Coppie di punti parallele e congruenti

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n2.134

Sunto: *L'articolo inizia richiamando l'attenzione su "coppie di punti parallele", espressione che, tradotta nel linguaggio della geometria tradizionale, indica la particolare collocazione dei vertici del parallelogramma. L'unione degli insiemi completi, aventi per sostegno "coppie di punti parallele", con insiemi completi del V ordine di punti dello spazi, offre schemi operativi che permettono di modificare un poliedro sostituendo uno spigolo con un altro, parallelo al precedente, oppure, parallelo ad un piano contenente una faccia del solido.*

Parole Chiave: *Coppie di punti parallele. Coppie di punti parallele, congruenti, egualmente orientate. Insiemi di punti materiali ridotti. Teorema 12.*

Abstract: *The article begins by drawing attention to "parallel pairs of points", an expression which, translated into the language of traditional geometry, indicates the particular location of the vertices of the parallelogram. The union of complete sets, having "parallel pairs of points" as support, with complete sets of the fifth order of points in space, offers operational schemes that allow you to modify a polyhedron by replacing one edge with another, parallel to the previous one, or, parallel to a plane containing a face of the solid.*

Keywords: *Parallel pairs of points. Parallel, congruent, equally oriented pairs of points. Sets of reduced material points. Theorem 12.*

Nota1. Nella geometria euclidea la relazione di congruenza riguarda segmenti, poligoni, angoli. Trattando di insiemi di punti materiali, la congruenza si riferisce a distribuzioni di punti nel piano e nello spazio. Pertanto, definizioni come congruenza di coppie di punti, oppure congruenza di insiemi ternari o quaternari, risultano formulate come di seguito:

Def.1. Due coppie di punti *(X,Y)* e *(Z,W)* sono dette congruenti , e scriviamo *(X,Y)* ≅ *(Z,W)*, se i segmenti *[X,Y]*, *[Z,W]* sono congruenti. Analogamente:

Def. 2. Due terne di punti *(X,Y,Z)* e *(W,U,V)* sono dette congruenti, e scriviamo *(X,Y,Z)* ≅ *(W,U,V)* se i triangoli *T(X,Y,Z)* e *T(W,U,V)* sono congruenti.

TH. 1. Sia *J* = *(A,B,C,D)* un insieme di punti complanari. Sia *(A,C)*, *(B,D)* una partizione di *J* in coppie. Se *(A,C)*, *(B,D)* hanno in comune il punto medio *M*, le coppie *(A,B)*, *(D,C)* e *(A,D)*, *(B,C)*, ulteriori partizioni di *J*, sono congruenti e appartengono a rette parallele.

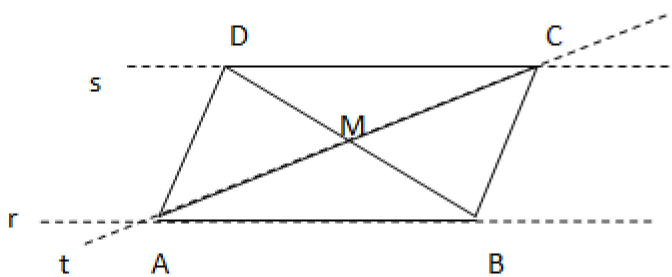

Fig. 1

Essendo *(A,M)* ≅ *(M,C)*, *(B,M)* ≅ *(M,D)*, $\widehat{AMB} \cong \widehat{CMD}$, i due triangoli, *T(A,M,B)* e *T(C,M,D)* sono congruenti.

a) Essendo *T(A,M,B)* ≅ *T(C,M,D)* si ha: *(A,B)* ≅ *(D,C)*. Analogamente risultano congruenti *(A,D) e (B,C).*
b) Sia *r* la retta individuata da *A* e *B*; sia *s* la retta individuata da *D* e *C*; sia *t* la retta passante per *A* e *C*. Dalla congruenza: *T(A,M,B)* ≅ *T(C,M,D),* segue che anche gli angoli $\widehat{BAM}$, $\widehat{DCM}$, alterni interni rispetto alle rette *r* e *s* intersecate da *t*, sono congruenti. Pertanto, le rette *r* e *s* contenenti, rispettivamente *(A,B)* e *(D,C)*, sono parallele. Procedendo in modo analogo risulta che anche *(A,D) e (B,C)* appartengono a rette parallele.

Dal precedente teorema discende la seguente definizione:

<u>Def. 3</u>. Se *(A,C)* e *(B,D)* sono coppie di punti simmetrici rispetto al punto *M*, le coppie *(A,B)* e *(D,C)*, appartenenti a rette parallele, sono dette congruenti e parallele; le rappresentiamo così: |*A,B*| // |*D,C*|. Anche *(A,D)* e *(B,C)* sono dette congruenti e parallele. Le rappresentiamo così: |*A,D* | // |*B,C* |.

<u>Def. 4.</u> Le rette *r* e *s* siano parallele . Se la retta *s* appartiene al piano *π*, diciamo che la retta *r* è parallela al piano *π* (e viceversa).

<u>Def. 5.</u> Sulla retta orientata $\vec{r}$ il punto *B* sia successivo ad *A*. Diciamo che *A* è estremo inferiore, *B* è estremo superiore della coppia orientata $\overrightarrow{AB}$.

Def. 6. La coppia orientata $\overrightarrow{AB}$ e il punto Q appartengano al piano π. Diciamo che $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{AB}$ sono coppie parallele, congruenti, egualmente orientate se l'estremo superiore P è il simmetrico dell'estremo inferiore A rispetto ad M, punto medio di B e Q. Oppure, diciamo che $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{AB}$ sono coppie parallele, congruenti, egualmente orientate se l'estremo inferiore Q è il simmetrico di B rispetto ad M, punto medio di A e P.

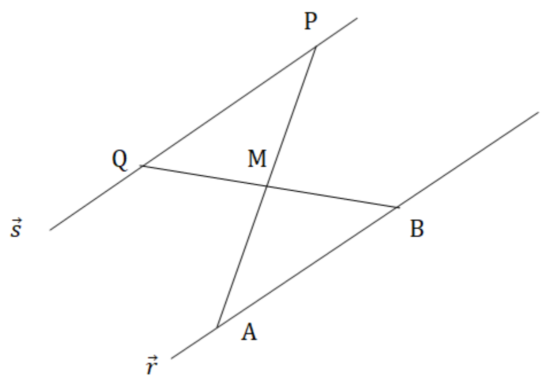

Fig. 2

TH. 2. I punti di ciascuna coppia (A,C) e (B,D) siano simmetrici rispetto a M. L'insieme completo, con sostegno $J = (A,B,C,D)$, è $I = (A,-B,C,-D)$.

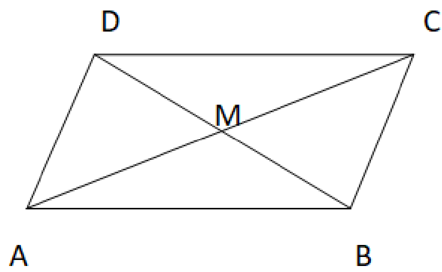

Fig. 3

Se M è punto medio di *(A,C)*, l'insieme completo, con sostegno $J_1 = (A,M,C)$ è $I_1 = (A,-2M,C)$. Se *M* è punto medio di *(B,D)*, l'insieme completo, con sostegno $J_2 = (B,M,D)$ è $I_2 = (B,-2M,D)$. L'insieme completo, differenza dei due insiemi completi è:

$$I = I_1 - I_2 = (A,-2M,C) - (B,-2M,D) = (A,-B,C,-D)$$

<u>Nota 2.</u> Richiamiamo la relazione di equivalenza intercorrente fra l'insieme $I = (A, -B, C, -D)$ e l'insieme

$I^* = K \cdot I = (K \cdot A, -K \cdot B, K \cdot C, -K \cdot D)$: se I è completo, anche

$I^* = K \cdot I = (K \cdot A, -K \cdot B, K \cdot C, -K \cdot D)$, per qualsiasi $K \in R^*$, è completo.

<u>TH. 3.</u> Se $I = (A,-B,P,-Q)$ è un insieme completo, allora *(A,P)* e *(B,Q)* sono simmetrici rispetto ad un punto *M*.

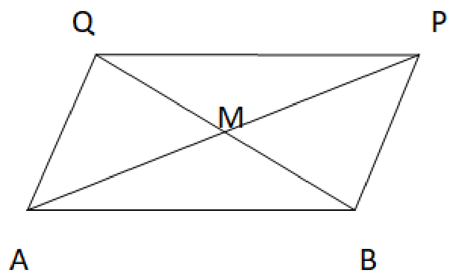

Fig. 4

Se M è il punto medio di (A,P), l'insieme $I_1 = (A,-2M,P)$ è completo.

Effettuando la differenza dei due insiemi completi I_1 e I si ottiene l'insieme completo

$I_2 = I_1 - I = (A,-2M,P,-A,B,-P,Q) = (B-2M, Q)$.

Essendo $(A,-2M,P)$, $(B-2M,Q)$ due insiemi completi, risulta che (A,P) e (B,Q) sono simmetrici rispetto a M.

<u>Applicazione 1.</u> Siano A, B, C tre punti del piano π e risulti: $d(A,B)= 5$, $d(B,C)=\sqrt{34}$, $d(A,C)=\sqrt{29}$. Sia H il punto comune alle due terne (A,H,B) e (C,H,Q) e risulti: $\frac{d(A,H)}{d(H,B)} = \frac{2}{3}, \frac{d(C,H)}{d(H,Q)} = \frac{5}{2}$

Sia M un punto non appartenente a π e risulti:

$d(A,M)=\sqrt{22}$, $d(B,M)= \sqrt{17}$, $d(C,M)= \sqrt{19}$.

Essendo (M,P) e (C,Q) due coppie dei punti parallele e congruenti, aventi stesso orientamento: $\overrightarrow{MP} \,//\, \overrightarrow{CQ}$, trovare l'insieme completo con sostegno *J= (A,B,C,M,P)*, individuare la posizione del punto *P* mediante le distanze *(PM), (P,A), (P,B)*.

Essendo $\frac{d(A,H)}{d(H,B)} = \frac{2}{3}$ risulta completo l'insieme *I′=(3A,–5H,2B)*; essendo $\frac{d(C,H)}{d(H,Q)} = \frac{5}{2}$ risulta completo l'insieme *I′′= (2C,–7H,5Q)*. Anche l'insieme *I′′′ = (7I′ – 5I′′) =*

= (21A,–35H,14B,–10C,35H,–25Q) = (21A,14 B,–10C,–25Q) è completo così come: *I^IV^=(M,–P,Q,–C)* essendo *(M,P,C,Q)* vertici di parallelogramma. Effettuando l'unione dei due insiemi completi *I′′′* e *25 · I^IV^* si ottiene:

$I = [I''' \cup (25 \cdot I^{IV})] = (21A,14B,-35C,-25P,25M)$.

<u>Osservazione 1.</u> L'insieme *I* contiene due punti materiali opposti,*–25P, 25M.*

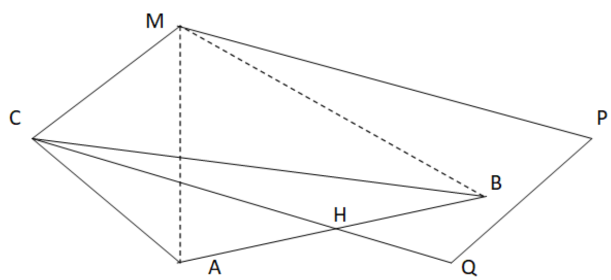

Fig. 5

Per calcolare *(PM), (P,A), (P,B)* si utilizza il TH.12 (Francia, 2022).

Essendo I completo si ha: $[I-(25M-25P)]^2 = (25M-25P)^2$. Sviluppando si ottiene: $(21A,14B,-35C)^2 = (25M-25P)^2$ e quindi $21 \cdot 14 \cdot [d(A,B)]^2 - 21 \cdot 35 \cdot [d(A,C)]^2 - 35 \cdot 14 \cdot [d(B,C)]^2 =$

$= -25 \cdot 25 \cdot [d(M,P)]^2$ da cui $d(M,P) = 7$.

Analogamente si calcola $d(P,A)$: $[I+(25P-25A)]^2 = (25P-25A)^2$

$(-4A,14B,-35C,25M)^2 = (25P-25A)^2$ da cui $d(A,P) = \sqrt{43}$.

Procedendo in modo analogo si ottiene $d(B,P)$.

<u>Applicazione 2</u>. Siano A,B,C tre punti del piano π e risulti: $d(A,B) = \sqrt{65}$, $d(B,C) = 3\sqrt{10}$, $d(A,C) = 5\sqrt{5}$. Siano M e N due punti interni, rispettivamente, a (A,C) e (B,C) e risulti: $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$, $\frac{d(B,N)}{d(N,C)} = 2$. Sia P un punto non appartenente a π. Sapendo che: $d(A,P) = 5$, $d(B,P) = 6$, $d(P,C) = 2\sqrt{15}$, trovare l'insieme completo avente sostegno $J = (A,B,C,Q,P)$, essendo (M,N) e (P,Q) coppie di punti parallele, aventi stesso orientamento: $\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{MN}$ .Trovare le distanze $d(P,Q)$, $d(A,Q)$, $d(B,Q)$.

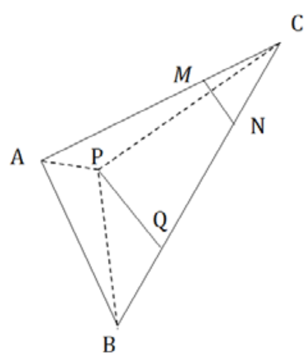

Fig. 6

Essendo $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{2}$, risulta completo l'insieme $I' = (2A,-5M,3C)$.

Essendo $\frac{d(B,N)}{d(N,C)} = 2$, risulta completo l'insieme $I'' = (B,-3N,2C)$.

Essendo $\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{MN}$, risulta completo l'insieme $I''' = (Q, -N, -P,M)$. Moltiplicando gli insiemi completi I', I'', I''', rispettivamente, per $+3$, -5, $+15$, si ha:

$I = (3I') \cup (-5\,I'') \cup (15\,I''') =$

$= (6A,-15M,9C,-5B,15N,-10C,15M,-15N,15Q,-15P) =$

$= (6A,-5B,-C,15Q,-15P)$.

<u>Osservazione 2.</u> L'insieme I contiene due punti materiali opposti, $-15P,15Q$. Essendo I completo, per calcolare $d(P,Q)$ applichiamo il TH.12:

$[I - (15Q,-15P)]^2 = (15Q-15P)^2$ da cui

$(6A,-5B,-C)^2 = -225[d(P,Q)]^2 - 30[d(A,B)]^2 + 5[d(B,C)]^2 - 6[d(A,C)]^2 = -225[d(P,Q)]^2$ *da cui* $d(P,Q) = \sqrt{10}$.

Procediamo in modo analogo per calcolare $d(A,Q)$:

$[I + (15A,-15Q)]^2 = (15A-15Q)^2$ da cui

$(21A-5B,-C,-15P)^2 = (15A, -15Q)^2 - 21 \cdot 5[d(A,B)]^2 - 21\, [d(A,C)]^2 - 21 \cdot 15\, [d(A,P)]^2 + 5\, [d(B,C)]^2 + 15 \cdot 5\, [d(B,P)]^2 + 15\, [d(C,P)]^2 = - 225[d(A,Q)]^2 - 105 \cdot 65 - 21 \cdot 125 - 315 \cdot 25 + 5 \cdot 90 + 75 \cdot 36 + 15 \cdot 60 = - 225 \cdot [d(A,Q)]^2$ da cui $[d(A,Q)] = \sqrt{59}$.

Procedendo in modo analogo si ricava $d(B,Q)$.

Nota 3. Nelle precedenti applicazioni, 3 e 4, sono stati ricavati insiemi completi del V ordine. In entrambi i casi è stata segnalata la stessa "osservazione": gli insiemi completi contenevano coppie di punti materiali aventi masse opposte. Nel teorema seguente motiviamo le precedenti osservazioni: mostriamo che le posizioni di due punti materiali opposti, appartenenti ad un insieme completo *I* ,con sostegno *J*, sono posizionati su una retta parallela al piano contenente i restanti punti di *J*.

TH 4. L'insieme *J=(A,B,C,P,Q)*, non contenente quaterne di punti complanari, sia di sostegno all'insieme completo proprio del V ordine: $(m_1\, A,\ m_2\, B,\ m_3\, C,\ m_4\, P,\ m_5\, Q)$.

Nel caso che due punti materiali di *I* abbiano masse opposte, le relative posizioni individuano una retta che è parallela al piano contenente la rimanente terna di elementi di *J*.

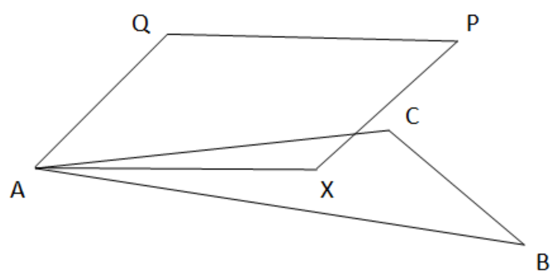

Fig. 7

Supponiamo che le masse opposte siano m_4, m_5: $m_4 = K$, $m_5 = -K$ *con* $K \in R$.

L'insieme I diviene: $I = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, K P, - K Q)$.

In modo arbitrario, scegliamo un punto fra gli elementi dell'insieme (A, B, C) attribuendogli la massa $+K$ oppure $- K$. Supponiamo che l'elemento scelto sia il punto materiale $+K \cdot A$. Essendo $- K \cdot X$ il complementare di $(+K P, -K Q, +K \cdot A)$, risulta completo l'insieme $I' = (+K P, -K Q, +K \cdot A, - K \cdot X)$ il cui sostegno, $J=(P,Q,A,X)$, per quanto visto nel TH.3, contiene i vertici di un parallelogramma. Utilizzando il linguaggio dei punti materiali diciamo che la completezza di I' implica il seguente parallelismo:

$(A,X) // (Q,P)$ e $(A,Q) // (X,P)$.

Sottraendo I' a I otteniamo l'insieme :

$I'' = I - I' = (m_1 A, m_2 B, m_3 C, K P, -K Q) - (+K P, -K Q, + K \cdot A, -K \cdot X) =$

$= (m_1 \cdot A, m_2 \cdot B, m_3 \cdot C, - K \cdot A, + K \cdot X) = [(m_1 - K) \cdot A, m_2 \cdot B, m_3 \cdot C, +K \cdot X)$.

Essendo I'' completo, proprio e quaternario, i punti (A,B,C,X) devono appartenere allo stesso piano π. Conseguentemente la retta r, contenente (A, X), deve appartenere a π. La retta s, contenente (Q, P), coppia di punti parallela ad (A,X) (def.4), deve essere parallela a r e quindi, s è parallela al piano π.

<u>TH.5</u> L'insieme $J'=(A,B,C,X)$ contenga terne di punti non allineati del piano π. Sia M il punto medio di (X,Q) essendo Q un generico punto dello spazio. Sia P il simmetrico di A rispetto a M. Se $I = (m_1A, m_2B, m_3C, m_4Q, m_5P)$ è un insieme completo, i punti materiali m_4Q, m_5P, posizionati in Q e P,

appartenenti alla retta r parallela al piano π, hanno masse opposte: $m_4 = - m_6$.

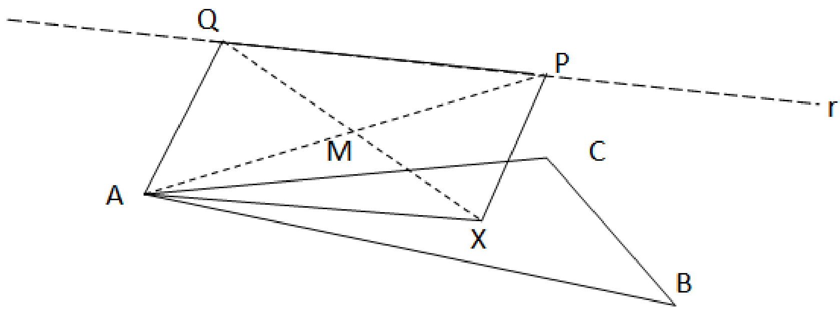

Fig. 8

L'insieme $J = (A,B,C,X)$ è sostegno di un insieme completo:

$I' = [m_1A, m_2B, m_3C, -(m_1+m_2+m_3)X]$.

Essendo (A,P) e (Q,X) coppie di punti simmetrici rispetto a M, per il TH.2 , l'insieme $(-A,X,-P,Q)$ è completo e così l'equivalente:

$I'' = [-(m_1+m_2+m_3)A, (m_1+m_2+m_3)X, -(m_1+m_2+m_3)P, (m_1+m_2+m_3)Q]$.

Effettuando l'unione: $I' \cup I''$, si ha:

$I = I' \cup I'' = [m_1A, m_2B, m_3C, -(m_1+m_2+m_3)X, -(m_1+m_2+m_3)A, (m_1+m_2+m_3)X, -(m_1+m_2+m_3)P, (m_1+m_2+m_3)Q] =$

$= -(m_2+m_3)A, m_2B, m_3C, -(m_1+m_2+m_3)P, (m_1+m_2+m_3)Q]$. (2)

Posto $(m_2+m_3) = u_1$, $m_2 = u_2$, $m_3 = u_3$, $(m_1+m_2+m_3) = v$, *la (2) diviene:*

$I = [-u_1A, u_2B, u_3C, -vP, vQ)$. *Essendo* $-vP, vQ$, la tesi risulta verificata.

<u>Applicazione 3.</u> Siano *A,B,C* tre punti del piano π e risulti: $d(A,B)=8$, $d(B,C)=6\sqrt{2}$, $d(A,C)=2\sqrt{10}$. Siano *P* e *Q* due punti del semispazio S^+ con origine π; essendo $d(P,A)=\sqrt{17}$, $d(P,B)=7$, $d(Q,A)=\sqrt{35}$, $d(Q,B)= \sqrt{19}$, trovare $d(P,C)$, $d(Q,C)$ sapendo che *P* e *Q* appartengono ad una retta parallela a π e che risulta: $d(P,Q) = \sqrt{10}$.

Sia $I'=(r_1A,r_2B,r_3C,r_4P,r_5Q)$ l'insieme completo con sostegno $J=(A,B,C,P,Q)$; appartenendo *P* e *Q* ad una retta parallela al piano π, per il TH.4, le masse dei relativi punti devono essere opposte: $r_4+r_5 = 0$; posto $r_5 = -r_4 = t$, I' diviene:

$I'=(r_1A,r_2B,r_3C,-tP,tQ)$. Dividendo I' per r_3 , posto $\frac{r_1}{r_3} = m$, $\frac{r_2}{r_3} = n$, $\frac{r_3}{r_3} = 1$, $-\frac{t}{r_3} = -h$, $\frac{t}{r_3} = h$, l'insieme completo equivalente a I' diviene: $I = (m\,A,\, n\,B,\, 1\,C,\, -h\ P\,,\, h\,Q)$.

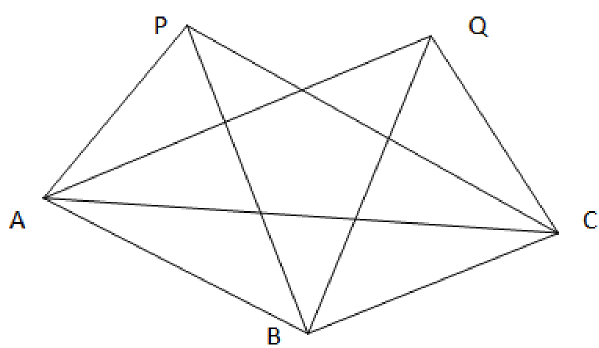

Fig. 9

Secondo le ipotesi del testo, essendo *I* completo deve risultare:

$m+n+1-h+h=0$ da cui:

a) $m+n+1=0$;
b) essendo I completo, si ha $A \cdot I = B \cdot I$;
c) per il TH.12 si ha: $[I - (hQ,-hP)]^2 = [hQ,-hP]^2$.

Mettendo a sistema le relazioni a), b), c), si ottiene:

$$\begin{cases} m+n+1=0 \\ A \cdot I = B \cdot I \\ [I - (hQ,-hP)]^2 = \left[hQ\,,-\,hP\right]^2 \end{cases} \quad \text{sviluppando}$$

$$\begin{cases} m+n+1=0 \\ n[d(A,B)]^2 + [d(A,C)]^2 - h[d(A,P)]^2 + h[d(A,Q)]^2 = \\ = m[d(B,A)]^2 + [d(B,C)]^2 - h[d(B,P)]^2 + h[d(B,Q)]^2 \\ m\,n\,[d(A,B)]^2 + n[d(B,C)]^2 + m[d(A,C)]^2 = -h^2[d(P,Q)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n+1=0 \\ 4n-4m+3h-2=0 \\ 32\,m\,n + 36\,n + 20\,m = -5h^2 \end{cases} \quad da\ cui$$

$$n = -\frac{2+3h}{8}, m = \frac{-6+3h}{8}, h = \pm 6.$$

Si hanno due casi:

a)
$_1 = 6$, $n_1 = -\frac{5}{2}$, $m_1 = \frac{3}{2}$ da cui si ricava l'insieme completo $I_1 = (3 A,-5B,2C,-12P,12Q)$;

b)
$_2 = -6$, $n_2 = 2$, $m_2 = -3$ da cui si ricava l'insieme completo $I_2 = (-3A,2B,1C,6P,-6Q)$.

Con riferimento al caso a), per calcolare $d(C,P)$ essendo I completo operiamo così:

$[(3A,-5B,2C,-12P,12Q) - (2C,-2P)]^2 = (2C,-2P)^2$

$(3\,A, -5\,B, -10\,P, 12\,Q)^2 = (2C, -2\,P)^2$

$4[d(C,P)]^2 = 15[d(A,B)]^2 + 30[d(A,P)]^2 - 36[d(A,Q)]^2 - 50\,[d(B,P)]^2 + 60\,[d(B,Q)]^2 + 120[d(P,Q)]^2$ da cui $[d(C,P)]^2 = 25$, $d(C,P) = 5$. Analogamente, si ha:

$d(C,Q) = \sqrt{43}$. Procedendo in modo analogo si calcolano $d(P,C)$ e $d(Q,C)$, distanze riferite ai punti di J_2, insieme di sostegno dell'insieme completo I_2.

Applicazione 4. Sia V il vertice della piramide a base triangolare: $T(A,B,C)$, con A,B,C appartenenti al piano π. Sia P il punto interno di V,B,C, vertici di una faccia della piramide. Sapendo che $S_{CPB} = 3$, $S_{BPV} = 5$, $S_{VCP} = 4$, trovare il rapporto $\frac{d(V,Q)}{d(Q,A)}$ essendo Q il punto di intersezione dello spigolo $[V,A]$, con t, retta passante per p, parallela al piano individuato da A,B,C.

L'insieme $J' = (B,C,V,P)$ è di sostegno all'insieme completo $I' = (4B,5C,3V,-12P)$. Le masse dell'insieme ternario avente sostegno $J''=(V,Q,A)$ non sono note.

Poniamo: $I''=[3V,-sQ,(s-3)A]$ essendo s il parametro incognito delle masse $-s$ e $(s-3)$; attribuiamo a V la massa 3 in modo che l'insieme completo $I' - I''$ non contenga V. Dalla differenza dei due insiemi si ha:

$I = I'-I'' = [4B,5C,3V,-12P,-3V,sQ,(3-s)A] = [(3-s)A,4B,5C,-12P,sQ]$.

Poiché le condizioni del testo stabiliscono che P e Q appartengano ad una retta parallela al piano individuato da A,B,C, per il TH.4, deve risultare che le masse di P e Q siano opposte: $s = 12$, da cui I diviene: $I = (-9A,4B,5C-12P,12Q)$.

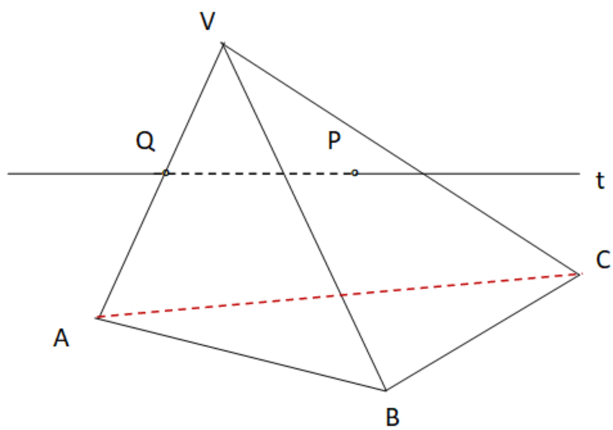

Fig. 10

Essendo $S = 12$, l'insieme I'' diviene: $I''=(3V,-12Q,9A)$ da cui $\frac{d(V,Q)}{d(Q,A)} = 3$.

Nota 4. Completiamo l'articolo soffermandoci su coppie di punti parallele non congruenti:

Def. 7. Siano parallele e congruenti le coppie di punti complanari: (AB) // (DH). Diciamo che le coppie di punti (A,B) e (D,C) sono parallele, non congruenti, e scriviamo (AB / DC), se C è interno a (D,H). Se $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{DH}$ hanno stesso orientamento anche (A,B) e (D,C) hanno stesso orientamento e scriviamo: $\overrightarrow{AB}$ / $\overrightarrow{DC}$.

<u>TH 6.</u> Siano $(\overrightarrow{DH} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB})$ due coppie di punti parallele e congruenti. Coppie di punti parallele e non congruenti, siano $(\overrightarrow{DC} \mathbin{/} \overrightarrow{AB})$ con C interna a (D,H) e risulti:

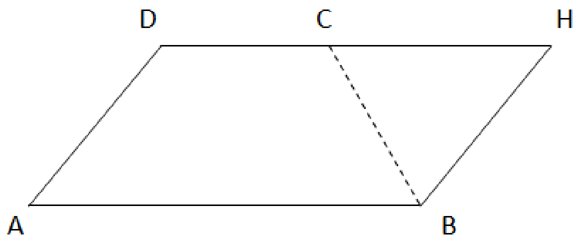

Fig. 11

$d(D,C)=b$, $d(A,B)= d(D,H) = a$, con $a > b$. L'insieme completo, con sostegno $J=(A,B,C,D)$ è $I=(nA,-nB,mC,-mD)$ essendo $n = K\,b$, $m = K\,a$, con $K \in R^*$, arbitrario. (1)

Essendo il punto H allineato con D e C, si ha:

$d(C,H) = (a - b)$; l'insieme completo con sostegno

$J_1=(D,C,H)$ diviene: $I_1 = [(a - b)D,-aC,bH]$. L'insieme completo con sostegno $J_2=(A,B,H,D)$ diviene [TH.3], $(-A,B,-H,D)$; moltiplicando per b si ha:

$I_2 = (-bA,bB,-bH,bD)$. Dall'unione degli insiemi completi I_1, i_2, si ottiene:

$I_1 \cup I_2=[-bA,bB,-bH,bD,(a - b)D,-aC,bH] = (- bA,bB,-aC,aD)$.

Moltiplicando a e b per $- K$, per la (1), si ha:

$I = (-nA,nB,-mC,mD)$.

Applicazione 5. Siano $\overrightarrow{AB}$ / $\overrightarrow{DC}$ coppie di punti, parallele non congruenti, e risulti:

$d(A,D)=\sqrt{10}$, $d(D,C)= 5$, $d(A,C)=3\sqrt{5}$, $d(C,B)=3\sqrt{2}$. Trovare $d(A,B)$.

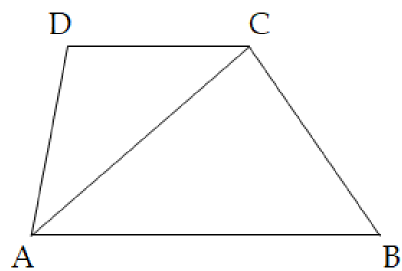

Fig. 12

Posto $d(A,B)=x$, essendo $d(D,C)=5$, l'insieme completo avente sostegno (A,B,C,D) è: $I=(5A-5B,xC,-xD)$. Utilizzando il TH 2, calcoliamo $d(A,B)$:

$[(5A,-5B,xC,-xD) \cup (5B,-5C)]^2 = (5B,-5C)^2$ da cui

$[5A,-xD,(x-5)C]^2 = -25(B,C)^2$

$-5x[d(A,D)]^2-x(x-5)[d(D,C)]^2 +5(x-5)[d(A,C)]^2 = -25\,[d(B,C)]^2$

$x^2 - 12x+27=0$ da cui $x_1=9$ e $x_2=3$.

TH 7. Sia $I=[-nA,nB,-mC,mD]$, con $m,n \in R^*$ e $m \neq n$, un insieme completo essendo $(\overrightarrow{AB}/\ \overrightarrow{DC})$, coppie di punti paralleli non congruenti del piano π, aventi stesso orientamento. Le rette r_1 e r_2 passanti, rispettivamente, per (A,D) e (B,C), si intersecano in un punto Q e si ha: $\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)}$.

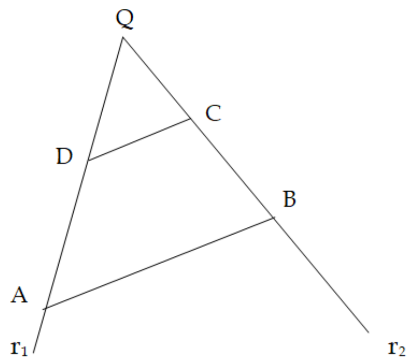

Fig. 13

I complementari delle coppie di punti materiali: $(-nA,mD)$ e $(nB,-mC)$, appartenenti, rispettivamente, a r_1 e r_2, sono, rispettivamente:

$(n-m)X$, $(m-n)Y$, con $X, Y \in \pi$. Ciascuno dei due insiemi,

$I_1 = [-nA,mD,(n-m)X]$ e $I_2 = [nB,-mC,(m-n)Y]$, contenente coppia di punti materiali ed il rispettivo complementare, sono completi.

Effettuando l'unione degli insiemi completi

$[I \cup (-I_1) \cup (-I_2)]$ si ottiene l'insieme completo:

$I_o = [-nA,nB,-mC,mD,nA,-mD,(-n+m)X,-nB,mC,(n-m)Y]$

$I_o = [(-n+m)X, (n-m)Y]$.

L'insieme I_0, unione di tre insiemi completi, deve risultare completo. Poiché I_0 contiene soltanto due elementi, per essere completo deve risultare improprio (Francia, 2019); più esplicitamente, ciascuna delle masse $(-n+m)$ e $(n-m)$ dovrebbe essere eguali a zero in contrasto con le ipotesi premesse nell'enunciato.

Soltanto ammettendo che i punti X e Y siano coincidenti, l'insieme I_0, ridotto (Francia, 2019), conterebbe un solo elemento nullo: supponendo $X=Y$, posto $X=Y=Q$, sostituendo Q in I_0, si ha: $I_0=[(-n+m)Q, (n-m)Q]$; riducendo, si ha:

$I_0=[(-n+m)+(n-m)]Q = [0 \cdot Q]$. Per il TH. 1 (Francia, 2019), I_0 è completo, improprio. Essendo X e Y coincidenti, gli insiemi I_1 e I_2 diventano:

$I_1=[-nA,mD,(n-m)Q]$ e $I_2=[nB,-mC,(m-n)Q]$.

Tenendo conto delle relazioni intercorrenti fra masse e distanze di punti dell'insieme I si ha:

$m=kd(A,B)$, $n=kd(C,D)$ da cui: $\frac{d(A,B)}{d(D,C)} = \frac{m}{n}$. (1)

Tenendo conto delle relazioni intercorrenti fra masse e distanze di punti degli insiemi I_1 e I_2 si ha rispettivamente:

$$\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

Dalle (1)e (2) , si ha: $\frac{d(A,Q)}{d(D,Q)} = \frac{d(B,Q)}{d(C,Q)} = \frac{d(A,B)}{d(D,C)}$.

Il risultato conseguito coincide con la tesi del teorema di Talete.

Bibliografia

FRANCIA Franco (1985). Insiemi di punti materiali, «*Archimede*».

FRANCIA Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine, «*Periodico di Matematica*», Vol. I (1-2). Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2020). Insiemi completi del quarto ordine, «*Periodico di Matematica*», Vol. II (2). Edizioni AFSU.

FRANCIA Franco (2023). Insiemi del V ordine contenenti punti nello spazio, «*Periodico di Matematica*», Vol. V (2). Edizioni AFSU.

****

La matematica per un matematico

La matematica per un matematico (almeno per la maggior parte, per quanto ne so) non è soltanto un'attività culturale che noi stessi abbiamo creato, ma ha una sua vita e gran parte di essa si trova in stupefacente armonia con l'universo fisico. Non possiamo comprendere profondamente le leggi che reggono il mondo fisico senza entrare nel mondo della matematica. In particolare, la precedente nozione di classe d'equivalenza è pertinente non soltanto a molta matematica importante (ma ambigua), ma anche a molta fisica importante (ma ambigua), come la teoria della relatività generale di Einstein e i principi delle "teorie di gauge" che descrivono le forze naturali secondo la moderna fisica delle particelle. Nel campo della fisica moderna non si può evitare di affrontare le sottigliezze di una grande quantità di matematica sofisticata.

Da Roger Penrose, premio Nobel 2020 per la fisica, *La strada che porta alla realtà. Le leggi fondamentali dell'universo*, Milano, BUR Rizzoli, p. 11.

****