, essendo $f^2(0) = f(f(0)) = f(-1) = 0$ e, analogamente, $f^2(-1) = -1$. In effetti, iterare la mappa $f^2(x)$ significa generare stati del sistema "a salti di 2", e quindi un ciclo di periodo 2 per la f rappresenta per la funzione f^2 un punto fisso.

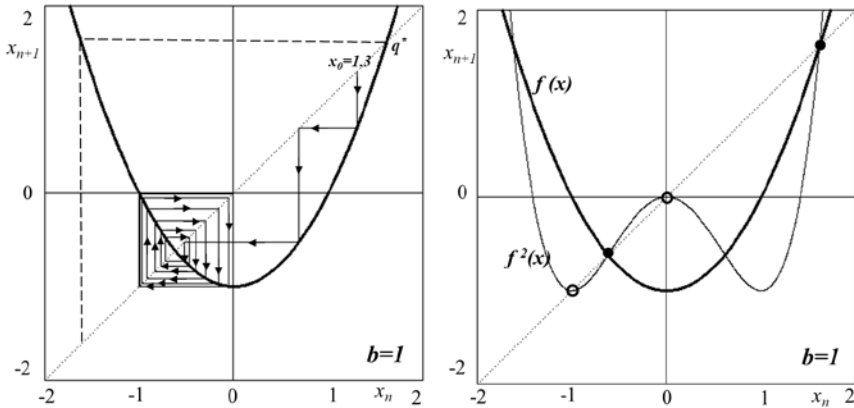


Fig. 6

Aumentando ulteriormente il parametro b anche la pendenza di f^2 in corrispondenza dei due punti periodici raggiungerà il valore -1 per $b=5/4$. (detti α e β i due punti periodici, la pendenza in essi sarà la stessa essendo, per la regola di derivazione delle funzioni composte, $f^{2'}(\alpha) = f'(f(\alpha))f'(\alpha) = f'(\beta)f'(\alpha)$ e anche $f^{2'}(\beta) = f'(f(\beta))f'(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta)$). Questo produce un'altra biforcazione flip che fa diventare repulsivo il ciclo di periodo 2 con conseguente creazione di un ciclo attrattivo di periodo 4, formato da 4 punti fissi di f^4 , che diventa l'attrattore "di turno" (si veda figura 7 a sinistra, ottenuta per $b = 1.3$ e cancellando le prime 50 iterazioni, il cosiddetto "transitorio", in modo da vedere solo il ciclo finale). Analogamente,

aumentando ancora b , il ciclo 4 diventerà instabile lasciando il posto a un ciclo 8 attrattivo e così via. E' naturale chiedersi se si raggiungerà un ciclo di periodo massimo dopo il quale le biforcazioni di raddoppio periodo finiranno, o se i raddoppi continueranno all'infinito. Inoltre, come notato in precedenza, per $b=2$ le iterazioni sembrano non assestarsi mai su un ciclo periodico e il diagramma a ragnatela continua a ricoprire in modo apparentemente erratico il piano (figura 7 a destra).



Fig. 7

5 - La geometria del caos e degli attrattori strani

Una funzione lineare $f(x)=ax$ può essere anche esaminata come una trasformazione che muta segmenti in altri segmenti, producendo contrazioni o allungamenti. Consideriamo ad esempio un segmento $s= AB$ rappresentato sull'asse delle ascisse dalla porzione di estremi x_A e x_B . La sua lunghezza è data da $\overline{AB}=(x_B-x_A)$. Applicando la trasformazione lineare $x'=ax$ a

tutti i punti di AB si ottiene un segmento di estremi $x'_A = ax_A$ e $x'_B = ax_B$. Notiamo che se $a > 0$ il segmento ottenuto è dato da $A'B'$ e ha lunghezza $\overline{A'B'} = (x'_B - x'_A) = a(x_B - x_A)$. Questo significa che il segmento risulta allungato (o dilatato) se $a > 1$, accorciato (o contratto) se $a < 1$, e la trasformazione viene chiamata, rispettivamente, *contrazione* e *dilatazione*. Se il coefficiente angolare $a < 0$ allora il segmento viene anche ribaltato, ossia l'immagine di x_B precede l'immagine di x_A , e il segmento trasformato risulta essere $B'A'$, di lunghezza $\overline{B'A'} = (x'_A - x'_B) = |a|(x_B - x_A)$, dove il simbolo $|a|$ indica il valore assoluto del coefficiente angolare. Ciò significa che per $-1 < a < 0$ la trasformazione lineare provoca un *ribaltamento e contrazione* del segmento, per $a < -1$ si ha un *ribaltamento con dilatazione*. Possiamo dedurre che l'applicazione ripetuta di una mappa lineare contrattiva porta alla successiva riduzione di un segmento fino a farlo collassare in un punto, mentre l'iterazione di una dilatazione lineare allunga sempre più il segmento facendolo crescere a dismisura.

Se invece consideriamo un'applicazione non lineare, come la parabola $y = x^2 - b$, questa agisce su un segmento allungandolo in certe zone e comprimendolo in altre, e se il segmento considerato include il vertice della parabola lo ripiega anche. Due punti in posizione simmetrica rispetto al vertice della parabola, ad esempio $x_A = -1$ e $x_B = 1$, vengono trasformati nello stesso punto, essendo $f(-1) = f(1) = 1 - b$. Questo può essere espresso dicendo che il segmento $AB = [-1, 1]$ viene ripiegato dalla funzione portando a coincidere i suoi estremi. Alla seconda iterazione tali azioni vengono di nuovo applicate e così via.

Avviene quindi che l'applicazione ripetuta della funzione di secondo grado su un segmento può essere vista come l'applicazione successiva di azioni di stiramento, piegamento, compressione. L'effetto combinato di queste azioni è possibile solo con mappe non lineari, in quanto, come abbiamo fatto notare sopra, una funzione lineare o dilata o contrae (ma non entrambe le cose contemporaneamente) e non può certo causare piegamenti.

L'essenza del caos risiede proprio nell'applicazione ripetuta di queste azioni geometriche. Spesso viene usata la metafora dell'azione geometrica che si esercita sull'impasto della sfoglia: infatti la principale caratteristica geometrica delle trasformazioni che generano successioni caotiche consiste in azioni combinate (e ripetute durante l'iterazione) di stiramento e ripiegamento (*stretching & folding*).

Consideriamo ora un esempio di trasformazione nel piano cartesiano, rappresentata da due funzioni che trasformano punti del piano in nuovi punti del piano mediante la legge $(x', y') = (f(x, y), g(x, y))$. Dato un punto del piano cartesiano, rappresentato dalla coppia di coordinate (x, y) , se ne genera un altro, (x', y') , applicando una trasformazione del piano in sé. Se poi al punto così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione si ottiene un terzo punto, e così via. Si ottiene così, in modo induttivo o iterativo una successione di punti del piano $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$, dove il pedice n è in pratica un contatore di passi, o iterazioni, partendo dalla condizione iniziale (x_0, y_0) , detta anche punto seme o condizione iniziale.

È interessante chiedersi dove andrà a finire questa successione di punti, cioè il suo comportamento asintotico. Consideriamo ad esempio la trasformazione $(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n) =$

$(ax_n + y_n, b + x_n^2)$, dove a e b sono due parametri reali. Fissati i valori dei parametri a e b e dato un punto iniziale di coordinate (x_0, y_0) , i punti ottenuti mediante applicazioni successive della trasformazione T creano una nuvola di punti nel piano. Tali punti potrebbero convergere verso un punto di equilibrio, o un ciclo periodico (cioè una sequenza finita di punti del piano che si ripete) oppure annerire una regione del piano senza ripercorrere mai lo stesso punto, un cosiddetto attrattore caotico del piano.

Si può notare che applicando la trasformazione T ai due punti distinti si potrebbe ottenere lo stesso punto immagine: ad esempio con $a=0.5$ e $b=-2$ i punti $P_1=(-2,2)$ e $P_2=(2,0)$ vengono trasformati nello stesso punto: $T(P_1)=T(P_2)=(1,2)$. In altre parole, si tratta di una trasformazione del piano in grado di trasportare due punti distinti nello stesso punto. Da un punto geometrico questo può essere interpretato dicendo che la trasformazione “ripiega” il piano su se stesso fino a portare punti distinti a sovrapporsi. Proprio come quando si piega e si stira un fazzoletto. È per questo che gli attrattori caotici generati attraverso l’iterazione di una trasformazione come quella considerata assumono spesso una forma che richiama quella di veli ripiegati su se stessi, come quello mostrato in figura 8, ottenuto iterando la trasformazione T con parametri $a=-0.42$ e $b=-1.6$.

Partendo dalla condizione iniziale $(0,0)$ il punto successivo è $(0,-1.6)$ e poi da questo otteniamo $(-1.6,-1.6)$. I primi 10 punti generati in questo modo sono mostrati nel pannello di sinistra della figura 8. Essi si sparpagliano sul piano, muovendosi senza un ordine apparente. Inoltre, iniziando con una condizione iniziale di poco diversa da $(0,0)$, ad esempio $(0,$

0.01) ci si rende ben presto conto che la nuova successione differisce dalla precedente con uno scarto fra i corrispondenti punti ottenuti ben superiore.

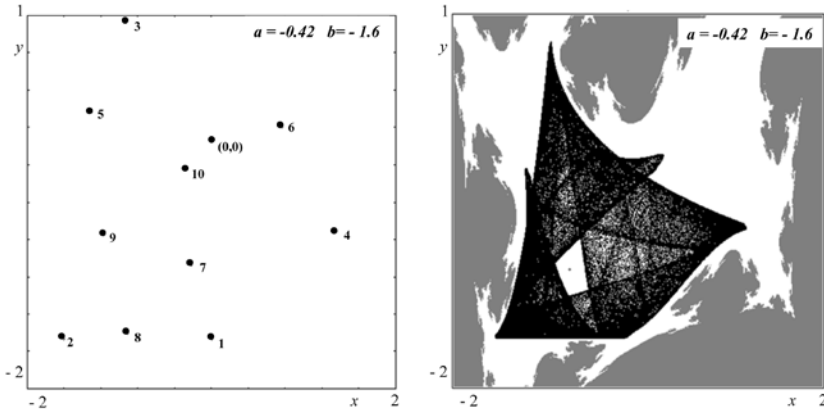


Fig. 8

Infatti, partendo dalla prima, dopo 30 iterazioni otteniamo $(x_{30}, y_{30}) = (-0.35, -1.18)$ mentre con la seconda condizione iniziale si ottiene $(x_{30}, y_{30}) = (1.14, -0.68)$, un evidente esempio di sensibilità rispetto alle condizioni iniziali.

Ma una ulteriore sorpresa arriva continuando a iterare, quando la nuvola inizialmente disordinata di punti inizia ad assumere, mano a mano che il numero di punti cresce, una forma ben definita, con contorni netti e una struttura geometrica simile a veli ripiegati, come mostrato nel pannello di destra di Figura 8, ottenuto continuando la successione di punti i cui passi iniziali sono mostrati nel pannello di sinistra fino a raggiungere centomila iterazioni (una questione di pochi se-

condi utilizzando un computer). Partendo da qualunque punto della zona bianca, preso come condizione iniziale, dopo pochi passi iniziali la successione di punti così ottenuta entra nella zona identificata dal velo ripiegato in figura e iterando si annerisce sempre di più la stessa identica forma. Si tratta pertanto di una struttura stabile, detta attrattore, che “cattura” tutte le traiettorie che iniziano da un dato bacino di attrazione, rappresentato appunto dalla regione bianca in figura. Le condizioni iniziali prese nella regione grigia generano invece successioni divergenti, ovvero punti che si allontanano indefinitamente e non tornano più indietro. Come si può vedere, il confine che separa i due bacini è molto frastagliato, con una struttura che mostrerebbe dettagli sempre più minuti se si considerassero ingrandimenti, con proprietà di autosimilarità (o omotetia interna) tipiche delle curve frattali, si vedano su questo punto i volumi di Mandelbrot citati nella bibliografia e l’enorme letteratura da questi generata.

Esistono altri tipi di attrattori, come un semplice punto di equilibrio, detto anche *punto fisso* in quanto prendendo su di esso la condizione iniziale le iterazioni non fanno altro che ripetere il medesimo punto, come accade per il punto di coordinate $(-0.7406, -1.0516)$ che sta al centro del “buco” dell’attrattore di figura 8. Quel punto fisso però è instabile, cioè partendo da una condizione iniziale non perfettamente coincidente con esso, sebbene vicinissima, la successione generata si allontanerà, come se ne venisse respinta. Simili equilibri sono anche detti repulsivi. Occorre cambiare i valori dei coefficienti della funzione per ottenerne uno attrattivo. Assegnando ai coefficienti a e b valori diversi (ma mantenendoli poi costanti durante il processo di iterazione) si possono otte-

nere diversi tipi di attrattori. Ad esempio, con $a=0.7$ e $b=-0.3$ si ottiene un punto di equilibrio stabile (figura 9, sinistra) verso il quale convergono tutte le successioni generate dalle condizioni iniziali contenute nel suo bacino di attrazione, rappresentato dalla regione bianca, mentre partendo da una condizione iniziale presa nella regione grigia la successione di punti che viene generata risulterà essere divergente.

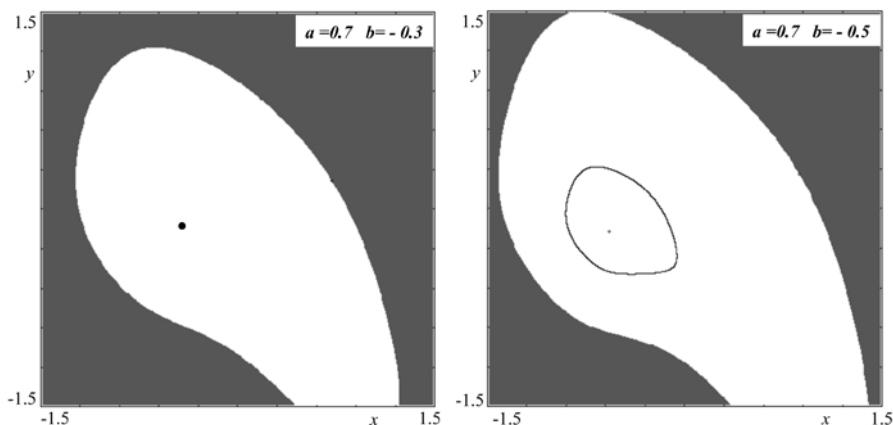


Fig. 9

È evidente che assegnando ai parametri valori diversi si ottengono diversi attrattori. I parametri diventano cioè delle manopole, o dei cursori, al cui variare si modifica la forma dell'attrattore di turno e del relativo bacino di attrazione. Talvolta si tratta di piccoli cambiamenti che non alterano le proprietà topologiche delle forme ottenute, altre volte invece piccole variazioni dei parametri possono provocare drastici cambiamenti di tali forme, e allora si dice che si verifica una biforcazione. Ad esempio, diminuendo il parametro b l'equilibrio perde stabilità e diventa repulsivo, con la simultanea compar-

sa di una curva chiusa che lo circonda verso la quale vengono attratte tutte le successioni che nascono nella regione bianca (pannello destro in figura 9, dove $b=-0.5$) che poi continuano a muoversi lungo quella curva indefinitamente. Diminuendo ancora il parametro b la curva si ingrandisce e cambia forma (Figura 10 a sinistra, ottenuta con $b=-0.7$). L'attrattore diventa poi un ciclo periodico di periodo 11 per $b=-0.75$, come mostrato nel pannello destro in figura 10. In questo caso, partendo da uno qualsiasi di quegli 11 punti ci si ritorna dopo esattamente 11 iterazioni, dopodiché la sequenza degli 11 valori si ripete indefinitamente, sempre uguale.

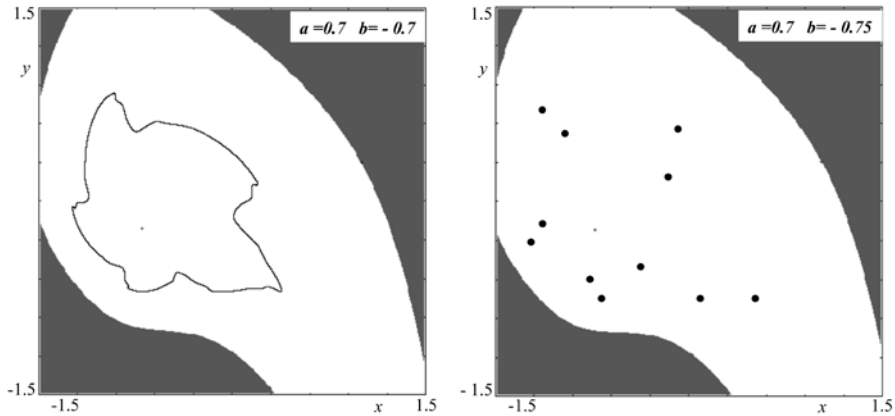


Fig. 10

Ma le sorprese non finiscono qui: muovendo ancora la “manopola b ” ci si “sintonizza” su attrattori via via differenti, a volte persino su più attrattori simultaneamente, ciascuno col suo bacino di attrazione. È quanto accade nelle situazioni mo-

strati in figura 11, ottenute con la stessa funzione esplorando diversi range di parametri.

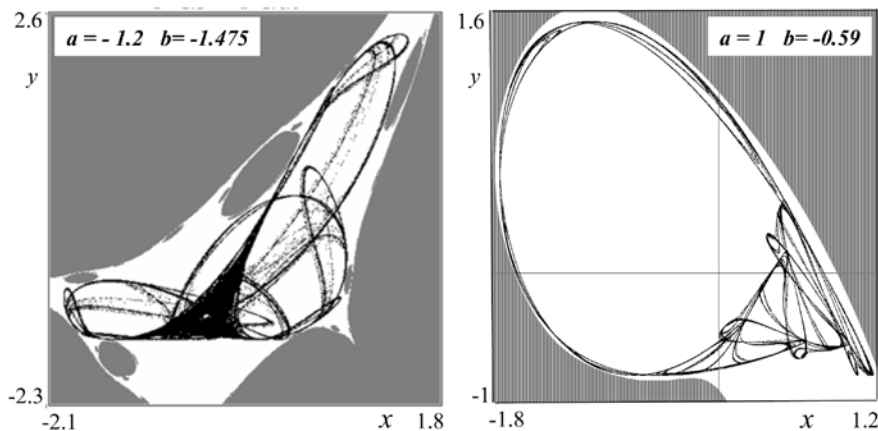


Fig. 11

6 - Conclusioni

In questo articolo abbiamo mostrato cosa significhi adottare un approccio sperimentale verso le proprietà matematiche delle successioni definite mediante formule ricorsive, ovvero generate induttivamente iterando una data funzione di una variabile, che trasforma punti della retta in altri punti della retta, o trasformazioni del piano cartesiano in sé. Si tratta di un modo stimolante, e per certi aspetti anche divertente, di ottenere oggetti matematici con curiose proprietà geometriche, che vanno poi studiate, interpretate e catalogate. Lo strumento che ci consente una simile esplorazione è una calcolatrice tascabile o un computer. Le forme e le qualità estetiche degli at-

trattori così ottenuti hanno stimolato la curiosità e la fantasia di tanti operatori che fossero in grado di scrivere o semplicemente utilizzare dei brevi programmi software in grado di eseguire gli esperimenti numerici sopra descritti.

Bibliografia

Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1997). *Chaos. An introduction to dynamical systems*. New York : Springer-Verlag,.

Bertuglia C.S., Vaio, F. (2003). *Non linearità, caos e complessità*, Torino: Bollati Boringhieri.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004). *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*. Milano: Bruno Mondadori Editore.

Bischi G.I. (2008). " Dalle funzioni iterate al caos deterministico" «Nuova Secondaria», Editrice La Scuola, Brescia, n. 3, 15 novembre 2008, pp. 28-32.

Crichton M. (1990). *Jurassic Park*, Alfred A. Knopf (Ed. Italiana, Garzanti 1990)

Devaney R.L. (1990). *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*. Addison Wesley Longman Italia.

Gleick J. (1987). *Chaos. The amazing science of the unpredictable*, Penguin. (trad. it. *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni, Firenze, 1996).

Guckenheimer J., Holmes P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Berlin: Springer.

Laplace, P. S. ([1776]-1820). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: V. Courcier.

Lorenz E.N. (1963) "Deterministic non-periodic flow". «*Journal of the Atmospheric Sciences*», 20, 130-141.

Lorenz E.N. (1972) "Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?" Articolo presentato al 139° meeting dell' American Association for the Advancement of Science.

May R.M. (1976) "Simple mathematical models with very complicated dynamics". «*Nature*»261, 459-467.

Mandelbrot B. (1987) *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione*. Torino: Einaudi.

Mandelbrot B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman & Co.

Mira C., Gardini L., Barugola A. Cathala J.C. (1996). *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*. Singapore: World Scientific,.

H.O. Peitgen, P.H. Richter (1987). *La bellezza dei frattali*. Torino: Bollati Boringhieri.

Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D. (1992) "Chaos and Fractals. New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York.

Poincaré, H. (1908). *Science et Méthode*. Ed. It. da cui è tratto il passo citato: "Scienza e metodo", Einaudi 1997, pag.56.

Poe, E.A.(1842) "*The mystery of Marie Rogêt*", Ed. It. "I racconti del mistero e del raziocinio, Garzanti, 1989.

Ruelle D. (1992). *Caso e Caos*, Torino: Bollati Boringhieri.

Ruelle, D. and F. Takens (1971). "On the nature of turbulence". *Communications of Mathematical Physics* 20: 167-192.

Stewart, I. (2002). *Does God Play Dice: The New Mathematics of Chaos*. Second Edition, Blackwell Publishers Inc., Malden, MA.