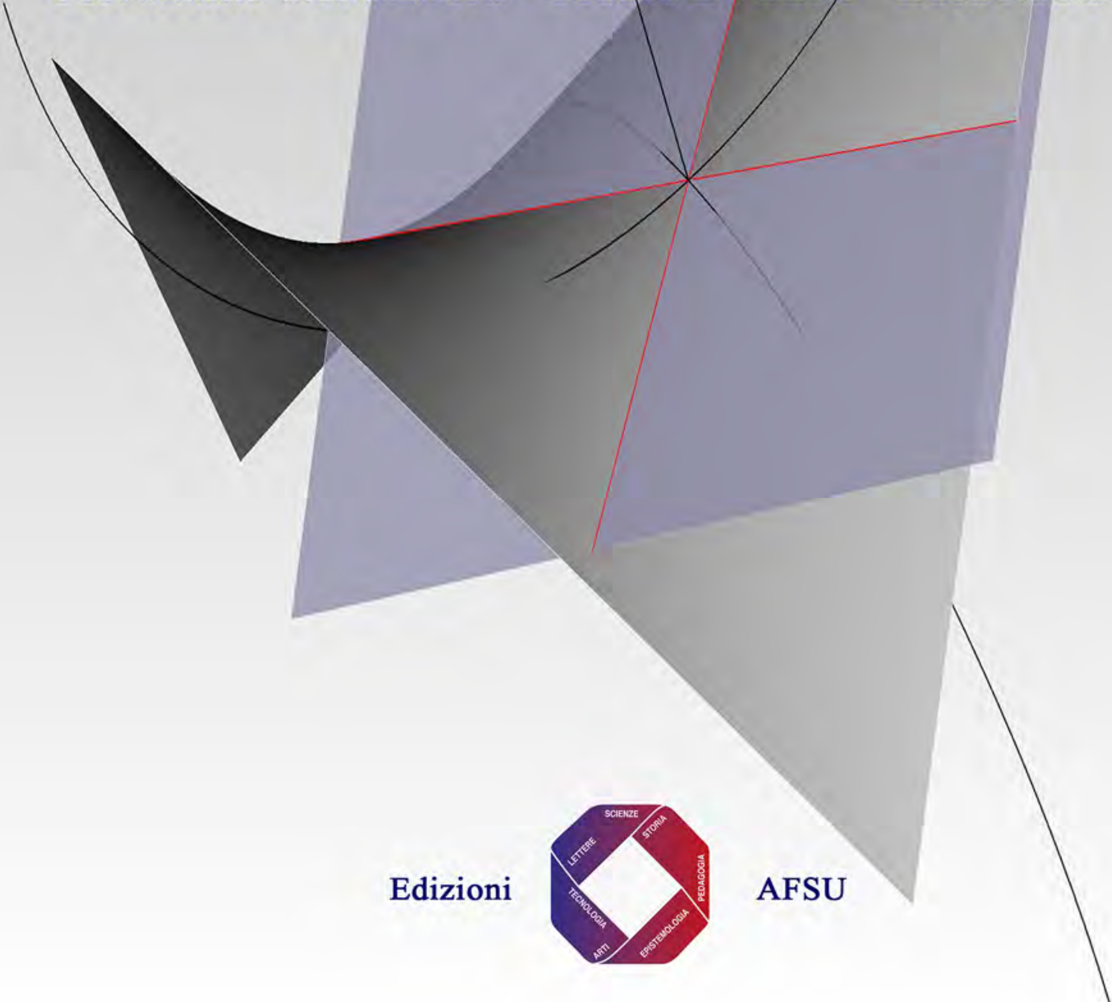
# Periodico di Matematica

## PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (3)
Settembre 2024

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA



Edizioni AFSU

MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

# PERIODICO DI MATEMATICA

**PER**

**L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE**

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

Anno XXXIX - Serie IV – Volume VI (3)
Settembre 2024

ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

*Direttori di redazione:*
Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

*Segreteria di redazione*:
Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

## Rivista di proprietà di:
Accademia di Filosofia delle Scienze Umane - Zona Industriale Colleranesco – 65021 Giulianova (TE) C.F. 91053660675

ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019 del 19 luglio 2019 e Versione cartacea n.695/2021 del 3 giugno 2021 Tribunale di Teramo.

ISBN 978-88-3293-792-3. 

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

*https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc*

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

*https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf*

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2024 presso UniversItalia
Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 –
e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

# INDICE


ARTE SCIENZA
magazine
Alberto Macchi, Angela Ales Bello, Antonio Castellani, Caterina Della Vecchia, Eva Sansanelli, Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Fulvio Guerrieri, Gaspare Mura, Giancarlo Gaeta, Ilaria Calò, Isabella de Paz, Luca Nicotra, Luigi Campanella, Mario de Paz, Paola Dallavalle, Pierluigi Assogna, Romano Romani, Stefano Torossi, Vinicio Busacchi, Viola Spicuglia, Yansha Yu-Sandstrom
SE VUOI LA PACE NON PREPARARE LA GUERRA
QUANDO LA SCIENZA È SOCIAL
DIO ESISTE E VI SPIEGO PERCHÉ
LEGAMI CHIMICI E COSCIENZA
PRESENZE DI CARAVAGGIO IN CIOCIARIA
LA VERITÀ IN MATEMATICA DA GÖDEL A EUCLIDE
COME CURARE LA PELLE DEL PIANETA
Anno IV - N.7 giugno 2024 - Supplemento di ArteScienza
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra - Direttore di redazione: Isabella De Paz
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN online 2385-1961 - Proprietà dell'A. P. S. "Arte e Scienza"

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 7-14

# *Ancora sul "paradosso" delle due buste*

Paolo Severino Manca

* paolo.severino.manca@gmail.com

DOI : 10.53159/PdM(IV).v6n3.137

**Sunto:** *La necessità di tornare sul tema delle due buste è quella di mostrare come una corretta conoscenza della natura della probabilità, ovviamente quella soggettiva, mostra come il termine "paradosso" sia inappropriato e come la soluzione possa ricondursi a considerazioni che utilizzano la probabilità condizionata.*

**Parole Chiave:** *due buste, lotteria, probabilità condizionale, valor medio, utilità attesa.*

**Abstract:** *The need to return to the topic of the two envelopes is to show how a correct knowledge of the nature of probability, obviously the subjective one, shows how the term "paradox" is inappropriate and how the solution can be traced back to considerations that use conditional probability.*

**Keywords:** *two envelopes, lottery, conditional probability, mean value, expected utility.*

La formulazione del problema delle "due buste" è elementare e comprensibile anche per i non addetti :

*A un decisore sono presentate due buste chiuse, indistinguibili tra loro, che contengono due somme incognite. Il decisore sa solo che una somma è il doppio dell'altra.*

*Il decisore può scegliere una busta aprirla e , vista la somma ivi contenuta, accettarla oppure rifiutarla e accettare la somma della busta rimasta chiusa.*

*Come deve regolarsi?*

Nel testo la domanda "come deve regolarsi" è formulata volutamente tale perché per definire un comportamento ragionevole è indispensabile chiarire quale sia l'obiettivo del decisore: solo fissando l'obiettivo ha senso parlare di scelta migliore/peggiore.

Il problema è stato affrontato, con un numero sorprendente di articoli,[1] oltre centocinquanta, da probabilisti, da economisti matematici, da logici, da filosofi, e con argomentazioni ritenute, di volta in volta, conclusive come felicemente precisa il sottocitato Hugo Hoffmann :

> *Each author is eager to emphasize what is new and exceptional in her or his approach and is inclined to conclude that earlier approaches did not get to the root of the matter.*

Qui sul tema suggerisco solo due articoli che stimo affidabili: l'articolo di Davis Draper : *Bayesian Modeling, Inference and Prediction*- Department of Applied Mathematics and Statistics

[1] È facile reperire ampie bibliografie in merito.

University of California, (December 2005) e l'articolo di Christian Hugo Hoffmann : *Rationality applied: resolving the two envelopes problem -Theory and Decision*. volume 94, pp. 555–573 (2023).2

Aggiungo che il problema è stato anche diversamente, e spesso scorrettamente, indicato come paradosso, con inutili complicazioni e generalizzazioni cervellotiche.[3] Le quali generalizzazioni sono, come noto, straordinarie quando riescono ad abbracciare e unificare rami diversi della matematica, sono dannose altrimenti.

La necessità di tornare sul tema è quella di mostrare come una corretta conoscenza della natura della probabilità, ovviamente quella soggettiva, mostra come il termine paradosso sia inappropriato e come la soluzione possa ricondursi a poche considerazioni che utilizzano la probabilità condizionata.

Assumo che, essendo le due buste indistinguibili dall'esterno, siano eguali la probabilità di aprire l'una o l'altra busta, e considero le seguenti possibili strategie/lotterie :

A1- scegliere a caso una fra le due buste, aprirla e accettare l'importo ivi contenuto

A2- scartare comunque la busta che viene aperta e accettare l'importo della seconda

B1- dopo aver conosciuto l'ammontare della cifra della busta aperta tenerne conto per decidere se accettare tale cifra o se rifiutarla,

---

[2] Accenno alla variante del problema in cui una busta viene consegnata ad Ali e l'altra a Babà e viene offerta loro la possibilità di scambiarle *ad infinitum*.

[3] La più ingenua considera non una "somma 2 volte maggiore " ma una somma "k volte maggiore ".

B2- dopo aver conosciuto l'ammontare della cifra della busta aperta rifiutarla e accettare la cifra della busta chiusa.

Osservo che :

- la lotteria A1 e la lotteria A2 sono equivalenti essendo indistinguibili le due buste;
- le lotterie A1 e A2 sono comunque non migliori delle lotterie B1 e B2 in quanto sottocasi;
- se $w$ è il valore trovato nella busta aperta per prima, l'alternativa B1 ha come valore medio il numero $\underline{w} = w$;
- se $w$ è il valore trovato nella busta aperta per prima, l'alternativa B2 ha come valor medio il numero :

$$\underline{w} = 1/2 \cdot (w/2) + 1/2 \cdot (2w) = 1{,}25 \cdot w$$

Ne segue che l'alternativa B2, secondo il criterio del valor medio è sempre preferibile alla B1 e dunque conviene sempre aprire una busta scartarla e accettare l'altra.

Questo risultato non è paradossale come molti lo hanno inteso : è semplicemente conseguenza della scelta infelice del valor medio come funzione obiettivo. Il valor medio misura il prezzo equo (soggettivo) di una lotteria ed è ben noto che il valor medio non necessariamente misura il prezzo che il soggetto è disposto a pagare per parteciparvi.

L'apparente paradosso nasce inoltre dal non tener conto che l'ammontare della somma trovata nella busta aperta fornisce non poca informazione. Del resto anche il buon senso suggerisce, una volta aperta la prima busta, di accettare la somma $w$ se è rilevante rispetto al patrimonio posseduto, rifiutarla se non è rilevante e optare per la seconda busta.

Se $M$ è il patrimonio disponibile, per il giocatore la scelta e infatti quella di passare dal patrimonio $M + w$, al patrimonio $M + w/2$ con probabilità ½ ovvero al patrimonio $M + 2\,w$ con probabilità ½ e la scelta dunque dipende dalla sua propensione/avversione al rischio.

Anche adottando il criterio dell'utilità attesa, se U(x) è la funzione di utilità, esplicita o implicita che sia, conviene rifiutare la busta aperta se risulta: [4]

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{U}(w/2) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{U}(2w) \;>\; \mathrm{U}(w)$$

Queste premesse per evidenziare come per decidere razionalmente occorra tener conto delle previsioni (probabilità a priori) che il soggetto si è fatto sull'ammontare delle somme contenute nelle buste e sull'informazione acquisita dopo aver aperto la busta.

Così se l'importo $w$ viene giudicato rilevante il soggetto può ritenere meno probabile che la busta chiusa contenga il doppio di $w$, opposto il caso in cui $w$ sia esiguo. Così il soggetto in funzione delle sue previsioni potrebbe aver fissato un valore soglia $L$ e decidere se accontentarsi se $w > L$, oppure aprire la seconda busta se $w < L$.

Per procedere con un formalismo minimo:

- indico con $\boldsymbol{H}$ la variabile aleatoria che rappresenta i valori assunti dalla somma minore;[5]

---

[4] Lascio al lettore la facoltà di trovare condizioni sulla utilità attesa che favoriscono l' alternativa

[5] Ugualmente si potrebbe ragionale prendendo in considerazione la variabile aleatoria : somma maggiore.

- indico con $\boldsymbol{Y}$ la variabile aleatoria che rappresenta la somma trovata nella busta che viene aperta;
- ipotizzo che le v.a. assumano valori discreti;[6]
- indico con : p (m) = P (**H** = m), la probabilità che inizialmente il decisore attribuisce alla somma minore ***H***, (essendo m uno dei possibili valori che può assumere ***H***).[7]

Se $w$ è il valore effettivamente trovato nella busta che è stata aperta, con le notazioni introdotte:

- $P\,(\boldsymbol{Y} = w \mid \boldsymbol{H} = w)$ misura la probabilità che la somma trovata nella prima busta sia quella minore
- $P\,(\boldsymbol{Y} = 2w \mid \boldsymbol{H} = w)$ misura la probabilità che la somma trovata nella prima busta sia quella maggiore.

Poiché le buste sono indistinguibili avremo, qualunque sia $w$ :

1) $P\,(\boldsymbol{Y} = w \mid \boldsymbol{H} = w) = P\,(\boldsymbol{Y} = 2w \mid \boldsymbol{H} = w) = 1/2$

[6] L'ipotesi non è essenziale ma semplifica il formalismo adottato.

Su $H$ sono state spese considerazioni di carattere teorico tanto sofisticate quanto inutili. È pacifico che il decisore giudica indifferenti somme che differiscono tra loro per poche unità, dunque il decisore non è tanto interessato ai valori puntuali che può assumere $H$ quanto all'ordine di grandezza di tali valori.

[7] Escludo ammettere per H una distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, +\infty)$ o comunque una distribuzione che comporta un valor medio infinito : in tal caso, tra l'altro, non avrebbe senso chiedersi quale prezzo sia ragionevole pagare per partecipare alla scommessa delle due buste.

All'apertura della prima busta, se $w$ è la somma ivi contenuta allora $\boldsymbol{H}$ può assumere solo due valori: $w$ o $w/2$.

Detto $E_1$ l'evento: $\boldsymbol{H} = w$ , detto $E_2$ l'evento: $\boldsymbol{H} = w/2$

poiché gli eventi $E_1$ e $E_2$ formano una partizione dell'evento certo, dato un evento non nullo B risulta per Bayes :

2) $P(E_1 \mid B) = P(B \mid E_1).P(E_1) / \{ P(B \mid E_1).P(E_1) + P(B \mid E_2).P(E_2) \}$

3) $P(E_2 \mid B) = P(B \mid E_2).P(E_2) / \{ P(B \mid E_1).P(E_1)+P(B \mid E_2). P(E_2) \}$

Tenendo presente la (1), le (2) e (3) si scrivono allora:

2') $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid \boldsymbol{Y} = w) = p(w) / ( p(w) + p(w/2)$

3') $P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid \boldsymbol{Y} = w) = p(w/2) / ( p\,(w) + p\,(w/2)$

Sia dunque $w$ il valore trovato nella busta che è stata aperta, allora $\boldsymbol{H}$ può valere $w$ o $w/2$ . Se $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{w}$ allora la cifra nella seconda busta vale $2w$, se $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{w/2}$ allora la cifra nella seconda busta vale $w$ , pertanto il valor medio e l'utilità attesa della scommessa "*cambio busta sapendo che w è il valore trovato nella busta aperta*" valgono rispettivamente :

4) $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid \boldsymbol{Y} = w).\, 2w + P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid \mathrm{Y} = w).\, w$
cioè:

$\{2\, w.\, p(w) + w.\, p(w/2) \} / \{ p(w) + p(w/2)\}$

5) $P\,(\boldsymbol{H} = w \mid \mathrm{Y} = w).\, 2\mathrm{U}(w) + P\,(\boldsymbol{H} = w/2 \mid \mathrm{Y} = w).\, \mathrm{U}(w)$
cioè:

$\{2\mathrm{U}(w).\, p(w) + \mathrm{U}(w).\, p(w/2) \} / \{ p(w) + p(w/2)\}$

Dunque col criterio del valor medio la strategia migliore consiste nel confrontare $w$ con la (4) e scegliere l'alternativa a valore maggiore, col criterio dell'utilità attesa la strategia migliore consiste nel confrontare $U(w)$ con la (5) e scegliere l'alternativa a valore maggiore.

A questo punto si potrebbe scegliere qualche altra funzione obiettivo. Non insisto per non aggravare la lista di nuovi possibili articoli da scrivere sul tema.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 15-40

# *La geometria proiettiva di Luigi Cremona*

## *La storia integrata nella didattica della matematica*

Laura Tomassi*

*Università di Roma Tor Vergata; tomassi@axp.uniroma2.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.138

**Sunto:** *Questo lavoro esponel'idea diproporre agli studenti di scuole di diverso grado alcuni elementi di geometria proiettiva, seguendo un'indicazione didatticadi Luigi Cremona, descritta nel suo testo di geometria proiettiva per studenti degli istituti tecnici. La metodologia suggerita è quella nota oggi come teoria dell'integrazione della storia nella didattica della matematica. Dalla traccia dello sviluppo storico della geometria proiettiva si possono derivare idee che portano a strategie risolutive geometriche in ambito non necessariamente geometrico.*

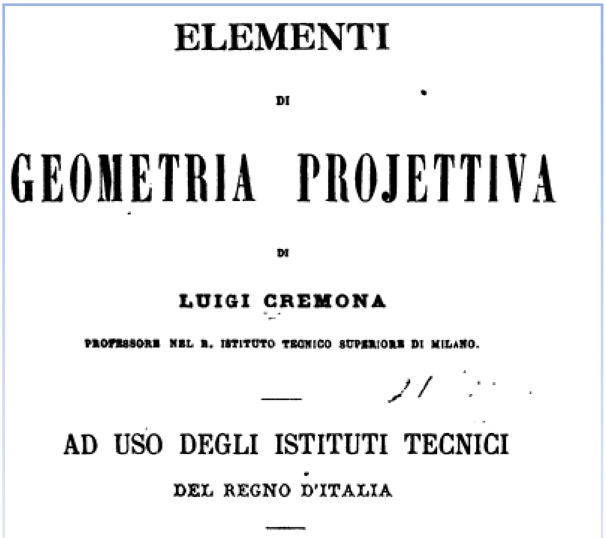
**Parole Chiave**: *storia integrata, pensiero proiettivo, teorema di Menelao .*

**Abstract:** *This work exposes the idea of offering students of schools of different levels some elements of projective geometry, following a didactic indication by Luigi Cremona, described in his text on projective geometry for students of technical institutes. The suggested methodology is known today as the theory of the integration of history in mathematics teaching. From the trace of the historical development of projective geometry, ideas can be derived that lead to geometric solution strategies in a field that is not necessarily geometric.*

**Keywords:** *integrated history, projective thinking, Menelaus theorem*

## 1 -Introduzione

Gli studi di Luigi Cremona furono determinanti per lo sviluppo di numerosi metodi geometrici in Italia nella seconda metà del XIX secolo. La sua personalità va considerata integralmente, per l'impegno politico durante e dopo il Risorgimento e per il suo pensiero in ambito scientifico e didattico. Fu ministro dell'Istruzione per pochi giorni nel ministero Di Rudinì, ma il suo contributo più importante alla didattica lo diede come insegnante e come autore di testi. In questo studio si segue il filo logico del testo di Cremona *Elementi di geometria projettiva ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia*, testo nel quale chiaramente l'autore precorre il quadro teorico della storia integrata nella didattica della matematica, prendendo in esame le fonti storiche ed il dipanarsi nel tempo delle dialettiche che costruirono la geometria proiettiva. Il criterio didattico di Cremona diventa oggetto storico esso stesso ed entra nel flusso di idee che costruisce un parallelismo tra l'evoluzione del pensiero matematico in quanto tale e quella del pensiero degli studenti, arrivando a recuperare significati e perseguire obiettivi che vanno al di là dell'apprendimento della geometria stessa (Radford & al., 2014). Nei prossimi paragrafi saranno prese in considerazione, in un' ottica storico-pedagogica, le fonti che Cremona cita all'inizio del suo libro, per arrivare alla preistoria della geometria proiettiva: in primis, il teorema di Menelao, la sua declinazione araba nella *Figura Chata*, che Fibonacci descrive nel *Liber Abbaci* e nella *Practica Geometriae* e che dice di aver appreso da Ametus; in seguito, nel «giardino di Desargues» (Catastini, 2004) l'ampliarsi dell'orizzonte della struttura gestaltica del triangolo di Menelao utilizzata da Fibonacci.



ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PROJETTIVA

DI

LUIGI CREMONA

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI

DEL REGNO D'ITALIA

**Fig. 1- La copertina del libro di Luigi Cremona**

## 1.1 – Il contesto culturale e scolastico dell'Italia subito dopo l'unità d'Italia

Nella seconda metà dell'Ottocento in Italia il mondo dell'Istruzione è caratterizzato da un intento riformistico e fondante. La legge Casati del 1859 è stata in vigore fino alla *Riforma Gentile* del 1923. Essa aveva come fine ultimo dell'istruzione scolastica la formazione di una classe dirigente colta ed umanistica: l'università era l'obiettivo della gioventù che aveva la possibilità di dedicarsi agli studi ginnasiali e liceali. Parallelamente scorreva chi si dedicava alla frequenza degli istituti tecnici, che non davano accesso all'università ad eccezione dell'indirizzo fisico matematico. Proprio in questo tipo di scuola crebbero menti di illustri matematici (Volterra, Severi ad esempio) e la mente illuminata di una pedagogista sorprendentemente moderna per il suo tempo, Maria Montessori (Scocchera, 1993), provvidenzialmente relegata dai suoi studi tecnici alla frequenza della facoltà di biologia. Gli Istituti Tecnici furono oggetto di molta attenzione da parte di Luigi Cremona, che scrisse il testo di geometria proiettiva già citato. In realtà le attività culturali di Cremona a favore della Scuola erano di respiro più ampio e radicale, egli che influenzò e fu attivo nella stesura dei programmi del decreto Coppino del 1867. Il suo pensiero a proposito della geometria, per la quale materia ripristinò come libro di testo gli *Elementi* di Euclide, è esposto nel seguente brano estratto dal testo del decreto Coppino (Giacardi, 2006):

> *Insegnata col metodo degli antichi la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri. [...] Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidi la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete [...] le loro misure.*

Una riflessione: in quegli anni Baldassarre Boncompagni, riportava alla luce dopo secoli di buio, che la ricerca storica ha cercato di spiegare, il testo del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci, che scriveva così (Boncompagni, 1852):

> *E poiché la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche. Proprio in un altro*

> *libro che ho composto sulla pratica geometrica, spiegavo ciò che è pertinente alla geometria e a molte altre cose, descrivendolo con la singola figura, dimostrando ogni singola cosa con dimostrazioni geometriche poste sotto. Senz'altro questo libro spetta più alla teoria che alla pratica. Così chi volesse conoscere bene la pratica di questa scienza dovrà applicarsi con uso continuo ed esercizio giornaliero nella pratica di essa, perché se la conoscenza si muta in abitudine attraverso la pratica, la memoria e l'intelligenza concordano a tal punto con le mani e i segni che quasi in un unico impulso e anelito, in uno stesso istante, si accordano naturalmente su tutto; e allora quando il discepolo avrà conseguito un abito mentale, a poco a poco potrà pervenire facilmente alla perfezione di questa.*

È inevitabile pensare che Maria Montessori, che in quegli anni frequentava la Regia Scuola Tecnica di Roma, fosse fortemente influenzata dalla sua formazione giovanile quando ebbe a dire in una conferenza tenutasi il 5 maggio 1931

> *Fino a una certa epoca aritmetica e geometria procedevano unite, poi fu necessario dividerle. Ma la cosa più semplice e più chiara è l'origine delle cose: come ripeto sempre, il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e più naturale per la sua mente. Noi dobbiamo solo trovare un materiale che renda l'origine accessibile.*

Certo è che non può sfuggire il denominatore comune tra le tre teorie così lontane nel tempo: l'inscindibilità di aritmetica e geometria; la sollecitazione dell'apprendimento attraverso la percezione e la stimolazione periferica, tanto importante per le moderne teorie neuro-scientifiche.

## 1.2 – Il programma didattico di Luigi Cremona

Nell'introduzione al libro *Elementi di geometria projettiva ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia*, Cremona individua limpidissimamente gli obiettivi didattici, i contenuti e la metodologia.

Innanzitutto chiarisce:

> *Non tutta la geometria tradizionale è necessaria per capire il mio libro: basteranno le poche proposizioni fondamentali sul cerchio ed i triangoli simili.*

Gli argomenti fondamentali sono: il rapporto anarmonico; la proiezione centrale per determinare il concetto degli elementi a distanza infinita; il principio di dualità; l'alternanza della geometria piana e solida; la definizione delle coniche come proiezione del cerchio; la teoria dei poligoni inscritti e circoscritti ; i teoremi di Pascal e Desargues.

Dall'inizio è evidente che egli intende utilizzare il metodo dell'integrazione della storia nella didattica della matematica e descrive così i contenuti del suo libro di testo:

> *Le proposizioni sono tutte di vecchia data, tanto che per non poche bisognerebbe risalire ai geometri della più remota antichità; e ciascuno potrà rintracciarle in Euclide (285 a. C), in Apollonio di Perga (247 a. C), in Pappo d'Alessandria (IV sec. d. C), in Desargues di Lione (1593- 1662), in Pascal (1623-1662), in Delahire (1640-1718), in Newton (1642-1727), in Maclaurin (1698-1746), in J. H. Lambert (1728-1777),[…]Le teorie ed i metodi, che di queste proposizioni fanno un insieme omogeneo ed armonico, soglìon essere detti moderni, perchè creati o perfezionati da geometri più vicini a noi, come Carnot, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt.*

Questa è la dichiarazione riguardo ai contenuti che Cremona fa all'inizio del suo libro, nel momento in cui sta battezzando la "sua" geometria, che definisce «projettiva», ispirandosi alla definizione di Poncelet autore di *Traité des propriétés projectives des figures* (Poncelet, 1822).

La scelta di storicizzare la matematica è parte della tradizione pedagogica italiana, il «ritorno all'origine delle cose»di Montessori, che ha investito la didattica della matematica di Emma Castelnuovo, la quale intravede la necessità di ricostruire la storia della matematica andando oltre la storia classica: si pensi alla sua didattica del concetto dell'affinità in bambini di undici anni (Castelnuovo, 1967). Negli ultimi decenni l'utilizzo della storia nell'insegnamento della matematica è stato definito e motivato in maniera dettagliata dal quadro teorico dei professori Luis Radford e Fulvia Furinghetti ed ha evidenziato risultati positivi (Radford, 2014). Obiettivi simili vengono esplicitati da Cremona, quando cita Euclide, Pappo, Menelao, Desargues e Ceva con la seguente motivazione:

> *Vorrei far toccare con mano che sono cose in gran parte venerande per antichità, tutte maturate nelle menti dei più insigni pensatori e ridotte ormai a quella forma dì estrema semplicità che Gergonne considerava come segno di perfezione per una teoria scientifica.*

Altra motivazione è far conoscere i nomi e le opere dei grandi matematici del passato, nonché, attraverso questa conoscenza, facilitare il tener a mente i teoremi ed i risultati da essi ottenuti.

## 2 – I contenuti

Il livello di approfondimento del libro di Cremona rispetto ai testi scolastici attuali è decisamente molto elevato sia per quanto riguarda i contenuti, sia per quanto riguarda il rigore dimostrativo. Inoltre bisogna tener presente che le tavole grafiche sono tutte poste alla fine del testo: questi elementi testimoniano di un momento storico in cui agli studenti veniva richiesta grande attenzione e capacità di rielaborare. Verranno prese in considerazione alcune delle definizioni e proposizioni della parte iniziale del libro. Le figure riportate sono quelle dell'appendice, disegnate a mano da un tecnico e da uno studente licenziato della scuola dove Cremona aveva insegnato, il Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano.

### 2.1 – La proiezione centrale

Dopo aver introdottola nozione di proiezione centrale, facendo riferimento ai disegni"*Fig.1*" e "*Fig.2*" nella Fig.2-, viene definito il punto all'infinito come caso limite di punto corrispondente alla rotazione di un raggio rotante attorno ad O che fa corrispondere il punto A′ ad A: quando il raggio è parallelo ad A, allora A′ cade in I′,punto di fuga o punto limite corrispondente al punto I di a, punto all'infinito.

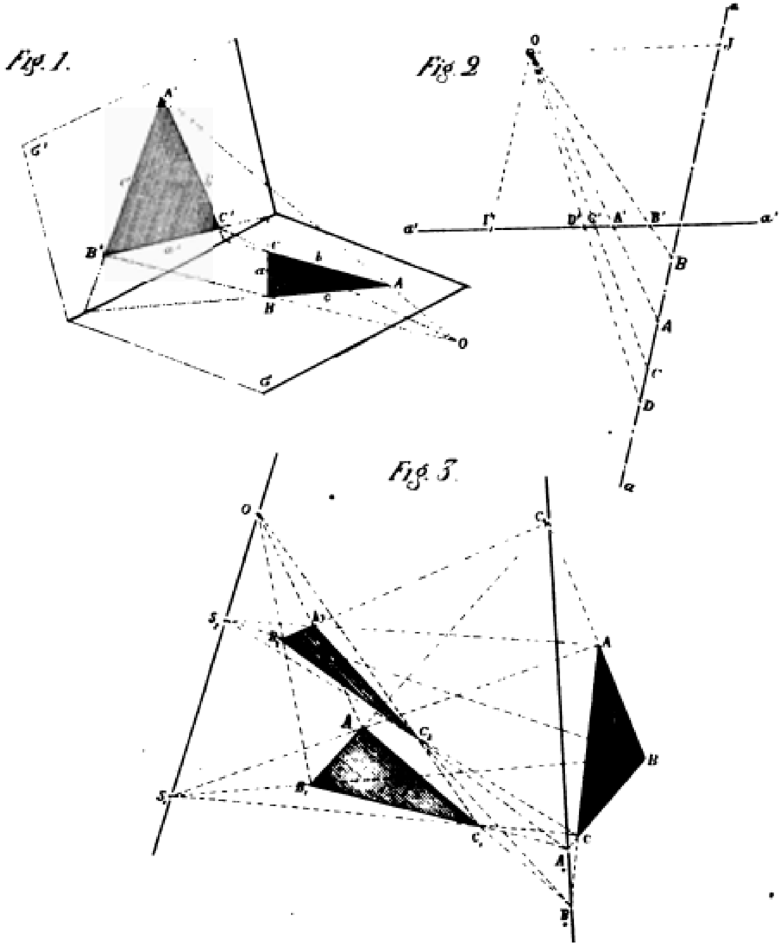



**Fig. 2 - Le illustrazioni della proiezione centrale nel testo di Cremona**

Due rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito e tutte le rette parallele ad una data sono da considerarsi come aventi un punto comune all'infinito. Facendo riferimento ai disegni "*Fig.2*" e "*Fig.3*"nella figura 2 si dimostra il Teorema 12:

> *Se due triangoli sono prospettivi, le intersezioni dei lati corrispondenti sono in linea retta.*

Esso è valido sia nel caso che i due triangoli giacciano su due piani diversi (disegno "*Fig. 2*"), sia nel caso che giacciano sullo stesso piano (disegno "*Fig. 3*").

Una delle caratteristiche di questo testo esplicitata nell'introduzione e puntualmente mantenuta nella trattazione dei diversi teoremi è l'alternanza della geometria piana e della stereometria:

> *Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quelli della solida, giacché l'esperienza m'ha insegnato, o altri lo aveva già osservato , che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione: di più, esse acuiscono l'intelletto e aiutano lo svolgimento di quella immaginativa geometrica che è qualità essenziale all'ingegnere, perché ei possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello.*

L'altra caratteristica è il principio di dualità, cioè il fatto di considerare che vi sono sempre due maniere correlative e reciproche di generare figure e svolgerne le proprietà.

## 2.2 – Rapporto armonico

Nel paragrafo 8, Cremona riporta il seguente Teorema 38:

> *Se in una retta s sono dati tre punti A, D, C e se si costruisce un quadrangolo completo (KLMN) in modo che due Iati opposti (KL,MN) concorrano in A, altri due lati opposti {KN, ML) concorrano in B e il quinto lato (LN) passi per C, il sesto lato (KM) segherà la retta data in un punto D, che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque sì mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo. I quattro pun-*

*ti ADCD diconsi armonici, ovvero si dice che la forma geometrica costituita dai quattropunti suddetti è armonica.*

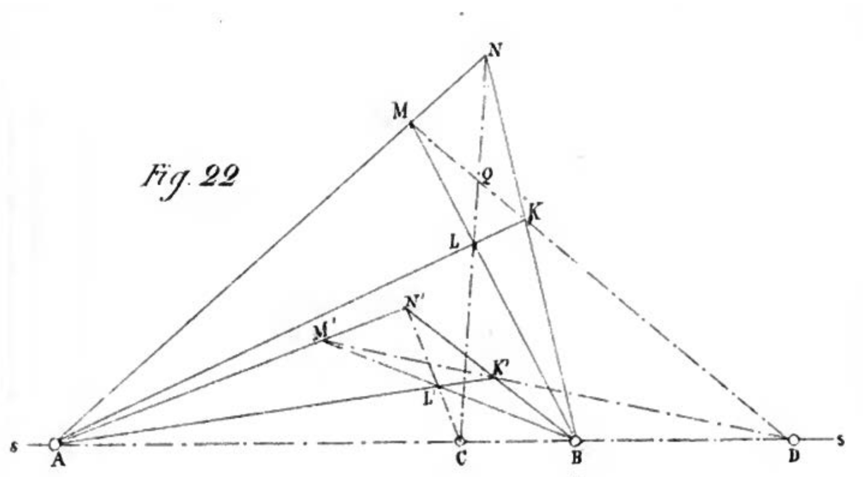
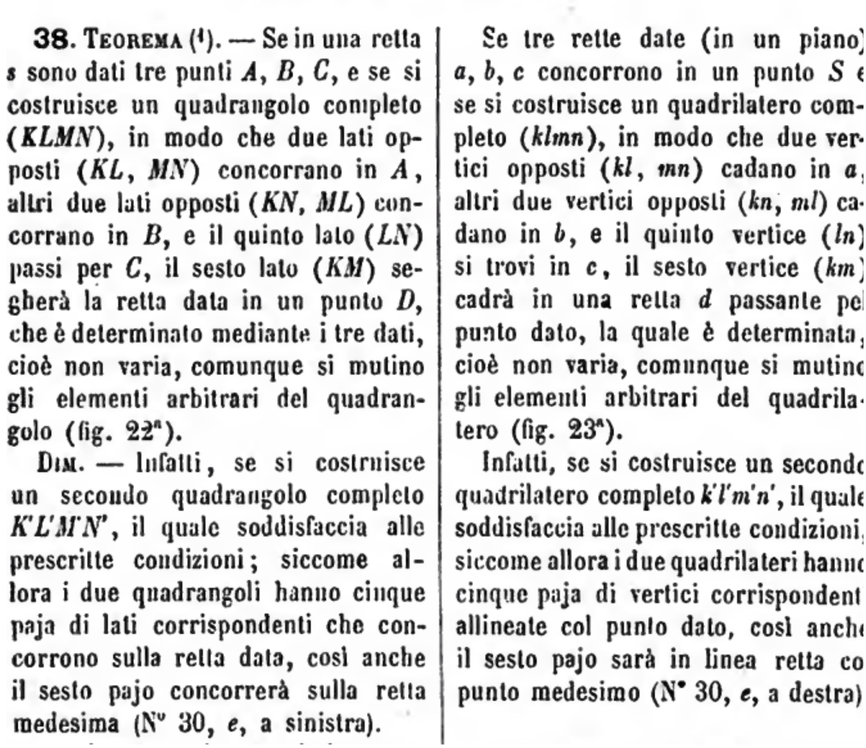



**Fig. 3 - Illustrazione di Cremona delle forme armoniche relative al Teorema 38**

In ottemperanza al criterio di dualità l'impaginazione è tale che vengono illustrati su due colonne i due teoremi correlativi, così come riportato in parte nella figura 4.

## 2.3- Rapporto anarmonico

I paragrafi che vanno dal 53 al 59 del libro di Cremona riguardano i rapporti anarmonici, la cui teoria completa è attribuita a Möbius, ma dei quali Euclide, Pappo e Desargues avevano dimostrato la proposizione fondamentale del n° 53. Con riferimento alla Figura 5 (nel Testo di Cremona la *Fig. 31),* con la dimostrazione riportata in nota di chiusura.[i]



**38.** Teorema (1). — Se in una retta *s* sono dati tre punti *A*, *B*, *C*, e se si costruisce un quadrangolo completo (*KLMN*), in modo che due lati opposti (*KL*, *MN*) concorrano in *A*, altri due lati opposti (*KN*, *ML*) concorrano in *B*, e il quinto lato (*LN*) passi per *C*, il sesto lato (*KM*) segherà la retta data in un punto *D*, che è determinato mediante i tre dati, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrangolo (fig. 22ª).

Dim. — Infatti, se si costruisce un secondo quadrangolo completo *K'L'M'N'*, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni; siccome allora i due quadrangoli hanno cinque paja di lati corrispondenti che concorrono sulla retta data, così anche il sesto pajo concorrerà sulla retta medesima (N° 30, *e*, a sinistra).

Se tre rette date (in un piano) *a*, *b*, *c* concorrono in un punto *S* e se si costruisce un quadrilatero completo (*klmn*), in modo che due vertici opposti (*kl*, *mn*) cadano in *a*, altri due vertici opposti (*kn*, *ml*) cadano in *b*, e il quinto vertice (*ln*) si trovi in *c*, il sesto vertice (*km*) cadrà in una retta *d* passante pel punto dato, la quale è determinata, cioè non varia, comunque si mutino gli elementi arbitrari del quadrilatero (fig. 23ª).

Infatti, se si costruisce un secondo quadrilatero completo *k'l'm'n'*, il quale soddisfaccia alle prescritte condizioni, siccome allora i due quadrilateri hanno cinque paja di vertici corrispondenti allineate col punto dato, così anche il sesto pajo sarà in linea retta col punto medesimo (N° 30, *e*, a destra).

**Fig. 4 - I due teoremi correlativi, della proposizione n 38**

$$AC/BC:AD/BD$$

si dice rapporto anarmonico o doppio rapporto dei quattro punti in linea retta ABCD e il rapporto anarmonico di quattro punti in linea retta non è alterato da qualsivoglia proiezione.

## 3 - Il metodo della storia integrata nella didattica

Quanto esposto nei paragrafi precedenti, proposto come materiale di studio nel secondo biennio della scuola tecnica nel 1871 nel Regno d'Italia, difficilmente troverebbe spazio nella scuola attuale. Tuttavia, potrebbe essere utile introdurre il "Pensare proiettivo" (Ciliberto, 2023).

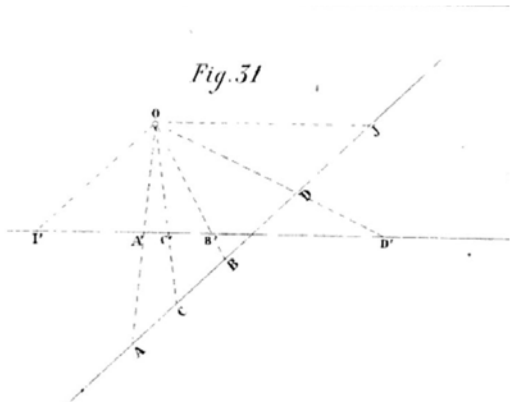



**Fig. 5 - Il rapporto anarmonico**

Il pensiero proiettivo sposta la descrizione geometrica dello spazio fisico sulla visionedell'osservatore e questo è funzionale ad un modello didattico che mette i bambini e i ragazzi al centro, con la loro percezione come mezzo fondamentale.

Nel nostro caso però, intendiamo ricalcare quanto suggerito da Cremona riguardo l'utilità dell'integrazione della storia nello studio e nell'apprendimento della matematica, tornando "all'origine delle cose", sulla traccia del percorso storico da lui stesso segnato.

Per quanto riguarda gli argomenti riportati nel paragrafo precedente, riferibili al concetto di bi-rapporto vengono forniti dall'autore come fonti storiche Pappo e Desargues, ma ad un attento studio si possono rintracciare delle radici storiche diverse, che permettono anche di trasportare l'uso didattico in un ambito in cui, come auspicato dai "maestri" citati all'inizio di questo articolo, quali Montessori e Fibonacci, la geometria è strettamente connessa all'aritmetica, come era all'origine. Risalendo al Desargues ed al suo teorema, si può intravedere il legame con un altro "discorso matematico" fatto quattrocento anni prima da Leonardo Pisano detto Fibonacci, il quale ritiene di esporre un risultato a lui ancora precedente di secoli.

Nel capitolo IX del *Liber Abbaci* di Fibonacci vengono presentate le regole del baratto come "regola del cinque".

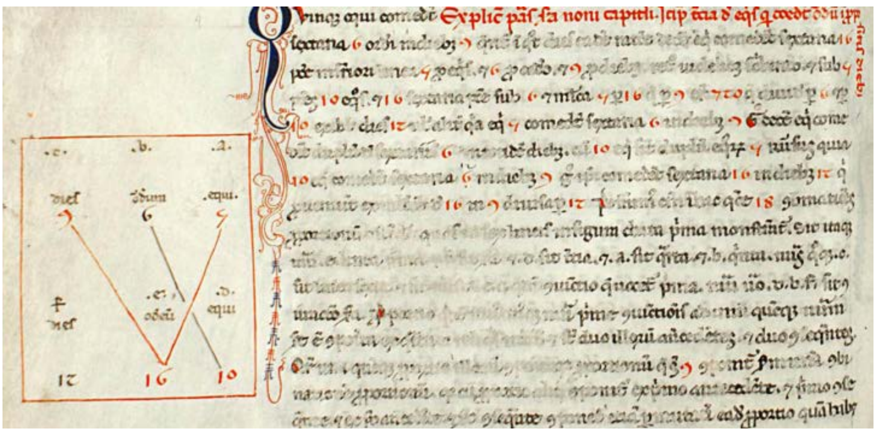


**Fig. 6 - Il problema dell'orzo e dei cavalli ed il relativo diagramma di soluzione. Parte della pagina iniziale capitolo nono sezione 3 del Liber Abbaci. Conv. Sopp. C.I. 2616, BNCF, folio 55**

*Finisce la parte seconda del nono capitolo.*
*Inizia la terza sui cavalli che mangiano orzo nei giorni proposti.*

(IX.3.1 ; *G*: IX.127) Cinque cavalli mangiano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si chiede in quanti giorni, nel medesimo modo, dieci cavalli mangeranno 16 sestari: poni sulla linea superiore [NdT] 5 per i cavalli, e 6 per l'orzo, e 9 per i giorni, scrivendo naturalmente all'indietro [ *da destra a sinistra* ]; e sotto il 5 porrai 10 cavalli, e sotto il 6 poni 16 sestari; e moltiplica il 5 per 16; e per 9, farà 720; dividilo per 6, e per 10, farà 12 giorni: o altrimenti, poiché 5 cavalli mangiano 6 sestari in 9 giorni; dunque 10 cavalli mangeranno il doppio dei 6 sestari in altrettanti giorni, poiché 10 cavalli sono il doppio di 5 cavalli. E ancora, poiché 10 cavalli mangiano 12 sestari in 9 giorni; dunque essi mangeranno 16 sestari in 12 giorni che risulta dalla moltiplicazione di 16 per 9 divisa per 12.

**Fig. 7 - Il problema dell'orzo e dei cavalli nella traduzione sul sito www.progettofibonacci.it**

Per la soluzione di questo problema Fibonacci propone il seguente algoritmo visivo (dal sito www.progettofibonacci.it ):

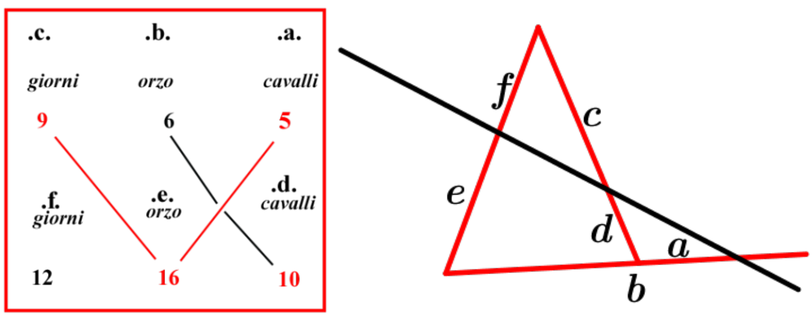



**Fig. 8 - Una visione schematica del diagramma risolutivo e la figura FiguraChata da cui deriva: d/( c)=a/b×e/f a×e×c=d×b×f**

Fibonacci chiamatale diagramma*regulabaracti*, in quanto permette di trovare le quantità esatte di merci da scambiare, egli dà una spiegazione di tipo storico(*Liber Abbaci* IX, 1):

> *Questo modo infatti proviene dalla proporzione che ha la prima merce rispetto all'altra; che mostrerò essere composta da due proporzioni, cioè dalla proporzione che c'è tra la quantità di vendita della prima merce e il numero del suo prezzo, e dalla proporzione che ha il numero del prezzo dell'altra merce rispetto alla quantità di vendita della sua merce,[…] è infatti tale formulazione delle proporzioni è quella che si mostra nella Figura Chata, quella con la quale Tolomeo ha insegnato nell'Almagesto a trovare la dimostrazione e molte altre cose, e Ameto pose 18 combinazioni riguardo ad essa nel libro che scrisse sulle proporzioni*

Due le fonti citate da Fibonacci: Tolomeo (*Almagesto*) e Ameto(*Figura Chata*),nome latinizzato di Ahmed Ibn Yusuf, che fondano la spiegazione di questo diagramma risolutivo su un terreno geometrico, come sempre Fibonacci fa nel suo*Liber*e come aveva ereditato dal mondo arabo, nel quale si era formato e dove aveva appreso l'algebra, con le sue fondamenta di geometria euclidea. Diverse sono le ipotesi sulla effettiva lettura da parte di Fibonacci delle fonti che cita, includendo anche l'ipotesi che Fibonacci non conoscesse la lingua araba in una maniera così approfondita da permettere una lettura accurata di fonti arabe (Hughes, 2003). In realtà si potrebbe rispondere formulando l'ipotesi che egli abbia letto *l'Epistola de proportione et proportionalitate* tradotta da Gherardo da Cremona in latino. Esistono diversi manoscritti di questa opera ed una trascrizione latina nonché una traduzione in inglese (Schrader, 1961) che evidenziano una pressoché totale coincidenza tra la trattazione di Fibonacci e *l'Epistola*, per quanto riguarda la 18 combinazioni di proporzioni che si possono ottenere con il triangolo tagliato da trasversale.Non è chiaro se l'influenza su Leonardo Fibonacci fosse da parte di Menelao o di Tolomeo. Sebbene esistesse una versione araba delle *Sferiche* di Menelao da cui fu fatta una traduzione latina nella prima metà del IX secolo, testo latino che avrebbe potuto essere a disposizione di Leonardo, è ovvio dalle sue stesse parole che anche Leonardo associò “le diciotto combinazioni di Ameto” con Tolomeo anziché con Menelao. Fondamentalmente *la figura Figura Chata* o teorema di Menelao piano si riassume in questo passo del *De Practica Geoemetriae* di Fibonacci (Hughes, 2008):

> *Se in un triangolo .abg. tracciamo delle rette .be. e .gd. che escono dagli angoli .b. .g. e se queste si incontrano nel punto .z. allora, se è noto il rapporto tra .ge. e .ae. e tra .bd. e .ad. allora è noto anche il rapporto tra .bz. e .ze. e tra .gz. e .zd*

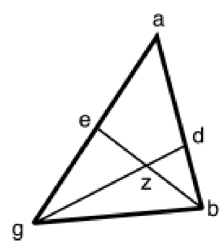



**Fig. 9 - La Figura Chata in PracticaGeometriae (Hughes, B., 2008)**

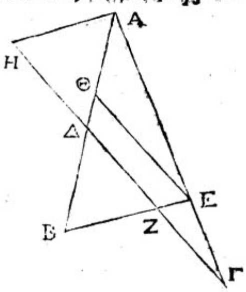
Un punto di vista molto utile in didattica èandare a studiare questo teorema come caso limite del teorema di Talete, ad esempio attraverso l’utilizzo di una costruzione dinamica con Geogebra. Il legame tra la *Figura Chata* e il teorema di Menelao piano è più chiaro se si analizza quest’ultimo, che corrisponde al lemma I della proposizione VII, riportato nella prossima illustrazione tratta da una pagina della traduzione dall’arabo al latino del trattato di Menelao, quella di Halley del 1758, che affianca le altre duetraduzioni dall'arabo, quella di Gherardo da Cremona e di Maurolico.

*Sphæricorum* Lib. III. 83

Lemma I.

*Si ad duas rectas* AB, AΓ *concurrentes in* A *ducantur duæ aliæ* ΓΔ, BE *sese intersecantes in puncto* Z: *dico rectam* AE *esse ad* EΓ *in ratione composita ex ratione* ΔZ *ad* ZΓ *& ratione* BA *ad* BΔ.

*Per* A *enim ipsi* BE *parallela ducatur* AH, *occurrens ipsi* ΔΓ *productæ in* H. *Jam quoniam* AH *parallela est ipsi* EZ, *erit ut* AE *ad* EΓ *ita* HZ *ad* ZΓ. *Sumptâ autem mediâ recta* ZΔ, *ratio* HZ *ad* ZΓ *componetur ex ratione quam habet* HZ *ad* ZΔ, *& ex ea quam habet* ZΔ *ad* ZΓ. *Sed ob parallelas* AH, BZ, *erit &* ZH *ad* ZΔ *sicut* BA *ad* BΔ: *ratio igitur* HZ *ad* ZΓ, *hoc est* AE *ad* EΓ, *componitur ex ratione quam habet* BA *ad* BΔ *& ex ea quam habet* ΔZ *ad* ZΓ.




*Iisdem positis; dico quoque* ΓA *esse ad* AE *in ratione composita ex ratione quam habet* ΓΔ *ad* ΔZ *& ex ea quam habet* ZB *ad* BE.

*Ipsi* ΓΔ *parallela ducatur* EΘ, *& ob easdem parallelas, erit ut* ΓA *ad* AE *ita* ΓΔ *ad* EΘ; *sumatur* ΔZ *media, & ratio* ΓΔ *ad* EΘ *componetur ex ea quam habet* ΓΔ *ad* ΔZ *& ex ea quam habet* ΔZ *ad* EΘ. *Ob parallelas vero* ΔZ, ΘE, *erit* ΔZ *ad* EΘ *sicut* ZB *ad* BE: *ratio igitur* ΓΔ *ad* EΘ, *hoc est* ΓA *ad* AE, *composita est ex ratione* ΓΔ *ad* ΔZ *& ratione* ZB *ad* BE. Q. E. D.

**Fig. 10-Il teorema di Menelao nella traduzione di Halley**

È molto importante notare che nel testo si parla di rapporto composto, ma in nessun punto di esso si rintraccia la notazione di prodotto tra rapporti associato nelle moderne notazioni al rapporto composto. D'altra parte non avrebbe potuto che essere così, visto che nella matematica greca non esisteva minimamente un'aritmetica del logos, paragonabile a quella dei numeri razionali, a cui spesso in una rappresentazione simbolica moderna i rapporti stessi sono assimilati. Il teorema di Menelao piano è in realtà un lemma che serve a dimostrare un teorema analogo per i triangoli sferici. La geometria della sfera non prevede parallelismo ed in questo ambiente il teoremadi Menelao serve per sviluppare una teoria quantitativa del rapporto tra i lati dei triangoli sferici: in questo ambito vi sono concetti invarianti per proiezione, come il rapporto armonico, comuni con la geometria proiettiva. Queste grandezze sono utili per l'astronomia, motivo per il quale sono riprese nell'Almagesto di Tolomeo, da cui è ripresa l'immagine che illustra l'analogo del teorema di Menelao:

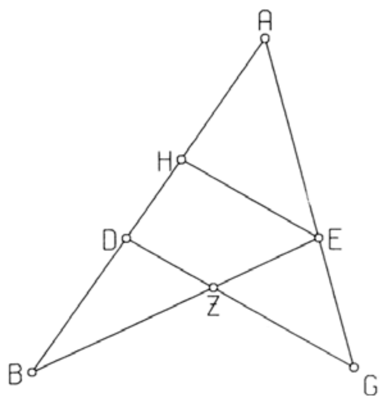



**Fig. 11 - Teorema di Menelao nell'Almagesto ( Toomer, 1984)**

La dimostrazione del lemma I,13 di cui la figura è la rappresentazione, fa utilizzo della parallela ausiliaria EH e porta al risultato: GA:AE=(GD:DZ).(ZB:BE).

Letteralmente ciò èespresso nel seguente lemma che permetteva a Tolomeo di calcolare l'altezza del Sole:

*Il rapporto di GA a AE è combinato da (συνήπται εκ, συγκειται εκ) il rapporto di GD a DZ e il rapporto di ZB a BE.*

Rispetto a quest'ultimo la figura *Figura Chata* di Fibonacci è chiusa in un triangolo, un'ottima struttura gestaltica per uno scopo didattico (Catastini, 2005), come era quello di Fibonacci.

## 4 - Il teorema di Desargues

Nel *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan,* di Desargues del 1639, il teorema di Menelao cambia fisionomia (Catastini, 2004):

*Quand en une droite H, D, G, comme tronc, a trois points H,D,G, comme noeus, passent trois droites comme rameaux déployer Hkh, Dqh, Gqk, le quelconque brin Dh, du quelconque de ces rameaux Dqh contenu entre son noeu D, & le quelconque des deux autres rameaux Hkh, est a son accuplé le brin Dq contenu entre le mesme noeu D, & l'autre troisième des mesmes rameaux Gqk en raison mesme que la composée des raisons d'entre les deux brins de chacun des autres deux rameaux convenablement ordonnez, à savoir de la raison du brin comme Hh, au brin comme Hk, & de la raison du brin comme Gk, au brin comme Gq*

*[Quando su una retta HDG, pensata come tronco, per tre punti H, D, G, pensati come nodi, passano tre rette come rami dispiegati Hkh, Dqh, Gqk, qualunque getto Dh di qualunque di questi rami Dqh che esce dallo stesso nodo D e arriva al ramo Hkh, sta al suo getto accoppiato Dq che esce dallo stesso nodo D arriva al terzo ramo Gqk, nello stesso rapporto del rapporto composto tra i getti su ciascuno degli altri due rami convenientemente ordinati (libera traduzione, Catastini 2004)]*

L'accento di questo teorema è sul tronco. I rami possono ruotare e andare a disporsi in posizioni diverse,anche parallele. Ciò che accade, infatti, quando k tende all'infinito è che il rapporto tra Gk e Hk tende a 1 e la regola si riduce alla uguaglianza

Dh/Dq=Hh/Gq

che esprime la proporzionalità dei lati corrispondenti in due triangoli HhD e GqD che diventano simili quando il ramo per H è parallelo a quello per G. Il teorema sulla proporzionalità dei lati nei triangoli simili diventa una degenerazione del teorema di Menelao quando parte della figura va all'infinito.

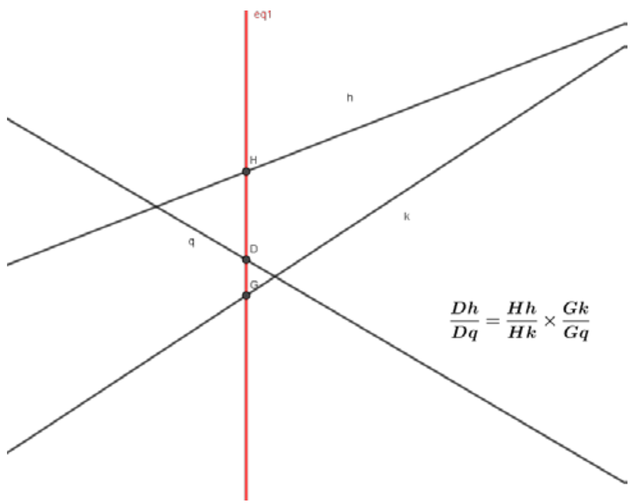



**Fig. 12 -Teorema di Desargues (Catastini, 2004)**

Un modo per portare questi risultati in classe con gli studenti di liceo è quello di matematizzare la prospettiva che possono aver appreso nel disegno e far vedere come le proiezioni dei lati delle figure e delle loro ombre si intersechino in punti che giacciono su una stessa linea, in accordo con il teorema di Desargues (Casati, 2000).

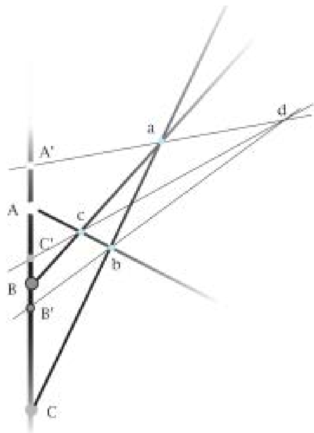



**Fig. 13 - Involuzione: proiettando sul tronco da un punto d scelto ad arbitrio i buta ,b, c nei punti A′, B′, C′ ed accoppiandoli con i nodi ABC otteniamo le coppie AA′, BB′, CC′. La relazione Ab/Ac=Ba/Bc×Cb/Ca degenera nella AB'/AC'=BA'/BC'×CB'/CA'**

## 5 – Conclusioni

Nei paragrafi precedenti si sono prese in esame diverse modalità con le quali una relazione matematica è sottesa a teoremi risalenti ad epoche storiche differenti, partendo da Menelao, passando per la *Figura Chata* degli Arabi, poi per Fibonacci, arrivando fino a Desargues e poi a Cremona. Questo percorso storico, oltre a fornire un esempio di come le idee cambiano forma nel cammino evolutivo della matematica, può essere spunto di diverse attività didattiche che esulano dal campo della geometria e la portano ad essere metodologia risolutiva in ambiti non geometrici.

## Bibliografia

BONCOMPAGNI, B. (1852). Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, Roma: Tipografia delle belle arti.

BRIGAGLIA, A. (2006). Luigi Cremona e la nuova scuola della nuova Italia: dagli obiettivi ai contenuti e alla loro valutazione,Valutare in matematica. XXV Congresso Nazionale UMI-CIIM, Siena, 27-29 ottobre 2005 (Vol. 11, pp. 31-40). Unione Matematica Italiana.

CASATI, R. (2000). La scoperta dell'ombra: da Platone a Galileo: la storia di un enigma che ha affascinato le grandi menti dell'umanità, Bari: Laterza

CATASTINI, L. (2004). Il giardino di Desargues. *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* , *7* (2), 321-345.

CATASTINI, L., Ghione, F. (2023). La matematica che trasformò il mondo: il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, Roma: Carocci editore.

CATASTINI, L., Ghione, F. (2005). Nella mente di Desargues tra involuzioni e geometria dinamica,*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, *8*(1), 123-147.

CILIBERTO, C., (2023) Argomenti di matematica elementare da un punto di vista superiore. Spunti per l'organizzazione di lavoro interdisciplinare e laboratoriale nelle classi di scuola secondaria di II grado,Torino:Utet.

CASTELNUOVO, E., (1967).È possibile un'educazione al ``saper vedere'' in matematica?*Bollettino dell' Unione Matematica Italiana 22.4 : 539-549.*

CREMONA, L. (1873). *Elementi di geometria projettiva (Vol. 1)*, Torino: GB Paravia e comp.

FURINGHETTI, F., & SINCLAIR, N. (2014). History of mathematics and mathematics education. *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground,* 89-110

GIACARDI, L. M. (2006). Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia,Lugano: Lumières Internationales.

HALLEY, E., & COSTARD, G. (1758). *Sphæricorum libri III*, Oxford: Sumptibusacademicis.

HUGHES, B. (Ed.). (2008). *Fibonacci's De practicageometriae,* New York, NY: Springer New York.

PTOLEMY, A. (1984), *Almagest, edited by G. J. Toomer*, London: Bristol Classical Press.

SCHRADER, M.,W.,R., (1961). The "epistola de proportione et proportionalitate" of Ametus filius Iosephi.*The University of Wisconsin-Madison.*

SCOCCHERA, A., (1993).Maria Montessori: una biografia intellettuale, in Opera Nazionale Montessori (a cura di), Maria Montessori: il pensiero, il metodo, 2 volumi, Firenze: Petruccione, Lisciani & Giunti Editori.

SCOPPOLA, B., (2022).*Più bravi di quel che pensiamo,* Roma: Gedi.

# NOTE

[i] JA:JO=I′O:I′A′ JB:JO=I′O:I′B′

che discendono dalla similitudine di OAJ e B′OI′, da cui

JA*I′A′=JB*I′B′=JO*I′O

Ciò equivale a dire il rettangolo JA.I′A′è costante, qualunque sia la coppia dei punti corrispondenti A, A′.

I′A′=k/JA′ I′B′=k/JB′

I′B′-I′A′= (k(JA-JB))/(JA.JB)

I′B′-I′A′=A′B′ JA-JB=-AB

A′B′= - k/(JA.JB) AB

Se si considerano quattro punti ABCD e le quattro proiezioni A′B′C′D′ allora

A'C'/B'C':A'D'/B'D'=AC/BC:AD/BD


Periodico di Matematica
PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO
Anno XXXIX - Serie IV – volume VI (3)
Supplemento settembre 2024
A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA
Atti IV Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
5-8 settembre 2024
curati da
Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro,
Giovanna Della Vecchia, Giovanni Vincenzi

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 41-62

# *La duplicazione del cubo: alcune soluzioni a confronto*

Bruno Jannamorelli*

*Docente di Matematica in pensione, Sulmona (AQ); jannab@tiscali.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.139

***Sunto***: *Il problema della duplicazione del cubo, ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di lato assegnato, è uno dei tre problemi classici della matematica greca, insieme alla trisezione dell'angolo e alla quadratura del cerchio. È necessario precisare che, per i Greci, il problema consisteva nella costruzione con riga e compasso dello spigolo del cubo richiesto. Non sono mai riusciti nell'impresa e per questo hanno cercato altre soluzioni. Propongo alcune delle tante soluzioni trovate nel corso dei secoli, ma prima presento le leggende relative alla nascita del problema.*

***Parole Chiave***: *Cubo, triangoli simili, parabola, mesolabio.*

***Abstract***: *The problem of doubling the cube, i.e. the constructionof a cube having double the volume of a cube with an assigned side, is one of the three classic problems of Greek mathematics, together with the trisection of the angle and squaring of circle. It is necessary to point out that, for the Greeks, the problem consisted in constructing the required edge of the cube with a ruler and compass. They never succeeded and for this reason thei looked for other solurions. I propose some of the many solutions found over centuries, but first I present the legend relating to the birth of the problem.*

***Keywords***: *Cube, similar triangle, parabola, mesolabe.*

## 1 - Il sepolcro di Glauco e la peste di Atene

In una lettera indirizzata da Eratostene (276 a.C. – 194 a.C.) a Tolomeo III si parla di due leggende che hanno dato origine al problema della duplicazione del cubo (Loria, 1987, p.76):

> *Eratostene a Tolomeo, salute.*
>
> *Narrano che uno degli antichi poeti tragici facesse apparire sulla scena Mino [Minosse, re di Creta] nell'atto di far costruire una tomba al figlio Glauco e che Mino, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse:*
>
> *"… piccolo spazio invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo, conservandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro".*
>
> *Or è chiaro che egli s'ingannava. Infatti, duplicandone i lati, una figura piana si quadruplica, mentre una solida si ottuplica.*
>
> *Allora anche fra i geometri fu agitata la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque, conservandone la specie. E questo problema fu chiamato duplicazione del cubo.*

Più avanti nella stessa lettera, Eratostene riporta un'altra leggenda che parla dell'oracolo di Delo (Loria, 1987, p.76):

> ...*che aveva imposto agli abitanti di Delo di raddoppiare l'altare di forma cubica, dedicato al dio. Il quesito aveva generato aporia negli "architetti", che ne avevano cercata la soluzione, sicché i Deli avevano cercato consiglio presso Platone, che aveva interpretato l'oracolo come un rimprovero del dio agli Elleni di trascurare la geometria e un invito a occuparsene, non tanto come un'espressione del desiderio del dio di avere un altare doppio.*

Una conferma di questa leggenda la troviamo in Giovanni Filopono (vissuto nel VI secolo d.C. ad Alessandria d'Egitto) il quale narra di una devastante epidemia di peste che mieteva tante vittime e del ricorso degli abitanti all'oracolo di Delo per sapere cosa dovessero offrire al dio Apollo per placare la pestilenza (Loria, 1987, p.76-77):

> *…quando dio annunciò agli abitanti di Delfi, attraverso l'oracolo, che, al fine di sbarazzarsi della pestilenza, essi dovessero costruire un altare doppio di quello che esisteva, i loro operai specializzati caddero in una grande perplessità nei loro tentativi di scoprire come si potesse realizzare il doppio di un solido simile; essi, perciò, si recarono da Platone, per interrogarlo a proposito di ciò, ed egli rispose che l'oracolo non intendeva che il dio volesse un altare di misura doppia, ma che egli desiderava, nell'affidargli il compito, disonorare i Greci per la loro negligenza in matematica e il loro disprezzo della geometria. "Il dio ha punito il popolo per aver trascurato la scienza della geometria che è scienza per eccellenza.*

Racconti analoghi ricorrono anche in altri testi di Plutarco, precisamente *De E apud Delphos* (6, 386 e) e *De genio Socratis* (7, 579 b-d), con l'aggiunta in quest'ultimo che i Deli si erano rivolti a Platone in quanto *geometrikòs* .

## 2 - Soluzione di Ippocrate di Chio

Eratostene, sempre nella lettera già citata, parla delle prime soluzioni al problema della duplicazione del cubo (Loria, 1987, p.77):

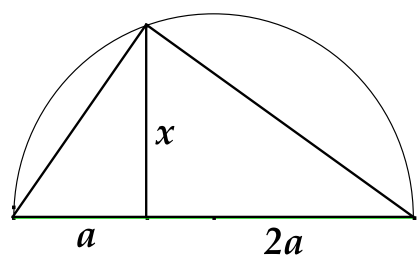
> *Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per primo Ippocrate di Chio trovò che se tra due segmenti, dei quali il maggiore sia doppio del minore, si inscrivono due medie in proporzione continua, il cubo sarà duplicato, e così tramutò una difficoltà in altra non minore.*
>
> *Essi [i geometri dell'Accademia di Platone] se ne occuparono con diligenza e si dice che, avendo cercato d'inserire due medie fra due rette, Archita Tarantino vi riuscisse col semicilindro ed Eudosso invece mediante certe linee curve. Questi furono seguiti da altri nel rendere più perfette le dimostrazioni, non però nell'effettuare la costruzione ed accomodarla alla pratica, eccettuato forse Menecmo e con gran fatica.*

Per comprendere l'idea geniale di Ippocrate è necessario premettere che, al suo tempo, era ben noto che il lato di un quadrato di area doppia di quella di un quadrato di lato $a$ è il medio proporzionale $x$ tra $a$ e $2a$. Infatti dalla proporzione

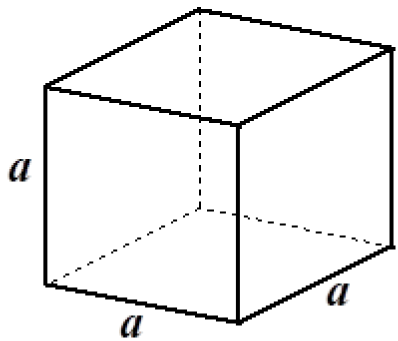
$$a : x = x : 2a$$

si ha $x^2 = 2a^2$, quindi il quadrato di lato $x$ ha area $x^2$ doppia di quello di lato $a$ e area $a^2$.

La costruzione geometrica del lato $x$ è basata su quello che noi conosciamo come secondo teorema di Euclide [Elementi, Libro VI, Proposizione 8]: basta disegnare il semicerchio di diametro $3a$ e il triangolo rettangolo in esso inscritto avente i cateti con proiezioni ortogonali sull'ipotenusa (diametro) pari ad $a$ e $2a$. L'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa è il segmento di lunghezza $x$ medio proporzionale tra $a$ e $2a$.



In maniera analoga, per duplicare un cubo di lato $a$ e volume $a^3$ bisogna trovare un segmento di lunghezza $x$ tale che $x^3 = 2a^3$.




Ippocrate pensò di ricondurre il problema alla costruzione di due segmenti $x$, $y$ in proporzione media continua tra i segmenti di lunghezza $a$ e $2a$:

$$a : x = x : y = y : 2a\ .$$

Infatti, dalla prima proporzione si ha $x^2 = ay$, dalla seconda $y^2 = 2ax$ e risolvendo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} \\ \dfrac{x^4}{a^2} = 2ax \end{cases}$$

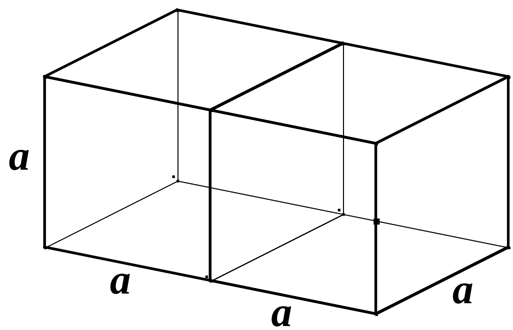
si ricava proprio $x^3 = 2a^3$.

La costruzione geometrica del segmento x, lato del cubo di volume doppio di quello di lato a, non viene fornita. Il problema è stato solo spostato per dare la possibilità ad altri di risolverlo. Ma come avrà fatto Ippocrate a partorire questa idea? Forse ha ragionato come viene riportato di seguito nella soluzione attribuita a Platone: si applica due volte il secondo teorema di Euclide a due triangoli rettangoli.

Nessuno può confermare questa ipotesi o indicare un'altra strada seguita da Ippocrate. A me piace immaginare che abbia seguito un ragionamento simile a quello riportato da Bunt-Jones-Bedient in (Bunt L.N.H., Jones P.S., Bedient J.D. (1983), pag.110).

Partiamo da due cubi, aventi i lati di lunghezza *a*, realizzati con argilla fresca e cominciamo a pasticciare …

a) Incolliamo i due cubi lungo una faccia, in modo da ottenere un parallelepipedo di lati 2a, a, a. Il volume di tale solido è $2a^3$, ma non è un cubo!

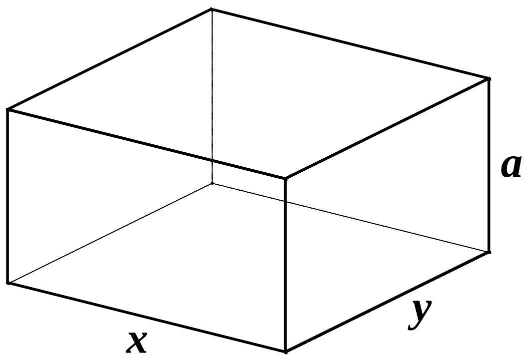



**b.** Cominciamo a trasformare questo parallelepipedo in un altro solido, avente sempre lo stesso volume, mantenendo la stessa altezza *a*. Cambia la base che non è più un rettangolo di lati *a* e *2a*, ma un rettangolo di lati *x* e *y*. Il lato *x* è quello del cubo di volume $2a^3$ che vogliamo costruire. Ribadiamo che in questa trasformazione non buttiamo via nemmeno un pezzettino di argilla e, se l'altezza rimane a, allora l'area di base deve rimanere invariata, pertanto:

$$xy = 2a \cdot a \text{ ,}$$

da cui si trova la prima proporzione:

$$a : x = y : 2a\ .$$

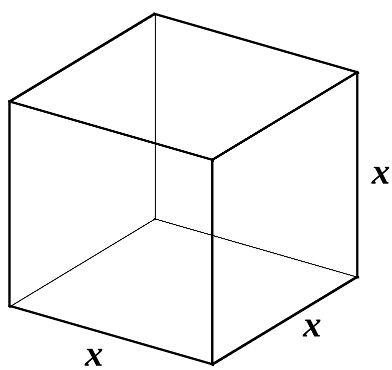



**c.** Modifichiamo la faccia di lati $a$ e $y$ in modo da ottenere un cubo di lato $x$, conservando tutta l'argilla. Questo è possibile se la faccia laterale di area $a \cdot y$ viene trasformata in un quadrato di lato $x$ e quindi di area $x^2$:

$$x^2 = a \cdot y$$

da cui si ricava l'altra proporzione

$$a : x = x : y$$



**d.** Dalle due proporzioni si ha la doppia proporzione di Ippocrate:

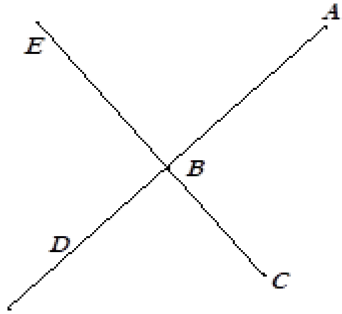
$$a : x = x : y = y : 2a$$

## 3 - Soluzione attribuita a Platone

Un contributo di Platone alla soluzione della duplicazione del cubo consisterebbe in un procedimento da lui immaginato per inserire due medie proporzionali fra due segmenti dati. Esso è stato riferito, come viene riportato di seguito, da Eutocio di Ascalona (a sud dell'attuale territorio di Israele), vissuto tra il V e il VI secolo d.C., conosciuto come commentatore delle opere di Archimede (Loria, 1987, p.124-125):

*Dati due segmenti, trovare due medie proporzionali in proporzione continua.*

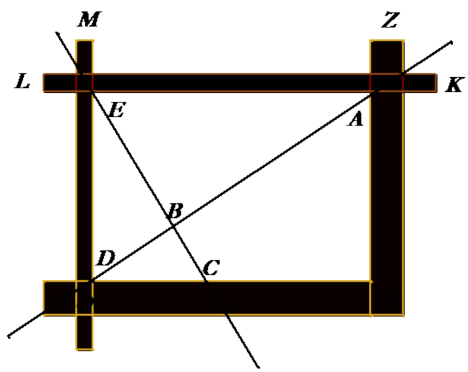
*I due segmenti AB e BC fra i quali bisogna trovare due medie proporzionali siano fra loro perpendicolari. Si prolunghino verso D, E [in modo da formare una croce].*




*Si costruisca un angolo retto ZHO [con due righelli di legno] e sul lato ZH si faccia scorrere, entro una* *scanalatura, una riga KL in modo che resti sempre parallela a HO. Ciò accadrà se noi immaginiamo una seconda riga OM connessa a OH [ma libera di muoversi sul segmento OH] e parallela a ZH: infatti se le superfici anteriori delle due righe ZH, OM sono munite di scanalature conformate a incastro e in queste penetrano dei tasselli incollati alla riga KL, nel suo moto la riga KL rimarrà sempre parallela ad HO.*

*Fatto ciò, si faccia coincidere il punto D con il punto O mentre C viene a trovarsi su HO, si muova la riga KL e l'altra OM [come nella figura seguente]. Allora si sarà ottenuto quello che si voleva. Essendo, infatti, gli angoli DBC, DBE retti, si avrà:*

$$BC : BD = BD : BE = BE : AB$$



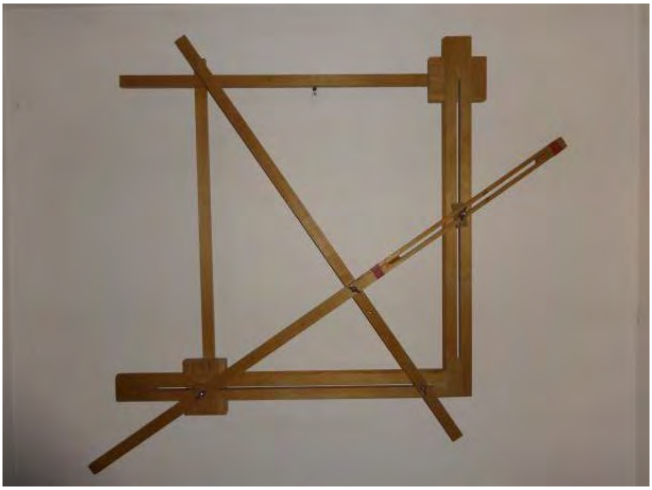

Facendo in modo che sia AB = 2BC, il segmento BD è il lato del cubo di volume doppio di quello avente lo spigolo BC.

Si tratta indubbiamente di una soluzione semplice ed elegante. È una applicazione del teorema: "L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è media proporzionale fra le proiezioni ortogonali dei cateti sull'ipotenusa stessa", applicato due volte ai triangoli rettangoli CDE e AED. Questo teorema era già noto ad Archita di Taranto il quale aveva insegnato la geometria a Platone e quindi la soluzione descritta da Eutocio potrebbe essere attribuita al grande filosofo greco. Però come si fa a riconoscere la paternità di una soluzione meccanica a colui che detestava l'uso di mezzi meccanici per risolvere problemi geometrici? Una delle tante espressioni di Platone in merito è la seguente: "… perché così le prerogative della geometria vengono oscurate e tolte. Essa è ricondotta allo stato pratico, invece di fare come oggetti di essa le figure eterne ed incorporee".

Visto che il solo Eutocio riferisce della soluzione meccanica di Platone e, invece, Eratostene nella lettera a Tolomeo III non la cita, è probabile che non sia stato il grande filosofo l'autore del suddetto congegno. Forse Platone aveva ideato la soluzione dei due triangoli rettangoli per trovare la doppia proporzione continua e qualche suo commentatore aveva pensato a congegnare quel semplicissimo strumento meccanico che facilita la soluzione. Oppure Platone ha voluto dimostrare quanto fosse facile ricorrere a strumenti meccanici per risolvere problemi di geometria.

## 4 - La soluzione di Menecmo

Il più famoso allievo di Eudosso è stato Menecmo (380 a.C. , 320 a.C.) a cui si attribuisce la prima classificazione delle sezioni coniche, nacque ad Alopeconneso (città del Chersoneso Tracio, attuale Turchia) o forse a Proconneso (isola della Propontide). La soluzione del problema di Delo trovata da Menecmo con le sezioni coniche, annunciata nella lettera di Eratostene a Tolomeo II, è stata descritta da Eutocio in due forme diverse nel suo commento al secondo libro di Archimede: *"Su la sfera e il cilindro"*.



**“Duplicatore del cubo”: una riproduzione di Luca Taglieri**

Il commento di Eutocio è stato riportato in (Loria, 1987, p.151) e qui viene riproposta solo la seconda forma con un linguaggio più vicino a quello moderno:

Siano dati due segmenti AB e BG fra loro perpendicolari (fig. 1). Fra essi siano medi proporzionali i segmenti DB e BE, onde si abbia:

BG : BD = BD : BE = BE : AB. Dalla proporzione BG : BD = BD : BE si ha che il rettangolo di area $\overline{BG}\,x\,\overline{BE}$ è equivalente al quadrato di area $\overline{BD}^2$ ossia $\overline{EZ}^2$. Il punto Z apparterrà ad una parabola avente per asse BE e parametro BG.

[Nel linguaggio moderno della Geometria Cartesiana: se $\overline{BD} = x$ , $\overline{BE} = y$ , $\overline{BG} = a$ , allora $ay = x^2$, ossia $y = \frac{1}{a}x^2$.]

Inoltre, essendo BD : BE = BE : AB , il rettangolo di area $\overline{AB}\,x\,\overline{BD}$ è equivalente al quadrato di area $\overline{BE}^2$, cioè $\overline{DZ}^2$.

Quindi Z appartiene a una parabola di asse BD e parametro AB.
[Nel linguaggio moderno della Geometria Cartesiana: se $\overline{BD} = x$, $\overline{BE} = y$ , $\overline{AB} = 2a$ , allora $2ax = y^2$, ossia $x = \frac{1}{2a} y^2$. Il punto Z, intersezione delle due parabole, ha l'ascissa $\overline{BD} = x$ e l'ordinata $\overline{BE} = y$ che sono medie proporzionali tra BG e AB. Se AB = 2BG, allora l'ascissa di Z è il lato del cubo di volume $2a^3$].

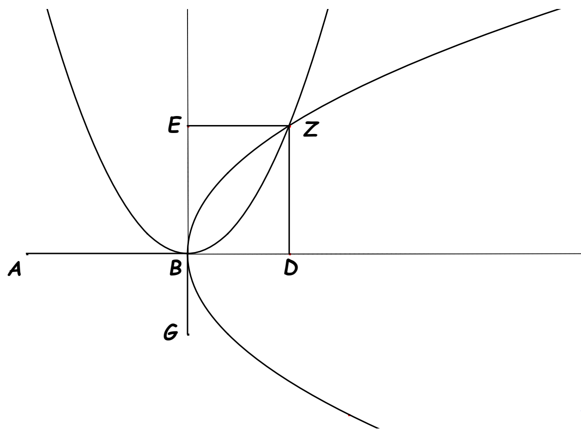



**Fig. 1**

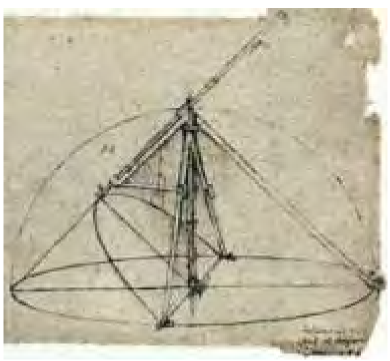
Il problema della duplicazione del cubo di lato BG si risolve, dunque, come segue:
dati due segmenti fra loro perpendicolari BG e AB [AB = 2BG] , si prolunghino indefinitamente oltre B. Si descriva una parabola di asse BE e parametro BG; poi una seconda di asse BD e parametro AB. Le due parabole si taglino in Z e da Z si conducano le perpendicolari ZD, ZE. Essendo allora ZE, cioè BD, una ordinata di parabola sarà $\overline{BG}\ x\ \overline{BE} = \overline{BD}^2$ , onde BG : BD = BD : BE.
Inoltre, essendo DZ, cioè BE, una ordinata di parabola sarà $\overline{AB}\ x\ \overline{BD} = \overline{BE}^2$ , onde

BD : BE = BE : AB. Ma si aveva prima BG : BD = BD : BE, perciò

BG : BD = BD : BE = BE : AB.

Come bisognava ottenere.

La parabola si descrive poi mediante il διαβητηξ [strumento di forma simile alla lettera greca λ ] inventato dal maestro meccanico Isidoro da Mileto e da lui descritto nel commento che compose alle χαμαριχα (arte di costruire gli archi) di Erone. (Loria, 1987, p.153). Chissà se somigliava al compasso parabolico di Leonardo da Vinci?



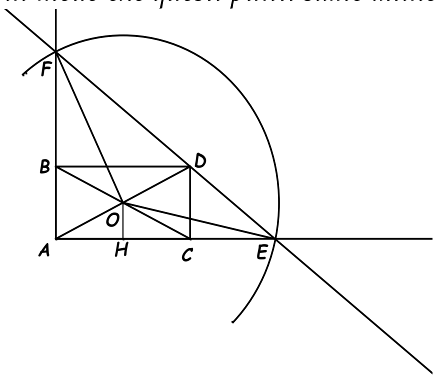
**Compasso parabolico di Leonardo da Vinci (Codice Atlantico, f. 1093 recto)**

## 5 - Soluzione di Apollonio-Erone

Fra le otto soluzioni del problema della duplicazione del cubo descritte da Eutocio nel suo prezioso commento al II dei libri di Archimede *Su la sfera e il cilindro*, c'è quella riportata di seguito attribuita ad Apollonio (Loria, 1987, p.400):

> *I due segmenti fra i quali bisogna inserire due medie proporzionali siano AB e AC che formano un angolo retto*

*in A. Con centro in B e raggio uguale ad AC si descriva una circonferenza e poi con centro in C e raggio uguale ad AB si descriva una seconda circonferenza la quale intersechi la prima in D e si conducano i segmenti DA, DB, DC, BC: si avrà allora un rettangolo. Con centro in O, punto d'intersezione delle diagonali del rettangolo, si disegni una circonferenza che intersechi i prolungamenti di AB e AC in F, E, facendo in modo che questi punti siano allineati con D.*




Le medie cercate sono i segmenti *BA* e *CE*. La dimostrazione viene esposta da Eutocio quando riporta la soluzione del problema della duplicazione del cubo fatta da Erone e Filone (Loria, 1987, p.575-576):

> *Come dunque troveremo due medie proporzionali consecutive tra due segmenti dati?* – si chiede Erone nel suo libro *Meccanica*, e prosegue - *… siano AB e AC i due segmenti dati, perpendicolari tra loro: sono i due segmenti fra cui vogliamo trovare due medie proporzionali. Completiamo il rettangolo ABDC conducendo i lati DB e DC, uniamo A con D e B con C, poi facciamo passare nel punto D una riga che intersechi i prolungamenti di AB e di AC e che noi, mediante rotazione, disporremo in una posizione tale che siano uguali i segmenti uscenti da O terminanti nei punti d'intersezione della riga con i prolungamenti di AB e di AC: siano F ed E tali punti.*

*Dico che i segmenti CE e BF sono medi proporzionali tra AB e AC; il primo termine dei rapporti sarà AB, il secondo sarà CE, BF il terzo e AC il quarto. Infatti, il quadrilatero ABDC ha i lati a due a due paralleli e gli angoli retti: dunque i quattro segmenti OA, OB, OC, OD sono uguali. Il segmento OA essendo uguale al segmento OC e la linea OE essendo già stata condotta, abbiamo:*

$$\overline{AE}\cdot\overline{CE}+\overline{CO}^2=\overline{OE}^2$$

[Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli OHC e OHE si ha:

$$\overline{OE}^2=\overline{OH}^2+\overline{HE}^2$$
$$\overline{CO}^2=\overline{OH}^2+\overline{HC}^2,$$

da cui, sottraendo, si ha:

$$\overline{OE}^2-\overline{CO}^2=\overline{HE}^2-\overline{HC}^2=(\overline{HE}+\overline{HC})(\overline{HE}-\overline{HC}).$$

Ma, $\overline{HE}+\overline{HC}=\overline{HE}+\overline{AH}=\overline{AE}$ , $\overline{HE}-\overline{HC}=\overline{CE}$ ,
e quindi, $\overline{OE}^2-\overline{CO}^2=\overline{AE}\cdot\overline{CE}$, ossia:

$$\overline{AE}\cdot\overline{CE}+\overline{CO}^2=\overline{OE}^2,$$

e questa è la relazione scritta da Erone].

*Similmente:*
$\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{BO}^2=\overline{FO}^2$.
*I due segmenti OE e FO sono uguali, onde risulta*
$\overline{AE}\cdot\overline{CE}+\overline{CO}^2=\overline{AF}\cdot\overline{FB}+\overline{BO}^2$
*ma* $\overline{CO}^2=\overline{BO}^2$, *quindi resta*
$\overline{AE}\cdot\overline{CE}=\overline{AF}\cdot\overline{FB}$,
*ossia* $\overline{AF}:\overline{AE}=\overline{CE}:\overline{FB}$ .

*D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli DCE, FAE, e FBD si ha:* $\overline{DC}:\overline{CE}=\overline{AF}:\overline{AE}=\overline{FB}:\overline{BD}$ .

*In conclusione,* $\overline{DC}:\overline{CE}=\overline{CE}:\overline{FB}=\overline{FB}:\overline{BD}$

*Ed essendo* $\overline{DC}=\overline{AD}$ *e* $\overline{BD}=\overline{AC}$ , *risulta che CE e FB sono medie proporzionali tra AB e AC. È quanto volevamo dimostrare.*

## 6 - La soluzione di Eratostene

Eratostene, nato a Cirene (oggi Shahhat, in Libia) nel 276 a.C., fu il terzo bibliotecario della famosa biblioteca di Alessandria d'Egitto dove morì nel 194 a.C., descrive accuratamente la sua soluzione meccanica dell'inserimento di due medie proporzionali tra due segmenti assegnati nella lettera indirizzata a re Tolomeo III già citata (Loria, 1987, p.344-345-346):

> *Siano dati due segmenti diseguali AE e DT fra cui bisogna inserire due medie in proporzione continua. Sia AE perpendicolare a ET e su ET si costruiscano tre rettangoli uguali dei quali si traccino le diagonali AZ, LH, MT fra loro parallele (fig. 2). Tenendo fermo il rettangolo intermedio, si accostino ad esso gli altri due, ponendo quello di sinistra al di sopra e quello di destra al di sotto di esso (fig. 3), in modo che i punti A, B, G, D si dispongano in linea retta. Per questi punti A, B, G, D si conduca una retta la quale incontri in K la retta ottenuta prolungando ET".*

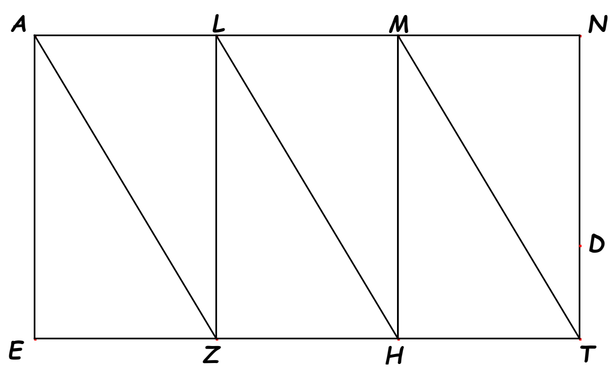



**Fig. 2**

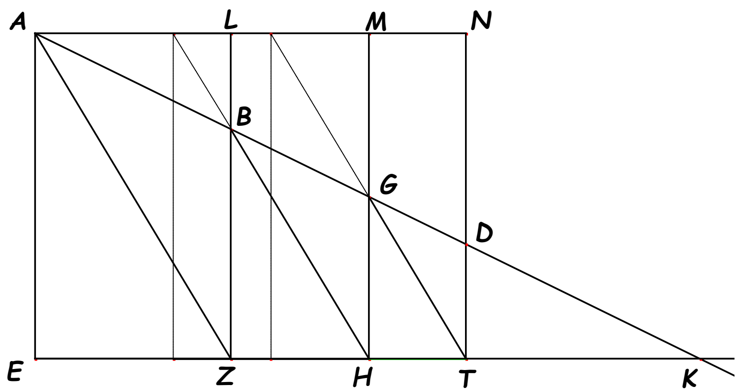



**Fig. 3**

Essendo paralleli i segmenti AE, BZ, si avrà:

AK : KB = EK : ZK,

e dal parallelismo di AZ e BH si avrà:

AK : KB = ZK : HK.

Da queste due proporzioni risulta:

(1) EK : ZK = ZK : HK.

Similmente, essendo paralleli BZ e GH, sarà:

BK : GK = ZK : HK,

ed essendo paralleli anche BH e GT, sarà:

BK : GK = HK : TK.

Da queste ultime due proporzioni risulta:

(2) ZK : HK = HK : TK.

Combinando la (1) e la (2) si ha:

(3) EK : ZK = ZK : HK = HK : TK.

In questo modo si sono trovate due medie proporzionali ZK e HK fra i segmenti EK e TK, mentre l'obiettivo è trovare due medie proporzionali fra AE e DT.

Per raggiungere l'obiettivo basta osservare le similitudini fra i triangoli AEK e BZK da cui si ha:

$$EK : ZK = AE : BZ,$$

fra i triangoli BZK e GHK da cui si ha

$$ZK : HK = BZ : GH$$

e infine fra i triangoli GHK e DTK da cui risulta:

$$HK : TK = GH : DT.$$

Finalmente, si può sostituire la (3) con la seguente doppia proporzione:

$$AE : BZ = BZ : GH = GH : DT$$

e l'obiettivo è raggiunto: BZ e GH sono due medie proporzionali tra i segmenti assegnati AE e DT.

Eratostene accompagna la precedente dimostrazione con la descrizione accurata dello strumento adatto a costruire le due medie proporzionali. Si tratta di tre tavolette rettangolari fra loro uguali che possono scorrere una sull'altra e di una riga che serve per allineare i punti A, B, G, D, T.

Un modello in bronzo di quello strumento, chiamato da Pappo *mesolabio*, sembra fosse stato infisso su una colonna ad Alessandria con la dimostrazione precedente scolpita e accompagnata da un epigramma (Loria, 1987, p.346):

> *Se, cari amici, voi cercaste di ottenere da ogni piccolo cubo un cubo doppio di esso, e regolarmente, cambiare ogni figura solida in un'altra, questo è in vostro potere; voi potete trovare la misura di un ovile, un fosso o un'ampia profondità di un buco, attraverso questo metodo, che consiste nel mettere tra due regolatori, due medi con i loro estremi che convergono. Non cercate di compiere la difficile impresa dei cilindri di Archytas, o di tagliare un cono in tre parti come Menecmo, o di tracciare col compasso una forma curva di linee, come è descritto dal timoroso di Dio, Eudoxus. Inoltre, potreste, su queste tavolette, trovare facilmente una miriade di significati, cominciando da una piccola base.*

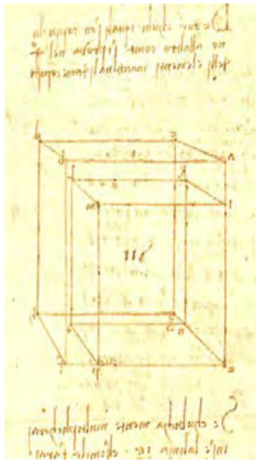
*Felice arte, Tolomeo, in quello, i suoi figli uguali per vigore nella gioventù, voi stessi avete dato loro tutto ciò che è caro alle muse e ai Re, e potrebbe forse in futuro, O Zeus, dio del paradiso, ricevere lo scettro nelle sue mani. Potrebbe essere così, e lasciate che ciascuno che vede questa offerta dica 'Questo è il dono di Eratostene di Cirene.*

***Mesolabio*: una riproduzione di Bruno Jannamorelli**

## 7 - Soluzione approssimata di Leonardo da Vinci

Nel Codice Atlantico, foglio 161 recto, Leonardo scrive:
*"Un cubo di lato 5 ha volume doppio di un cubo di lato 4".*

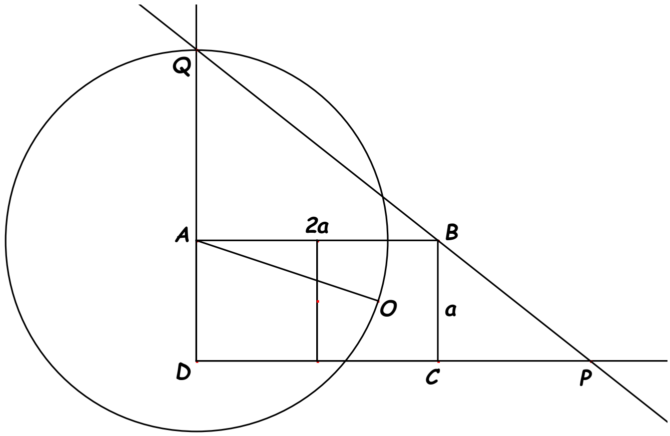
Il cubo di lato 4 ha volume 64 e il suo doppio è 128 la cui radice cubica è 5,039 di poco superiore a 5, soluzione proposta da Leonardo. Da un punto di vista empirico è una soluzione accettabile, ma è davvero poca cosa se confrontata con le soluzioni dei grandi geometri greci.

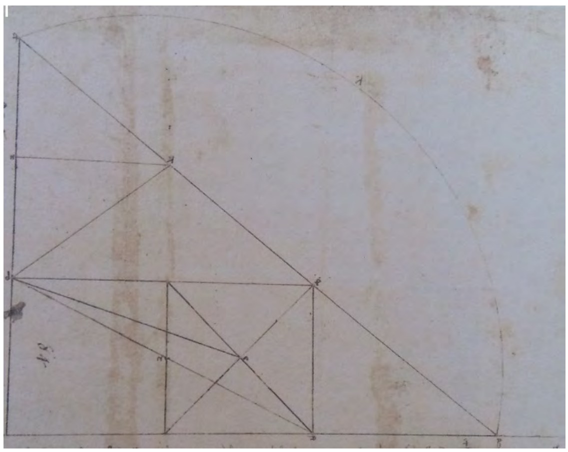


**Codice Atlantico, foglio 161 recto**

Nel Codice Atlantico, foglio 588 recto Leonardo propone una soluzione del problema della duplicazione del cubo in tre passi:

1. Disegna su un piano un rettangolo *ABCD* formato da due facce del cubo che si vuole raddoppiare.
2. Sul prolungamento del lato corto del rettangolo riporta con il compasso il segmento che parte dal vertice *A*, in alto a sinistra del rettangolo, e arriva al centro del quadrato a destra del rettangolo.
3. Unisci con una retta il punto trovato *Q* con il vertice *B* in alto a destra del rettangolo. Se chiami *P* il punto d'intersezione di tale retta con il prolungamento del lato lungo del rettangolo, allora *CP* è il lato del cubo di volume doppio di quello assegnato di lato *BC*.



**Leonardo da Vinci Codice Atlantico, foglio 588 recto**

Leonardo forse conosceva la soluzione classica attribuita da Eudosso a Erone e Apollonio criticandola e rispondendo ai matematici che non accettavano la sua soluzione empirica:

> *… dove li antichi mediante l'arco trovavan negoziando la dubbiosa situazione della corda, qui si fa il contrario, perché io fo la situazione della corda colli sua estremi e mediante quella truovo la situazione delli veri stremi dello arco …*

> *Se mi dirai per che cagione il semidiamitro del circolo entra sei volte nella sua circonferenza, e perché il diamitro del quadrato non è commisurabile alla sua costa, io ti dirò perché la linia retta, che si parte dall'angolo stremo superiore de l'un de' dua quadrati congiunti e termina nel centro del secondo quadrato, ci mostra la radice cuba de' dua cubi ridotti 'n un sol cubo.*

## Bibliografia

LORIA G. (1987), *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* Modena: Ist. Ed. Cisalpino Goliardica (ristampa anastatica Manuali Hoepli).

LORIA G. (1950) *Storia delle matematiche*, Milano: Hoepli.

BUNT L.N.H., JONES P.S., BEDIENT J.D. (1983) *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Bologna: Zanichelli.

CASTELNUOVO E. (2008), *L'officina matematica,* Molfetta: La Meridiana.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 63-120

# *Il problema dell'infinito e l'Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs di Simon Antoine L'Huilier*

Loredana Biacino*

* Già Professore Associato Università Federico II Napoli;
loredana.biacino2@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.140

**Sunto:** *Il primo che ha sottolineato la forza del concetto di limite in vista di una fondazione del calcolo fu d'Alembert. In questo lavoro si commenta una delle opere che hanno maggiormente subito l'influenza dell'enciclopedista francese, l'Exposition élémentaire di Simon L'Huilier: in essa tutta l'analisi degli odierni trattati di calcolo è impostata sulla base del concetto di limite, in modo tale da rappresentare così il momento più significativo nell'evoluzione di questo concetto prima della famosa trattazione di Cauchy. Oltre ad un'esposizione generale delle motivazioni dell'opera, molti passi particolarmente interessanti sono esposti in dettaglio.*

**Parole Chiave**: *Limite, differenziale, serie di Taylor, massimi e minimi.*

**Abstract:** *D'Alembert was the first to introduce the concept of limit with the aim of a foundation of the calculus. In this paper a book based in the seventieth century on the ideas of the French encyclopaedist, the Exposition élémentaire of Simon L'Huilier, is presented. In it for the first time all the calculus of the nowadays elementary treatises is formulated founding it on the notion of limit; it represents the more significative moment in the evolution of this concept before the famous treatment of Cauchy. A general exposition of the reasons of the book and some passages are exposed.*

**Keywords:** *Limit, differential, Taylor series, maxima and minima.*

## 1 - Introduzione

Nel 1784, esattamente cento anni dopo la pubblicazione della *Nova Methodus* di Leibniz, con cui il calcolo differenziale aveva fatto il suo ingresso ufficiale nel mondo della scienza, la sezione matematica dell'Accademia di Berlino bandì un premio di 50 ducati per chi avesse saputo fornire *una teoria chiara e precisa di ciò che si chiama "infinito" in matematica*. Il bando rispondeva alla necessità di dare un solido fondamento alla teoria degli infinitesimi e degli infiniti che nel Settecento era all'apice del successo per le sue ragguardevoli applicazioni alla meccanica e alla fisica, ma che era tuttora sprovvista di una sicura base teorica. Il trattato in cui i giovani la apprendevano era l' *Analyse des infiniment petits* scritto nel lontano 1696 dal Marchese de L'Hospital, che vi aveva introdotto gli insegnamenti impartitigli da Johann Bernoulli. Un testo che non poteva certo dirsi chiaro causa le nebulose definizioni che ne erano alla base. E le difficoltà nella comprensione dei principi delle nuove teorie aumentavano ancora con gli *Éléments de la géométrie de l'infini*, scritti nel 1727 dall'elegante e potente Bernard Le Bouvier de Fontenelle. O con i numerosi trattati di carattere scolastico redatti da sacerdoti, abati, frati in gran parte seguaci di Malebranche, che si ispiravano a Leibniz e al trattato di de L'Hospital, ma senza soffermarsi su questioni fondazionali, tra essi ad esempio l'*Analyse demontrée* di Charles-René Reyneau su cui lo studente d'Alembert aveva studiato.

Alla metà del Settecento risale anche il bel trattato in italiano di Maria Gaetana Agnesi *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748), tra l'altro uno dei testi di riferimento per il giovane Lagrange, testo che si ispira alla teoria delle flussioni di Newton, ma pur esso senza una particolare attenzione ai problemi di fondo. La preparazione dei matematici e degli studiosi avveniva in gran parte sull'*Introductio in Analysin infinitorum* (1748) e sull'*Institutiones Calculi Differentialis* (1755) di Eulero, di impostazione estremamente formalista.

Due voci si erano levate per cercare di attirare l'attenzione dei matematici sul problema dei fondamenti cercando di proporre una solida base teorica al nuovo calcolo che gli permettesse di schivare gli attacchi che da più parti gli venivano mossi: al di là della Manica, in seguito alle stringenti critiche portate da Berkeley a Newton e ai suoi seguaci con il pamphlet *The Analyst* (1734) e da altri attacchi simili, Colin Maclaurin aveva pubblicato il *Treatise of Fluxions* nel 1742 con cui cercava di spiegare la teoria delle flussioni di Newton come interpretazione in chiave moderna e traduzione in forma più comoda dell'antico rigoroso metodo di esaustione. Rifacendosi a Newton anche d'Alembert nel continente aveva compiuto un'operazione analoga introducendo nelle voci

*Limite* e *Différentiel* dell'*Encyclopédie* l'espediente tecnico del limite per formalizzare razionalmente procedure già da tempo impiegate dai matematici. Entrambe le impostazioni rifuggivano dall'infinito attuale e cercavano con l'idea dell'avvicinamento ad un limite di regolamentare l'uso dell'infinito potenziale in matematica.

L'ispiratore del premio dell'Accademia di Berlino e quasi certamente il materiale estensore del bando, fu l'italiano Joseph Louis Lagrange, direttore della Classe di Matematica, succeduto a Eulero in tale incarico nel 1766. Poiché ormai la Geometria Superiore faceva costantemente uso di grandezze infinite e i matematici moderni ammettevano che i termini grandezza e infinito sono contraddittori, nel bando si richiedeva di spiegare "come siano stati dedotti tanti teoremi veri da una supposizione contraddittoria" e quindi "si indichi un principio sicuro, chiaro, in una parola veramente matematico, adatto ad essere sostituito all'infinito, senza rendere troppo difficili, o troppo lunghe, le ricerche che con ciò si effettuano."

Il vincitore del premio, nel 1786, fu uno svizzero, Simon Antoine L'Huilier (1750-1840), nativo di Ginevra, che viveva nella città polacca di Pulawy dove faceva il tutore del figlio del principe Adam Kazimierz Czartorysky, che fu per primo ministro dell'educazione in Europa: l'opera con cui vinse, *l'Exposition élémentaire des principes des calculs supérieures pour server à la demande d'une théorie claire et precise de l'infini mathématique*, pubblicata l'anno successivo, fu giudicata subito dallo stesso Lagrange non soddisfacente, e non ebbe grande successo e diffusione. Di essa L'Huilier fornì una seconda edizione in latino nel 1795, citata questa con grande apprezzamento da Montucla [Montucla 1802, 251, 261]. L'Huilier proponeva come base di tutto il calcolo differenziale l'idea di limite, mutuandola da d'Alembert; l'idea si era andata sviluppando in lui già da qualche anno. Nel 1780 in Polonia era stata costituita una commissione per la riforma degli studi e la scelta dei migliori libri elementari: L'Huilier si vide aggiudicato il premio come miglior testo di matematica proponendo gli *Eléments de géométrie* che già conteneva una sezione sui limiti. L'idea sarebbe poi stata negli anni successivi ripresa e popolarizzata da Lacroix nel *Traité élémentaire* del 1802, versione semplificata del famoso *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* del 1797. Maggiore successo dell'*Exposition élémentaire* ebbero invece nel seguito le *Réflexions sur la Métaphysique du Calcol Infinitésimal*, di Lazare Carnot, pubblicate nel 1797, tratte dalla memoria con cui Carnot aveva partecipato allo stesso concorso e che ebbero una gran quantità di riedizioni e traduzioni. Ma in esse sul carattere sostanzialmente algebrico dell'opera di L'Huilier prevale il carattere mistico della concezione degli infinitesimi.

## 2 – La definizione di limite data da L'Huilier

L'Huilier intraprende la sua opera osservando che mentre gli antichi non ammettevano la possibilità che le grandezze assumessero un ultimo grado nella grandezza o nella piccolezza, i moderni credendo di poter considerare la grandezza nell'uno o nell'altro dei suoi estremi, danno per certa l'esistenza di tali estremi, producendo in tal modo non solo i risultati già conseguiti dagli antichi, ma molti altri ancora. Egli intende dimostrare con *l'Exposition élémentaire* che del concetto di infinito si può fare completamente a meno in matematica e il metodo di esaustione, convenientemente esteso, è sufficiente per dimostrare in modo certo i principi del nuovo calcolo, sulla scia di quanto avevano già fatto Newton e i suoi seguaci di cui il più importante è Colin Maclaurin, ma tra i quali si colloca anche d'Alembert. L'Huilier afferma infatti che tutta la sua opera è "come lo sviluppo delle idee sui principi del calcolo superiore che d'Alembert non ha fatto che abbozzare e proporre negli articoli *Limite e Différentiel* dell'Enciclopedia e nei suoi *Melanges*."

Ora a Newton e ai suoi seguaci anglosassoni si rimproverava di aver introdotto in matematica idee che sembravano estranee a tale disciplina come tempo, movimento, velocità e quindi si riteneva da parte dell'Accademia di Berlino, con l'istituzione del premio, che uno sforzo andasse fatto per espungere tali idee dalla teoria matematica, giudicando che in questo non fosse riuscito completamente il Maclaurin, con il suo trattato di carattere geometrico, pur profondo e solido, ma più lodato che letto a causa della sua complessità. Anche L'Huilier era convinto che la famosa definizione di Newton dell'ultimo rapporto delle grandezze evanescenti [Newton 1687, Scolio Lemma XI, libro I]:

> *Per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligenda est ratio quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt*

non fosse sufficientemente semplice e chiara e cogliesse per così dire le grandezze in uno stato intermedio fra l'esistenza e il niente, uno stato ben difficile da comprendere e spiegare. Però a lui, come anche a d'Alembert, sembrava che poi lo stesso autore chiarisse la sua posizione introducendo il concetto di limite:

> *Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant et quam propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, numquam vero*

> *trasgredi (neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum)*

ed è questa formulazione che d'Alembert e L'Huilier credono sia la chiave di volta, da cogliere ed esplicitare.

Del resto dopo circa settanta anni dalla formulazione di Newton, nel 1756, Jean Baptiste de La Chapelle alla voce *Fluxion* dell'Enciclopedia ripeteva ancora che una spiegazione del calcolo di Newton non poteva esser dato che in termini del concetto di limite e scriveva:

> *M. Newton s'est servi de ce mot de fluxion, parce qu'il considère les quantités comme engendrées par le mouvement; il cherche le rapport des vitesses variables avec lesquelles ces quantités sont décrites; et ce sont ces vitesses qu'il appelle fluxions des quantités ….La vitesse n'est rien de réel…c'est le rapport de l'espace au temps, lorsque la vitesse est uniforme: ….Mais lorsque le mouvement est variable, ce n'est plus le rapport de l'espace au temps, c'est le rapport de la différentielle de l'espace à celle du temps: rapport dont on ne peut donner d'idée necte, que par celle des limites. …Au reste le calcul des fluxions est absolument le méme que le calcul différentiel: voyez donc le mot DIFFE'RENTIEL, où les opérations et la métaphysique de ce calcul sont expliquées de la maniére la plus simple et la plus claire.*

Ora, anche se nel Continente, diversamente da quanto era avvenuto oltre Manica dopo le critiche di Berkeley, era più diffusa l'idea che il calcolo potesse trovare una sua sistemazione aritmetica basandolo sul concetto di limite, ancora ne mancava una definizione soddisfacente, tale che riducendo ad esso i procedimenti di calcolo in uso e spogliandoli di ogni idea d'infinito, si riuscisse a tradurre in modo rigoroso il metodo degli antichi e lo si semplificasse: questo progetto intende portare a termine L'Huilier a partire dal primo capitolo dell'*Exposition élémentaire* che prende l'avvio con le seguenti due definizioni:

**Definizione di limite** – *Sia data una quantità variabile sempre minore o maggiore di una quantità proposta e costante, ma che possa differire da essa per meno di ogni quantità data minore di essa: la quantità costante è detta il limite in grandezza o in piccolezza della quantità variabile.*

**Definizione di limite di un rapporto** – *Sia dato un rapporto variabile sempre più piccolo di un rapporto dato, ma che possa essere reso più grande di ogni rapporto assegnato più piccolo di quest'ultimo: il rapporto dato è chiamato il limite in grandezza del rapporto variabile; allo stesso modo sia dato un rapporto variabile sempre più grande di un rapporto dato; ma che possa essere reso più piccolo di ogni rapporto assegnato più grande di quest'ultimo: il rapporto dato è detto il limite in piccolezza del rapporto variabile.*

Lo stesso L'Huilier nella seconda edizione [L'Huilier 1795] dirà che le definizioni date e alcuni dei teoremi ad esse relativi sono stati desunti da un Opuscolo del matematico scozzese Robert Simson (1687-1768) [Simson 1776], un breve scritto che risente fortemente dell'influsso di Newton e cerca di esplicitarne la nozione di limite.

È degno di nota il fatto che Simson esordisce con la definizione di quantità costante o invariabile e la definizione di quantità mutabile. Analoga definizione è subito esposta per i rapporti. La definizione III del limite è così formulata: *Si quantitas mutabilis semper minor fuerit quantitate data, sed ita augeri poterit, ut major fiat quacumque quantitate data quae minor est prima quantitate data; vel si quantitas mutabilis semper major fuerit quantitate data, sed ita minui poterit, ut minor fiat quacumque quantitate data quae major est prima quantitate data; in utraque casu quantitas prima data dicatur Limes quantitatis mutabilis.*

Segue analoga definizione per il rapporto.

Le due definizioni precedenti sono nella seconda edizione [L'Huilier 1795] scisse ognuna in due a seconda che la grandezza minore del suo limite, supposta "crescente" nella nuova versione, possa essere aumentata in modo da superare ogni grandezza data minore del limite o la maggiore, supposta "decrescente", possa essere diminuita in modo da essere inferiore ad ogni grandezza data maggiore del limite. Si tenga presente che nella Proposizione I di [Simson 1776] è detto: *Sia data una retta AB e sia AC sempre minore di AB, ma che possa essere aumentata in modo che l'eccesso di AB sulla stessa possa essere reso minore di ogni retta data, cioè sia AB il limite della crescente AC. Allora il rapporto di eguaglianza è il limite del rapporto di AC ad AB.* Quindi la grandezza AB minore del suo limite è senz'altro supposta crescente.

L'Huilier vuole sviluppare il punto di vista di d'Alembert, che considera fondamentalmente i differenziali come puri espedienti per la semplificazione dei calcoli e riduce il calcolo differenziale al calcolo dei limiti dei rapporti di incrementi finiti, che diventano centrali nella trattazione. Vedremo alla fine della sezione come trattare i vari casi in cui possono presentarsi i limiti dei rapporti si rivelerà di fatto fruttuosa e fornirà il punto di partenza per una revisione, nella seconda edizione, della definizione stessa di limite.

Confrontiamo le due definizioni precedenti con quella di limite di d'Alembert:

"*Si dice che una grandezza è il limite di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinarsi alla prima con differenza minore di una grandezza data, piccola quanto si vuole, senza che la grandezza che si avvicina possa mai sorpassare la grandezza cui si approssima, in modo che la differenza d'una tale quantità al suo limite è assolutamente inassignable*".

In entrambe le definizioni di L'Huilier è messa in evidenza la parola "variabile"; la variabilità è invece sottintesa nella definizione di d'Alembert, ed è espressa dalle parole "sempre" nel caso di Huilier, "mai" in d'Alembert, parole attraverso le quali rispunta la variabile temporale, e il riferimento a Newton. In tutte si sottolinea la circostanza, troppo restrittiva rispetto alla definizione successiva del limite data da Cauchy, che la grandezza variabile sia sempre maggiore o sempre minore di quella costante, divaricazione che verrà ripetuta costantemente da L'Huilier nel seguito e di cui, riguardo a d'Alembert, già si è discusso in [Biacino Viola 2020, 64]. Inoltre l'asserzione che dato un rapporto variabile ad es. sempre più piccolo di un rapporto dato, esso può essere reso più grande di ogni rapporto più piccolo del dato non specifica se di volta in volta tutte le determinazioni del rapporto variabile a partire da una di esse debbano essere maggiori del rapporto più piccolo del dato: e quindi tale limite, secondo la definizione di L'Huilier, potrebbe anche coincidere con il limite massimo senza essere limite: ma, si noti bene, nel caso in esame si sottintende (e nella seconda edizione è richiesto) che il rapporto sia crescente e quindi il massimo limite non può che coincidere col limite.

Soprattutto in entrambe le definizioni di L'Huilier si parla volutamente di quantità come nella geometria classica e non si coglie ancora l'importanza di esprimere la variabilità nei termini della funzionalità, esplicitando la dipendenza della variabile che tende al limite dalla variabile indipendente. L'Huillier ha ben appreso la lezione di Eulero, l'importanza del concetto di funzione e della distinzione tra variabile dipendente e variabile indipendente, come appare in tutta la trattazione successiva dove la parola funzione è usata molto spesso, essendo x la variabile. Considerare la quantità variabile come funzione di una variabile reale x, e come appunto è fatto ripetutamente e sostanzialmente nel seguito, appariva forse una restrizione e un allontanamento dalla trattazione geometrica classica. Certo che nelle precedenti definizioni non appare, il riferimento essendo senz'altro sottinteso. Cauchy si libererà però nel seguito dal bisogno di rapportarsi agli antichi privilegiando l'introduzione immediata del concetto di funzione numerica e subordinando ad esso il concetto di infinitesimo e di limite. Egli comincerà il suo *Cours d'Analyse* con la definizione di funzione e proseguirà chiarendo: «Applicheremo la denominazione di quantità unicamente alle quantità reali positive o negative»", specificando che ogni grandezza sarà denotata da un numero. D'altro canto, se i primi esempi addotti da L'Huilier sono relativi a successioni e serie oppure relativi a limiti di grandezze geometriche, quali ad esempio il cerchio limite di poligoni, nel paragrafo VII si determina il limite di una funzione di tipo polinomiale $Q(x)$ dipendente dalla (variabile reale) $x$ e di funzioni si tratterà costantemente ed esplicitamente nel seguito.

Alle definizioni seguono poi degli esempi. Uno dei più interessanti è l'Esempio 3: data una curva qualunque riferita ad un asse, le cui ordinate vadano crescendo da zero fino ad un massimo preso come base: si divida l'asse in parti eguali. Per i punti di divisione si traccino le parallele alla base. Sulla base e sulle parallele si traccino dei parallelogrammi aventi come secondi lati i segmenti sull'asse. Tali parallelogrammi saranno detti circoscritti alla figura. Allo stesso modo si costruiscano i parallelogrammi solo sulle parallele, ottenendo i parallelogrammi inscritti. La differenza della somma dei parallelogrammi circoscritti e la somma di quelli inscritti è eguale al più grande di essi. Ma quest'ultimo, avendo la base assegnata, può diventare minore di ogni numero positivo assegnato. Ora la nostra figura è maggiore della somma dei parallelogrammi inscritti e minore della somma dei circoscritti: ma la differenza delle due somme è minore di ogni numero positivo. Dunque, la figura è il limite in grandezza della somma dei parallelogrammi inscritti ed è il limite in piccolezza della somma dei circoscritti.

L'esempio riprende quasi letteralmente [Newton 1687, Lemma II, Libro primo]: a sua volta quest'ultimo può considerarsi come ispirato dalla *Proposizione 19* di *Conoidi* e *Sferoidi* di Archimede: il ricorso all'autorità dell'antico geometra dava la possibilità di mettere al sicuro il nuovo calcolo infinitesimale, oggetto di attacchi da svariate parti. La proposizione archimedea segue la stessa logica ed ha lo stesso impianto dimostrativo ma si riferisce a (particolari) figure solide. Luca Valerio[1] nel suo *De centro gravitatis solidorum*, impadronendosi della tecnica archimedea, aveva trasportato al caso bidimensionale la dimostrazione di Archimede adattandola alle cosiddette figure monotone attorno a un diametro, cioè figure geometriche il cui contorno sia costituito da una base rettilinea e da una curva piuttosto generale, con un diametro nel senso di Apollonio e un solo punto di massimo centrale [Biacino 2010]. In Newton tale figura è spezzata a metà. E così infatti ce la presenta pure L'Huilier. E, fatto interessante, quasi a voler sottolineare il riferimento ad Archimede, egli, come pure Valerio, fa ruotare la figura attorno all'asse, determinando il volume del solido ottenuto. Come in Newton, l'asse della figura piana è sostanzialmente l'asse x, con un'inversione rispetto al diametro di Luca Valerio che va pensato invece sovrapposto a un asse delle ordinate. E'

1 Per l'uso e la trasformazione dei metodi archimedei che operò, Luca Valerio (1553-1618) ebbe grande ascendente sui matematici successivi per più di un secolo. Ad esempio il matematico inglese newtoniano Benjamin Robins (1707-51) nell'ampio dibattito seguito alle critiche di Berkeley, riteneva che alla base logica del calcolo vi fosse il concetto di limite per il quale egli fa riferimento alle idee vagamente precorritrici di Valerio e di Tacquet (1612-1660) [Boyer 1959, 230]. Galileo definisce Valerio, nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, "nuovo Archimede dell'età nostra".

importante sottolineare la differenza del punto di vista perché la curva di Luca Valerio, con terminologia moderna, è un grafico rispetto alla sua base, ma non rispetto al diametro, che è il segmento che viene successivamente suddiviso, mentre in Newton e L'Huilier il diametro è ribaltato sull'asse x, e la curva, dimezzata, è un grafico rispetto a tale asse. Questo è probabilmente legato al fatto che, mentre in Luca Valerio è assente il concetto di funzionalità, questo guida la costruzione di Newton e quella di L'Huilier.

## 3 – I teoremi sul limite di un rapporto

Nel paragrafo II è dato il Teorema 1, una condizione necessaria e sufficiente perché il limite di un rapporto sia rapporto d'eguaglianza che recita così:

**Teorema 1** – *Sia data una quantità costante; e ci sia una quantità variabile sempre più piccola o sempre più grande della prima, ma che possa differire da essa per meno di ogni quantità assegnata più piccola di essa. Allora il limite in piccolezza o in grandezza del rapporto della quantità costante alla data è il rapporto d'uguaglianza. E viceversa se il limite del rapporto di una quantità costante a una variabile più grande o più piccola di essa è il rapporto di eguaglianza in grandezza o piccolezza, allora la quantità variabile può differire dalla quantità costante per meno di qualunque quantità assegnata.*

Ai paragrafi III, IV e V del Cap.1 sono esposti alcuni teoremi sul limite di un rapporto. Si tenga ben presente che in tali teoremi i termini dei rapporti considerati sono tutti non nulli e non infiniti, in quanto lo zero e l'infinito non sono considerati come valori acquisibili dalle quantità nell'ambito della teoria delle grandezze e d'altro canto sono solo leciti rapporti di quantità omogenee.

Non mi sembra si possa mettere in dubbio una rivisitazione del *De centro gravitatis solidorum* di Luca Valerio, opera dove per la prima volta per il calcolo di aree, volumi e centri di gravità delle figure geometriche si usano delle procedure che snelliscono il metodo di esaustione e possono essere interpretate come procedure per il calcolo di limiti [Biacino 2010]. Vi è una sorprendente somiglianza tra i teoremi di L'Huilier e le analoghe prime tre proposizioni del capitolo secondo del *De centro*, le cui enunciazioni si corrispondono quasi letteralmente. Anche nelle dimostrazioni, per le quali in ambedue le trattazioni si distinguono i due casi del limite in grandezza o piccolezza, si usa lo stesso metodo per assurdo. La fonte però non è citata da l'Huilier, forse perché probabilmente la procedura è stata ripresa da qualche opera posteriore che si ispirava al *De centro*. La differenza fondamentale sta nella terminologia più svelta in L'Huilier, alla cui agilità concorre l'uso della parola limite.

**Teorema 2 del paragrafo III**– *Date due grandezze variabili suscettibili di limite l'una e l'altra in grandezza, o l'una e l'altra in piccolezza, se fra loro hanno un rapporto costante anche i limiti sono nello stesso rapporto*[2].

Dim. – Consideriamo solo il caso che $A'$ e $B'$ siano i limiti in grandezza di $A$ e $B$ e che $A$ e $B$ abbiano rapporto costante

---

[2] Si tratta della trasposizione della seguente proposizione di Valerio:

**Proposizione 2. II** – *Siano A, B, C, D quattro grandezze e siano E ed F altre due grandezze dello stesso genere di A e B e che superino (o siano inferiori a) A e B di tanto poco quanto si vuole. Sia E : F = C : D; allora A : B = C : D.*

Ma anche la Proposizione XVII di [Simson 1776], riferita evidentemente a segmenti di retta, è analoga: Siano date due grandezze AB e CD, siano date altre grandezze AE, AF, etc.. minori di AB ma che possono divenire maggiori di qualunque grandezza minore di AB; e siano date le grandezze CG, CH etc… tutte minori di CD che possano essere maggiori di qualunque quantità minore di CD; siano i rapporti di AE a CG o di AF a CH etc… sempre eguali tra loro; allora il rapporto di AB a CD è uguale a questo rapporto.

eguale ad $a : b$, perché in modo analogo si ragiona nell'altro caso. Se il rapporto di $A'$ a $B'$ non è eguale al rapporto $a : b$ allora sarà o maggiore o minore. Se $A' : B' > a : b$ allora esiste $a'$ tale che $(A'-a') : B' = a : b = A : B$. Poiché si può prendere $A > A'-a'$ dalla precedente proporzione si trae che deve essere $B > B'$ contro l'ipotesi che $B'$ è il limite in grandezza di $B$. In modo analogo si ragiona se $A' : B' < a : b$.

L'Huilier asserisce ovviamente che il Teorema 2 è uno dei fondamenti del metodo di esaustione utilizzato da Euclide e da Archimede e ne fornisce alcune applicazioni tra cui la dimostrazione che due circonferenze o due cerchi stanno tra loro rispettivamente come i loro raggi o i quadrati dei loro raggi, due piramidi della stessa altezza stanno fra loro come le basi, lo stesso vale per coni, cilindri etc...

NOTA - Ci si rende facilmente conto del motivo per cui i limiti in considerazione vanno presi in piccolezza o in grandezza. In Valerio una tale specificazione aveva senso in quanto egli aveva in mente un preciso progetto: da un lato definire una procedura di approssimazione delle figure geometriche piane e solide e dall'altro allargare il campo di applicazione del metodo di esaustione con un insieme di regole che permettessero sostanzialmente un passaggio al limite. Ma il metodo di esaustione si applica a successioni di figure invadenti e quindi tutte minori della figura di cui si vuol calcolare l'area o il volume e a successioni di figure circoscritte, che tale figura includono. Anche L'Huilier, per appoggiare su una base solida ed indiscussa i suoi argomenti, intende far riferimento al metodo di esaustione, ma forse, operando in un ambito molto più generale di Valerio, la restrizione relativa ai limiti in grandezza o in piccolezza sarebbe potuta cadere. Questa specificazione è sempre presente nel seguito, sia nell'enunciazione che nelle dimostrazioni. Come vedremo tra poco nella seconda edizione tale ipotesi sarà indebolita.

L'Huilier applica il precedente teorema ad esempio nel Cap. VII, quando dimostra il seguente

**Lemma 1 del paragrafo XLIII**: *Se una curva ha un diametro, cioè una retta che taglia in due parti eguali tutti i segmenti di un fascio di rette parallele intercettati dalla curva, le due figure comprese tra la curva, una delle precedenti corde e il diametro sono eguali.*

Dim. - Siano inscritti e circoscritti nelle due parti situate da un lato e dall'altro del diametro dei parallelogrammi aventi per basi le corde e come altro lato le parallele al diametro: le somme dei parallelogrammi inscritti situati da una parte e dall'altra del diametro sono eguali, lo stesso accade per le somme dei parallelogrammi circoscritti e pertanto le due figure situate da un lato e dall'altro del diametro, in quanto limiti di queste somme, sono anch'esse eguali tra loro.

Ritornando al primo capitolo troviamo anche il seguente enunciato:

**Teorema 3 del paragrafo IV**– *Siano date due quantità variabili di specie differenti, suscettibili di limite, entrambe in grandezza o in piccolezza. I rapporti di queste quantità variabili a due quantità costanti siano sempre uguali fra loro. Allora anche i rapporti dei loro limiti alle quantità costanti sono eguali tra loro*[3].

---

[3] Si constata subito che tale proposizione è equivalente alla seguente di Valerio:

**Proposizione 2. I –** *Se A, B, C, D sono quattro grandezze e se, comunque si prefissino due grandezze dello stesso genere di A e C rispettivamente, esistono E e F dello stesso genere di A e C rispettivamente, con E>A e F>C (oppure E<A e F<C) che differiscano da A e C per meno delle grandezze assegnate e siano tali che E : B = F : D, allora A : B = C : D.*

Tale teorema differisce dal precedente in quanto le due quantità variabili sono supposte di specie diverse e quindi non se ne può considerare il rapporto: nel caso siano della stessa specie la dimostrazione della proposizione si ottiene dalla proposizione precedente permutando i medi.

L'Huilier fornisce subito dopo il Teorema 3 la sua applicazione alla quadratura della parabola e alla cubatura di un paraboloide generato dalla rotazione d'un segmento parabolico attorno all'asse.

Egli poi aggiunge anche il seguente teorema, che è un teorema di unicità del limite per i rapporti:

**Teorema del paragrafo V** – *Se due rapporti variabili sono suscettibili di limite e sono sempre eguali tra loro, anche i loro limiti sono eguali*[4].

Si osservi che il precedente teorema può essere enunciato anche in generale per quantità variabili non necessariamente rapporti: si ottiene così il teorema dell'unicità del limite, che d'Alembert enuncia in *Limite* e dimostra in *Différentiel* nella seguente forma:

*Si deux grandeurs sont la limite d'une méme quantité, ces deux grandeurs seront égales entr'elles.*

Per Valerio il riferimento ai rapporti è d'obbligo svolgendosi tutta la sua trattazione alla maniera classica nell'ambito della teoria delle proporzioni; per L'Huilier questo potrebbe essere evitato, ma forse egli segue questa via per la stessa motivazione già presa in considerazione nella NOTA precedente. L'Huilier, come già è stato sottolineato, intende

[4] Si noti che il teorema è enunciato esattamente allo stesso modo nella Proposizione VIII di [Simson 1776], la cui dimostrazione fa riferimento ai rapporti di segmenti.

sviluppare il punto di vista di d'Alembert, per il quale i differenziali sono solo espedienti per la semplificazione dei calcoli e il calcolo differenziale non è altro che il calcolo dei limiti dei rapporti di incrementi finiti.

Segue il:

**Teorema del paragrafo VI** – *Il rapporto composto di un numero qualunque di rapporti suscettibili di limite ha per limite il rapporto composto dei limiti di tali rapporti*[5].

In esso vengono condensati in un unico enunciato i vari teoremi sui limiti della somma, del prodotto e del rapporto di rapporti suscettibili di limite. La dimostrazione, come del resto l'enunciazione, è veramente ridondante. Ora d'Alembert aveva già chiaramente enunciato nella voce *Limite* dell'Enciclopedia il teorema sul limite del prodotto, e nella voce *Différentiel* il teorema sul differenziale di una somma e di una potenza. La complicazione nasce dal prendere in considerazione, invece di quantità, rapporti di quantità[6].

Una immediata applicazione del precedente teorema è subito fornita nel seguente enunciato in cui si evidenzia il ruolo svolto dalla funzionalità:

**Teorema del paragrafo VII** – *Siano A, B, C, D, …, L, M, N quantità date; sia x una quantità variabile che può essere minore di*

[5] L'Huilier sintetizza in un unico enunciato le Proposizioni XI, XII, XIII, XIV, XV e XVI di [Simson 1776] nelle quali l'autore calcola in vari casi i limiti dei rapporti che si ottengono applicando l'invertendo, il componendo e lo scomponendo a eguaglianze di rapporti di cui si conoscono i limiti o calcola il limite di un prodotto di rapporti.

[6] In [L'Huilier 1795] il capitolo sui limiti dei rapporti è molto ampliata e l'autore per molte dimostrazioni delle proprietà delle proporzioni indica il testo del 1793 di Christoph F. Pfleiderer, *Propositionum de Rationibus in se diversis Demonstrationes ex solis Libri V Elemet. definitionibus et propositionibus deductae*. Hauber, Tubinga.

*ogni quantità data; siano b, c, d, …, l , m, n esponenti dati in ordine crescente. Sia Q funzione di x tale che:* $Q = A + Bxb+Cxc+Dxd+ ... + Lxl+Mxm+Nxn$*; allora il rapporto di Q ad A è rapporto di eguaglianza, in grandezza se* $B>0$*, in piccolezza se* $B<0$*.*

Segue dalla dimostrazione che ogni funzione $Q$ della variabile $x$, supposta tacitamente positiva, $Q= Bx^b+Cx^c+Dx^d+ ... + Lx^l+Mx^m+Nx^n$ può essere resa minore di ogni quantità assegnata.

Si osservi che, proprio in un'applicazione in cui è coinvolta la funzione Q, L'Huilier introduce per la prima volta all'interno di una formula la notazione *lim* per indicare il limite [L'Huilier 1787, 24].

Il gruppo di proposizioni del paragrafo VII si conclude con il seguente fondamentale teorema sul limite del rapporto:

**Teorema (fondamentale)** – *Il limite del rapporto di due quantità variabili è eguale al rapporto dei limiti*[7].

La dimostrazione, in cui come nelle altre del testo si sottintendono i quantificatori universali ed esistenziali, si basa su un lemma precedente per cui se Q è una quantità variabile che ha per limite Q′ allora il rapporto di Q a una quantità costante A ha per limite il rapporto Q′ : A. Infatti se Q′ è limite in grandezza allora è Q : A < Q′ : A e quindi, poiché *lim Q : A* non può essere maggiore di *Q′: A*, o è eguale a *Q′ : A* oppure

---

[7] Si osservi come più snella e più generale appare tale enunciazione rispetto a quella di Valerio, più restrittiva in quanto le grandezze variabili hanno costantemente lo stesso rapporto:

**Proposizione 2. III –** *Siano date quattro grandezze A, B, E e F, di cui le seconde variabili e supposte simultaneamente maggiori o minori di A e B rispettivamente; se E e F hanno costantemente lo stesso rapporto e se E e F possono essere scelte in modo da differire da A e B rispettivamente per meno di una grandezza assegnata comunque piccola allora anche A e B hanno lo stesso rapporto.*

esiste una grandezza $q$ tale che $lim\ Q : A = Q' - q : A$. Ma quest'ultima relazione è impossibile in quanto se fosse vera allora dato che $Q' - q < Q$ per un $Q$, si avrebbe $Q' - q : A < Q : A$, da cui segue $Q : A\ (<Q'-q : A\ ) < Q : A$. Analogamente si ragiona se $Q'$ è limite in piccolezza. Basandosi sul lemma L'Huilier dimostra il teorema fondamentale nel modo seguente. Siano $q$ e $Q$ due quantità variabili aventi limiti $q'$ e $Q'$ e sia $A$ una quantità costante; allora per il *lemma* $lim\ q : A = q' : A$ *e* $lim\ A : Q = A : Q'$, dunque $lim\ q : Q = q' : Q'$.

Su questo teorema L'Huilier ritorna più volte; nel 1795, nel primo capitolo della seconda edizione lo accompagna al seguente ragionamento [L'Huilier 1795, paragrafo 12], col quale egli si rende conto della inadeguatezza della sua prima definizione di limite: se si suppone che due quantità siano limiti di due quantità variabili di cui una è crescente e l'altra è decrescente in modo che il loro rapporto sia sempre o crescente o decrescente allora il rapporto delle due quantità date coincide con il limite del rapporto delle due quantità variabili. Ma che succede se le due quantità variabili sono entrambe o crescenti o decrescenti? A questo interrogativo L'Huilier risponde col

**Teorema del paragrafo 12** - *Siano date due quantità che sono limiti di due quantità variabili contemporaneamente decrescenti o crescenti, in modo che gli eccessi con cui superano i propri limiti possano diventare simultaneamente minori di ogni quantità data. Allora il rapporto delle due quantità variabili può diventare simultaneamente maggiore di ogni rapporto dato che sia minore del rapporto del primo al secondo limite e minore di ogni rapporto che sia maggiore del rapporto del primo al secondo limite.*

Aver considerato in dettaglio svariati casi in cui può presentarsi il limite di un rapporto presenta ora la sua utilità: L'Huilier si rende conto a questo punto che la precedente situazione non rientra nella sua definizione, anche se gli sembra evidente che anche in tal caso possa essere lecito parlare di limite. Prende allora le distanze dalla definizione di d'Alembert con la seguente:

**Estensione della definizione di limite -** *Se un rapporto variabile alternativamente diviene maggiore o minore di un dato rapporto e può avvicinarsi ad esso più di qualunque altro rapporto proposto, sia maggiore che minore, allora il dato rapporto è ancora detto il limite del rapporto variabile.*

## 4 – I rapporti differenziali e la serie di Taylor

Seguendo il percorso indicato da d'Alember, L'Huilier stabilisce che il punto fondamentale di tutta la sua trattazione è la seguente:

**Definizione** – *E' detto rapporto differenziale di due quantità variabili il limite del rapporto dei loro incrementi simultanei, ovvero il rapporto cui il rapporto di questi incrementi si avvicina tanto più quanto più essi sono piccoli.*

L'Huilier sottolinea che se $P$ è funzione di $x$ allora $lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e $\frac{dP}{dx}$ vanno intesi come la stessa quantità: così con la definizione del limite, si dipana la nube di mistero che avvolgeva da un secolo la seconda espressione: secondo la lezione di d'Alembert e in contrasto con la definizione di Leibniz nella *Nova methodus*, $dP$ e $dx$ considerati separatamente non hanno alcun significato, il simbolo $\frac{dP}{dx}$ non è una frazione composta da un numeratore e un denominatore, ma rappresenta un'abbreviazione del limite del rapporto degli incrementi. Si noti che tale asserzione è giustificata dal fatto che per d'Alembert e L'Huilier non ha senso parlare di infinitesimi e quindi non ha senso il rapporto $\frac{dP}{dx}$; ma bisogna tener presente che, una volta definita la derivata $P'(x)$, Cauchy definirà come ben noto il differenziale $dP=P'(x)\Delta x$ come funzione lineare di $\Delta x$, in particolare $dx=\Delta x$ e quindi $\frac{dP}{dx}$ verrà a rappresentare effettivamente un rapporto [Cauchy 1823, 13] (situazione che non si ripropone per i differenziali di ordine superiore). È importante osservare che Cauchy, avendo già dato la definizione della derivata, chiarirà completamente con la sua definizione di differenziale lo schema abbozzato da Leibniz nel 1684 nella prima pagina del *Nova Methodus*.

Subito dopo aver dato la definizione di differenziale L'Huilier osserva che poichè $P$ è funzione di una variabile $x$, allora $\frac{dP}{dx}$ è a sua volta funzione di $x$. E quindi può dare luogo al suo differenziale che sarà detto differenziale del secondo ordine e così di seguito si potrà parlare dei differenziali di ordine superiore.

Nel Cap. III è illustrato un altro modo di differenziare le funzioni, rappresentandole come somme di una serie di potenze. Che sia possibile tale rappresentazione per ogni funzione non è in alcun modo messo in dubbio nella prima edizione, come credeva la maggior parte dei matematici del tempo. Sia allora $P=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ \ldots$, si ha:

$$P(x+\Delta x)=P(x)+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+D'\Delta x^4+\cdots \qquad (1)$$

essendo $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ funzioni di $x$, e quindi

$$\frac{\Delta P}{\Delta x}=A'+B'\Delta x+C'\Delta x^2+D'\Delta x^3+\ldots \qquad (2)$$

Ora, in virtù della definizione di limite del rapporto incrementale, dalla (2) segue $\frac{dP}{dx}=A'$; quindi una volta che sia data la (1) è immediata la deduzione di carattere algebrico di $A'$ a sua volta funzione di x e pertanto somma di una serie di potenze. L'Huilier itera quindi la procedura, dall'essere:

$$\Delta\frac{dP}{dx}=A''\Delta x+B''\Delta x^2+C''\Delta x^3+\ \ldots$$

si ricava $\quad lim \frac{\Delta}{\Delta x}(\frac{dP}{dx})=A''$;

tale limite si indica con $\frac{d^2P}{dx^2}$ ed è detto differenziale del secondo ordine. In modo analogo sono poi definiti i differenziali di ordine superiore. In tutti questi casi L'Huilier ci tiene a sottolineare che, anche se i differenziali si presentano come rapporti, in effetti non lo sono.

Segue la giustificazione, in maniera piuttosto complessa e non scevra di errori, della sviluppabilità delle funzioni in serie di Taylor, che parte dalla supposizione che una qualunque funzione sia sviluppabile in serie di potenze. Ripeterà più volte nel seguito che egli ritiene fondamentale per la sua trattazione tale sviluppo, in quanto costituisce una base solida del calcolo cui fornisce una struttura aritmetica, senza alcun riferimento all'infinito e agli infinitesimi. E ricorderà gli autori da lui letti che su tale base hanno impostato le loro opere: Jacques Cousin (Parigi 1739-1800) nelle *Leçons de Calcul différentiel et intégral* (pubblicate nel 1777 in seguito alla nomina come professore di matematica all'École Militaire avvenuta nel 1769)[8] e Wenceslaus Karsten (1732-1787) nel

[8] Il *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* [Cousin 1796] ne è la seconda edizione. Diversamente dal testo di L'Huilier, il *Traité,* come in genere i trattati dell'epoca, contiene una gran quantità di problemi di calcolo differenziale molti dei quali di notevole difficoltà esposti in una maniera molto tecnica, a livello spesso di eserciziario. Cousin calcola integrali definiti, risolve equazioni differenziali ordinarie, equazioni a variabili separabili e tratta infine con esempi svariati metodi di risoluzione di equazioni alle derivate parziali. Spesso cita soluzioni date da molti matematici, suoi contemporanei o di poco anteriori, ai problemi considerati, quali Eulero, Newton, Cotes, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Riccati, Monge e Condorcet. Interessante un suo nuovo metodo, presentato all'Accademia delle Scienze nel 1772, anno in cui cominciò a farne parte, basato su particolari trasformazioni atte ad

*Mathesis Theoretica elementaris atque superioris* (scritto nel 1760 come libro di testo per gli studenti).

Per effettuare la sua dimostrazione di carattere completamente aritmetico L'Huilier introduce il calcolo delle differenze finite e segue un procedimento, che sarà elogiato per la sua chiarezza in [Montucla 1802, 251], partendo dalle seguenti posizioni:

$$P(x+\Delta x)=P', \quad P(x+2\Delta x)=P'', \ \ldots, \ P(x+N\Delta x)= P^N;$$

osserva che $P^N=P^{N-1}+\Delta P^{N-1}$ e ricava che:

$$P'=P(x)+\Delta P;$$
$$P''=P+2\Delta P+\Delta^2 P;$$
$$P'''=P+3\Delta P+3\Delta^2 P+\Delta^3 P;\ldots$$

e in definitiva:

$$P(x+n\Delta x)=P(x)+n\Delta P+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 P+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}\Delta^3 P+\ \ldots.$$

A questo punto pone $b=n\Delta x$ e dalla precedente relazione ricava:

$$P(x+b)=P(x)+b\frac{\Delta P}{\Delta x}+\frac{b(b-\Delta x)}{1\times 2}\frac{\Delta^2 P}{\Delta x^2}+\frac{b(b-\Delta x)(b-2\Delta x)}{1\times 2\times 3}\frac{\Delta^3 P}{\Delta x^3}+\ldots. \qquad (3)$$

Fissato $n$, a secondo membro compare un polinomio nella variabile $b$, che coincide con $P(x+b)$ nel caso che sia $b=\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$, …, $n\Delta x$. Per valori diversi di $b$ ovviamente non vale l'eguaglianza, ma se $\Delta x$ è piccolo ed $n$ grande si ottiene in generale una buona approssimazione di $P(x+b)$. La formula precedente è sostanzialmente la formula delle differenze finite di Gregory- Newton, nota a Gregory sin dal 1670 e che

integrare molte equazioni differenziali alle derivate parziali. E poi una trattazione sulle equazioni delle corde, su equazioni alle quali si perviene nelle ricerche sulla propagazione del suono, su altri casi di equazioni del secondo ordine e su integrali particolari di tali equazioni. Un capitolo è dedicato all'integrazione delle equazioni lineari alle differenze finite con varie applicazioni, tra cui una alla matematica finanziaria e una al calcolo delle probabilità. L'ultimo capitolo è dedicato all'uso delle derivate parziali nell'inversione delle serie, con un'applicazione al calcolo delle variazioni.

compare nel famoso lemma 5 del Libro terzo dei *Principia* [Newton 1687], il cui enunciato recita così: *Invenire lineam curvam generis Parabolici, quae per data quotcumque puncta transibit*. Ad essa si era ricondotto anche Brook Taylor nella sua *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715). Il metodo delle differenze finite è nell'impostazione e nelle notazioni un metodo algebrico astratto, non geometrico e per questo motivo non ebbe grande seguito tra i matematici inglesi. Nella (3), quando *Δx=0,* Taylor sostituiva in modo non rigoroso $\frac{\Delta P}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 P}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 P}{\Delta x^3}$ etc…, con le flussioni P'(x), P''(x), P'''(x) etc… e dalla formula precedente ricavava la serie:

$$P(x+b)=P(x)+b\frac{dP}{dx}+\frac{b^2}{1.2}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3}+\ldots \quad (4)$$

Una serie analoga alla (4) era già stata ottenuta da Leibniz con un passaggio al limite e indipendentemente un risultato dello stesso tipo era stato ottenuto anche da Johan Bernoulli: ne abbiamo notizia dal *Commercium philosophicum et mathematicum di Leibniz e Bernoulli* e dalla pubblicazione che ne fece Bernoulli sugli *Acta eruditorum* del 1694[9]. Taylor non cita questi lavori. L'Huilier non fa menzione di alcuno di essi nella *Exposition.*

[9] Nella epistola V di [Leibnitz, Bernoulli 1745] Bernoulli espone un metodo universale per le serie con cui si possono esprimere tutte le quadrature e che quindi è adatto all'inversione del metodo delle tangenti. Infatti, data una qualunque funzione *n* della *z*, afferma che il suo integrale è dato da $nz - \frac{1}{1.2}z^2\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}z^3\frac{d^2n}{dz^2}$ etc … , dove, quando la formula si applica in un dato caso, *n* e gli altri coefficienti sono calcolati in un punto fisso e quindi la serie consta di termini algebrici. Nella epistola VI riprende il discorso e usa per l'integrale la scrittura: $Iydx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}x^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^2y}{dx^2}$ ….etc. Il risultato fu pubblicato sugli *Acta eruditorum* nel 1694 con il titolo *Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quondam generalissimam*. Una breve storia della serie di Taylor è presente in [Kline 1972, 513].

Ritornando al discorso precedente, L'Huilier, cerca di stabilire la (4) rigorosamente, ma ovviamente non riesce nel suo tentativo. Più volte L'Huilier torna su questo ragionamento, in quanto si rende conto della sua fallacia; in particolare torna sulla dimostrazione precedente in [L'Huilier 1787, 208-210], dopo il giudizio dell'accademia e ne fornisce una nuova che egli aveva appreso solo più tardi (ne riferisce nella seconda edizione) essere stata data da Abraham Kästner (1719-1800), nel 1761 nel testo *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen (Elementi di Analisi dell'Infinito),* dove l'autore riprendeva la teoria di Newton delle prime e ultime ragioni (e si avvaleva per farlo di espressioni tratte dal discorso poetico). Tale dimostrazione può essere riassunta al seguente modo per passi successivi: prima si osserva che essa vale per una potenza della *x*, per la formula del binomio;

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\mathrm{h} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n$$

dove $\binom{n}{k}n^{n-k}$ coincide con la derivata di ordine k di $x^n$ divisa per k! . Ne consegue che la formula è vera per un polinomio; a questo punto supposto che ogni funzione sia sviluppabile in una serie di potenze[10] si tratta questa alla stregua di un

[10] Questa ipotesi, in seguito ai lavori di d'Alembert e di Eulero sulle corde vibranti e la richiesta da parte di Eulero che la posizione iniziale della corda fosse del tutto arbitraria, era già stata messa in dubbio da molti matematici. Ad esempio in [L'Huilier 1795] è citato uno scritto di Christoph Friedrich Pfleiderer(1736-1821), professore all'Università di Tubinga e amico di L'Huilier, dal titolo *Theorematis Tayloriani demonstratio* (Tubinga 1789), dove si cerca di dimostrare il teorema di Taylor senza supporre che ogni funzione P(x) sia sviluppabile in serie di potenze, ma si suppone che sia sviluppabile in serie di potenze nella variabile $\Delta$x l'incremento P(x+$\Delta$x) – P(x). Pfleiderer fu un rappresentante del neoeuclidismo settecentesco, fu favorevole al metodo sintetico e privilegiò di conseguenza un approccio geometrico ai procedimenti di calcolo svolti

polinomio come al passo precedente, semplicemente ignorando le difficoltà che provengono dalla presenza di un numero infinito di addendi.

La procedura ricorda il nuovo calcolo introdotto sin dal 1772 da Lagrange in una memoria pubblicata presso l'Accademia di Berlino *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, e ripreso in [Lagrange 1797]: ivi Lagrange suppone che sia verificata una relazione analoga alla (1). Osserva che si può dire che *A′, B′, C′, D′* …. che compaiono in (1) sono delle "nuove funzioni di x, derivate in certo modo" da *P(x)*. Inoltre, Lagrange dimostra che detta *A′* la derivata di *P(x)*, si ha che *B′* è la derivata di *A′* divisa per 2, *C′* la derivata di *B′* divisa per 3 etc

Appare così la parola "derivata", usata per la prima volta nel calcolo differenziale per denotare una funzione. Quindi se denotiamo con *P′(x)* la derivata di *P(x)*, con *P″(x)* la derivata della derivata di *P(x)*, detta *derivata seconda*, etc.. allora: *A′ =P′(x), B′=P″(x)/2, C′=P″′/3!* etc.… Il problema è così ridotto alla determinazione della derivata prima cui tutte le altre si riconducono, problema che Lagrange risolve dimostrando che è possibile effettuare lo sviluppo in serie di Taylor, anche se ammette che il discorso non è del tutto generale; mostra come nel caso delle funzioni elementari la derivata si possa ottenere mediante sviluppo ottenuto trasformandole direttamente. Il

per via analitica. Contribuì al rinnovamento della matematica in Germania introducendo le procedure di calcolo di Brook Taylor e sostenendo con Robert Simson e Colin Maclaurie la necessità di fondare il calcolo sulla rigorosa geometria archimedea, in un ambiente spesso ostile. In [Pozzo 1989, 78 e s.] è ritenuto un punto di collegamento importante tra la matematica e la filosofia in Hegel, che seguì le sue lezioni di matematica e fisica all'Università di Tubinga.

ragionamento di Lagrange parte dal presupposto che la maggior parte delle funzioni siano senz'altro localmente sviluppabili in serie di potenze, tranne in alcuni casi eccezionali, che sono per lui quelli in cui la funzione o qualche sua derivata sono infinite, punti che essendo isolati non tolgono validità alla trattazione: a questo risultato egli perviene tramite una dimostrazione erronea della sviluppabilità in serie di potenze delle funzioni.

Dopo Cauchy sappiamo che affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor in un certo intervallo l'ipotesi che sia dotata di derivate di ordine comunque elevato è necessaria ma non sufficiente. Comunque, richiede l'esistenza di quelle derivate che Lagrange si proponeva di definire. Il tentativo di Lagrange rappresentava una prima risposta organica all'esigenza di svincolare l'analisi da considerazioni di carattere infinitesimale o cinematico e ciò veniva raggiunto tramite l'adozione di un calcolo formale su espressioni simboliche di tipo algebrico. Lagrange, elaborando un programma di sviluppo del calcolo da cui fossero banditi infinitesimi e limiti, si opponeva anche all'approccio di d'Alembert, in quanto riteneva poco chiaro ed evidente il concetto di limite. Questo spiega in parte il giudizio non del tutto positivo che egli dette del lavoro di L'Huilier. Il programma di Lagrange non poteva risolvere il problema del calcolo; ma allo stesso modo di d'Alembert, Lagrange, con la grande influenza che egli ebbe sui matematici del tempo, contribuì a porre il problema dei fondamenti come ineludibile.

L'Huilier partendo dall'ipotesi della sviluppabilità in serie di potenze di una funzione, tenta di stabilire, usando lo strumento tecnico del limite, l'espressione dei suoi coefficienti: è suo merito di aver concluso rigorosamente, passando al limite nella (2), che $\frac{dP}{dx} = A' = lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$, uguaglianza che Lagrange non avrebbe potuto ovviamente stabilire senza ricorso al calcolo differenziale, e di avere indicato di conseguenza, (ma solo indicato, vista l'erroneità della dimostrazione) come, iterando il procedimento, si sarebbero potute ricavare le espressioni degli altri coefficienti in termini delle altre derivate ottenendo lo sviluppo (4).

## 5 – Massimi e minimi

Ampio spazio è dedicato nel Cap.V allo studio dei massimi e dei minimi. L'Huilier determina la condizione necessaria $\frac{dP}{dx}=0$ facendo uso dello sviluppo in serie di Taylor stabilito poche pagine prima. Allo stesso modo dimostra che, una volta soddisfatta la condizione necessaria, $\frac{d^2P}{dx^2}\neq 0$ è condizione sufficiente per un minimo o un massimo. Analizza poi il caso che tutte le derivate minori di quella di ordine $n$, con $n$ pari, siano nulle, mentre l'*n-sima* è diversa da zero. In maggiori dettagli entra nella seconda edizione. L'argomento gli era particolarmente congeniale: e infatti si dilunga in molti esempi sia nella prima edizione e ancor di più nell'edizione in latino.

Nella seconda metà del Settecento assistiamo a un particolare interesse per problemi di questo tipo: Eulero aveva esposto nel 1744 nel suo *Methodus inveniendi lineas curvas* un nuovo metodo per determinare le curve dotate di qualche particolare proprietà di minimo o di massimo e aveva allargato il discorso dalla considerazione di casi particolari ad una trattazione abbastanza generale; Lagrange nel 1762 aveva semplificato e generalizzato il suo metodo rendendolo puramente analitico in un suo famoso articolo che dava origine al calcolo variazionale. L'Huilier è molto più elementare, incline ad adottare in alcuni casi procedure particolari per stabilire i risultati, procedure che permettono a suo giudizio di arrivare in modo più spedito e luminoso alla soluzione: così, nella prima edizione, offre ad esempio una dimostrazione puramente geometrica della proprietà isoperimetrica del cerchio e della sfera e di qualche altro problema classico. Nella seconda edizione invece studia massimi e minimi in diverse situazioni, di carattere sempre abbastanza elementare, ma collegando tale indagine allo studio di alcune semplici equazioni differenziali, considera poi molti problemi geometrici di cui dà soluzioni di carattere differenziale. Cita spesso in entrambe le edizioni il suo testo dedicato ad argomenti simili, il *De relatione mutua capacitatis et …* [L'Huilier 1782], che sarà apprezzato e citato da Jacob Steiner (1796-1863). Si tratta di un trattato sugli isoperimetri, considerati nelle figure che sono oggetto della geometria elementare, quali poligoni, coni, cilindri, sfere. In esso affronta il problema di *determinare fra tutti i poligoni di n lati, le cui lunghezze sono assegnate, quello che racchiude l'area massima* e dimostra che si tratta del poligono inscritto in un cerchio.

Prova pure che *tra tutti i poligoni di n lati con dati angoli soltanto quello circoscritto ad un cerchio ha l'area massima quando il perimetro è assegnato e il perimetro minimo quando l'area è assegnata*. L'Huilier aveva progettato una seconda parte di tale trattato dove si sarebbe occupato di questioni più elevate, legate ai recenti sviluppi dell'analisi, ma altri impegni non gli permisero di affrontare tale lavoro. Si limitò ad aggiungere un compendio del *De relatione mutua*, l'*Abregé d'Isopérimétrie* *élémentaire*, Genéve 1971 seguito alla *Polygonométrie*, Genéve 1971. Montucla elogia questi lavori: osserva che l'autore, sottomettendo il calcolo dei lati e degli angoli dei poligoni a regole di carattere trigonometrico, esplora con profondità e profitto una ristretta parte dello sterminato campo della geometria, in cui pure avevano fatto incursioni Eulero e l'astronomo, suo collaboratore, Anders J. Lexell (1740-1784) [Montucla 1802].

Nella prima edizione, dopo aver osservato che a volte la risoluzione dell'equazione $\frac{dP}{dx}=0$ comporta notevoli difficoltà, L'Huilier propone una strada alternativa, enunciando il seguente:

**Lemma** – *Se una funzione P d'una variabile x è suscettibile di massimo o minimo, essa assume sempre due valori eguali fra loro, uno prima di assumere il detto valore l'altro dopo averlo raggiunto. Tali valori corrispondono a due valori della x, uno minore, l'altro maggiore di quello che corrisponde al valore limite p.*

Dopo aver accennato ad una possibile dimostrazione basata su considerazioni infinitesimali relative alla serie di Taylor, e ad una spiegazione di tipo geometrico, che si ottiene intersecando la figura con parallele alla tangente nel punto di minimo o massimo, passa ad enunciare la regola generale in applicazione del Lemma per il calcolo dei massimi o dei minimi che non fa uso del calcolo differenziale ma utilizza la teoria dei limiti. Precisamente:

- si eguagliano due valori della funzione;

- si effettuano le semplificazioni nell'equazione risultante, cercando di eliminare quei fattori che si annullano quando i due valori della variabile coincidono;

- si cercano i limiti delle quantità variabili contenute nell'equazione, priva a questo punto di termini di indeterminazione.

Tali limiti permetteranno di ottenere le condizioni cui devono soddisfare i massimi e i minimi[11]. È ben noto che si tratta di un metodo non generale, che si applica a funzioni algebriche, frazionarie, a qualche funzione irrazionale, ma non a funzioni trascendenti.

Sebbene L'Huilier non ne faccia cenno, in tal modo si rende rigoroso un procedimento analogo usato da Fermat, che, non avendo a disposizione il concetto di limite, aveva elaborato tra

---

[11] Carnot stabilisce una procedura analoga basandosi sul metodo dei coefficienti indeterminati di Descartes: egli ritiene che con l'uso di tale metodo e con l'algebra ordinaria si possano risolvere tutte le questioni dell'analisi infinitesimale. I procedimenti nei due casi, egli afferma, sono gli stessi: le quantità che nell'una si trascurano come infinitamente piccole, sono eliminate nell'altra in modo rigoroso come quantità finite. Così se $A+Bx=0$ è un'equazione con $A$ e $B$ costanti e $x$ tanto piccolo quanto si vuole, allora $A=0$ e $Bx=0$. Questo per Carnot è un principio fondamentale da cui si può dedurre tutta l'analisi infinitesimale. In particolare se si cerca il massimo della funzione $ax-x^2$ si osserva che aggiungendo all'indeterminata $x$ un valore arbitrario $x'$ l'incremento corrispondente della funzione può essere reso tanto piccolo quanto si vuole in rapporto a $x'$, al diminuire sempre più di $x'$. Quindi da

$$a(x+x')-(x+x')^2-(ax-x^2)=x'(a-2x)-x'^2,$$

dividendo per $x'$ si ottiene: $(a-2x)-x'$, quantità che deve essere supposta tanto piccola quanto si vuole. Allora Carnot pone $(a-2x)-x'=\varphi$, ovvero $(a-2x)=x'+\varphi$. In tale formula si osservano due termini di cui uno $(a-2x)$ non è variabile, mentre l'altro può essere reso piccolo quanto si vuole. Per il detto principio deve essere $a-2x=0$ e quindi come ben noto $x=\frac{a}{2}$ [Carnot 1797]. Si badi bene che il metodo sussiste solo nell'ambito dei polinomi, quindi anche in questo caso si hanno le solite limitazioni nelle applicazioni, inoltre non si può trarre dal metodo un algoritmo per i calcoli.

il 1637 e il 1638 un metodo essenzialmente geometrico che può essere esemplificato al seguente modo: si eguagliano due valori della funzione in corrispondenza di due valori $x_1$ e $x_2$ (in realtà nelle opere di Fermat non è data una funzione ma si tratta geometricamente sulla proprietà caratteristica della curva considerata); nei casi presi in esame si può semplificare per $x_1$-$x_2$; effettuata tale semplificazione, nella relazione ottenuta si pone $x_1$=$x_2$=$x$, che permette di ottenere la relazione cui deve soddisfare il punto $x$ di minimo o massimo[12]. A volte poi Fermat applica il metodo precedente assegnando, nei casi particolari presi in esame, un incremento alla variabile indipendente, che indica con $E$, considera l'incremento corrispondente della variabile dipendente e lo pone eguale a zero; divide per E, pone poi $E=0$ . In tal modo si ricava in genere un valore di minimo o di massimo per la funzione.

Con tale strumento, minimizzando il tempo, Fermat ottiene la prima dimostrazione della legge di rifrazione della luce, enunciata in precedenza da Cartesio.

E' evidente che la regola che L'Huilier enuncia non è altro che il metodo di Fermat per la ricerca dei massimi e dei minimi, che appare, per alcuni problemi che deve trattare, di più agevole utilizzo che non il calcolo, ormai classico anche al suo tempo, dei rapporti differenziali. Ora, mentre nella regola di Fermat c'è di fatto una violazione del principio di non contraddizione, in quanto $x_1$ e $x_2$ sono prima supposti distinti tra loro per poter dividere per $x_1$-$x_2$ e poi, una volta eliminata l'indeterminazione, sono supposti coincidenti, mediante la nozione di limite (sottointesa sostanzialmente da Fermat ed

[12] Il procedimento è descritto in [Fermat 1891-1916, IV. *Methodus de maxima et minima*].

ora esplicitata) L'Huilier supera tale difficoltà[13]. Egli applica tale metodo ad alcuni problemi geometrici la cui risoluzione presenta qualche difficoltà di calcolo se lo si vuole risolvere col metodo differenziale classico.
Problema 1 - *Dato un angolo, sia P un punto ad esso interno. Fra tutte le rette passanti per P determinare quella che rende minima la lunghezza del segmento che essa stacca nell'angolo.*

L'Huilier considera due rette che staccano segmenti eguali nell'angolo e con una semplice costruzione dimostra che se le due rette tendono a coincidere allora nella posizione limite, che non può essere che il minimo, dal momento che, come si constata subito geometricamente, non c'è massimo, si verifica che i due segmenti determinati dal punto $P$ stanno fra loro come le tangenti degli angoli che la retta limite forma coi lati dell'angolo assegnato.

Infatti siano AB e CD due segmenti eguali tra loro, ognuno con gli estremi sui due lati dell'angolo, passanti per $P$. Sia $a$ la proiezione di $A$ su $CP$ e sia $d$ la proiezione di $D$ su $PB$. Con centro in $P$ tracciamo la circonferenza di raggio $AP$ e sia $a'$ la sua intersezione con $PC$; con centro in $P$ tracciamo la circonferenza di raggio $PD$ e sia $d'$ l'intersezione con $PB$. Poiché $AP+PB=DP+PC$ si ha: $Ca'=d'B$. Ora:

[13] In [L'Huilier 1795, paragrafo 188] l'autore ricorda che le questioni dei massimi e dei minimi hanno grande attinenza con il problema delle tangenti. Egli infatti osserva che riferita una curva ad un asse e considerato sull'asse un punto da cui si possa condurre la tangente questa retta è tale che forma con l'asse un angolo che è minimo o massimo fra tutti gli angoli formati dalle secanti condotte per lo stesso punto; ponendo eguale a zero il differenziale della tangente dell'angolo rapidamente ricava l'espressione della sottotangente. A conclusione egli ricorda che tale soluzione non sfuggì ai matematici del secolo precedente che aprirono la strada del calcolo differenziale per la risoluzione dei problemi delle tangenti e dei minimi e massimi: tra loro cita Fermat, Roberval, Pascal, Barrow.

$$Aa = Ca\ tg\hat{C},\ Dd = dB\ tg\hat{B}$$

e anche:

$$Aa:dD = AP:PD.$$

Quindi:

$$AP:PD = Ca\ tg\hat{C} : dB\ tg\hat{B}.$$

Si passi al limite facendo tendere $CD$ ad $AB$. Poiché $Ca$ tende a $Ca'$ e $dB$ tende a $d'B$ e poiché $Ca'=d'B$ allora $\lim Ca:dB =1$; e poiché è anche $\lim tg\ \hat{C}=tg\ \hat{A}$, si ottiene la soluzione: $AP:PD= tg\hat{A}: tg\hat{B}$. Quindi la retta per $P$ di minima lunghezza è divisa da $P$ in parti proporzionali alle tangenti degli angoli che essa forma con i lati dell'angolo dato.■

Nel seguente problema la curva deve essere almeno supposta convessa in modo da assicurarsi che ogni retta la intersechi in non più di due punti.

**Problema 2** - *Sia dato un punto P entro una curva XAX'; per esso si conduca una retta ZZ' tale che il settore ZAZ' abbia area minima.*
Al solito si considerino due rette per il punto $P$, $TT'$ e $XX'$ che stacchino due settori $XAX'$ e $TAT'$ aventi la stessa area. Eliminando da essi la parte comune $TAX'$ si perviene a stabilire l'equivalenza dei due settori $TPX$ e $X'PT'$; quindi quando $TT'$ e $XX'$ tendono alla posizione comune $ZZ'$ per le aree sussiste la seguente relazione di limite: $\lim TPX : X'PT'=1$. Consideriamo l'arco di circonferenza $Tx$, di centro $P$, raggio $TP$, con $x$ su $XP$; analogamente consideriamo l'arco $X'y'$ della circonferenza di centro $P$ e raggio $PX'$, con $y'$ su $PT'$. Abbiamo ancora le seguenti relazioni di limite tra aree:

$$\lim TPX:TPx = 1;\ \lim X'PT':X'Py' = 1;\ \lim TPx:X'Py'= PZ^2:PZ'^2$$

quindi

$$\lim XPT : X'PT'=PZ^2: PZ'^2$$

Ne segue che l'area minima si ottiene quando $PZ=PZ'$■

Sempre nella seconda edizione troviamo anche il seguente problema, risolto in modo analogo al precedente, in cui è sottinteso che la curva presa in esame sia rettificabile:

**Problema 3 –** *Data una curva XAX′ si conduca per un punto P fissato interno una retta ZZ′ in modo che l'arco ZAZ′ sia minimo.*

Nella prima edizione L'Huilier propone di risolvere con il metodo impiegato nel Problema 1 anche il seguente famoso problema geometrico di doppio strato la cui risoluzione è semplificata dall'uso dell'operazione di limite:

**Problema 4 (di doppio strato)** - *Data una retta BB′, due punti A e A′ fuori di essa, e due segmenti a e a′, determinare un punto X su BB′ in modo che sia minima la somma aAX + a′A′X.*

Se i due punti si trovano da bande opposte rispetto alla retta, per opportuni a e a′ il problema si riduce alla determinazione della **legge di rifrazione della luce,** problema trattato da Fermat, minimizzando il tempo di percorrenza.

L'Huilier suppone che ci siano due punti $X$ e $X'$ per cui: $aAX + a'A'X = aAX' + a'A'X'$ da cui segue:

$$a(AX' - AX) = a'(A'X - A'X').$$

Sia $P$ su $AX'$ tale che $AP = AX$ e sia $Q$ su $A'X$ tale che $A'Q = A'X'$. Allora $aPX' = a'QX$.

Siano θ e θ′ gli angoli $AXB$ e $AX'B$ e sia α l'angolo $A'XB'$. I triangoli $XPX'$ e $XQX'$ possono ritenersi rettangoli in $P$ e $Q$ rispettivamente se si suppongono $X$ e $X'$ sufficientemente vicini. Quindi:

$$PX' = XX' \cos AX'B = XX' \cos \theta';$$
$$QX = XX' \cos A'XB' = XX' \cos \alpha.$$

Pertanto si può supporre $\frac{a\cos\theta'}{a'\cos\alpha} = 1$ e, facendo tendere $X'$ a $X$, $\frac{a\cos\theta}{a'\cos\alpha} = 1$.

Pertanto la condizione richiesta è $\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{a'}{a}$ e quindi il punto $X$ è tale che i coseni degli angoli che le rette $AX$ e $A'X$ formano con $BB'$ devono essere inversamente proporzionali ad $a$ e $a'$.

Si osservi che nel caso della rifrazione $\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$, cioè il rapporto dei coseni degli angoli formati da $AX$ e $A'X$ con $BB'$ coincide con il rapporto dei seni dell'angolo d'incidenza e dell'angolo di rifrazione, mentre $a=1/u$, $a'=1/v$, essendo $u$ e $v$ le velocità della luce nei due mezzi che essa attraversa ■

Nella seconda edizione dell'*Exposition*, L'Huilier risolve il precedente problema in una forma molto più generale, usando il calcolo differenziale:

**Problema 5 -** *Siano dati una curva DD′ e due punti fuori di essa, A e B. Determinare un punto Z sulla curva tale che, dati due numeri positivi a e a′ e un intero positivo m, risulti minima la somma:* $a \times AZ^m + a' \times BZ^m$.

Alla maniera precedente L'Huilier stabilisce che il punto $Z$ deve essere tale che:

$$a \times AZ^{m-1} \cos AZT + a' \times BZ^{m-1} \cos BZT = 0,$$

dove $AZT$ e $BZT$ sono gli angoli che le rette $AZ$ e $BZ$ formano con la tangente $ZT$ alla curva in $Z$.

Ovviamente se in luogo di una qualunque curva DD′ è data una retta BB′ e inoltre $m$=1 ritroviamo il Problema 4. L'Huilier considera separatamente la dimostrazione in tale caso particolare. Sia $r$ la retta $BB'$, e i punti dati siano $A$ e $A'$, di cui $B$ e $B'$ sono le proiezioni su $r$; sia $c = AB$, $c' = A'B'$. Detto $X$ il punto sulla retta $r$ per cui $aAX + a'A'X$ è minimo, L'Huilier pone $AX = z$, $A'X = z'$, $BX = y$, $XB' = y'$, con le condizioni:

$$a\frac{dz}{dx} + a'\frac{dz'}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{dy'}{dx} = 0.$$

Da $z^2 = c^2 + y^2$ si ricava $z\frac{dz}{dx} = y\frac{dy}{dx}$ da cui, essendo $y = z \cos AXB$, si trae: $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} \cos AXB$. Analogamente si ottiene $\frac{dz'}{dx} = \frac{dy'}{dx} \cos A'XB'$.

Da tali relazioni tenendo presenti le precedenti condizioni si ricava quanto enunciato ■

Come ben noto Bernoulli nel 1696 in un articolo sugli *Acta matematica* pose il problema della brachistocrona: dati due punti $A$ e $A'$ in un piano verticale trovare la curva $AMB$ tale che un punto materiale $M$ soggetto alla gravità si muova da $A$

a *B* nel minor tempo possibile. L'anno dopo fornì la soluzione: la curva richiesta è un arco di cicloide e la dimostrazione era ottenuta mediante la divisione del piano in un numero finito di strati e mediante applicazione successiva della regola della rifrazione. L'Huilier segue il suo procedimento e in parte lo generalizza mediante i passi seguenti. Cominciamo con la seguente generalizzazione del Problema 4:

**Problema 6 (del multistrato) –** *Siano dati due punti A e A′ e una retta s: siano B e B′ le proiezioni di A e A′ su s. Si divida BB′ in parti eguali mediante i punti P, P′, P″, P′″, … per tali punti si considerino le perpendicolari a BB′: PM, P′M′, P″M″, P′″M′″ … e siano z, z′, z″, z′″, … le lunghezze dei segmenti AM, MM′, M′M″, M″M′″, … Allora, dati i numeri F, F′, F″, F′″ … il minimo di*

$$F\times z+F'\times z'+F''\times z''+F'''\times z'''+\ldots, \qquad (*)$$

*in base alla precedente proposizione si ottiene quando:*

$$F\cos MAB = F'\cos M'MP = F''\cos M''M'P' = F'''\cos M'''M''P''= \text{ etc}\ldots \qquad (**)$$

Infatti, la somma data è minima quando è minima la somma di due addendi consecutivi, in particolare quando è minimo $F\times z+F'\times z'$: tale min si può pensare sia stato ottenuto determinando M sulla retta MP, dati i punti fissi A e M′, e pertanto, in base alla precedente proposizione deve risultare *F cosMAB = F′ cosM′MP*; allo stesso modo si ragiona per gli altri addendi.

Ora L'Huilier suppone, seguendo Bernoulli, che si passi al limite nella costruzione, e che la poligonale che si determina e che realizza il minimo della (*) tenda ad una curva $\gamma$ di equazione da determinarsi *y=y(x)*. In luogo dei valori *F, F′, F″* etc avremo allora una funzione *F(x)*, la curva $\gamma$ di equazione *y=y(x)* sarà tale che l'integrale curvilineo esteso a $\gamma$ di F(x) essendo dz $=\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'(x)^2}$dx sarà il minimo al variare della curva cui è esteso l'integrale. La funzione minimizzante y(x) in quanto limite di poligonali tutte verificanti (**) deve soddisfare la condizione $\frac{dy}{dz}F(x)=cost=C$; ne segue $dx^2+dy^2=\frac{F^2}{C^2}dy^2$, da cui si trae l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{F^2-C^2}}. \qquad (***)$$

Per esempio, se poniamo F(y)= $\sqrt{x}$, posto $C^2$ = t >0, imponendo y(t)=0 si trova y(x) = $2\sqrt{t(x-t)}$. Pertanto la curva che realizza il minimo dell'integrale curvilineo in tal caso è fornito dalla traiettoria del moto dei proiettili sulla terra.

**La brachistocrona** – Si osservi che il risultato precedente ottenuto come conseguenza del Problema 6 sussiste anche se la F è funzione della y. Il caso più interessante, sul quale è veramente ermetico l'Huilier, è quello in cui sia *F(y)* = $\frac{1}{\sqrt{2gy}}$, caso in cui otteniamo come soluzione la brachistocrona. Infatti detti A e A' due punti della curva di equazione y=y(x) di ascisse $x_A$ e $x_{A'}$, t=t($x_A$) il tempo impiegato in corrispondenza di $x_A$, a partire da un istante iniziale, la velocità è data da v(x)= $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+(y(x+h)-y(x))^2}}{t(x+h)-t(x)} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{t'(x)}$ da cui, essendo per il bilancio energetico v(x) = $\sqrt{2gy(x)}$, il tempo per passare da A ad A' lungo la curva di equazione y=y(x) è dato da

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A}^{x_{A'}}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx,$$

che coincide con l'integrale curvilineo che si ottiene scegliendo F(y)= $\frac{1}{\sqrt{2gy}}$ e che si minimizza tenendo conto della (***), che in tal caso diviene:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{2r-y}}, \qquad (****)$$

avendo posto $\frac{1}{2r}$ = 2gc². Tale è l'equazione differenziale della cicloide di equazioni parametriche

x = *r(t - sent)*
y = *r(1+cost);* $0 \le t \le \pi$

che rappresenta quindi la curva di più rapida discesa. Infatti dalle equazioni parametriche si trae: $\frac{dy}{dx} = \frac{-sent}{1-cost}$.

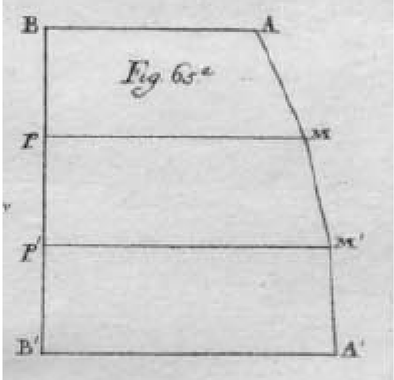
D'altro canto, si verifica subito che $-\sqrt{\frac{y}{2r-y}} = -\sqrt{\frac{1+cost}{1-cost}} = -\frac{sent}{1-cost}$ e quindi la cicloide soddisfa la (****). Dall' equazione differenziale discende subito che il punto (0, 2r) è un punto a tangente verticale, mentre il punto ($\pi r$, 0) è un punto a tangente orizzontale.

Per dare un'idea dei problemi che seguono segnaliamo il seguente:

**Problema 7** – *Nelle ipotesi del Problema 6, si determinino i punti M, M', M'', M''' in modo che il rapporto tra l'area della figura BAMM'M''… A'B' e il perimetro AMM'M'' … A' risulti massimo.*

I precedenti problemi sono trattati nel capitolo ventesimo della seconda edizione, dedicato ai problemi isoperimetrici. Ce ne sono davvero molti: qui ne consideriamo uno relativo a una figura poligonale del tipo delle precedenti:

Problema 8 – *Siano dati due punti A e A': siano B e B' le proiezioni di A e A' sull'asse x. Si divida BB' in tre parti eguali mediante i punti P, P': per tali punti si considerino le perpendicolari PM e PM' a BB' in modo tale che, detti z=AM, z'=MM', z''=M'A' e supposta data la somma z+z'+z''=a, risulti massima l'area della figura BAMM'A'B'.*




Posto $PM=y$, $P'M'=y'$, $BP = PP' = PB' = b$, il doppio dell'area della figura $BAMM'A'B'$ è data da $b(AB+2y+2y'+A'B')$, quindi la funzione da massimizzare è $y+y'$. Derivando abbiamo così le due condizioni:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dy'}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dx}+\frac{dz'}{dx}+\frac{dz''}{dx}=0.$$

Procedendo come nel

Problema 5, troviamo:

$\frac{dz}{dx} = -\frac{dy}{dx}\cos BAM$; $\frac{dz'}{dx} = -(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx})\cos PMM'$; $\frac{dz''}{dx} = \frac{dy'}{dx}\cos P'M'A'$;
da cui, tenendo conto delle condizioni si trae:

$$\cos PMM' - \cos P'M'A' = \cos BAM - \cos PMM'.$$

(Si osservi che nel problema ci sono cinque funzioni incognite e cinque relazioni che le legano. Inoltre, la spezzata simmetrica di quella che realizza il massimo rispetto alla retta AA' fornisce il minimo) ■

Come conseguenza del risultato precedente L'Huilier riesce a dimostrare con considerazioni di carattere analitico che dati due punti e data un curva variabile di assegnata lunghezza che ha tali punti per estremi, l'arco di circonferenza racchiude la figura di area maggiore fra tutte le figure delimitate dal segmento congiungente i due punti e la curva variabile.

Seguono molte altre applicazioni che rivelano, come già si è osservato in precedenza, una particolare inclinazione dell'autore per questo tipo di questioni.

## 6 – Quadratura delle curve, cubatura dei solidi di rivoluzione

L'Huilier introduce subito nel Cap. VII la quadratura come operazione inversa della differenziazione ed è così favorevole ad una simile impostazione che suggerisce di usare invece dell'espressione "somma integrale" l'espressione "rapporto integrale". Non fornisce una definizione di area di una superficie sotto una curva, e tratta tale questione in modo intuitivo, ciò che non meraviglia perché si sarebbe dovuto attendere circa un secolo perché il problema delle aree fosse affrontato in modo rigoroso. Egli ragiona così: sia indicata con

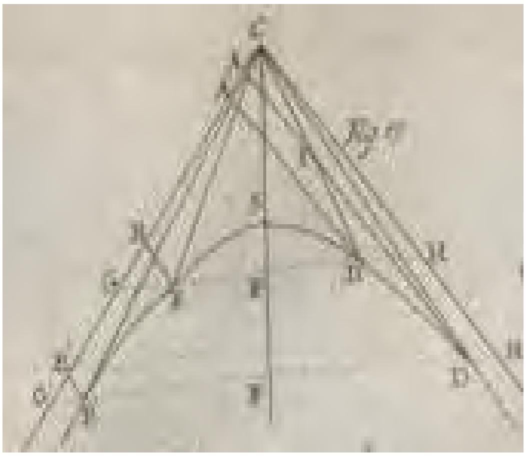
S la superficie sotto la curva, variabile con essa. Se consideriamo un rettangolo avente un lato costante e l'altro che varia con l'ascissa della curva, allora il limite del rapporto che intercede tra i cambiamenti simultanei della superficie del rettangolo e di quella sotto la curva per un medesimo cambiamento dell'ascissa è lo stesso di quello che intercede tra il lato costante del rettangolo e l'ordinata. Quindi se R è a sua volta la superficie variabile del rettangolo si ha: lim $\frac{\Delta S}{\Delta R} = \frac{y}{a}$; ma $\Delta R = a \times \Delta x$ e dunque $y = \frac{dS}{dx}$. In tal modo si ricava subito l'ordinata della curva a partire dalla conoscenza dell'area sotto di essa, discorso risalente a Newton e già intravisto da Barrow. Segue come applicazione l'integrazione della funzione potenza, distinguendo i vari casi. L'Huilier calcola così subito l'area sotto la parabola di equazione $y=x^m$, con $m>0$, delimitata dall'asse delle ascisse a partire dall'origine fino a un punto $x$ variabile e analogamente calcola l'area sotto l'iperbole $y=\frac{1}{(x+a)^m}$ $m\neq 1$, $a>0$, considerando in entrambe le situazioni pure il caso che $x$ cresca illimitatamente.

Egli tratta la medesima questione anche in altri due modi, con procedure di limite che ricava da proprietà differenziali delle figure (senza l'uso esplicito di limiti di somme integrali) su cui non è il caso di soffermarsi.

L'Huilier dimostra tra l'altro la proprietà fondamentale dell'iperbole con una bella e lunga dimostrazione geometrica, in cui il concetto di limite entra in un solo passo, che L'Huilier enuclea in un Lemma enunciato e dimostrato a parte e cioè il Lemma 1 del paragrafo XLIII, la cui dimostrazione è esposta al n. 3 di questo lavoro.

**Teorema –** *Sia data un'iperbole di cui CA e CH sono gli asintoti. Su uno dei due asintoti si considerino CA, CA′, CB, CB′ in* *progressione geometrica. Siano $D$, $D'$, $E$, $E'$ i punti in cui le parallele all'altro asintoto per $A$, $A'$, $B$, $B'$ rispettivamente incontrano l'iperbole. Allora i trapezi mistilinei $ADD'A'$ e $BEE'B'$ sono eguali.*

**Dim. -** Si considerino la retta per $E$ e per $D'$ e la retta per $E'$ e $D$. La prima intersechi gli asintoti in $G$ e $H$, la seconda in $G'$ e $H'$. Poiché $EB$, $D'A'$ e $CH$ sono parallele, si ha che $GB : A'C = EG : D'H$ per il teorema di Talete. Per una proprietà nota dell'iperbole $GE = D'H$[14], dunque $BG = A'C$. Per lo stesso motivo $B'G' = AC$. Quindi $CA : CA' = B'G' : BG$. Ma



$$CA:CA' = CB:CB'$$

per ipotesi e, per la definizione dell'iperbole

$$CB:CB' = B'E':BE,$$

quindi

$$B'G':BG = B'E:BE$$

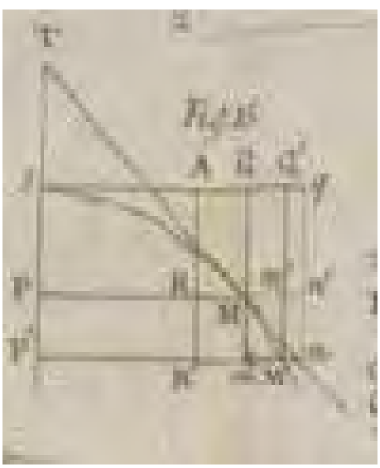
e pertanto i triangoli $BGE$ e $B'G'E'$ sono equiangoli: ne consegue che le rette $GE$ e $G'E'$ sono parallele. Allora la retta $CS$ che taglia $GH$ in due parti eguali mediante il punto $F$, taglia parimenti in due parti eguali in un punto $F'$ la retta $G'H'$. Poiché $GE = D'H$ risulta $EF = FD'$ e parimenti, poiché $G'E' = DH'$ risulta $E'F' = F'D$. Pertanto, $CF$ è diametro. Per il Lemma di cui si è detto in precedenza gli spazi curvi $SE'F'$ e $SDF'$ sono eguali, essendo poi gli spazi $CE'F'$ e $CEF$ rispettivamente eguali agli spazi $CF'D$ e $CFD'$ ne segue l'eguaglianza:

$$CE'F' - (CEF + SE'F') = CF'D - (CFD' + SDF')$$

[14] Per questa proprietà si confronti la nota 17 di [Biacino Viola 2020].

cioè i settori $ECE'$ e $DCD'$ sono eguali fra loro. Sia $I$ il punto d'intersezione delle rette $CD'$ e $AD$. Poiché, per la definizione di iperbole, $CA \times AD = CA' \times A'D'$, i triangoli $CAD$ e $CA'D'$ sono eguali tra loro. Ora il trapezio mistilineo $ADD'A'$ si può ottenere dal settore $DCD'$ sommando questo con il triangolo $CD'A'$ e sottraendogli il triangolo $CAD$, triangoli aventi in comune il triangolo $AIC$, parte comune che viene quindi sia sommata che sottratta. Analogamente si prova che il trapezio mistilineo $BEE'B'$ è equivalente al settore $ECE'$. Quindi i trapezi mistilinei $ADD'A'$ e $BEE'B'$ sono eguali essendo essi rispettivamente equivalenti ai due settori $ECE'$ e $CDC'$, eguali tra loro ■.

Nel Capitolo IX L'Huilier usa un metodo per determinare la cubatura di paraboloidi e iperboloidi, dimostrando anche con chiarezza la formula per determinare in generale la cubatura dei solidi di rivoluzione. Al riguardo procede nella seguente maniera: considera una curva $\delta MM'$ riferita all'asse $\delta PP'$ attorno al quale fa ruotare la curva, sia $P = (x, 0)$, $P' = (x+\Delta x, 0)$, $M=(x, y)$, $M'$ il punto di ascissa $x+\Delta x$. Si consideri anche il cilindro $C$ che ha come base il cerchio di raggio $\delta A = a$. Sia $\Delta S$ la variazione del volume del solido che si ottiene facendo



ruotare la curva attorno a $\delta P$ quando si passa da $P$ a $P'$. Analogamente sia $\Delta C$ la variazione del volume del cilindro. Il rapporto $\frac{\Delta S}{\Delta C}$ è compreso tra il rapporto a $\Delta C$ del volume del solido generato dalla rotazione del rettangolo $P'M$ attorno a $\delta P$ ed il rapporto a $\Delta C$ del volume del solido generato dalla rotazione del rettangolo $PM'$ attorno a $\delta P$. Ma tali due volumi sono dati da $\Delta x \pi P'M^2$ e $\Delta x \pi PM'^2$ e stanno con $\Delta C$ nel rapporto $\frac{P'M^2}{a^2}$ e $\frac{PM'^2}{a^2}$ rispettivamente. Poiché queste quantità tendono a $\frac{y^2}{a^2}$ al tendere di $\Delta x$ a zero, si ottiene la relazione $\lim \frac{\Delta S}{\Delta C} = \frac{y^2}{a^2}$, da cui, essendo $\Delta C = \pi \Delta x a^2$, si trae $S'(x)=\pi y^2$. Si osservi che qui è stato fatto uso del teorema del confronto a cui non si fa riferimento nella prima parte.

## 7 – La motivazione dell'opera

Con la teoria precedentemente esposta L'Huilier ritiene di poter evitare in analisi l'impiego diretto dell'infinito, idea estremamente misteriosa che sfugge alle menti umane limitate: infatti invano si cerca di superare gli invalicabili ostacoli che provengono da discorsi che trattano l'infinito con le metodologie usate per il finito. Egli afferma che dobbiamo ammettere l'incapacità di concepire grandezze infinitamente grandi o piccole: queste infatti non possiamo figurarcele, nel senso che è impossibile tradurle con una figura geometrica in quanto non hanno limiti. Così lo spazio nella sua totalità esce dalla classe delle grandezze in quanto non è possibile moltiplicarlo, non è possibile infatti immaginare uno spazio doppio, triplo, quadruplo etc ... E pure la sua suddivisione porta a contraddizioni.

E' davvero una lunga requisitoria quella che L'Huilier intenta contro l'infinito attuale, requisitoria che ricorda l'analoga di Gerdil nella sua *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761 [Gerdil 1845], che non è però mai citata. Allo stesso modo egli rifiuta l'infinitamente piccolo assoluto: quest'ultima idea consiste nel pensare lo stato in cui si trova la grandezza quando è spogliata di tutto ciò che la rende grandezza: per L'Huilier non c'è che il niente assoluto, cioè la privazione completa dell'esistenza, che possa rispondere a un simile requisito. Ma allora che contributo potrà mai dare alla costituzione delle grandezze finite? Dal nulla si genera il nulla.

Contro Fontenelle, l'autore "troppo sottile" degli *Éléments de la Géométrie de l'infini,* L'Huilier, in modo simile a quanto fa Gerdil, instaura un lungo processo. Il punto su cui egli si sofferma principalmente è laddove Fontenelle asserisce che non c'è un numero maggiore di tutti numeri, nel senso comunemente inteso, ma oltre tutti i numeri troviamo l'$\infty$, che rappresenta un limite estremo oltre il quale non si possono aggiungere altri numeri interi finiti per cui $\infty+1=\infty+2= \infty+3 = \ldots = \infty$; ciò nonostante secondo Fontenelle l'infinito partecipa della stessa natura delle quantità per cui se ne può considerare il doppio, il triplo etc. indicati con $2\infty$, $3\infty$, etc… Questo per L'Huilier è inconcepibile, in quanto affermare che c'è un termine che limita tutti i naturali implica che non è possibile superare tale limite; non è possibile considerare il doppio dell'infinito come il termine ultimo oltre tutti i numeri che sono pari dal momento che la successione dei pari dovrebbe essere concepita come la metà della successione dei numeri naturali. Lo stesso si potrebbe dire di un qualsiasi altro moltiplicatore, ciò che dimostra l'assurdità che comporta l'attribuire un ultimo termine a chi non ne può possedere. I partigiani dell'infinito pretendono che si possa considerare il quadrato dell'ultimo termine dei naturali, qualunque esso sia; poiché la successione dei quadrati coincide con la successione delle somme dei dispari, allora $\infty^2$ dovrebbe coincidere con la somma della serie dei dispari prolungata fino a $2\infty$-1, che è l'infinitesimo numero dispari, quindi la successione dei naturali invece di arrestarsi a $\infty$ dovrebbe procedere fino a $2\infty$-1, mentre i termini precedenti, $\infty+1$, $\infty+2$, etc… coincidono tutti con $\infty$, e ciò è manifestamente assurdo. Inoltre i partigiani dell'infinito e in particolare Fontenelle stabiliscono la successione $\infty^1$, $\infty^2$, $\infty^3$, $\infty^4$ etc … per designare i differenti ordini dell'infinito, in modo che ogni elemento è infinitamente grande rispetto a quello che lo precede. Ma di due qualunque termini di tale successione, in quanto non sono quantità, non è possibile considerare il rapporto, condizione essenziale per ogni successione, così che essa stessa non può essere considerata una successione. Per L'Huilier bisogna fermare i partigiani dell'infinito sin dai loro primi passi per evitare il torrente di contraddizioni che ne deriva. Essi hanno costruito un edificio simile a una di quelle case incantate, piene di mistero ma sprovviste completamente di fondamenta.

L'Huilier passa poi in rassegna alcune opere che hanno trattato l'argomento e innanzi tutto il primo testo, *l'Analyse des Infiniment Petits* di de L'Hospital che, ancora al suo tempo, rappresenta il trattato più completo per avvicinarsi all'analisi infinitesimale. Egli ricorda come punto essenziale di tale opera la definizione di infinitesimo, da altri detto differenziale, come un ente trascurabile rispetto alle quantità finite: questo modo di porre la questione sebbene possa risultare conveniente nelle applicazioni in cui si richiede l'approssimazione e non il rigore, non può essere invece approvato in ambito teorico, in quanto non è chiaro quale sia la sua motivazione. La questione si ripropone per la seconda delle affermazioni qualificanti la teoria, cioè che si possa prendere indifferentemente l'una o l'altra di due quantità che differiscano per un infinitesimo. Inoltre, per de L'Hospital una linea curva può essere riguardata come un aggregato di infinite linee rette, ognuna infinitamente piccola. Ovviamente per L'Huilier una simile posizione è insostenibile: non è teoricamente concepibile che un cerchio possa essere considerato coincidente con un poligono, e Fontenelle ha attribuito ad Archimede una tale credenza. Il cerchio è il limite di una successione di poligoni, senza coincidere con alcuno di essi, e questa è sostanzialmente stata pure la conclusione degli antichi.

Questa grande contraddizione che consiste nel considerare la medesima quantità a volte come trascurabile, a volte come costituente delle quantità finite costringe i cultori dell'infinito ad uno sproloquio (*verbiage*) inintelligibile.

L'Huilier avvalora le sue idee ricordando come lo stesso Leibniz avesse dei dubbi nell'ammettere l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo assoluti: infatti a volte egli tratta gli infinitamente piccoli come degli incomparabili rispetto alle grandezze finite servendosi del paragone che essi sono come dei granelli di sabbia rispetto alla massa della terra, paragone che non tiene conto del rigore che si richiede alla matematica. Ma Leibniz altrove, nella *Teodicea* esprime anche un altro punto di vista negazionista dell'infinito o infinitesimo attuale quando afferma:

> *on s'embarasse dans les nombres qui vont à l'infini; on conçoit un dernier terme, un nombre infini ou infiniment petit, mais tous cela ne sont que des fictions; tout nombre est fini et assignable; toute ligne l'est de méme.*

Nell'edizione in latino dell'*Exposition* L'Huilier ricorderà che Leibniz aveva però asserito che comunque bisognava sostenere i metodi del calcolo differenziale in uso cercando di fornirne una spiegazione rigorosa; scrivendo a Giovanni Bernoulli il 31 dic. 1700 circa le obiezioni di Nieuwendijdt, Rolle e altri, aveva detto: «Perutile est os illis occludi per reductionem ad demonstrationes veterum more formatas». [Leibniz, Bernoulli, 1745, t.II,Ep.108].

Questo forniva anche la motivazione dell'*Exposition*.

Ritornando a de L'Hospital, L'Huilier, facendo propria la critica di Nieuwendijdt osserva che ancora peggio vanno le cose se si passa dagli infinitesimi del primo ordine a quelli di ordine superiore [de L'Hospital 1696, Sez. IV]. Infatti se un arco è infinitesimo del primo ordine allora il suo seno verso è infinitesimo del secondo ordine, ma se il seno verso è infinitesimo del primo ordine allora non si ha diritto di dire che l'arco è infinitesimo? Sostanzialmente, afferma L'Huillier, si lascia indeterminato il rapporto che rende due quantità infinitesime l'una rispetto all'altra e si può ritenere che un tale rapporto non esista affatto[15]. E così, come ha trovato inconcepibile lo stabilire diversi ordini per l'infinito, così non può ammettere essi siano riproposti, alla maniera di Fontenelle, per gli infinitesimi $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^4}$, etc… visti come rapporti il cui denominatore è spinto all'infinito. La confusione del calcolo differenziale, osserva, nasce dal fatto che in esso si trattano i differenziali e le funzioni dei differenziali come fossero quantità, mentre invece non lo sono.

Ed infatti uno dei problemi nasce proprio dal supporre tali differenziali in partenza diversi da zero e in un secondo tempo, dopo aver sviluppato i calcoli nell'eliminare quelli di ordine superiore, supponendoli nulli. Questo non è lecito con le quantità. Come d'Alembert afferma con enfasi in *Différentiel*, se si effettua invece un limite le precedenti contraddizioni svaniscono, non si commettono errori e non si trascura niente. Secondo L'Huilier, quindi, la parola stessa differenziale non dovrebbe essere pronunciata nel calcolo. Comunque, sia ben chiaro, la notazione differenziale è molto comoda ed egli continuerà ad usarla ma esclusivamente, alla maniera di d'Alembert, come abbreviazione di espressioni contenenti dei limiti.

---

[15] L'Huilier potrebbe citare a tal proposito la critica svolta dall'olandese Nieuwentijdt nel 1694 nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia* e la confutazione fatta in proposito da d'Alembert.

L'Huilier riserva una lunghissima parte della sua requisitoria ad Eulero, dalla cui scuola direttamente proveniva e per cui provava grande rispetto. Gli rimprovera l'uso troppo disinvolto di infiniti e infinitesimi: infatti Eulero a volte parla di grandezze infinitamente piccole, riguardandole come grandezze che tendono a zero senza essergli eguali, a volte le tratta alla stregua di zeri assoluti; e poiché guarda all'infinito come inverso dell'infinitamente piccolo, trasporta l'indeterminazione che regna nell'infinitesimo anche nell'infinito. L'Huilier pensa che quando si considerano i rapporti degli incrementi delle quantità variabili ci sia uno stato in cui tali incrementi divengano evanescenti, e il calcolo differenziale è proprio il metodo per determinare il rapporto degli incrementi evanescenti che subiscono delle funzioni qualunque d'una quantità variabile quando a tale quantità è attribuito un incremento evanescente. Si può ritenere che Eulero consideri gli accrescimenti variabili e le loro funzioni non nello stato in cui sono già svaniti, ma in uno stadio intermedio tra l'esistenza e il niente, nello stato tra la vita e la morte, ironizza sottilmente L'Huilier, per cui una tale idea è arbitraria e non sufficiente per basare su di essa una scienza esatta. Per questo Eulero riguarda in definitiva tali incrementi come assolutamente nulli, sebbene a tratti essi sembrino risorgere dal nulla. La sua principale affermazione al riguardo è che due zeri possono avere tra loro un rapporto qualunque come segue secondo lui dal fatto che $n\times 0 = 1\times 0$ implica che $n : 1 \equiv 0 : 0$. Questo ragionamento non convince L'Huilier in quanto solo le quantità possono avere un rapporto e $0$ è la negazione della quantità. L'annullarsi di una grandezza non dà nessuna informazione, è il nulla. Ad esempio se consideriamo la parabola d'equazione $y^m=x$ si ha: *sottag* $: x = m : 1$, in tutti gli stati tranne che per $x=0$, in cui sia l'ascissa che la sottotangente si annullano. Tutto quello che si può dire non è relativo al rapporto $0:0$, che non ha più nulla da svelare, quello che possiamo dire è che nell'avvicinarsi di $x$ a $0$ il rapporto precedente tende a $m$, ma non possiamo dire che se $x=0$, esso coincide con $m$. Supponiamo che fra due uomini uno abbia sempre il quadruplo dei soldi dell'altro e supponiamo però, che conservandosi tale rapporto i loro affari vadano così male che si ritrovano senza un soldo entrambi: possiamo dire che la povertà dell'uno è il quadruplo della povertà dell'altro? In generale per determinare i rapporti di quantità infinitesime bisogna semplificare dividendo per i fattori infinitesimi comuni del numeratore e del denominatore in modo da determinare, quando possibile, il rapporto che le quantità avevano prima di annullarsi.

Segue un lungo discorso sul fatto che Eulero pone $\frac{a}{0} = \infty$ in quanto al diminuire senza limiti del denominatore cresce senza limiti la frazione. L'Huilier osserva che nessun significato può essere attribuito alla precedente eguaglianza, poiché, come non si stanca di ripetere, $0$ non è una quantità e come tale non può essere usato in un rapporto. Per chiarire l'espressione $\frac{a}{0} =\infty$ Eulero la presenta nella forma: $\frac{1}{1-1} =1+1+1+1+ \ldots$, ove la somma a secondo membro è infinita.

L'Huilier obietta in vari modi a una tale argomentazione, provando che nascono una serie di assurdità dal trasportare operazioni che sono legittime tra quantità su enti che quantità non sono: infatti, asserisce, il vero valore di $\frac{1}{1-x}$ è $1+ x + x^2+ x^3 + \ldots x^{n-1}+ \frac{x^n}{1-x}$ e quindi $\frac{1}{1-1} =1+1+1+1+ \ldots + \frac{1}{1-1}$, da cui si possono trarre le conclusioni più strane ad esempio che $\frac{1}{1-1}$ è doppio di sé stesso. Inoltre nello stesso ordine di idee si potrebbe anche osservare che, essendo

$$0 = 1^n - 1^n = (1-1)(1^{n-1}+1^{n-2}+ \ldots +1)$$

dove nella seconda parentesi compaiono $n$ addendi, si avrebbe: $\infty = \frac{1}{n}\times\frac{1}{0} = \frac{1}{n}\times\infty$ e quindi l'infinito verrebbe a coincidere con l'$n$-sima parte di sé stesso. In particolare per $n=\infty$ si avrebbe: $\infty = \frac{1}{\infty}\times\infty = 0\times\infty$. Nel caso poi di $n=0$ si avrebbe: $\infty = \frac{1}{0}\times\infty = \infty\times\infty = \infty^2$, e pertanto l'infinito del primo ordine coinciderebbe con quello del secondo ordine.

## 8 – Conclusioni

L'Huilier conclude la sua esposizione asserendo che i principi del calcolo, spogliati di ogni idea dell'infinito, possono essere riformulati in base al concetto di limite e di rapporto differenziale e ricapitolando possono essere ricondotti infine al seguente principio:

«Se una quantità variabile suscettibile di limite gode costantemente d'una certa proprietà il suo limite gode della stessa proprietà». [L'Huilier 1787, 167].

Secondo Boyer il principale errore in cui incappa L'Huilier è fornito proprio da tale interpretazione della legge di continuità di Leibniz (che L'Huilier non cita): osserva infatti Boyer che una successione di numeri razionali può avere come limite un numero irrazionale, cioè la qualità o proprietà di essere razionale non si conserva al limite. Allo stesso modo la circonferenza è limite di una successione di poligoni ma non è un poligono. L'Huilier quindi non ha preso in considerazione e non ha sufficientemente approfondito questa possibilità [Boyer 1959, 256].

Ricordiamo che per alcuni all'epoca, ad esempio per il cardinale Gerdil, uno studioso anch'egli seguace di d'Alembert, la questione semplicemente non si poneva in quanto le successioni di razionali che non siano successioni geometriche o comunque non siano definite con legge espressa da formule in modo uniforme non si pensava che dessero luogo a numeri, e così $\sqrt{2}$ non era considerato un numero [Biacino, Viola 2000, 54]. Una trattazione dei numeri reali era infatti nel Settecento in generale ancora non definita, ad esempio erano noti diversi sviluppi per il calcolo di π, ma solo da pochi anni si sapeva che π non è razionale. D'altro canto nemmeno nella seconda edizione dell' *Exposition élémentaire* ci sono considerazioni su successioni di razionali che tendono a numeri irrazionali; π è citato come un esempio della necessità di estendere la definizione di limite anche alle successioni che alternativamente differiscono per difetto o per eccesso da una quantità data, in modo tale che sia il difetto che l'eccesso possano essere resi minori di una qualunque quantità assegnata: infatti non c'è dubbio, afferma L'Huilier, che sia

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

essendo $\frac{\pi}{2}$ il quadrante della circonferenza di raggio 1.

Nessuna considerazione è svolta circa il valore π (che comunque è indicato col simbolo *p*). Comunque, anche la semplice osservazione che esistono successioni di numeri positivi o comunque non nulli il cui limite è zero avrebbe forse potuto mettere in guardia dall'enunciare un principio in generale non valido.

Ma, al di là di questo errore nell'interpretazione della vaga idea espressa nella legge di continuità di Leibniz, il progetto di L'Huilier si caratterizza per la negazione senza possibilità di appello dell'infinito attuale. L'Huilier è deciso a cancellare la parola infinito in matematica, sia riferita alla grandezza che alla piccolezza. In sua vece egli propone l'uso della parola *infinible*, ad indicare la possibilità di non poter portare a termine un'operazione, o di non poter colmare una distanza senza fine, mentre la prima, infinito, comporta che si sia compiuta l'operazione e si sia raggiunto l'ultimo termine di un percorso che non ha fine. Tutta l'opera cerca di dimostrare come sia possibile riproporre l'infinito potenziale contrapposto all'infinito attuale senza che nessuno degli importanti risultati del calcolo infinitesimale vada perso, ma costruendo una solida base per esso: e infatti, osserva l'Huilier, il concetto di limite è strettamente collegato con l'infinito potenziale e lo regolamenta rigorosamente, come prova una serie di esempi: così invece di asserire che se la differenza di due quantità infinite è una quantità data allora le due quantità infinite sono eguali si può asserire che il limite del rapporto di due quantità *infinibili* la cui differenza è una quantità data è rapporto di eguaglianza e parimenti, invece di dire che un arco infinitesimo e la corda sottesa sono eguali usando la teoria dei limiti si dirà senza possibilità di errore che il limite del rapporto di un arco di curva *infiniblement* piccolo e della corda sottesa è 1. Di fatto, come è sottolineato in [Bottazzini 2018], L'Huilier nega proprio quel concetto che si era impegnato di definire nel partecipare al concorso indetto dall'Accademia, riducendolo al suo solo aspetto potenziale: così facendo egli elimina la possibilità di considerare l'infinito attuale, estremamente utile come mezzo di valutazione degli aggregati; questa possibilità sarà perlustrata in tutti i suoi aspetti solo circa un secolo dopo da parte di Weierstrass, Dedekind e Cantor.

Importante è dar atto a L'Huilier di essere sostanzialmente riuscito a ricondurre tutta la matematica del tempo ad una formulazione in base alla definizione di limite: il rapporto differenziale è il limite del rapporto dell'incremento della variabile dipendente a quello corrispondente della variabile indipendente, i coefficienti angolari delle tangenti sono correttamente inquadrati come limiti dei coefficienti angolari delle secanti; massimi, minimi, flessi sono studiati facendo appello allo sviluppo delle funzioni in serie di Taylor, serie di Taylor la cui dimostrazione pur essendo sostanzialmente erronea, fa uso corretto dei differenziali; l'integrazione è proposta come operazione inversa della differenziazione; una grande quantità di problemi di carattere isoperimetrico è svolta a livello elementare in applicazione della teoria, etc... Ed è però pur vero che l'esposizione a volte non è impeccabile, non sono affrontati problemi di particolare difficoltà e novità, ciò che avrebbe contribuito a dare maggior prestigio all'argomento trattato. Queste sono forse le cause dello scarso entusiasmo con cui l'opera fu accolta.

Ma fu soprattutto la novità del nuovo sistema che interpretava tutto il calcolo svincolandolo da considerazioni metafisiche e ancorandolo invece a procedure di tipo aritmetico che svolse un ruolo decisivo in tal senso. Pertanto, nonostante alcune mancanze formali e a volte una eccessiva pesantezza nella scrittura, e invece per il fatto che, a differenza di altri matematici coevi che si ispiravano al concetto di limite, ormai abbastanza frequentato alla fine del Settecento, ma senza riuscire a dominarlo, egli riesce a svolgere un lavoro elementare ma quasi sempre rigoroso, L'Huilier può veramente essere considerato ad un breve passo dal successivo lavoro di sistemazione dei fondamenti dell'analisi iniziato da Cauchy, e la sua opera va interpretata come l'anticipazione del processo di aritmetizzazione del calcolo in cui saranno impegnati molti matematici dell'Ottocento.

## Bibliografia

ARCHIMEDE (1974). *Opere.* A cura di Attilio Frajese, Torino: U.T.E.T.

BIACINO Loredana (2010). Temi generali nell'opera di Luca Valerio. *Boll. Storia Sci. Mat. A. XXX- N. 2.*

BIACINO Loredana (2019). Tangente e differenziale nell'articolo Différentiel di d'Alembert sull'Encyclopédie. www.Angoloacuto. *org. III serie, N.21 Anno VI, 23 dicembre 2019.*

BIACINO Loredana, VIOLA Gabriella (2020). Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito. *Matematica, Cultura e Società, UMI, Serie 1, Vol. 5, N.1,33-58.*

BOTTAZZINI Umberto (2018). *Infinito,* Bologna: Il Mulino.

BOYER Carl (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover, New York.

CARNOT Lazare (1797). *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, Paris: Mallet-Bachelier.

CAUCHY Augustin Louis (1821). *Cours d'analyse de l'Ėcole Royal Polytechnique,* Paris: Chez Debure frères.

CAUCHY Augustin Louis (1823). *Resumé des Leçons données a l'Ėcole Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*. T.1, Paris: Imprimerie Royale.

COUSIN Jacques Antoine Joseph (1796). *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Régent et Bernard.

D'ALEMBERT LE ROND Jean (1754). "Asymptote", "Différentiel", "Infini", "Limite", "Série". *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers. Paris.*

DE LA CHAPELLE, Jean Baptiste (1756). "Fluxion", *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, Paris.*

DE L'HÓSPITAL Guillaume (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris*:* De l'Imprimerie Royale, Montalan.

EULERO Leonhard (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas sive solutio problematis isoperimetricis latissimo sensu accepti,* Lausannae et Genevae, Apud Marcum Michaelem Bousquet et Socios.

FERMAT Pierre (1891-1916). I. Methodus ad disquirendam maximam et minimam. IV. Methodus de maxima et minima. VIII. Analysis ad refractiones. IX. Synthesis ad refractions, *In Oeuvres de Fermat, par Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier Villars, Paris*.

FONTENELLE Bernard LeBovier de (1727). *Élements de la géométrie de l'infini,* Paris*:* De l'Imprimerie Royale.

GERDIL Giacinto Sigismondo (1845). *Opere edite ed inedite del Cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil*. *Vol. II*, Firenze: presso G. Celli.

KLINE Morris (1972). *Storia del pensiero matematico,* Torino: Einaudi.

LAGRANGE Joseph Louis (1762). Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies, *Miscellanea Taurinensia*, 2.

LAGRANGE, Joseph Louis (1797). *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel,* Paris: De l'Imprimerie de la République, Prairal.

LEIBNITZ Gottfried Wilhelm, BERNOULLI Johan (1745). *Commercium philosophicum et mathematicum. T. I, ab anno 1694 ad annum 1699,* Lausannae et Genevae.

L'HUILIER Simon Antoine (1782). *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata: seu de maximis et minimis, pars prior elementaris,* Sumptibus et typis Michaelis Groll Varsaviae.

L'HUILIER Simon Antoine (1787). *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieures pour servir à la demande d'une théorie claire et précise de l'infini mathématique*, Berlin.

L'HUILIER Simon Antoine (1795). *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris,* Tubinga.

MONTUCLA Jean Etienne (1802). *Histoire de Mathématiques III,* Paris: Henri Agasse.

NEWTON Isaac (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London.

POZZO Riccardo (1989). *Hegel: "Introductio in philosophiam". Dagli studi ginnasiali alla prima logica (1782-1801),* Firenze: La Nuova Italia. Pubblicazioni della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università degli Studi di Milano,129.

ROBINS Benjamin (1735). *A Discourse concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios,* London.

SIMSON Robert (1776). *De limitibus Quantitatum et Rationum Fragmentum.* Opera postuma. Glasguae.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (3) settembre 2024, pp. 121-134

# *Come vincere a sudoku*

## *Nel caso classico del sudoku 9 x 9*

Luca Nicotra*

* Ingegnere e divulgatore scientifico. Membro onorario APAV e AFSU, Presidente dell'A.P.S. "Arte e Scienza", Direttore responsabile di «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale di UniversItalia; luca.nicotra1949@gmail.com.

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v6n3.141

**Sunto:** *Si descrive il metodo "a celle proibite" che consente di risolvere il caso classico del sudoku 9 x 9 fino al livello difficile. Esso consiste nell'individuare successivamente, per ciascun numero naturale da 1 a 9, l' unica cella di ciascuna regione dove quel numero può essere inserito, escludendo le celle della regione (celle proibite) appartenenti a righe o colonne contenenti quel numero.*

**Parole Chiave**: *Sudoku, quadrati latini, quadrati magici.*

**Abstract:** *The "forbidden cells" method is described, which allows you to solve the classic 9 x 9 sudoku case up to the difficult level. It consists of subsequently identifying, for each natural number from 1 to 9, the only cell in each region where that number can be inserted, excluding the cells of the region (forbidden cells) belonging to rows or columns containing that number.*

**Keywords:** *Sudoku, Latin squares, magic squares.*

## 1 – Cos'è il sudoku

Come è noto, il sudoku è un gioco matematico basato sulla logica[1] che consiste nel riempire una matrice o griglia quadrata $n$ x $n$ ($n \in$ N) in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ciascuna delle $n$ sottomatrici (figura 1) contigue di $n$ elementi, (dette anche riquadri, regioni o blocchi), contengano tutti i primi $n$ numeri naturali in ordine differente.[2] Ciascuna sottomatrice è pertanto di ordine $\sqrt{n}$.

Più in generale gli elementi della matrice possono essere simboli qualunque, purché diversi fra loro.

La versione più diffusa è quella del sudoku classico, costituito da una matrice 9 x 9 suddivisa in 9 sottomatrici contigue 3 x 3 di 9 elementi.

---

[1] A volte si vuole precisare che è un gioco di "logica" e non "matematico", considerando che gli "oggetti" da disporre nelle celle possono essere in generale non numeri. Ma la matematica non è la scienza dei numeri soltanto e comprende anche la logica formale! Il sudoku è quindi un gioco logico-matematico perché contiene concetti matematici (permutazioni, matrici, quadrati latini), utilizzati con le regole della logica. Esso deriva, come caso particolare (presenza delle regioni o sottomatrici o sottogriglie o blocchi), dai quadrati latini studiati nel 1782 da Leonhard Euler (1707-1783), *Recherches sur une Nouvelle Espece de Quarres Magiques*, Verh. Genootsch. der Wet. Vlissingen, 9, 85-232 (1782). La presenza delle sottogriglie rende la soluzione del sudoku molto più facile rispetto al quadrato latino, che ne è privo.

[2] Quindi numeri senza ripetizione detti "numeri solitari". Infatti il nome del gioco in giapponese (数独?, *sūdoku*), è una abbreviazione del nome completo 数字は独身に限る ***Sū****ji wa* ***doku****shin ni kagiru*, che tradotto in italiano significa : sono consentiti solo numeri solitari.

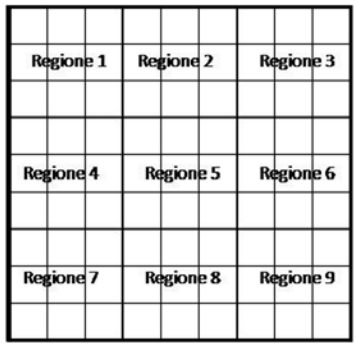



**Fig. 1 – Le regioni o riquadri o blocchi del sudoku 9 x 9.**

In tal caso ogni riga, ogni colonna e ogni riquadro 3 x 3 dovrà contenere tutti i primi 9 numeri naturali in ordine differente, ovvero loro permutazioni.[3] Esistono anche versioni a matrici 16 x 16 (riquadri 4 x 4) con elementi nell'insieme S = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9, a, b, c, d, e, f, g\}$.[4]

La soluzione del gioco consiste nel completare il riempimento della matrice, iniziando da un suo parziale riempimento detto *griglia proposta* o *matrice incompleta* (figura 2). Il sudoku viene distinto normalmente in diversi livelli di difficoltà (facile, medio, difficile, esperto, estremo), crescenti con il diminuire delle celle già riempite all'inizio del gioco. Ma la difficoltà, in realtà, dipende soprattutto dalla posizione delle celle già occupate e non tanto dal loro numero. In figura

---

[3] Non tutte ovviamente! Il numero delle soluzioni valide del Sudoku classico è 6670903752021072936960. Ma il numero delle soluzioni sostanzialmente diverse, escludendo le simmetrie dovute a rotazioni, riflessioni, permutazioni e rietichettature è 5472730538 (Jarvis, Russell, 2005).

[4] Esistono oggi oltre 200 varianti del sudoku.

2, le celle inizialmente riempite sono 37 su 81. Si tratta di un sudoku di media difficoltà.

Affinché la matrice iniziale incompleta sia considerata valida, ai fini del gioco, è necessario che la soluzione sia unica. Il gioco viene infatti considerato non valido se sussistono due o più soluzioni differenti. Pertanto il gioco non è d'azzardo, in quanto la vincita non è aleatoria, e può essere risolto con metodo deduttivo, applicando diversi criteri logici.

In questo articolo, si illustra un metodo di soluzione abbastanza semplice, applicabile con successo fino ai sudoku di livello difficile: il metodo delle "celle proibite".

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | | | 6 | 3 | | | 4 |
| | 5 | | 4 | 9 | | | 6 | 3 |
| | | | | 5 | | | | 2 |
| | 2 | | 9 | 3 | | | 1 | |
| 5 | | | 8 | 2 | 6 | | | 9 |
| | 6 | | | 1 | 4 | | 3 | |
| 2 | | | | 4 | | | | |
| 4 | 8 | | | 7 | 5 | | 2 | |
| 6 | | | 2 | 8 | | | 4 | 1 |

**Fig. 2**

## 2 – Il metodo

Nella versione 9 x 9 online, più interessante di quella stampata, si chiede al giocatore di risolvere il sudoku in uno dei seguenti modi:

- senza errori e in un tempo indefinito;
- con un numero massimo di errori (usualmente 3) entro un determinato tempo (solitamente non oltre 10 minuti).

Procedere per tentativi, anche se guidati da buoni criteri probabilistici, conduce ben presto inevitabilmente a perdere la partita, proprio per la natura del gioco, la cui soluzione non è aleatoria ma unica e determinata da criteri deduttivi.

Esiste invece un metodo, detto "celle proibite" (da me ormai ampiamente sperimentato) che consente di risolvere il sudoku classico nella prima modalità, senza errori e senza limiti di tempo, nelle modalità facile, medio e difficile. Nel caso di soluzione senza errori e senza limiti di tempo, ovviamente anche la rapidità con cui si arriva alla soluzione viene tenuta in conto nelle classifiche. Nei sudoku di livello esperto ed estremo, occorre invece accostare al metodo delle "celle proibite"altri criteri più complessi, per stabilire la corretta collocazione dei numeri mancanti. Si tratta sempre, però, di metodi di analisi che permettono di stabilire con criteri logico-deduttivi la corretta collocazione dei numeri mancanti in maniera univoca.

Concettualmente il metodo è molto semplice e deriva direttamente dal rispetto dell'unica regola del gioco:

*Inserire ciascuno dei 9 numeri naturali mancanti nella matrice incompleta escludendo le celle della matrice che risultano appartenere a righe, colonne e regioni contenenti già il numero in oggetto.*

La caratteristica del metodo proposto è la sua attenzione primaria a completare il riempimento delle regioni piuttosto che delle righe e colonne. Il completamento di queste ultime avviene soltanto secondariamente quando, durante il riempimento delle regioni, si ottengono righe o colonne con una sola cella vuota, in cui quindi è certo l'inserimento del numero mancante. È possibile collocare correttamente i numeri mancanti anche nel caso di una colonna o riga contenente due celle vuote, quando una di queste risulta cella proibita per uno dei due numeri candidati, perché intercettata da una riga o colonna contenente già quel numero.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 1 | 3 | 7 | | | | |
| 2 | 6 | 9 | 8 | | 1 | 7 | | 3 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | | | 8 | | 1 |
| | 1 | | 6 | 3 | 7 | 2 | | |
| | | 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 7 | |
| 7 | 2 | 3 | 4 | 8 | 9 | 1 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | | 5 | 6 | | 9 | 1 | 7 |
| 1 | 7 | | 2 | 9 | | 5 | 3 | 6 |
| 6 | 9 | | 7 | 1 | 3 | 4 | 8 | 2 |

**Fig. 3.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 1 | 3 | 7 | | | | |
| 2 | 6 | 9 | 8 | | 1 | 7 | | 3 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | | | 8 | | 1 |
| | 1 | | 6 | 3 | 7 | 2 | | |
| | | 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 7 | |
| 7 | 2 | 3 | 4 | 8 | 9 | 1 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | | 5 | 6 | 8 | 9 | 1 | 7 |
| 1 | 7 | | 2 | 9 | 4 | 5 | 3 | 6 |
| 6 | 9 | | 7 | 1 | 3 | 4 | 8 | 2 |

**Fig. 4.**

Per esempio la colonna 3 di figura 10 ha due celle vuote da riempire con i numeri 5 e 7. Ma la cella 7 della colonna è proibita per il numero 7, che è presente nella riga 7. Pertanto, nella colonna 3 la cella 7 deve contenere il numero 5 e la cella 9 deve contenere il numero 7.

Un'altra applicazione del metodo "celle proibite" riguarda il caso di una regione con due celle vuote.

La regione 8 di figura 3 ha due celle vuote che devono essere riempite con i numeri mancanti 4 e 8. La riga 7 contiene, però, il numero 4 che pertanto deve essere inserito nella cella vuota appartenente alla riga 8. Di conseguenza il numero 8 deve essere inserito nella cella vuota appartenente alla riga 7 (figura 4).

In pratica conviene procedere nel seguente modo, cercando di inserire ciascuno numero da 1 a 9 nei riquadri dove non è già presente.

Con riferimento al caso di figura 2, cominciando, per esempio, dal numero 9, si considerano i riquadri 3, 4, 7, 8, 9 dove il 9 non compare. Fra questi si individuano i riquadri contenenti soltanto una cella disponibile per contenere il 9 rispettando la regola del sudoku. In altri termini, si devono escludere i riquadri contenenti due o più celle ove sarebbe possibile inserire il numero 9: chiamiamo tali celle "ambigue". Con X si sono marcate le "celle proibite" per il 9, appartenenti a righe e colonne già contenenti il 9 (figura 5). Per esempio, nel caso della figura 2 le regioni 3, 7, 8, 9 contengono celle ambigue per il 9 mentre soltanto la regione 4 contiene una sola cella disponibile per il 9: in essa quindi è possibile inserire con certezza il 9 rispettando la regola del sudoku (figura 6).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | x | x | 6 | 3 | x | x | 4 |
| x | 5 | x | 4 | 9 | x | x | 6 | 3 |
| x | | | x | 5 | | | | 2 |
| x | 2 | x | 9 | 3 | x | x | 1 | x |
| 5 | x | x | 8 | 2 | 6 | x | x | 9 |
| x | 6 | | x | 1 | 4 | | 3 | x |
| 2 | | | x | 4 | | | | x |
| 4 | 8 | | x | 7 | 5 | | 2 | x |
| 6 | | | 2 | 8 | | | 4 | 1 |

**Fig. 5**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | | | 6 | 3 | | | 4 |
| | 5 | | 4 | 9 | | | 6 | 3 |
| | | | | 5 | | | | 2 |
| | 2 | | 9 | 3 | | | 1 | |
| 5 | | | 8 | 2 | 6 | | | 9 |
| | 6 | 9 | | 1 | 4 | | 3 | |
| 2 | | | | 4 | | | | |
| 4 | 8 | | | 7 | 5 | | 2 | |
| 6 | | | 2 | 8 | | | 4 | 1 |

**Fig. 6.**

Lo stesso procedimento si può applicare successivamente ai numeri 8, 7, 6. 5. 4. 3. 2, 1. Normalmente non si riesce a sistemare ciascun numero in tutti i 9 riquadri in un solo "giro", ma ne occorrono diversi. Spesso, dopo un primo giro, riquadri che prima contenevano celle ambigue per un certo numero, risultano invece possedere un'unica cella "certa" per accogliere quel numero, essendo state occupate da altri numeri, alla fine del primo giro, le celle "ambigue".

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | | | 6 | 3 | | | 4 |
| | 5 | | 4 | 9 | | | 6 | 3 |
| | | 6 | | 5 | | | | 2 |
| | 2 | | 9 | 3 | | | 1 | |
| 5 | | | 8 | 2 | 6 | | | 9 |
| | 6 | 9 | 5 | 1 | 4 | | 3 | |
| 2 | | | | 4 | | | | |
| 4 | 8 | | | 7 | 5 | | 2 | |
| 6 | | | 2 | 8 | | | 4 | 1 |

**Fig. 7.**

Per esempio, dopo avere collocato il 5 nell'unica cella certa della regione 5 di figura 7, questa risulta possedere un sola cella vuota che ovviamente può essere riempita con il numero mancante in tale regione: il 7 (figura 8).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | | | 6 | 3 | | | 4 |
| | 5 | | 4 | 9 | | | 6 | 3 |
| | | 6 | | 5 | | | | 2 |
| | 2 | | 9 | 3 | 7 | | 1 | |
| 5 | | | 8 | 2 | 6 | | | 9 |
| | 6 | 9 | 5 | 1 | 4 | | 3 | |
| 2 | | | | 4 | | | | |
| 4 | 8 | | | 7 | 5 | | 2 | |
| 6 | | | 2 | 8 | | | 4 | 1 |

**Fig. 8.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 2 | 1 | 6 | 3 | | | 4 |
| | 5 | | 4 | 9 | 2 | | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 8 | | 9 | 2 |
| | 2 | | 9 | 3 | 7 | | 1 | |
| 5 | | | 8 | 2 | 6 | | | 9 |
| | 6 | 9 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | |
| 2 | 9 | | | 4 | 1 | | | |
| 4 | 8 | | | 7 | 5 | 9 | 2 | |
| 6 | | | 2 | 8 | 9 | | 4 | 1 |

**Fig. 9.**

Il processo di riempimento dei riquadri conduce a un certo punto alla situazione di figura 9 che differisce da quella di figura 8 per l'inserimento in alcuni riquadri dei numeri 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9. I numeri 2 e 9 sono stati inseriti in tutti i riquadri.

Dopo l'inserimento del 9 nella terza regione, la terza riga presenta una sola cella vuota (figura 9) che evidentemente deve essere riempita con l'unico numero mancante: 1 (figura 10).

Proseguendo si arriva alla situazione di figura 10 in cui sono stati inseriti in tutti i riquadri i numeri: 1,2,3,4,6,8,9.

Mancano i numeri 5 e 7, da inserire nel riquadro 7 dove sono vuote due celle, ma ciascuna di esse è anche l'unica cella vuota delle righe 7 e 9. Risulta pertanto univocamente definita la collocazione sia del 5 sia del 7 (figura 11). La soluzione del sudoku è ottenuta.

La matrice quadrata del sudoku risolto si presenta come un quadrato latino di ordine *9* e più in generale di ordine $n$. Infatti un quadrato latino di ordine $n$ è:

*Una matrice quadrata nella quale ogni riga ed ogni colonna siano una permutazione dei numeri 0,1, …,n-1, (eventualmente dei simboli* $a_0$, $a_1$,….., $a_{n-1}$).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 2 | 1 | 6 | 3 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 5 | 8 | 4 | 9 | 2 | 7 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 8 | 1 | 9 | 2 |
| 8 | 2 | 4 | 9 | 3 | 7 | 6 | 1 | 5 |
| 5 | 1 | 3 | 8 | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 |
| 7 | 6 | 9 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 |
| 2 | 9 | | 6 | 4 | 1 | 3 | 8 | 7 |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 7 | 5 | 9 | 2 | 6 |
| 6 | 3 | | 2 | 8 | 9 | 5 | 4 | 1 |

**Fig. 10.**

*……………………….*

*Il nome fu dato da Eulero per il fatto che egli era solito denotare gli elementi della prima riga (e quindi delle altre) con lettere latine.*

*Un quadrato latino si può riguardare come una generalizzazione dei gruppi finiti, in quanto un quadrato latino si può assumere come la tavola di composizione di un struttura algebrica, meno ricca dei gruppi, denominata quasi-gruppo.* (Eugeni, 2021, pp. 20-21).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 2 | 1 | 6 | 3 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 5 | 8 | 4 | 9 | 2 | 7 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 7 | 5 | 8 | 1 | 9 | 2 |
| 8 | 2 | 4 | 9 | 3 | 7 | 6 | 1 | 5 |
| 5 | 1 | 3 | 8 | 2 | 6 | 4 | 7 | 9 |
| 7 | 6 | 9 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 |
| 2 | 9 | 5 | 6 | 4 | 1 | 3 | 8 | 7 |
| 4 | 8 | 1 | 3 | 7 | 5 | 9 | 2 | 6 |
| 6 | 3 | 7 | 2 | 8 | 9 | 5 | 4 | 1 |

Fig. 11.

## 3 - Cenni storici

Dalla voce Sudoku in wikipedia:

*I primi giochi di logica basati sui numeri apparvero sui giornali verso la fine del XIX secolo, quando alcuni enigmisti francesi iniziarono a sperimentarli rimuovendo opportunamente dei numeri dai quadrati magici. Le Siècle, un quotidiano parigino, pubblicò nel 1892 un quadrato magico di dimensioni 9×9 parzialmente completo con sottoquadrati di dimensioni 3×3. Non si trattava di un sudoku così come lo conosciamo oggi poiché conteneva numeri a doppia cifra e, per essere risolto, richiedeva l'aritmetica piuttosto che la logica, ma ammetteva comunque la regola per cui ogni riga, colonna e sottoquadrato dovesse contenere gli stessi numeri senza ripeterli. Successivamente un giornale rivale de Le Siècle, La France, ridefinì le regole di questo gioco, avvicinandosi di molto al sudoku moderno: ogni riga, colonna e sottoquadrato del quadrato magico doveva essere riempita soltanto con i numeri da 1 a 9, sebbene i sottoquadrati non fossero marcati all'interno dello schema. Questi giochi settimanali furono pubblicati anche da* *altri quotidiani francesi come L'Echo de Paris per circa un decennio, ma poi scomparvero all'epoca della prima guerra mondiale.*

*Secondo l'enigmista statunitense Will Shortz, il sudoku moderno fu realizzato da Howard Garns, un ex architetto in pensione dell'Indiana (morto nel 1989), e pubblicato per la prima volta nel 1979 da Dell Magazines all'interno della rivista Dell Pencil Puzzles and Word Games con il titolo Number Place.*

*Il gioco venne introdotto in Giappone dalla casa editrice Nikoli nella rivista Monthly Nikolist nell'aprile del 1984 con il titolo Suuji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る?), successivamente abbreviato da Maki Kaji in Sudoku prelevando soltanto i primi caratteri* kanji *del nome completo. Nel 1986 Nikoli introdusse due novità: il numero massimo di celle già riempite fu ristretto a 32 e le griglie diventarono "simmetriche" (nel senso che i numeri già stampati venivano distribuiti su celle simmetriche).*

*Nell'ottobre del 2004 il sudoku venne importato in Gran Bretagna da un ex giudice neozelandese, Wayne Gould, per poi diffondersi in Europa e nel resto del mondo nel 2005. Sempre nel 2005, "sudoku" venne eletta parola dell'anno dalla Oxford University Press.*

# Bibliografia

BAMMEL S.F. , ROTHSTEIN J. (1975). The number of 9×9 Latin squares, «*Discrete Mathematics*» 11 93–95.

EUGENI F. (2021). *La geometria proiettiva ed affine II : quadrati greco-latini e piani affini finiti.* «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. III (2) settembre 2021.

FELGENHAUER B., JARVIS F. (2005). *Enumerating possible Sudoku grids.* Department of Computer Science TU Dresden 01069

Dresden, Germany; Department of Pure Mathematics University of Sheffield, Sheffield S3 7RH, U.K.

http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf

JARVIS F., Ed RUSSELL (2005).*There are 5472730538 essentially different Sudoku grids ... and the Sudoku symmetry group*, su *Frazer Jarvis's home page*, 7 settembre 2005.

https://web.archive.org/web/20061004103338/http:/www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html

MCKAY B. D., ROGOYSKI E. (1995). Latin squares of order 10, *Electronic J. Combin*. 2, Note 3, approx 4pp. (electronic)

# *Profili biografici degli autori*

**Paolo Severino Manca -** paolo.manca.spas@alice.it

Già professore ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa e direttore del Master in Mercati Finanziari dell' Università di Pisa e Fondazione Casse di Risparmio. Di recente ha scritto *Te la do io la probabilità* (Goware editore) e *Il giallo del teorema dei quattro colori* (ETS editore). Attualmente si occupa di teologia e ha pubblicato con successo *Ma Dio c'è?* (Goware editore). Nel passato ha esercitato anche la professione di maestro di sci. Come tenore e romanziere si presenta come Paolo Severino Nonchè (vedi YouTube e Amazon).

**LauraTomassi** - laura.tomassi1@gmail.com

Laura Tomassi è insegnante nella Scuola Secondaria di Primo Grado, nata a Rieti il 06/03/1973, laureata in Chimica presso l'Università degli Studi di Roma La Sapienza. Ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Biologia Cellulare e Molecolare presso l'Università degli Studi di TorVergata ed attualmente Dottoranda in Matematica presso lo stesso ateneo. Ha insegnato nelle Scuole Secondarie Secondo Grado e negli Istituti di Formazione Professionale. L'esperienza didattica nel campo delle Scienze Naturali e della Matematica ha acceso il suo interesse per lo studio, la progettazione la sperimentazione di attività laboratoriali, riproposte in qualità di formatrice presso i corsi dell'Accademia dei Lincei, presso l'Università di Tor Vergata e l'Università LUMSA. E' inoltre collaboratrice del progetto di ricerca sul Liber Abaci di Fibonacci, www.progettofibonacci.it. La sua attività di ricerca e di insegnante hanno in comune la tematica della storia integrata nella didattica della matematica e delle scienze e la progettazione di materiali didattici ispirati alla storia.

**Bruno Jannamorelli (Sulmona) -** jannab@tiscali.it

Già docente di Matematica e Fisica nei licei della provincia dell'Aquila, nato a Carpinone (IS) il 28/06/1951, è stato assistente supplente presso la cattedra di Geometria della Facoltà di Scienze dell'Università dell'Aquila dal 15/12/1974 al 31/10/1979, ha condotto due laboratori (Indirizzo Fisico Informatico Matematico) e vari laboratori (Sostegno 400 ore) nella SSIS di Chieti- L'Aquila. Dal 2010 al 2021 ha avuto l'incarico di Didattica della Matematica presso la facoltà di Scienze della Formazione Primaria – Università dell'Aquila. Nell'anno accademico 2011/2012 ha avuto l'incarico di Didattica della Matematica presso il TFA (classi di concorso A049 e A059) – Università dell'Aquila. È stato presidente della sezione Peligna della Mathesis dal 1986 al 2000 organizzando quattro seminari internazionali di Didattica della Matematica. È autore di vari articoli di didattica o divulgazione della Matematica, della Fisica e di alcuni libri. Cura il sito webb www.lumacamens.it dove raccoglie alcuni suoi lavori.

**Loredana Biacino** - loredana.biacino@libero.it

Nata a Trieste, si è laureata in matematica con lode presso l'Università degli studi di Napoli il 3 dicembre del 1969. Subito dopo è diventata assistente incaricata e poi, doporegolare concorso, di ruolo presso la cattedra di Analisi Matematica III. Dal 1985 fino al 2014, anno in cui sono andata in pensione sono stata professore associato di Analisi Matematica presso la Federico II. In parallelo con l'attività svolta come professore associato ho tenuto, dal 1996 ogni anno, fino alla conclusione del ciclo, un breve corso nell'ambito del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica; poi dal 2001 al 2007 uno o due corsi annuali di 30 ore l'uno di Storia della Matematica, per la SICSI; infine da diversi anni partecipo al Progetto Lauree Scientifiche, con un Laboratorio su Infiniti e infinitesimi.

**Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com**

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di circa 450 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.*(coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. – Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia di Roma, per la quale cura la collana *Scienza e Cultura.* Dirige anche le collane *Ingegneria Industriale Assistita dal computer* e *Il filo della conoscenza* per la casa editrice Inriga di Bologna, con la quale ha pubblicato i libri *La progettazione meccanica con CATIA V5*

(2023), *Le fasi del ciclo di vita del prodotto. Il ruolo dell'informatica* (2023), *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* (2024). Per le ricerche si veda il sito Research Gate.