Periodico di Matematica

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Anno XXXX - Serie IV – volume VII (2)
Supplemento settembre 2025

A cura di

Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Atti V Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
4-7 settembre 2025

curati da
Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro,
Giovanna Della Vecchia, Giovanni Vincenzi
PARTE I

MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

Anno XXXX - Serie IV – Volume VII (2)
Supplemento Settembre 2025

Atti V Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana
Agerola 4-7 settembre 2025

PARTE I

ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo
Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico
Luca Nicotra

Direzione e redazione
Direttore responsabile:
Luca Nicotra

Direttori di redazione:
Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:
Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:
Accademia di Filosofia delle Scienze Umane - Zona Industriale Colleranesco – 65021 Giulianova (TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2025 Edizioni AFSU – UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019 del 19 luglio 2019 e Versione cartacea n.695/2021 del 3 giugno 2021 Tribunale di Teramo.
Tutti i diritti riservati.
ISBN 978-88-3293-858-6
Gli scritti apparsi sulla Rivista possono essere pubblicati altrove purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di settembre 2025 presso UniversItalia
Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 –
e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Redazione Periodico di Matematica	1-6
Editoriale	7-10
A.Palma-A.Pacifico-B.Scoppola	11-38
Anna Amirante	39-60
Ciro Di Martino	61-92
Daniela Tossini	93-112
Enrico D'Amora	1 13-130
F.Giordano-G.Vincenzi	131-160
Ferdinando Casolaro	161-190
Giovanna Della Vecchia	191-212
L.Lunasco-M.Torre	213-224
Tullio Aebischer	225-242
M.Calvello-M.V.Gargiulo-G.Rianna	243-252
Matteo Torre	253-270
Pierluigi Casolaro	271-284

V Convegno "Matematica Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana"

Agerola, Campus Principe di Napoli, 4-7 settembre 2025

Il presente volume raccoglie i lavori presentati alla quinta edizione del Convegno "Matematica Natura e Scienze della Alta Costiera Amalfitana" che si tiene annualmente nella città di Agerola.

La pubblicazione è a cura dell'Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" nell'ambito del Progetto "***Elsa Morante: il contributo del neo-realismo alla letteratura ed al cinema nel XX secolo***", finanziato con la L.R. n. 7/2003, contributi per la promozione culturale anno 2025".

Il convegno è stato articolato come segue: il 4 settembre dedicato alla sessione letteraria con la "Giornata del libro e della lettura in Costiera", inserita dall'amministrazione comunale di Agerola nel Programma ufficiale della XIV edizione del Festival dell'Alta Costiera Amalfitana 2025, mentre dal 5 al 7 settembre si sono susseguite le sessioni relative agli "Itinerari interdisciplinari sui Sentieri della Matematica".

Per il Comitato Scientifico, i curatori

A. Buonocore, F. Casolaro, G. Della Vecchia, G. Vincenzi

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 7-10

Editoriale

Aniello Buonocore*, Ferdinando Casolaro**,
Giovanna Della Vecchia***, Giovanni Vincenzi****

*Presidente Mathesis Napoli "Morelli-Rao"; anibuono58@gmail.com
** Presidente ANFSU "R. Caccioppoli"; presidente.anfsu@gmail.com
***DIARC "Federico II"; giovanna.dellavecchia@gmail.com
****Dip. Matematica Università di Salerno; vincenzi@unisa.it

Il presente volume raccoglie alcuni dei contributi proposti per il V Convegno *Matematica Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana*, *Itinerari interdisciplinari sui sentieri della Matematica: "Premio Ager Scientiarum 2025"*, che si svolgerà nel periodo 4-7 settembre 2025 nella cittadina di Agerola.

Tenuto conto dell'elevato numero di proposte pervenute, si è concordato di raccogliere successivamente una parte dei contributi in un secondo volume degli Atti.

La scelta della cittadina di Agerola è dovuta alla grande disponibilità che l'amministrazione, oggi presieduta dal sindaco Tommaso Naclerio, ha dato da sempre alla realizzazione delle nostre attività.

Non è secondaria, inoltre, la sua posizione geografica, in quanto la cittadina fa da "ponte" tra la città metropolitana di Napoli e la citta` di Salerno (oltre all'attrazione turistica che esercita favorendo la presenza di visitatori da ogni parte

d'Italia), ed è facilmente raggiungibile da docenti e dirigenti delle Scuole e delle Università delle due prestigiose città.

Il Convegno è stato organizzato - in collaborazione - dalle associazioni Mathesis "A. Morelli e S. Rao" di Napoli, Math&Phys di Salerno, Mathemare di Castellammare di Stabia e dall'Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU).

Hanno contribuito all'organizzazione l'Accademia AFSU (Accademia di Filosofia e Scienze Umane in Teramo) e l'Accademia APAV (Accademia Piceno Aprutina) che perseguono gli stessi obiettivi di promozione e diffusione del dialogo interculturale e, nello specifico, di innovazione e potenziamento delle pratiche didattiche nel processo di insegnamento, nonché di miglioramento della qualità della formazione in generale.

L'evento ha ricevuto il sostegno e il Patrocinio del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno e del Comune di Agerola. Gli organizzatori ringraziano altresì l'Azienda "Fior d'Agerola" che ha sponsorizzato l'iniziativa.

Il convegno è rivolto a tutti i docenti, ai Dirigenti Scolastici della Scuola Secondaria di Primo e Secondo Grado e in particolare, a tutti gli appassionati delle Scienze Matematiche Fisiche e Naturali. L'evento si propone di evidenziare non solo gli aspetti contenutistici e innovativi della Matematica Pura e delle sue applicazioni alle Scienze ma anche di condividere alcune esperienze didattiche di carattere interdisciplinare.

Giunto alla sua quinta edizione, è stato articolato come segue.

- 4 settembre: sessione dedicata alla "Giornata del libro e della lettura in Costiera", iniziativa inserita dall'amministrazione comunale di Agerola nel Programma ufficiale della XIV edizione del Festival dell'Alta Costiera Amalfitana 2025.

Le attività programmate si svolgeranno presso l'Osservatorio Astronomico, adiacente al Campus Principe di Napoli.

La giornata sarà dedicata alla presentazione dei libri dei seguenti autori:

Marina Billwiller, Filomena Carrella, Renato Casolaro e Giuseppe Ferraro, Caterina Della Vecchia, Gea Finelli, Francesca Gerla, Angela Gionti e Maria Rotunno, Giovanni Liccardo, Antonio Martone, Mauro Pepe.

Saranno allestiti stand dedicati all'editoria, accessibili a chiunque ne abbia fatto richiesta.

- 5-7 settembre: seguendo la linea tradizionale delle precedenti edizioni, verranno presentate proposte relative alle discipline scientifiche (Matematica, Fisica, Chimica, Scienze della Terra, etc …).

Le relazioni si terranno nella sede centrale del Campus.

Per stilare il Programma del convegno è stato necessario operare una selezione tra le numerose proposte pervenute da ogni parte d'Italia, selezione effettuata considerando, in particolare, le date di presentazione dei lavori, così da garantire una valutazione equa e coerente con i tempi stabiliti dal programma.

L'integrazione della Manifestazione con una giornata di Cultura "oltre la Matematica e le Scienze" è stata una scelta delle associazioni organizzatrici che, per rendere esaustiva una proposta didattica che tenga conto delle esigenze di oggi, ritengono:

- la Promozione della lettura nell'insegnamento un aspetto fondamentale da valorizzare in quanto, causa il veloce avanzamento tecnologico e le problematiche scaturite da un eccessivo utilizzo dell'Intelligenza Artificiale, è sotto gli occhi di tutti un abbassamento del livello di competenze linguistiche negli studenti.

- la divulgazione di tematiche relative alle interrelazioni tra le varie discipline scientifiche (dalle scienze naturali, biologiche e geologiche alla fisica, alla matematica ed alla filosofia), in un momento in cui le nuove generazioni dovranno affrontare la difficile sfida ambientale, trarrà sicuramente una maggiore spinta dall'approfondimento della comunicazione linguistica.

Anche in questa edizione, i partecipanti avranno l'opportunità di presentare dei Poster da esporre all'interno della sala convegni: il lavoro che susciterà il maggiore interesse e riceverà più apprezzamento da parte del pubblico, si aggiudicherà il "*Premio Ager Scientiarum 2025*".

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 11-38

Un rompicapo storico capovolto: dalla soluzione (sicuramente ottima di Archimede) al processo.

Antonella Palma*, Agnese Pacifico**, Benedetto Scoppola***

**Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia; antonella.palma@gmail.com*
*** agnese.pacifico@gmail.com*
****Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia; benedetto.scoppola@gmail.com*

Sunto: *Nella Misura del Cerchio Archimede esibisce risultati matematici dando per scontata la loro provenienza. Tra questi alcuni valori relativi alle stime della radice quadrata durante il processo di ricorrenza nella sezione dedicata al poligono inscritto non solo non sono giustificati ma sembrano non ottimali rispetto alla precisione esibita nei calcoli precedenti. La nostra ipotesi è che tali approssimazioni sub-ottime derivino da una procedura strutturata attraverso la soluzione di un complesso sistema di equazioni diofantee in modo da procedere nell'esaustione avendo a che fare con interi né troppo piccoli né troppo grandi. La ricerca della strategia utilizzata da Archimede diviene un'intrigante proposta didattica. Infine viene suggerita una possibile soluzione con la relativa dimostrazione.*

Parole Chiave*: Archimede, Misura del Cerchio, radice quadrata, equazioni diofantee.*

Abstract: *In Archimedes' work The Measurement of the Circle, some mathematical results are presented without explicitly referencing their derivation. Among these, we find some estimates of square roots used in the recurrence process in the section devoted to inscribed polygons. The choice of the estimates not only is not explained, but seems non optimal compared to the precision shown in previous computations. Our hypothesis is that such sub-optimal approximations arise from a procedure structured through the solution of a complex system of Diophantine equations, so as to proceed in the exhaustion method while dealing with integers that are neither too small nor too large. The investigation of the strategy used by Archimedes becomes an intriguing educational proposal. Finally, a possible solution is suggested, along with its corresponding proof.*

Keywords: *Archimedes, The Measurement of the Circle, square root, Diophantine equations*

1 – Introduzione

Nella *Misura del Cerchio* Archimede esibisce risultati matematici utilizzati senza richiami espliciti, dando per scontata la loro provenienza, come se questo breve trattato fosse un articolo di ricerca avanzata destinato ad esperti del settore. Tra questi, alcuni valori relativi alle stime della radice quadrata durante il processo di ricorrenza nella sezione dedicata al poligono inscritto non sono ottimali e non viene data giustificazione di tale scelta sub-ottima.

Questi valori di approssimazione di radici quadrate non ottimi vengono riportati in letteratura senza indagare sulla motivazione che potrebbe aver indotto Archimede ad esibirli. Si parla di scelte che devono essere spiegate da *circostanze eccezionali* (Heath, 1897) oppure *fatte dopo una lunga riflessione* (Knorr, 1976). Ancora, in uno studio del 2023 (Lastarìa), si dice che una di queste approssimazioni è tra le più difficili da ricostruire (ma non si tenta di ricostruirla).

La nostra ipotesi è che le approssimazioni sub-ottime esibite da Archimede derivino da una procedura strutturata allo scopo di avere a che fare, nei calcoli successivi, con interi né troppo piccoli (per evitare eccessivi errori di approssimazione) né troppo grandi (per evitare calcoli inutilmente complicati).
In questa ricerca di approssimazioni sub-ottime della radice, secondo la nostra ipotesi obbligate per ottimizzare il calcolo successivo e procedere nell'esaustione, è necessario risolvere un complesso sistema di equazioni diofantee, di cui si conosce il risultato - sicuramente ottimo poiché è quello esibito da Archimede - ma non il processo.
Si propone di lanciare una sfida con un'insolita sequenza in una classe di scuola secondaria di II grado: si fornisce il risultato dell'equazione diofantea e si cerca la strategia utilizzata per giungere al risultato.

2 – Il contesto del problema

Nella proposizione 3 della Κύκλου μέτρησις Archimede, attraverso una procedura iterativa che usa i perimetri di due poligoni regolari con 96 lati, rispettivamente inscritto e circoscritto al cerchio, esibisce due stime del rapporto tra la circonferenza e il diametro, cioè del numero che oggi indichiamo con π. Le stime trovate da Archimede, scritte in linguaggio moderno, sono le seguenti:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

I numerosi testi commentati, antichi e moderni, della proposizione 3 riportano il lungo procedimento di calcolo ma solo alcuni si occupano di indagare quali possano essere state

alcune decisioni metodologiche di Archimede che hanno condotto ai risultati che vengono esibiti nel trattato in modo molto sintetico. Concetti e risultati matematici sono utilizzati senza richiami espliciti, dando per scontata la loro provenienza, come se questo breve trattato fosse un "articolo di ricerca avanzata" piuttosto che un *manuale* organico e dettagliato come gli *Elementi* di Euclide.

Il metodo che usa Archimede per trovare l'intervallo che comprende il valore di π consiste nell'assumere come approssimazione per difetto il rapporto tra il perimetro di un poligono regolare inscritto nella circonferenza e il diametro di tale circonferenza; come approssimazione per eccesso il rapporto tra il semiperimetro di un poligono regolare circoscritto alla circonferenza e il raggio della circonferenza stessa. Egli parte dagli esagoni e successivamente raddoppia il numero dei lati considerando poligoni regolari inscritti e circoscritti di 12, 24, 48 e 96 lati. Tale procedimento oggi si direbbe *per ricorrenza*, poiché dal valore del lato del poligono di $3 \cdot 2^n$ lati si ricava il valore del lato del poligono di $3 \cdot 2^{n+1}$ lati. Si giunge così alle approssimazioni finali di π attraverso un intreccio di argomentazioni geometriche e di tecniche di calcolo numerico, che oggi chiameremmo di analisi numerica.

Per scrivere i rapporti ricorsivi nella procedura Archimede utilizza il teorema della bisettrice e il teorema di Pitagora. Quest'ultimo, fornendo un valore al quadrato (δυνάμειν λόγον), deve essere ricondotto ad un rapporto semplice (μήκει) che richiede il calcolo di una radice quadrata per proseguire nel passo successivo.

2.1 – La soluzione della radice quadrata col metodo dello gnomone

Per dirimere la *questione storica* relativa ai valori esibiti da Archimede nella soluzione di alcune di queste radici quadrate è necessario eseguire procedure di calcolo *fedeli* alle conoscenze a disposizione del Siracusano. Si assume che per l'estrazione di radici quadrate di numeri interi si ricorra all'utilizzo della tecnica dello gnomone.

Calcoli gnomonici sono presenti non solo in Grecia, ma anche in civiltà più antiche come quella della Mesopotamia, dell'India e della Cina. Tale metodo è considerato una possibile strategia risolutiva da molti commentatori, tra cui i citati Heath, Knorr e Zellini.

Consideriamo un esempio di soluzione di radice con tale tecnica proprio presa dal testo archimedeo. In questo caso la radice si trova nella procedura relativa ai *poligoni circoscritti* al passaggio dal poligono di 24 lati a quello di 48 lati e quindi la radice deve essere risolta per *difetto*. Nella procedura per i *poligoni inscritti* invece la radice deve essere risolta per *eccesso*. Si svolgono i due esempi per mostrare il calcolo ottimo proposto da Archimede.

Si vuole risolvere, per difetto, la radice di 5472132 ($\sqrt{5472132}$). Si considerano i quadrati perfetti che contengono il radicando considerato:

$$2339^2 = 5470921 < 5472132 < 5475600 = 2340^2.$$

Il quadrato con area 5470921 avrà lato 2339, quindi il quadrato con area 5472132 avrà lato maggiore di 2339 di una quantità minore dell'unità. Si può fare riferimento alla figura 1 (figura non in scala in quanto la quantità x è una frazione di 1).

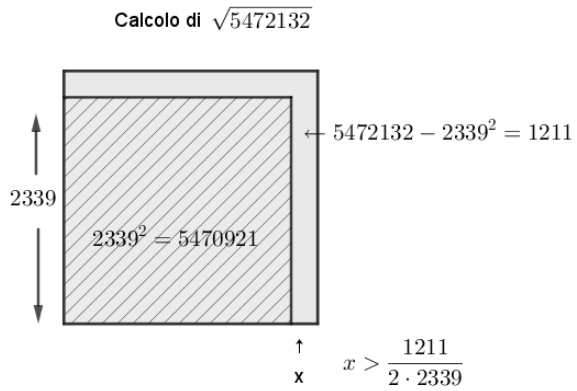


Fig. 1- Schema di un esempio per la risoluzione della radice quadrata con la tecnica dello gnomone

L'area del poligono a forma di L è 1211 e il valore della x è dato approssimativamente - per eccesso poiché è stato trascurato il quadratino x^2 in alto a sinistra – dal rapporto

$$\frac{1211}{2 \cdot 2339} = \frac{1211}{4678}$$

Il radicando è abbastanza "grande" per consentire di trascurare il termine x^2 senza commettere errori di approssimazione troppo grandi. In questo caso l'errore commesso sull'area del poligono a forma di L è dell'ordine di una parte su un milione.
Tale tecnica per l'estrazione della radice quadrata (senza l'algoritmo o calcolatrice, quindi *fedele* al metodo di calcolo dell'epoca di Archimede) può essere introdotta didatticamente attraverso il *problem solving*.

Con gli strumenti dell'epoca non sarebbe stato possibile svolgere i calcoli successivi utilizzando frazioni con

numeratori e denominatori grandi come quelli ottenuti con la tecnica dello gnomone.

Per questo si fa un'ulteriore assunzione plausibile, ossia che Archimede conoscesse l'ἀνθυφαίρεσις euclideo la cui nozione non si limitasse agli aspetti puramente dimostrativi, ma si riferisse anche alla possibilità di utilizzare l'algoritmo per avere stime razionali semplificate molto precise di quantità razionali o irrazionali. Ipotesi suggerita da alcuni studiosi tra cui anche Fowler (Fowler, 1982).

Questo significa fare un parallelo tra l'algoritmo euclideo e le frazioni continue, che possono essere introdotte didatticamente in modo operativo e funzionale (come indicato in altre pubblicazioni degli autori riportate in bibliografia). Inoltre, per spiegare le scelte archimedee esibite, si assume anche che fosse noto al Siracusano un modo (a noi sconosciuto ma che porta allo stesso risultato del teorema fondamentale delle frazioni continue) per ridurre a rapporto razionale la successione di misure effettuata con l'algoritmo euclideo, e che fosse conosciuto un criterio per valutare segno e valore assoluto dell'errore che si compie troncando l'algoritmo a un certo passo. Tali conoscenze si evincono anche da altri calcoli presenti nella *Misura del Cerchio*, come ad esempio la scelta della approssimazione della $\sqrt{3}$, e in calcoli di altri autori come Aristarco di Samo in *Dimensioni e Distanze del Sole e della Luna,* o Eratostene nel calcolo dell'obliquità dell'eclittica.

Alcuni teoremi della teoria delle frazioni continue possono essere introdotti con dimostrazioni nelle classi del secondo biennio delle scuole superiori o solo proposti nei risultati che possono essere verificati numericamente.

Tornando quindi all'esempio, per trovare la soluzione ottima del valore della radice di 5472132 si considera il rapporto $\frac{1211}{4678}$ che dato dall'ἀνθυφαίρεσις euclideo in termini di *catena* è [0;

3, 1, 6, ..., 2] e poiché deve essere approssimato per difetto (poiché siamo nella procedura del poligono circoscritto), si prendono i termini [a_0; a_1, a_2] e dunque si ottiene x<¼. Quindi risulta:

$\sqrt{5472132} > 2339¼$ (la notazione di un intero seguito da una frazione corrisponde alla somma fra l'intero e la frazione) che è proprio la soluzione esibita da Archimede nella proposizione 3. Anche le altre soluzioni di radici presenti nel trattato possono essere ricondotte a questo procedimento.

Proponiamo schematicamente la soluzione delle radici nei calcoli relativi al *poligono inscritto* (dove l'approssimazione del valore della radice deve essere fatta per eccesso).

Soluzione di $\sqrt{4069284}$: il radicando è compreso nell'intervallo $2017^2 = 4068289 < 4069284 < 4072324 = 2018^2$

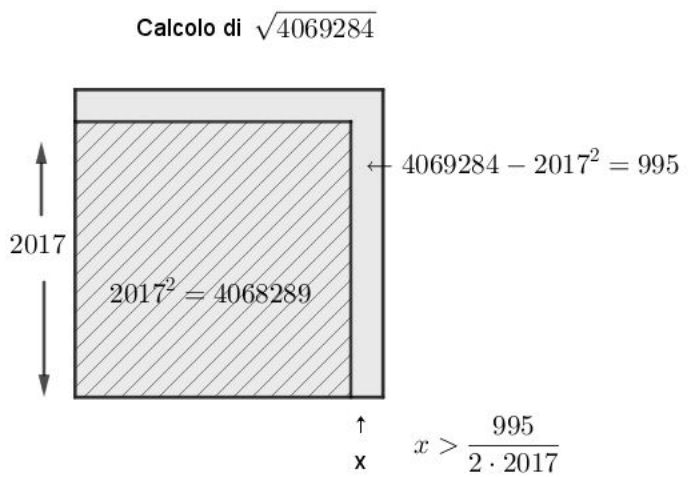


Fig. 2- Schema di un esempio per la risoluzione della radice quadrata con la tecnica dello gnomone

il valore dell'eccedenza x è $\frac{995}{4034}$. Con l'uso dell'algoritmo euclideo si ottiene la catena [0; 4, 18, 2, 2, 1, 7] il cui valore per eccesso [a_0; a_1] produce il valore ¼, che è quello che Archimede esibisce. Quindi $\sqrt{4069284}$ < 2017¼

Oppure la soluzione di $\sqrt{1018405}$ il cui radicando è compreso $1009^2 < 1018405 < 1010^2$

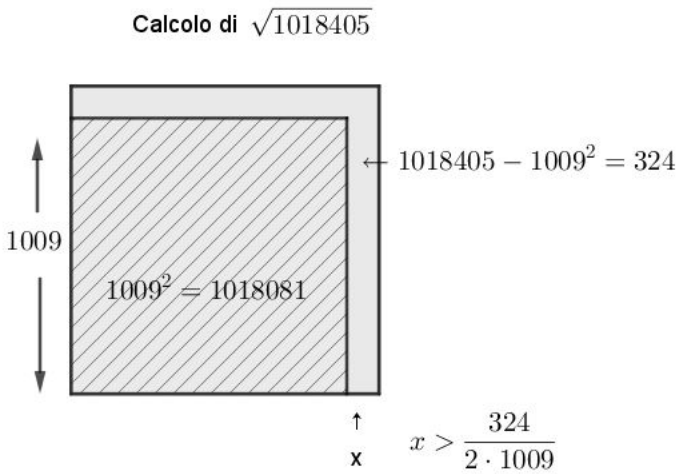


Fig. 3- Schema di un esempio per la risoluzione della radice quadrata con la tecnica dello gnomone

il valore dell'eccedenza x è $\frac{324}{2018}$. Con l'uso dell'algoritmo euclideo si ottiene la catena [0; 6, 4, 2, 1, 1, 1, 4] il cui valore per eccesso [a_0; a_1] produce il valore $^1/_6$.
Quindi $\sqrt{1018405} < 1009^1/_6$, che è il valore esibito da Archimede.

2.2 – Le scelte sub-ottime per la soluzione di due radici quadrate

Quindi sembra che il metodo utilizzato da Archimede per trovare il valore della radice sia quello illustrato. Di seguito chiameremo il valore ottenuto con questo metodo "valore ottimo", poiché è quello che meglio approssima la radice mantenendo la parte frazionaria con denominatore sufficientemente piccolo. Ma si trovano due discrepanze nei calcoli relativi al poligono inscritto riassunte nella figura 4.

n.lati	punto X	$\frac{AX}{XC}$	$\frac{AC}{XC}$	Radicando da risolvere	Valore ottimo	Valore esibito
6	B	$\frac{1351}{780}$	$\frac{1560}{780}$			
12	G	$\frac{2911}{780}$	$\frac{3013\frac{3}{4}}{780}$	9082321	$3013\frac{9}{13}$	$3013\frac{3}{4}$
24	H	$\frac{1823}{240}$	$\frac{1838\frac{9}{11}}{240}$	3380929	$1838\frac{3}{4}$	$1838\frac{9}{11}$
48	K	$\frac{1007}{66}$	$\frac{1009\frac{1}{6}}{66}$	1018405	$1009\frac{1}{6}$	$1009\frac{1}{6}$
96	L	$\frac{2016\frac{1}{6}}{66}$	$\frac{2017\frac{1}{4}}{66}$	4069284	$2017\frac{1}{4}$	$2017\frac{1}{4}$

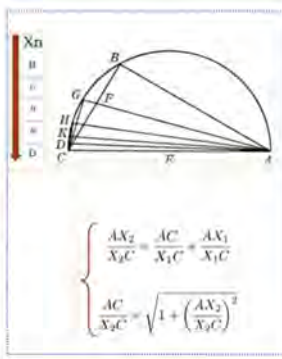


Fig. 4- Schema che indica la discrepanza delle soluzioni della radice quadrata tra valore ottimo ricavato con la tecnica dello gnomone e relativa approssimazione e quello esibito da Archimede. I valori in questione sono evidenziati in rosso.

Gli ultimi due valori (per il poligono di 48 e 96 lati) sono quelli indicati precedentemente, che si aggiungono alle soluzioni esibite per il poligono circoscritto di cui si è fatto un esempio.
La letteratura considera un enigma irrisolto solo il valore esibito $1838^{9}/_{11}$ e non 3013 ¾ poiché quest'ultimo viene giustificato attribuendo ad Archimede la preferenza di una soluzione della parte frazionaria in cui a denominatore ci siano potenze di 2 (anche se questo dovrebbe mettere in discussione il valore 1009 $^{1}/_{6}$).

La nostra ipotesi è che il valore non ottimo esibito per il calcolo delle radici di 9082321 e 3380929 derivi da un altro criterio, che Archimede suggerisce senza spiegare, che è proprio la questione che andiamo ad indagare.

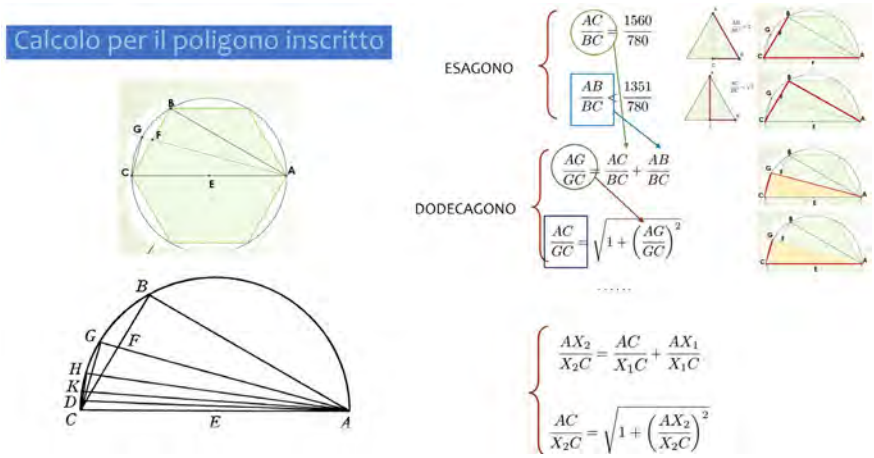


Fig. 5- Schema che indica la ricorrenza dei rapporti nel passaggio dal poligono inscritto di 3· 2n lati a quello di 3· 2n+1 lati

Come si evince dalla figura 5, nella ricorrenza bisogna risolvere una radice il cui radicando proviene da un termine frazionario elevato al quadrato e sommato a 1. Anche per il poligono circoscritto si ha una ricorrenza simile, ma la frazione dalla quale si parte (l'approssimazione per difetto di $\sqrt{3}$) è 256/153 e il denominatore della frazione nella ricorrenza non cambia (si devono quindi risolvere radici al numeratore il cui radicando rimane sempre dell'ordine di qualche milione). In questo caso il valore di partenza, ossia l'approssimazione per eccesso di $\sqrt{3}$, è 1351/780 e già nel primo passaggio si ha a che fare con valori elevati, come indicato in figura 6, infatti bisogna trovare il lato del quadrato di area 9082321 ($\sqrt{9082321}$).

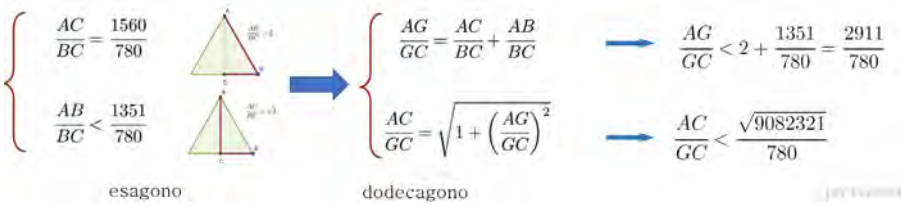


Fig. 6- Calcolo iniziale del passaggio dall'esagono al dodecagono per i poligoni inscritti

Il radicando è quindi compreso tra $3013^2=9078169 < 9082321 < 9084196=3014^2$. Il calcolo gnomonico segue quindi lo schema riportato in figura 7.

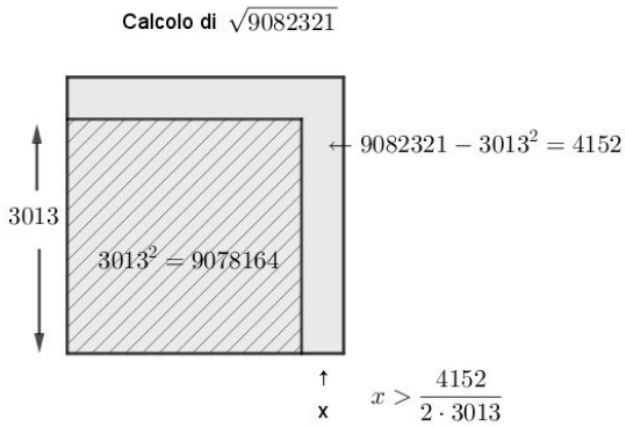


Fig. 7- Schema per la risoluzione della radice quadrata con la tecnica dello gnomone per il passaggio dall'esagono al dodecagono inscritto

il valore dell'eccedenza x è $\frac{4152}{6026}$. Con l'uso dell'ἀνθυφαίρεσις euclideo si ottiene la catena [0; 1, 2, 4, 1, 1,

1, 3, 3, 2, 2], i cui termini di ordine dispari (per eccesso) producono le frazioni [1, 9/13, 20/29, 113/164, …]. Quindi il valore ottimo dovrebbe essere $3013^{9}/_{13}$ ma Archimede esibisce 3013¾. Poiché l'approssimazione della soluzione della radice deve essere per eccesso, la scelta di ¾ è coerente anche se non la migliore.
Tale valore sub-ottimo del termine frazionario soluzione della radice consente, nella ricorrenza, di effettuare una semplificazione che riduce il valore del denominatore della frazione che, elevata al quadrato e sommata a 1, determinerà il radicando della radice da risolvere nel passaggio successivo. Il valore del denominatore da 780 si riduce a 240.
Archimede dice semplicemente, senza dare alcuna spiegazione, che i due termini della frazione ottenuta dalla somma delle due frazioni, di cui una contiene il termine approssimato sub-ottimo, sono una i 4/13 dell'altra. Se Archimede avesse usato il valore ottimo 9/13 avrebbe ottenuto, nel calcolo, la frazione non riducibile 77021/10140.
Il passaggio di semplificazione indicato da Archimede è riportato in figura 8.

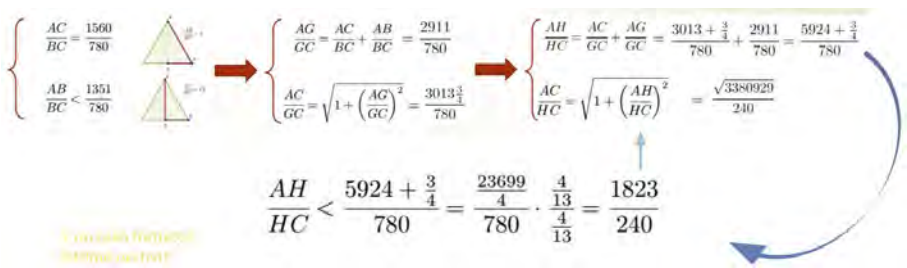


Fig. 8- Calcolo del passaggio dal dodecagono inscritto al poligono di 24-lati con la semplificazione di 4/13 effettuabile grazie alla scelta di aver approssimato il valore frazionario della precedente radice con ¾

Osserviamo ora anche il passaggio successivo, quello che la letteratura considera un caso eccezionale. La radice che deve essere risolta è $\sqrt{3380929}$ dove il radicando è compreso tra i

due quadrati perfetti $1838^2 < 3380929 < 1839^2$. Il calcolo gnomonico segue quindi lo schema riportato in figura 9.

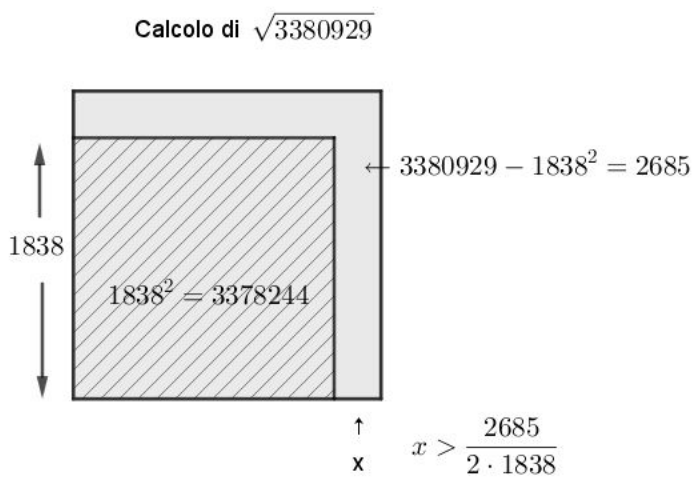


Fig. 9- Schema per la risoluzione della radice quadrata con la tecnica dello gnomone per il passaggio dal dodecagono al poligono di 24-lati per la procedura del poligono inscritto

Il valore dell'eccedenza x è $\frac{2685}{3676}$. Con l'uso dell'ἀνθυφαίρεσις euclideo si ottiene la catena [0; 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2], i cui termini di ordine dispari (per eccesso) producono le frazioni [1, 3/4, 19/26, 84/115, …]. Quindi un buon candidato per eccesso potrebbe essere il valore ottimo ¾, producendo così la soluzione della radice 1838¾. Ma Archimede esibisce inaspettatamente il risultato 1838 $^{9}/_{11}$. Il valore ottimo ¾ è sostituito dalla frazione $^{9}/_{11}$, apparentemente meno "conveniente", sia dal punto di vista di scarto numerico che dal punto di vista della comodità di calcolo, visto che non ha al denominatore una potenza di 2.
Però tale valore sub-ottimo del termine frazionario della soluzione della radice consente, nel passaggio successivo, di

ridurre la frazione -data dalla somma dei due termini di cui uno derivante da questa scelta - di 11/40 diminuendo ulteriormente il valore del denominatore della frazione che, elevata al quadrato e sommata a 1, determinerà il radicando della radice da risolvere nel passaggio successivo. Il valore di tale denominatore da 240 passa a 66.
Se Archimede avesse usato il valore ottimo ¾ avrebbe ottenuto, nel calcolo, il rapporto irriducibile 14647/960.
Il passaggio di semplificazione viene riportato in figura 10.

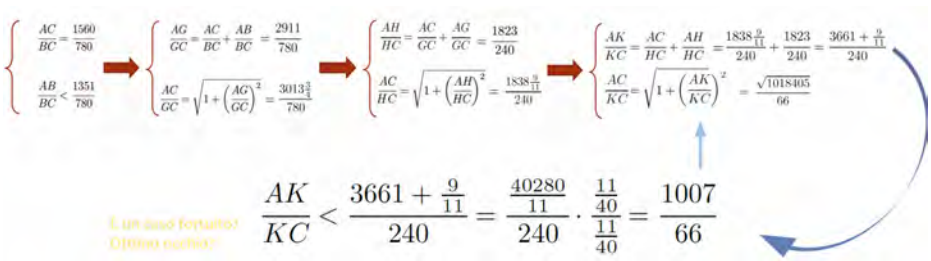


Fig. 10- Calcolo del passaggio dal poligono di 24-lati a quello di 48-lati con la semplificazione di 11/40 effettuabile grazie alla scelta di aver approssimato il valore frazionario della precedente radice col valore 9/11

Quindi sembra che le soluzioni sub-ottime della radice quadrata esibite da Archimede non siano casuali, ma effettuate con il preciso intento di trovare la parte frazionaria, soluzione della radice, in modo che la somma delle due frazioni che nella ricorrenza consentono di trovare il rapporto del poligono col numero di lati raddoppiati possa essere ridotta tramite una semplificazione. Questo processo avviene finché il denominatore della frazione produce nel passaggio successivo un radicando dell'ordine dei milioni. Non si prosegue con questa tecnica perché risolvere radici con radicandi troppo piccoli potrebbe rendere l'errore di approssimazione del calcolo con lo gnomone troppo grande

(ossia il termine x^2 trascurato nel calcolo dell'eccedenza potrebbe divenire rilevante e produrre una approssimazione meno precisa). Infatti, come si evince dalla figura 4, dopo aver ridotto il denominatore a 66, si svolge il calcolo dello gnomone per risolvere la radice senza ulteriori strategie semplificative.

2.3 – Definizione del problema

La ricerca della frazione non ottima per l'approssimazione della radice in modo che nel calcolo ricorrente successivo diventi una frazione con denominatore minore del precedente è la soluzione di una equazione diofantea vincolata con tre parametri interi.
Conosciamo quindi i risultati ottenuti da Archimede, ma non la tecnica da lui usata, ed è quella che intendiamo indagare.
Si definisce quindi il problema: si hanno Ñ e D numeratore e denominatore di una generica frazione. Il numeratore Ñ è un numero misto formato da una parte intera *N* e una parte frazionaria

$$\frac{n}{m} < 1$$

Cerchiamo *n, m* tali che *n* < *m* per cui il rapporto:

$$\frac{N + \frac{n}{m}}{D}$$

produca una frazione "semplice" del tipo

$$\frac{N'}{D'}$$

che abbia valore molto vicino alla frazione di partenza $\tilde{N}/_{D}$.

L'idea di semplicità della frazione consiste nel trovare N′ e D′ interi con D′ < D.

2.4 – La proposta didattica

Definito il problema di cui si conosce solo il risultato - sicuramente ottimo poiché è quello esibito da Archimede – si propone agli studenti di ipotizzare un possibile processo di soluzione. La sfida può essere lanciata in una classe di scuola secondaria di II grado nell'insolita sequenza: si fornisce il risultato dell'equazione diofantea e si cerca la strategia utilizzata. Le modalità di soluzione sono lasciate libere e potrebbero fornire idee per formulare ipotesi di soluzione di un problema storico non risolto. Ovviamente, essendo questo un problema vero, si potrebbe anche non arrivare a nessuna ipotesi di procedura, o a ipotesi di soluzione solo parziale, ipotesi che comunque verranno discusse e commentate nel contesto classe. Si stabilisce un tempo in cui si consente agli studenti di lavorare individualmente o in piccoli gruppi per svolgere la ricerca. Le proposte degli studenti vengono quindi provate e verificate sui due risultati esibiti da Archimede.
Si propone infine un algoritmo che trova le soluzioni ottime del problema corrispondenti a quelle esibite da Archimede. Si effettua quindi la prova sperimentale con la costruzione della procedura su foglio Excel e/o MatLab. Si svolge infine la dimostrazione della correttezza dell'algoritmo proposto.

3 – Un possibile algoritmo per la soluzione del problema storico

È stato elaborato un algoritmo che riproduce il risultato, non spiegato, esibito da Archimede. Ovviamente non si ha la pretesa di indicare tale algoritmo come quello realmente utilizzato dal Siracusano per trovare i valori di approssimazione, ma è possibile proporre un'ipotesi di lavoro da confrontare con calcoli simili qualora si trovassero in altre opere antiche.

Si considerano tutti i divisori β_i di D e se ne sceglie uno: i divisori sono finiti. Anche la scelta di questo divisore non è casuale, ma soddisfa alcuni requisiti di "convenienza" dedotti dalle limitazioni del problema di approssimazione.
Si fissa quindi un valore β divisore di D e si cercano tre numeri m, n, q tali che:

$$m \cdot N + n = \beta \cdot q$$

Per $m = 3, 4, 5, 6, \ldots, (\beta - 1)$
(i valori $m = 1$ e $m = 2$ si escludono poiché danno soluzioni banali)

Procedura:

- si fissa un valore m
- si fissa la parte intera superiore q

$$q = \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$$

- si trova $n = \beta \cdot q - N \cdot m$

Se $n < m$ si è trovato un valore della frazione $^{n}/_{m}$ ammissibile. Si prova poi con il valore di m aumentato di 1.
Una volta trovati tutti i valori $^{n}/_{m}$ ammissibili si scelgono quelli che soddisfano anche la richiesta di prossimità per eccesso all'approssimazione di $x = {}^{n}/_{m}$ della radice.

3.1 – La costruzione dell'algoritmo col foglio di calcolo e la verifica

L'algoritmo proposto viene quindi riportato su un foglio di calcolo in cui è possibile scegliere il valore di N, D e β.
Si riportano i valori di Archimede ottenendo il risultato riportato in figura 11.

$$\frac{N+\frac{n}{m}}{D} \rightarrow \frac{5924+\frac{n}{m}}{780} \rightarrow \frac{5924+\frac{3}{4}}{780}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	metti N	metti D	scegli beta divisore di D		m	q	n		n<m	valore
2	5924	780	13		2	912	8		NO	
3					3	1368	12		NO	
4					4	1823	3		OK	>1/2
5					5	2279	7		NO	
6					6	2735	11		NO	
7					7	3190	2		OK	<1/2
8					8	3646	6		OK	>1/2
9					9	4102	10		NO	
10					10	4557	1		OK	<1/2
11					11	5013	5		OK	<1/2
12					12	5469	9		OK	>1/2

Fig. 11- La proposta dell'algoritmo processata nel foglio di calcolo per trovare l'approssimazione sub-ottima della radice di 9082321

Nella figura 12 vengono riportati i valori indicati dall'algoritmo proposto che corrispondono alle due scelte sub-ottime esibite da Archimede nella proposizione 3 della *Misura del Cerchio*.

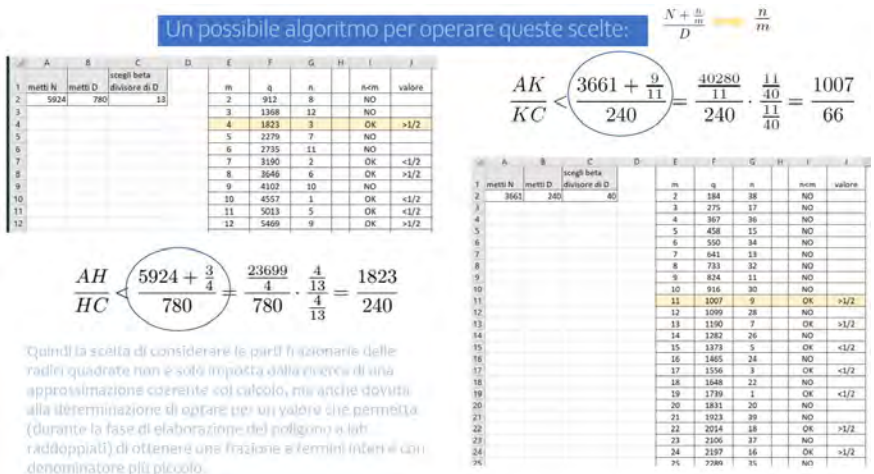
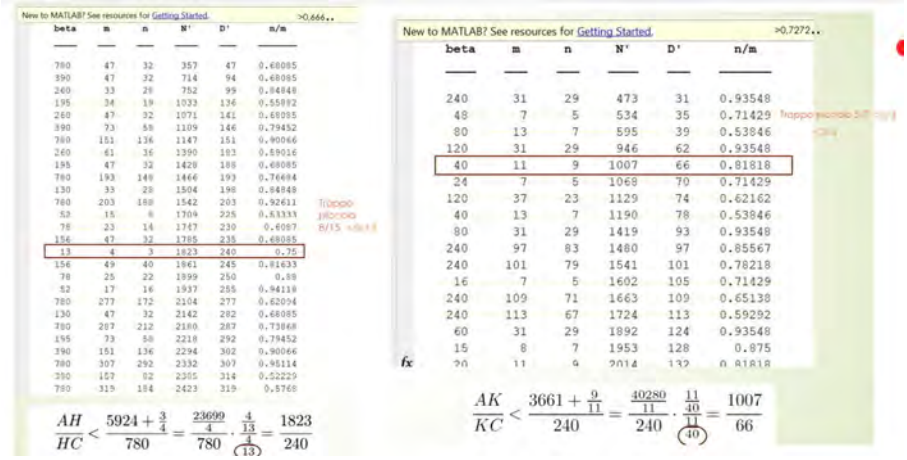


Fig. 12- La proposta dell'algoritmo processata nel foglio di calcolo in accordo con i valori esibiti da Archimede

Il programma Excel sopra presentato verifica la scelta del divisore che riporta Archimede (quello chiamato β) e confronta $^{n}/_{m}$ col valore ottenuto dall'algoritmo euclideo nella divisione per trovare la x (un iniziale grossolano confronto se maggiore o minore di 1/2). Con tale procedura si ottiene che i valori ottimali sono proprio quelli che vengono riportati da Archimede per $^{n}/_{m}$.

Con MatLab si è processato tale algoritmo per *tutti* i possibili divisori del denominatore (ossia tutti i β) e in questo caso risulta, non solo la scelta $^{n}/_{m}$ ottimale, ma che anche la scelta di β fatta da Archimede è quella ottimale. Ossia trova il giusto compromesso tra avere β il più grande possibile, ma m contenuto (ossia piccolo), i due valori sono strettamente legati.

Nella figura 13 vengono riportati i valori in uscita ordinati secondo il denominatore ridotto più piccolo (ossia D') e si nota che il valore β esibito da Archimede ha una sua ragione d'essere.



New to MATLAB? See resources for Getting Started. >0.666..

beta	m	n	N'	D'	n/m
780	47	32	357	47	0.68085
390	47	32	714	94	0.68085
260	33	28	752	99	0.84848
195	34	19	1033	136	0.55882
260	47	32	1071	141	0.68085
390	73	58	1109	146	0.79452
780	151	136	1147	151	0.90066
260	61	36	1390	183	0.59016
195	47	32	1428	188	0.68085
780	193	148	1466	193	0.76684
130	33	28	1504	198	0.84848
780	203	188	1542	203	0.92611
52	15	8	1704	225	0.53333
78	23	14	1747	230	0.6087
156	47	32	1785	235	0.68085
13	4	3	1823	240	0.75
156	49	40	1861	245	0.81633
78	25	22	1899	250	0.88
52	17	16	1937	255	0.94118
780	277	172	2104	277	0.62094
130	47	32	2142	282	0.68085
780	287	212	2180	287	0.73868
195	73	58	2218	292	0.79452
390	151	136	2294	302	0.90066
780	307	292	2332	307	0.95114
390	157	82	2369	314	0.52229
780	319	184	2423	319	0.5768

$$\frac{AH}{HC} < \frac{5924+\frac{3}{4}}{780} = \frac{\frac{23699}{4}}{780} \cdot \frac{\frac{4}{13}}{\left(\frac{4}{13}\right)} = \frac{1823}{240}$$

New to MATLAB? See resources for Getting Started. >0.7272..

beta	m	n	N'	D'	n/m
240	31	29	473	31	0.93548
48	7	5	534	35	0.71429
80	13	7	595	39	0.53846
120	31	29	946	62	0.93548
40	11	9	1007	66	0.81818
24	7	5	1068	70	0.71429
120	37	23	1129	74	0.62162
40	13	7	1190	78	0.53846
80	31	29	1419	93	0.93548
240	97	83	1480	97	0.85567
240	101	79	1541	101	0.78218
16	7	5	1602	105	0.71429
240	109	71	1663	109	0.65138
240	113	67	1724	113	0.59292
60	31	29	1892	124	0.93548
15	8	7	1953	128	0.875
20	11	9	2014	132	0.81818

$$\frac{AK}{KC} < \frac{3661+\frac{9}{11}}{240} = \frac{\frac{40280}{11}}{240} \cdot \frac{\frac{11}{40}}{\left(\frac{11}{40}\right)} = \frac{1007}{66}$$

Fig. 13- Evidenza che anche la scelta del valore β proposto da Archimede non è casuale, ma frutto di una soluzione ottimale di un problema diofanteo complesso

3.2 – La dimostrazione della correttezza dell'algoritmo

Diamo ora una dimostrazione del fatto che le soluzioni fornite dall'algoritmo sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione diofantea che rispettano il vincolo $\frac{n}{m} \in (0,1)$, con $\frac{n}{m}$ ridotta ai minimi termini e maggiore di una quantità specificata, e la richiesta $D'<D$. Il fatto che siano soluzioni segue dalla definizione di n nell'algoritmo. Per dimostrare che siano le sole, mostriamo nel seguito che, partendo dall'equazione e dai vincoli, si ottiene che la q debba necessariamente essere espressa nella forma indicata.

La *scelta* di $q = \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$

Riscrivendo l'equazione si ha:

$m \cdot N + n = \beta \cdot q \quad \longrightarrow \quad \frac{\beta q}{m} = N + \frac{n}{m} \quad \longrightarrow \quad \frac{\beta q}{m} - N = \frac{n}{m}$

con $\frac{n}{m} \epsilon (0,1)$ e quindi:

$0 < \frac{\beta q}{m} - N < 1$

$N < \frac{\beta q}{m} < \mathrm{N} + 1$

e dunque (poiché m e β sono interi positivi):

$$\frac{Nm}{\beta} < q < \frac{m(N+1)}{\beta}$$

1) Dalla disuguaglianza di sinistra, poiché q è intero vale:
   $\frac{Nm}{\beta} < q \quad \longrightarrow \quad \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil \leq q$

2) Dalla disuguaglianza di destra
   $q < \frac{m(N+1)}{\beta}$ si vuole provare che ciò implica che $q \leq \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$

   Dimostrazione del punto 2)

- Se vale $\frac{m}{\beta} < 1$ ossia $m < \beta$, l'implicazione è dimostrata perché in tal caso:

$$q < \frac{mN}{\beta} + \frac{m}{\beta} < \frac{mN}{\beta} + 1$$

ed essendo q intero vale:

$$q \leq \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$$

- Se **non** vale $\frac{m}{\beta} < 1$ ossia se $m \geq \beta$ ci sono i due possibili casi: $m = \beta$ e $m > \beta$

▪ caso $m = \beta$

Dalla condizione iniziale $m \cdot N + n = \beta \cdot q$ se $m = \beta$ si può scrivere:

$$m \cdot N + n = m \cdot q \quad \longrightarrow \quad n = m \cdot (q-N)$$

quindi si ottiene che m è un divisore di n, ma $n<m$, per cui, essendo anche q-N intero, in quanto differenza di due interi, si avrebbe che $q-N=0$ e quindi $n=0$, che contraddice l'ipotesi $n>0$.
Quindi non può essere $m = \beta$.

▪ caso $m > \beta$

Si considera la condizione iniziale

$$\frac{N + \frac{n}{m}}{D} = \frac{mN + n}{mD}$$

Essendo D un multiplo di β, si può scrivere $D=\beta\delta$ con δ un intero. Inoltre $mN+n=\beta q$ e quindi:

$$\frac{mN + n}{mD} = \frac{\beta q}{m\delta\beta} = \frac{q}{m\delta}$$

ma poiché si sta considerando il caso $m > \beta$ allora si ha $m\delta>\beta\delta =D$. Se la frazione $\frac{q}{m\delta}$ fosse ridotta ai minimi

termini si otterrebbe un denominatore maggiore di quello di partenza ($D'>D$), contraddicendo la richiesta iniziale.

Rimane quindi da verificare che $\frac{q}{m\delta}$ è una frazione ridotta ai minimi termini, altrimenti se fosse possibile un'ulteriore semplificazione della frazione potrebbe risultare un nuovo denominatore ridotto della frazione tale che $m'\delta' < D$ che includerebbe il caso $m > \beta$.
Si deve dunque verificare che:

$$\begin{cases} MCD(\delta; q) = 1 \\ MCD(m; q) = 1 \end{cases}$$

- $MCD(\delta; q) = 1$:
  la richiesta è verificata in quanto si può sempre trovare un β' in modo che per la relazione
  $\frac{\beta' q}{m\delta\beta'} = \frac{q}{m\delta}$ valga $MCD(\delta; q) = 1$

- $MCD(m; q) = 1$:
  se esistesse $m=km'$ e $q= kq'$ allora la relazione
  $m \cdot N + n = \beta \cdot q$ risulterebbe: $km' \cdot N + n = \beta \cdot kq'$

  dove deve valere la relazione $n < km' = m$.

  Ma non è possibile che k non divida anche n perché:
  $n = \beta kq' - km'N = k(\beta q' - m'N)$
  dove $(\beta q' - m'N) \in N$ perché differenza di moltiplicazione di interi.
  Quindi anche n risulta essere multiplo di k che implica quindi che $MCD(m; q) =1$.

Quindi anche il caso $m > \beta$ non può essere.
Questo conclude la dimostrazione del punto 2).

Quindi per il punto 1) vale $\left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil \leq q$ e

per il punto 2) vale $q \leq \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$ e si ha $m < \beta$.

Quindi si ha:

$$\left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil \leq q \leq \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$$

che significa:

$$q = \left\lceil \frac{m \cdot N}{\beta} \right\rceil$$

Confermando la correttezza della scelta del valore di q nell'algoritmo.

Il fatto che $m < \beta$ giustifica il range di variazione per m indicato all'inizio della procedura: "Per $m = 3, 4, 5, 6, \ldots, (\beta - 1)$ ".

4 – Conclusioni

Riteniamo dunque che la scelta delle frazioni che appaiono nei calcoli delle radici quadrate non sia casuale, ma provenga dalla risoluzione di un problema numerico per nulla banale.

In conclusione, la nostra ipotesi è che Archimede abbia calcolato le stime della radice quadrata presente nella procedura per ricorrenza con il preciso intento di mantenere numeratori e denominatori entro certi valori, per gestire così calcoli in modo che il radicando della radice non superasse le decine di milioni.

Questo ci sembra testimoniare una sofisticata capacità di Archimede anche da un punto di vista aritmetico, forse non ancora completamente compresa.

Ringraziamenti

Si ringrazia per il supporto finanziario il progetto Dipartimenti di Eccellenza MatMod@TOV (2023-27), assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma Tor Vergata.

Bibliografia

Archimede. (2023). *La Misura del Cerchio* (F. G. Lastarìa, Cur. & Trad.) [Versione digitalizzata, tradotta dal greco sulla base della redazione filologica di Johan Heiberg (Lipsia 1880-1881) e annotata da Federico G. Lastarìa]. https : //www.polimi.it

Archimedes. (1972). *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii* (J. L. Heiberg, Cur.; Voll. 4) [Reprint of the original edition published between 1910 and 1915]. In aedibus B.G. Teubneri. https://archive.org/details/operaomniacumcom0002arch

Dragone, L., & Palma, A. (2023). La proposizione3 della *κυκλου μετρησις*: una traduzione (alla maniera di Campano da Novara) che va al di là della sola comprensione linguistica del testo. *Riflettere sulla didattica della matematica per insegnare: ricerche ed esperienze*.

Fowler, D. H. (1982). Book X of Euclid's Elements and the pre-Eudoxan theory of ratio. Part 2: Sides and Diameters. *Archive for History of Exact Sciences*, *26* (3), 195–209. https://doi.org/10.1007/BF00327795

Fowler, D. (1999). The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction (2nd). Clarendon Press.

Frajese, A. (1974). *Opere di Archimede*. UTET, Torino.

Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Dover Publications.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes* [With a supplement The Method of Archimedes, recently discovered by Heiberg]. Cambridge University Press. https://archive.org/details/worksofarchimede00archuoft

Knorr, W. R. (1976). Archimedes and the Measurement of the Circle: A New Interpretation. *Archive for History of Exact Sciences*, *15* (2), 115–140. https: //doi.org/10.1007/BF00348496

Palma, A., & Dragone, L. (2024). Proposizione 3 della *κυκλου μετρησις*: la più emblematica delle opere di Archimede. *Science & Philosophy*, 279–287.

Russo, L. (2019). *Archimede*. Carocci editore.

Zellini, P. (1999). *Gnomon. Una indagine sul numero*. Adelphi. https://www.adelphi.it/libro/9788845915017

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 39-60

Lucrezio, poeta della natura, può essere considerato un matematico e/o un fisico?

Anna Amirante*

*Dipartimento di Matematica, Università di Salerno; aamirante@unisa.it

Sunto: *Lucrezio è conosciuto come poeta e filosofo epicureo, che si basa sull'atomismo di Democrito. La domanda stimolo(provocatoria) posta in una classe III del Liceo Classico/Scientifico e al corso di Matematica Complementare I è stata: Lucrezio può essere ritenuto un matematico e/o un fisico?. Una riflessione su un autore, Lucrezio, capace di coniugare la bellezza della parola con la precisione dell'osservazione scientifica e che ha sviluppato un'idea di laboratorio interdisciplinare creando interconnessioni fra cultura umanistica e scientifica: il leit motiv del Liceo Matematico. Pensiero critico, capacità di argomentazione, creatività: sono gli ingredienti presenti nell'esplorazione di questo autore dell'antichità. Gli studenti, partendo da riflessioni personali, ipotizzano congetture, per poi confrontarsi a piccoli gruppi nella costruzione di un sapere condiviso e collaborativo.*

Parole Chiave*:* *Interdisciplinarietà, didattica laboratoriale, argomentazione, Liceo Matematico.*

Abstract: *Lucretius is known as an Epicurean poet and philosopher, whose work is based on the atomism of Democritus. A provocative question posed to a*

third-year class in a classical/scientific high school and a first-year complementary mathematics course was: Can Lucretius be considered a mathematician and/or a physicist? This is a reflection on an author, Lucretius, who was able to combine the beauty of words with the precision of scientific observation. He developed the idea of an interdisciplinary lab, creating connections between humanistic and scientific culture – the leitmotif of the Mathematical High School. Critical thinking, argumentation skills, and creativity are the ingredients present in the exploration of this ancient author. Students start from personal reflections, hypothesize conjectures, and then work in small groups to build shared and collaborative knowledge.

Keywords: *interdisciplinarity, laboratory-based teaching, argumentation, Mathematical High School.*

1 - Introduzione

Lucrezio è universalmente conosciuto come un poeta e un filosofo epicureo, la cui opera De rerum natura è un monumentale trattato di filosofia che si basa sull'atomismo di Democrito. Nonostante il suo scopo primario fosse quello di liberare gli uomini dalla paura della morte e degli dèi attraverso una comprensione razionale della natura, il De rerum natura affronta temi complessi di fisica, biologia, cosmologia e psicologia. In un'epoca in cui non esisteva ancora la scienza moderna come la conosciamo oggi, Lucrezio ha mostrato una capacità sorprendente di osservare e descrivere i fenomeni naturali con una lucidità quasi scientifica, con una lente razionale e osservativa, anticipando alcuni elementi fondamentali del metodo scientifico. La sua figura è profondamente interdisciplinare e l'esplorazione della sua opera, originata dalla domanda provocatoria posta all'inizio del percorso didattico, ha creato un ottimo spunto

educativo per la costruzione delle competenze trasversali e per il superamento della divisione dei saperi. Lucrezio rappresenta un esempio emblematico di come l'intuizione poetica possa dialogare con la razionalità scientifica: è un precursore dell'unione tra il sapere umanistico e scientifico. Lo scopo di questo laboratorio è mostrare come l'opera di Lucrezio, attraverso un approccio laboratoriale e interdisciplinare, possa diventare uno strumento efficace per sviluppare negli studenti capacità di osservazione, argomentazione, pensiero critico e consapevolezza epistemologica, in linea con gli obiettivi del Liceo Matematico e della scuola del XXI secolo.

2 – Contesto

L'idea nasce in una classe III del Liceo Classico e poi sperimentata anche in una dello Scientifico e nell'ambito del corso di Matematica Complementare I, nella cornice progettuale del Liceo Matematico. L'obiettivo è di superare la parcellizzazione delle discipline, per favorire un approccio integrato della conoscenza.

2.1 – Motivazioni didattiche

L'idea di interrogarsi su Lucrezio come matematico o fisico ha avuto una forte valenza didattica. La provocazione iniziale ha stimolato negli allievi la curiosità e il desiderio di esplorare il testo partendo da prospettive nuove e sconosciute. Così, l'opera del *De rerum natura* è stata indagata non solo come poesia filosofica, ma come un vero e proprio laboratorio

scientifico *ante litteram*. L'analisi dei testi, quindi, ha mostrato come Lucrezio, pur non essendo uno scienziato, nel senso moderno attuale, adottasse un metodo razionale, basato sull'osservazione, sul ragionamento logico e sulla costruzione di ipotesi. Nel suo obiettivo di liberare l'uomo dalla paura degli dei e della morte attraverso la comprensione razionale della natura si avvicina alla finalità educativa della scienza: comprendere il mondo per emanciparsi dall'ignoranza e dal timore. In una scuola che richiede lo sviluppo di competenze trasversali, il progetto ha fatto dialogare in modo armonico e produttivo latino, filosofia, matematica e fisica: gli studenti hanno potuto acquisire una visione più ampia del sapere , riscoprendo le radici scientifiche nella classicità.

2.2 – Obiettivi specifici

I nostri obiettivi specifici sono:

- Creare un "ponte" tra la cultura umanistica (letteratura, latino) e quella scientifica (matematica, fisica).
- Sviluppare le competenze del XXI secolo: pensiero critico, creatività, argomentazione e collaborazione.
- Identificare e analizzare nei testi lucreziani prove di metodo matematico e/o fisico.
- Confrontarsi con altri autori (filosofi, matematici, fisici, poeti) che possano avere analogie con Lucrezio.

Attraverso questo percorso, scopriremo come Lucrezio abbia dato il suo contributo alla "globalità del sapere", unendo la bellezza della parola alla precisione dell'osservazione.

3 - Lucrezio Matematico

Possiamo intravedere il "matematico" in Lucrezio attraverso la sua capacità di assiomatizzare la realtà. Un assioma è una verità fondamentale non dimostrabile, da cui derivano altre verità. Lucrezio, nel descrivere il funzionamento del mondo atomistico, parte da principi basilari (gli atomi sono indivisibili, il vuoto esiste) da cui deduce le complesse interazioni della materia. Infatti, parte dai principi dell'atomismo di Democrito ed Epicuro e li assume come assiomi per spiegare la realtà naturale; usa un metodo epicureo per esaminare i fenomeni naturali e dedurre le loro cause, basandosi sull'osservazione e sulla deduzione logica;

Esempio: Libro I,vv.146-150

> *Hunc igitur terrorem animi tenebrasque necessest non radii solis neque lucida tela diei discutiant, sed naturae species ratioque. principium cuius hinc nobis exordia sumet, nullam rem e nihilo gigni divinitus umquam.*

Traduzione: Quindi, questo terrore dell'animo e queste tenebre non devono essere dissipati dai raggi del sole né dai fulgidi raggi del giorno, ma dalla percezione della natura e della ragione. Il principio di essa prenderà per noi inizio da questo: che nulla nasce mai dal nulla per volontà divina.

Osservazione: Lucrezio esclude l'intervento divino usando la deduzione logica(quindi…ma…da questo); tutto deriva da qualcosa di preesistente.

Descrive l'universo come costituito da un numero di atomi che si muovono nel vuoto, tipica idea democritea e pitagorica

in cui le unità(atomi/numeri) descrivono matematicamente il mondo;

Esempio: Libro I, vv. 163-166,184-185,848, 851:

> *Qualia Democriti cum primis vera videmus principia, quae sunt rerum, fundamina cunctis.Corpora sunt porro primordia rerum, partim concilio quae constant principiorum…Nunc age, res quoniam docui non posse creari de nihilo neque quod genitum est ad nil revocari. summa tamen sumptis rebus non augetur in omnis…sic rerum summa novatur semper,et interitu alterius res existit oriri.*

Traduzione: come quando vediamo che gli atomi di Democrito, anzitutto veri, sono i principi delle cose, i fondamenti di tutte. Ci sono i corpi, inoltre: alcuni sono i principi delle cose, altri sono quelli che sono composti dall'unione dei principi…Ora avanti, poichè ho mostrato che le cose non possono essere create dal nulla nè ciò che è nato può tornare dal nulla..tuttavia la somma delle cose non cresce per tutte le cose che vengono prodotte…così la somma delle cose si rinnova sempre, e con la distruzione dell'uno un altro può nascere.

Osservazione: per Lucrezio gli atomi sono infiniti e indistruttibili, un principio di conservazione della materia *ante litteram* con l'idea matematica della **somma invariata** dell'uguaglianza naturale.

Lucrezio quando parla di *climanem*, cioè deviazione causale degli atomi, introduce una varabile che sembra anticipare il concetto di probabilità e di causa, rompendo quello di determinismo assoluto;

Esempio: Libro II, vv. 216-224, 251-260

> *Corpora cum deorsum rectum per inane feruntur ponderibus propriis, incerto tempore ferme incertisque locis spatio depellere paulum, tantum quod momen mutatum dicere possis. quod nisi declinare solerent, omnia deorsum imbris uti guttae caderent per inane profundum, nec foret offensus natus nec plaga creata principiis; ita nihil umquam natura creasset…Sed quoniam non est aequo pondere pondus aequabiliter, pars est levior, pars gravior, ita omnes declinant, ut nulli sit praepositus certus locus, quo feratur; omnes moventur in spatio incerto atque in tempore incerto. Hinc enim, ut dixi, declinantes in spatio, non nulli corpora offendunt, alii vero nullo modo se contingunt, quod alii in aliud spatium moventur, alii vero in aliud, ut omnes variis casibus ferantur.*

Traduzione: Quando i corpi si muovono verso il basso, dritti per il vuoto, spinti dal loro stesso peso, in un tempo del tutto indefinito e in luoghi incerti, si discostano un poco dal loro percorso, così poco che si può a malapena dire che il loro movimento è cambiato. Se infatti non fossero soliti declinare, tutte le cose cadrebbero verso il basso come gocce di pioggia attraverso l'immenso vuoto, non ci sarebbe stato né urto né scontro tra i principi; in tal modo la natura non avrebbe mai creato nulla…Ma poiché non tutti i pesi sono uguali, alcuni sono più leggeri, altri più pesanti, così tutti deviano, e non c'è un luogo definito dove si dirigono; tutti si muovono in uno spazio incerto e in un tempo incerto. Da qui, infatti, come ho detto, deviando nello spazio, alcuni corpi si urtano, altri invece non si toccano in nessun modo, perché si muovono in uno spazio differente, e così tutti sono mossi da diversi casi.

Lucrezio quando descrive i fenomeni naturali usa proporzioni e analogie, senza però formule esplicite;

Esempio: Libro II vv. 33-348.

Nam quasi per nebulam subito, cum uertere sese Auster et undas agitare salis, procul aequore toto Cernere uti magis adgregavere uolantes, quod genus est prope litoreis ad saxa natandum. Hic uti pars prope litora nescit amare, parsque prope ad litora natat, parsque prope litora nesciunt amare, parsque ad litora natant. Nam neque ad uestem neque ad uestem nec propterea magis illis.Nam procul a nobis spectandum, quo genere in campo Pascuntur saepe creantur pecudes, quasi pascitur armentum Sub sole in pratis, ad pascua, ad rivos et ad silvas. Nam saepe cum procul a nobis uisa est turba, Omnia uno eodem conspectu eadem uidentur, At non una eadem est uisa, sed sunt multae et in diuersis partibus.

Traduzione**:** Qui, come una parte vicino alla spiaggia non riesce ad amare, mentre un'altra parte naviga quasi sulla spiaggia, e una parte vicino alla spiaggia non sanno amare, e una parte naviga verso la spiaggia. Infatti, non possono né vestirsi né svestirsi. E perciò non riescono a fare l'amore. Qui, come una parte vicino alla spiaggia non riesce ad amare, mentre un'altra parte naviga quasi sulla spiaggia. Infatti, dobbiamo osservare da lontano, in un campo, la forma che hanno le greggi che spesso si creano, quasi un armento che pascola sotto il sole nei prati, ai pascoli, ai ruscelli e nei boschi. Infatti, spesso quando da lontano ci appare una folla, tutto sembra uguale e uno stesso nell'aspetto, ma non è una cosa sola, ma sono molte e in luoghi diversi.

Osservazione: Lucrezio usa similitudini e analogie e il concetto di proporzione, anche se non in termini propriamente matematici.

3.1 – Attività

Domanda stimolo**:** Riuscite a trovare nel *De rerum natura* passaggi in cui Lucrezio introduce principi che sembrano "verità fondamentali" da cui poi costruisce le sue argomentazioni?

Si procede per step:

- riflessione individuale;
- confronto con un pari;
- confronto con un piccolo gruppo(3 max 4 studenti);
- report di un componente del gruppo con discussione guidata fra i vari gruppi.

Attività pratica: Analizzate esempi di ragionamento assiomatico e per assurdo (o reductio ad absurdum), una tecnica logica fondamentale in matematica. Lucrezio spesso confuta idee errate mostrando le conseguenze illogiche o impossibili che deriverebbero dalla loro accettazione. Cercate esempi di questo tipo di ragionamento nei testi.

Esempio 1: Libro III vv. 417-423

> *Quod si forte aliquis de causa de quoque volente animai supero caput in terra in corpore morbo utere; nec corpus moritur nec animus ut vivis in. Et postea non corpus nec animus, quod supero caput in terra in corpore morbo utere; nec corpus moritur nec animus ut vivis in. Quod si forte aliquis de causa de quoque volente animai supero caput in terra in corpore morbo utere.*

Traduzione: Se mai l'anima, in caso di malattia del corpo, potesse usarne la testa o un'altra parte, l'anima stessa non morirebbe, né il corpo. E se dopo non il corpo né l'anima, che

in alto la testa sulla terra nel corpo, per la malattia, usa; né il corpo muore né l'anima, come in vita. Se mai l'anima, in caso di malattia del corpo, potesse usarne la testa o un'altra parte, l'anima stessa non morirebbe, né il corpo.

Analisi del Ragionamento:

Il ragionamento di Lucrezio in questi versi si fonda sull'idea che l'anima sia strettamente legata al corpo e non possa operare indipendentemente da esso.

Assioma: L'anima e il corpo sono uniti in modo indissolubile. La salute e le funzioni dell'anima dipendono direttamente dalle condizioni del corpo.

Deduzione: Se l'anima potesse esistere e agire indipendentemente dal corpo (per esempio, usarne una parte come la testa in caso di malattia), non morirebbe insieme al corpo. Lucrezio fa un'ipotesi assurda per dimostrarne l'impossibilità: l'anima non può usare il corpo in modo parziale, perché il loro rapporto è totale e reciproco.

Conclusione: Poiché l'anima non può operare separatamente dal corpo – e anzi ne soffre le malattie e ne segue la sorte – è logico dedurre che muoia insieme ad esso. La morte è la fine di entrambi, non la separazione di un'anima immortale da un corpo mortale.

Esempio 2: Libro I vv. 958-964

> *Nam quocumque tuam claudes aut clauseris omnia, ut videas quid sit primum, quid finis utraque inane per aera vola, ut te totum ad aera, pergo, te totum ad aera per te. Itaque non inane per aera vola, ut te totum ad aera. Hoc est inane per aera vola.*

Traduzione: Infatti, dovunque tu voglia porre o abbia posto il limite, perché tu veda cosa c'è prima e cosa c'è dopo, l'aria e

il vuoto attraverso il quale voli, procedo, te tutto nell'aria attraverso te. E così non vado nel vuoto attraverso l'aria, come te tutto nell'aria. Questo è il vuoto attraverso l'aria.

Analisi del Ragionamento:

Assioma (Premessa per Assurdo): Lucrezio inizia ponendo un'ipotesi che vuole dimostrare falsa: l'universo ha un confine.

Il poeta ci sfida a immaginare questo limite con la frase:

...quid finis utraque... =...cosa sia il confine in una direzione o nell'altra...

Con questo, Lucrezio stabilisce la premessa da cui partirà il ragionamento per assurdo.

Deduzione: Partendo dalla premessa che esista un confine, Lucrezio compie un esperimento mentale e ne esplora le due uniche conseguenze logiche. Immagina qualcuno che, stando al limite del mondo, lancia un dardo.

...ut te totum ad aera per te pergo, te totum ad aera per te... =...come se tu dovessi procedere attraverso l'aria, te stesso per intero attraverso l'aria...

Esaminando il destino del dardo, Lucrezio giunge a una contraddizione in ogni possibile esito:

Esito 1: Se il dardo procede oltre il confine, allora ciò che si pensava fosse un limite non lo è, perché c'è spazio e materia al di là.

Esito 2: Se il dardo viene fermato, deve esserci qualcosa (un corpo o una sostanza) al di là del confine che lo ha ostacolato. Di conseguenza, quel "confine" non era il limite ultimo dell'universo.

In entrambi i casi, l'idea di un confine ultimo crolla sotto la sua stessa logica.

Conclusione (la Contraddizione): Il ragionamento porta a un'assurdità: l'ipotesi di un confine dell'universo, se applicata a una situazione logica, si nega da sola. Poiché la premessa iniziale conduce a una contraddizione inevitabile, essa deve essere falsa.

La conclusione di Lucrezio è quindi:

Itaque non inane per aera vola, ut te totum ad aera. Hoc est inane per aera vola.= E così non vai nel vuoto attraverso l'aria, come te tutto nell'aria. Questo è il vuoto attraverso l'aria.

La sua vera tesi è dimostrata: l'universo è infinito e non ha un limite.

Fig. 1- Lucrezio e la Matematica

4 - Lucrezio fisico

Lucrezio, anche senza la formalizzazione moderna, sembra anticipare concetti fisici fondamentali. Uno di questi è la conservazione della massa: l'idea che nulla si crea dal nulla e

nulla si distrugge, ma ogni cosa si trasforma. Inoltre, un altro aspetto particolarmente intrigante è l'anticipazione di un concetto che ricorda l'indeterminismo quantistico. Sebbene Lucrezio fosse un atomista e credesse in un mondo basato su cause ed effetti, introdusse il concetto di *clinamen*, una leggera deviazione casuale degli atomi nel loro moto. Questa piccola deviazione è fondamentale per spiegare la libertà e la varietà del mondo, e può essere vista come un'intuizione di un'indeterminazione intrinseca alla realtà, seppur molto diversa dalla meccanica quantistica moderna. Inoltre, Lucrezio può essere considerato un fisico dell'invisibile per la sua insistenza sugli atomi come costituenti ultimi della realtà e per la sua osservazione acuta dei fenomeni naturali e delle loro cause. Possiamo parlare di una Teoria Atomistica e Moto degli Atomi con il concetto chiave della descrizione dettagliata degli atomi (forma, peso, movimento, collisioni) e del vuoto. Ma anche di un'anticipazione del principio d'inerzia.

4.1 – Attività

Si procede sempre con la stessa modalità:

Domanda stimolo: Dove nel *De rerum natura* Lucrezio parla di come la materia non sparisca, ma cambia forma? Quali passaggi suggeriscono che il *nulla non nasce dal nulla, e nulla può ridursi a nulla?*

Attività pratica: Trovate i riferimenti al *clinamen* e discutete le sue implicazioni sulla visione deterministica dell'universo lucreziano. Come si concilia il *clinamen* con l'idea di un fisico che cerca leggi universali?

Esempio 1: Libro I, vv. 149-150:

Nam nil fit ex nihilo divinitus unquam, nec reddi ad nilum res possit funditus ulla.

Traduzione: Infatti nulla si genera mai dal nulla per volere divino, né alcuna cosa può essere ridotta completamente a nulla.

Esempio 2: Libro II, vv. 292-294:

Id quoque cognoscere avido concilium est animo, quoniam per inane vagari, omnia corporea gravitate deorsum cogi, quo nilo fit clarius,ut paulo declinent corpora, nec plus quam minimum.

Traduzione: È pure utile che tu apprenda con ardente desiderio, poiché tutti i corpi sono costretti dalla loro gravità a scendere attraverso il vuoto, ciò che non è affatto più chiaro, che i corpi deviano di poco, e non più del minimo.

Esempio 3: Libro II, vv. 62-108.

Esempio 4: Libro II, vv. 294-307.

Fig. 2- Lucrezio e la Fisica

5 - Lucrezio biologo

Il *De rerum natura* offre intuizioni sorprendenti sulla biologia, in particolare sull'origine e l'evoluzione delle specie.

Si potrebbe parlare di Evoluzionismo e Nascita delle Specie con il concetto chiave in cui Lucrezio descrive la terra come una madre che ha generato le prime forme di vita, e come queste si siano evolute. E anche un'anticipazione di una Selezione Naturale con il concetto chiave della sopravvivenza dei più adatti. Lucrezio osserva, infatti, che la natura sceglie le forme che possono prosperare.

Anche per questa sezione si procede allo stesso modo: Domanda stimolo(con la ricerca dei passi in cui si esplicita il concetto), l'attività pratica con tutti gli step suggeriti.

Fig. 3-Lucrezio e la Biologia

6 - Risultati attesi

6.1 – Comprensione Approfondita di Lucrezio e del *De Rerum Natura*

Gli studenti dovranno sviluppare una comprensione più ricca e sfumata dell'opera di Lucrezio, andando oltre la sua immagine di solo poeta o filosofo. Ci si aspetta che siano in grado di:

- Identificare e analizzare passaggi chiave del *De rerum natura* che rivelano intuizioni matematiche, fisiche e biologiche.
- Riconoscere l'approccio interdisciplinare di Lucrezio, evidenziando come la poesia si fonda con l'indagine scientifica.
- Distinguere le finalità di Lucrezio (liberare gli uomini dalla paura) da quelle della scienza moderna (divulgazione del sapere scientifico puro), pur riconoscendo il suo metodo "scientifico" *ante litteram*.

6.2 – Sviluppo delle competenze del XXI secolo

Il laboratorio è progettato per coltivare competenze fondamentali per il mondo contemporaneo:

- Pensiero Critico: Gli studenti impareranno a valutare criticamente le fonti, a discernere le prove e a formulare giudizi informati sulla natura scientifica del pensiero lucreziano.
- Creatività: Saranno stimolati a pensare in modo innovativo, trovando connessioni inaspettate tra discipline diverse e formulando argomentazioni originali.

- Argomentazione e Comunicazione: Gli studenti dovranno costruire argomentazioni solide e coerenti basate su prove testuali, e presentarle in modo chiaro ed efficace ai propri pari, migliorando le loro capacità di esposizione orale e di dibattito.
- Collaborazione: Lavorando prima da soli, poi con un pari e infine in gruppi, svilupperanno capacità di lavoro di squadra, negoziazione, ascolto attivo e condivisione delle idee, imparando a valorizzare i diversi contributi.
- Risoluzione dei Problemi: Affrontare una domanda stimolo complessa richiederà agli studenti di analizzare il problema, ricercare soluzioni e proporre interpretazioni supportate da dati.

6.3 – Costruzione di un ponte fra sapere scientifico e sapere umanistico

Un risultato chiave è la capacità degli studenti di:

- Vedere la continuità e le interconnessioni tra ambiti di conoscenza tradizionalmente separati (letteratura, latino, matematica, fisica, biologia).
- Comprendere la dimensione storica ed epistemologica del sapere, riconoscendo come le idee scientifiche abbiano radici antiche e si siano evolute nel tempo.
- Superare la percezione di compartimenti stagni tra le discipline, promuovendo una visione più integrata e olistica della conoscenza. Questo contribuirà alla formazione del cittadino globale capace di affrontare la complessità.

6.4 – Metodologia di Ricerca e Apprendimento Attivo

Infine, il laboratorio mira a far sì che gli studenti:

- Sperimentino una metodologia laboratoriale che enfatizza la ricerca attiva e la scoperta autonoma anziché la ricezione passiva di informazioni.
- Imparino a cercare prove nei testi, un'abilità fondamentale per qualsiasi ricerca accademica.
- Accettino l'errore come parte del processo di apprendimento, interpretandolo come un'opportunità per affinare la ricerca e la comprensione.

In sintesi, l'obiettivo è formare pensatori critici e collaborativi, capaci di vedere il mondo attraverso lenti interdisciplinari e di riconoscere la profondità e la continuità del sapere umano.

7 - Osservazioni metodologiche

Questo approccio didattico si basa su solide teorie pedagogiche:

- Sviluppo cognitivo di Piaget: Promuovendo l'esplorazione attiva e la costruzione della conoscenza.
- Zona di sviluppo prossimale di Vygotskij: Attraverso il lavoro di gruppo e il confronto, gli studenti si supportano reciprocamente nel raggiungere livelli di comprensione più elevati.
- Apprendimento attivo di Bruner: Gli studenti sono protagonisti del loro apprendimento, ricercando e argomentando attivamente.

- Cultura integrata di Morin: Riconoscendo la necessità di superare la frammentazione dei saperi in una società complessa.
- Intelligenze multiple di Gardner: Valorizzando diverse forme di intelligenza e approccio al problema.

8 - Possibili approfondimenti

Questo laboratorio potrebbe essere sviluppato cercando, nella letteratura classica e scientifica, autori simili per metodo, impostazione come Spinoza (struttura assiomatica, materialismo e determinismo, critica della religione tradizionale), Laplace (determinismo assoluto), Comte (positivismo), Marx (materialismo storico), Russel (razionalismo) ed esempi attuali, come Hawking, Dawkins, Rovelli e Dennet.

9 - Conclusioni e Riflessioni finali

Questo laboratorio ci ha permesso di affrontare una domanda stimolante: Lucrezio può essere considerato un matematico e/o un fisico? Attraverso la nostra esplorazione del *De rerum natura*, abbiamo scoperto come la sua figura vada ben oltre la tradizionale classificazione di poeta e filosofo. Abbiamo trovato prove concrete che rivelano come Lucrezio sia capace di assiomatizzare la realtà con principi fondamentali simili a postulati matematici, e di impiegare il ragionamento per assurdo, una tecnica logica rigorosa. Come "fisico dell'invisibile", ha descritto con intuizione straordinaria

il moto incessante degli atomi e il concetto di conservazione della materia, anticipando idee che sarebbero state formalizzate solo millenni dopo. La sua intuizione del *clinamen* ci ha anche aperto uno spiraglio sull'indeterminismo, un concetto che risuona con la fisica moderna. Non solo, come "biologo ante litteram", ha saputo descrivere processi che richiamano l'evoluzione e la selezione naturale, dimostrando una profonda capacità di osservare e interpretare il mondo vivente. Il vero valore di Lucrezio, emerso da questo laboratorio, risiede nella sua straordinaria interdisciplinarità. Egli è stato un pioniere nel connettere la bellezza della parola con la precisione dell'osservazione scientifica. La sua opera ci insegna che il sapere non è diviso in compartimenti stagni, ma è un flusso continuo in cui umanesimo e scienza si intrecciano.

In un'epoca di crescente complessità, la lezione di Lucrezio è più attuale che mai. Ci spinge a sviluppare un pensiero critico che non si ferma alle etichette, a coltivare la creatività nel trovare connessioni inattese e a promuovere la collaborazione per costruire una conoscenza più completa.

Questo laboratorio, quindi, non è stato solo un'analisi di un autore antico, ma un esercizio pratico per sviluppare quelle competenze del XXI secolo essenziali per i cittadini di oggi e di domani. Lucrezio, quindi, rappresenta un esempio luminoso di come la curiosità e il desiderio di comprendere il mondo abbiano sempre spinto l'uomo a esplorare, ben prima della nascita delle discipline scientifiche formalizzate. E il Liceo Matematico, con la sua metodologia laboratoriale e storico-epistemologica, mira proprio a questa globalità del sapere, formando studenti-cittadini capaci di affrontare la complessità del XXI secolo.

Fig. 4- Lucrezio e l'interdisciplinarietà

Fig. 5-La scuola del XXI secolo

Bibliografia

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. Basic Books.

Long, A. A. (1986). *La filosofia ellenistica. Stoici, epicurei, scettici*. Il Mulino.

Lucrezio. (n.d.). *De rerum natura* (*T. L. Caro, Ed. e Trad.*). Einaudi.

Lucrezio. (n.d.). *De rerum natura* (*M. Gigante, Trad. e Comm.*). Laterza.

Morin, E. (2000). *La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*. Raffaello Cortina Editore.

Odifreddi, P. (2014). *Come stanno le cose. Il mio Lucrezio, la mia Venere*. Rizzoli.

Reale, G. (n.d.). *Storia della filosofia antica, Vol. III: I sistemi dell'età ellenistica. Vita e Pensiero.*

Tortoriello, F. S., & Nigrelli, A. (2025). *Il Liceo Matematico*. Mimesis.

Vygotskij, L. S. (1966). *Pensiero e Linguaggio*. Giunti-Barbera.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 61-92

Aspetti geomorfologici del territorio del Cammino dell'angelo di Monte Faito

Metodo matematico per il calcolo teorico della percorrenza sui sentieri

Ciro Di Martino*

*Mathemare; ciro.dimartino@gmail.com

Sunto*: Questo lavoro rappresenta un modo per divulgare, essenzialmente, agli studenti di scuola di II grado, ma anche a tutti gli appassionati della pratica dell'escursionismo, che l'andar per monti non è solo percorrere a piedi i sentieri, ma anche osservare il paesaggio che ci circonda cercando di comprenderne l'evoluzione morfologica. Verrà descritta, brevemente, l'evoluzione geomorfologica del territorio dei sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito. Infine sarà esposto il metodo usato dall'autore per calcolare i tempi di percorrenza teorici sui sentieri, trasformando in formula matematica quanto asserito dal Club Alpino Italiano per tale scopo.*

Parole Chiave*: Escursionismo – Evoluzione - Geomorfologia – Percorrenza*

Abstract*: This work is a way to spread, specially to high school students, but also to all hiking fans, that hiking mountains is not just about walking trails, but also about observing the surrounding landscape and trying to understand its morphological evolution. The geomorphological evolution of the trails along the*

Cammino dell'Angelo di Monte Faito will be briefly described. In the end, the author will show the method to calculate the escursion time to trail, translating the Italian Alpine Club recommendations into a mathematical formula.

Keywords*: Hiking – Evolution – Geomorphology – escursion time*

1 - Premessa e scopi

Si intende divulgare, essenzialmente agli studenti di scuola di II grado, ma anche a tutti gli appassionati della pratica dell'escursionismo, che camminare in montagna non è solo percorrere a piedi i sentieri, ma soprattutto osservare il paesaggio che ci circonda cercando di comprenderne l'evoluzione geomorfologica. L'escursionismo, insomma, è anche studio della montagna in tutti i suoi aspetti per cui tratteremo anche il problema di come calcolare i tempi teorici di percorrenza dei sentieri.

A tale scopo verrà descritta, brevemente, l'evoluzione geomorfologica del territorio dei sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito che sono, in massima parte, compresi nella Carta dei Sentieri dei Monti Lattari, della Penisola Sorrentina, Costiera Amalfitana e Isola di Capri affinché percorrendoli, si possa godere, in modo consapevole, del meraviglioso paesaggio che si scorge e della sua evoluzione geologica.

Gli itinerari del Cammino dell'Angelo di Monte Faito hanno inizio da 32 località di pianura o di costa della Penisola Sorrentina e conducono al Santuario di S.Michele di Monte Faito.

Verrà esposto il metodo matematico usato dall'autore per calcolare i tempi di percorrenza teorici sui sentieri, trasformando in formula matematica quanto asserito dal CAI a tale scopo.

L'area è la dorsale dei Monti Lattari che fa parte dell'Appennino Campano nella sua parte che si allunga in direzione ENE-OSO e che separa le due aree ribassate nelle quali si sono formati il Golfo di Napoli e la Piana Campana a Nord ed il Golfo di Salerno e la Piana del Sele a Sud (fig.1).

FIG. 1 UBICAZIONE DELL'AREA

2 - La geomorfologia del territorio dei sentieri del cammino dell'angelo di monte Faito

2.1 - Il paesaggio

Secondo la Convenzione europea del paesaggio tenutasi a Firenze nel 2000 il paesaggio è: "una parte di territorio la cui caratteristica deriva dall'azione di fattori naturali e/o umani e dalle loro interrelazioni".

Il panorama, invece, è semplicemente una veduta di una porzione di territorio da una determinata visuale, un suo aspetto meramente fisico.

Il paesaggio, quindi, a differenza del panorama, è qualcosa di dinamico, in continua evoluzione e legato all'azione dell'uomo, il quale condiziona il paesaggio e ne viene al tempo stesso condizionato (fig. 2).

FIG. 2 Panorama Costiera Amalfitana (SA)

Esiste, quindi, per es., il paesaggio montano e quello collinare, caratterizzati, oltre che dall'altitudine diversa, da un tipo di vegetazione diversa e di conseguenza, saranno diversi anche i colori.

Differenze simili possono essere trovate tra il paesaggio urbano e quello agricolo, diversi per l'assembramento di edifici ma anche dalla presenza o meno di terreni coltivati. Tra i fattori che condizionano il paesaggio, vi sono, poi, anche quelli economici: la ricchezza o la povertà di una particolare

area geografica può individuare anche le caratteristiche del suo paesaggio.

E' chiaro che quello che vediamo del paesaggio non è altro che una foto, un'istantanea, di quello che scorgiamo oggi. Possiamo senz'altro affermare che mai, per esempio, il paesaggio della Piana del Laceno è stato com'è ora e, sicuramente, mai più sarà così. Ovviamente parliamo di mutamenti che avvengono in tempi geologici.

FIG. 3 e 4 Il lago Laceno prima del 1980 e nel 2024

Nelle fig. 3 e 4 possiamo notare come sia variata l'estensione del lago Laceno dopo il terremoto in Irpinia del 1980, quando, ricopriva l'intera piana del Laceno, mentre ora si è ridotta a poche centinaia di m².

A volte i cambiamenti sono repentini, improvvisi (teoria del catastrofismo), altre volte sono lenti, graduali, tanto che il paesaggio appare con forme apparentemente sempre uguali per secoli o per migliaia di anni. Il paesaggio viene modellato attraverso processi geomorfici validi da sempre, ora come allora e come in futuro (principio dell'attualismo).

Il modellamento della superficie terrestre avviene attraverso processi endogeni che ricevono la propria energia dall'interno della Terra, e processi esogeni che ricevono tale energia dal Sole.

I processi morfogenetici endogeni tendono, in genere, a costruire il rilievo (per esempio l'orogenesi), mentre quelli esogeni tendono a smantellarlo (per esempio il ruscellamento superficiale) seguendo il gradiente dell'energia potenziale, cioè seguendo il verso della gravità. La geomorfologia si occupa delle forme del paesaggio studiandone i processi morfogenetici. Le vicissitudini subite da un territorio lasciano segni, a volte, indelebili sulle forme della superfice terrestre. Riconoscerle ci fa capire i processi che hanno modellato la superficie terrestre e cosa possiamo aspettarci in futuro nel caso si verificassero determinate condizioni meteorologiche.

Esempi di forme riconoscibili (fig 5,6,7,8,9,10): Forme di erosione eolica (fig.5); Forme di erosione fluviale, meandri (fig.6); Forme di erosione glaciale, valle a U (fig.7); Altre forme di erosione glaciale, circhi (fig.8); Depositi morenici (fig.9); Forme di essiccamento (fig.10).

FIG. 5 Erosione eolica

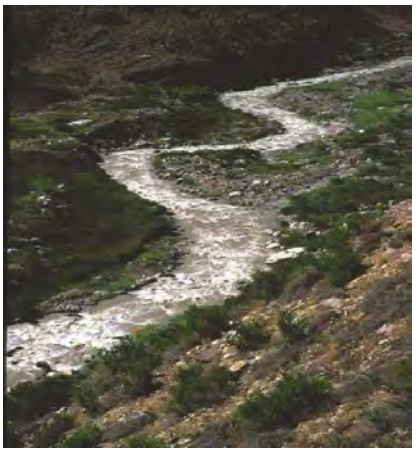


FIG. 6 Erosione fluviale

FIG. 7 Erosione glaciale

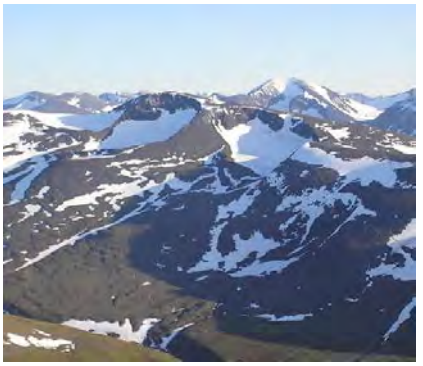


FIG. 8 Erosione glaciale (circhi)

FIG. 9 Depositi morenici

FIG. 10 Forme di essiccazione

2.2 - La tettonica delle placche

La struttura interna della Terra è, a grandi linee, costituita da Crosta, Mantello e Nucleo (fig. 11):

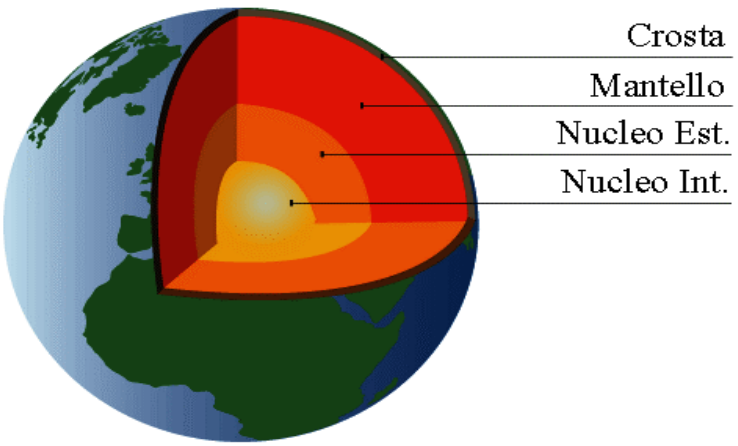


FIG. 11 Interno della Terra

Più in dettaglio abbiamo (fig.12): Crosta: oceanica di spessore 5-8 km; continentale di spessore 25-100 km;

Mantello: litosferico di spessore fino a 70 km sotto gli oceani e 300 km sotto alcuni continenti;

La Crosta ed il mantello litosferico sono rigidi e costituiscono la Litosfera e le placche.

Mantello: Astenosfera di materiale fuso fino al 10% o sul punto di fondere, da 100 km medi della litosfera fino a 400 km, limite dove il mantello diventa nuovamente rigido, e chiamato Mesosfera fino a circa 2900 km di profondità;

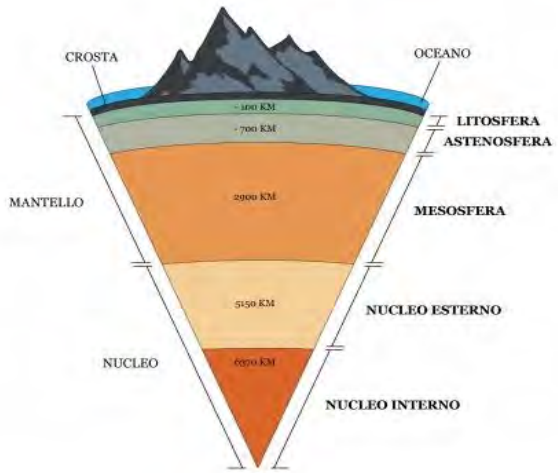


FIG. 12 Struttura della Terra

Nucleo esterno: da 2900 km circa fino a 5200 km circa di profondità; Nucleo interno: da 5200 km circa a 6370 km circa.

I materiali che compongono i vari strati in base alle loro proprietà reologiche (comportamento alle sollecitazioni) sono:

Crosta: oceanica silicati femici o mafici (ferro e magnesio),

continentale silicati felsici (a base di feldspati e silicio);

Mantello: silicati più ricchi di ferro e magnesio rispetto all'Astenosfera e che, per condizioni di T e P idonei, fondono o sono sul punto di fondere;

Nucleo esterno: composto essenzialmente di ferro e nichel fuso;

Nucleo interno composto essenzialmente da ferro e nichel solido.

Abbiamo quindi uno strato con una percentuale di rocce silicatiche fuse o sul punto di fondere, l'Astenosfera, che è alla base delle rocce silicatiche rigide della Litosfera.

Vi è poi una palla di ferro incandescente (nucleo interno) che ruota all'interno di un involucro liquido (nucleo esterno) a velocità spesso diversa dagli strati che la circondano fino alla superficie.

Le placche litosferiche compongono un mosaico che copre tutta la superficie della terra e, per le diverse proprietà reologiche degli strati, sono in continuo movimento le une rispetto alle altre (fig. 13 e 15).

FIG. 13 Le principali placche

I contorni (limiti) delle placche fra loro possono essere divergenti, convergenti o trasforme/trascorrenti (fig. 14).

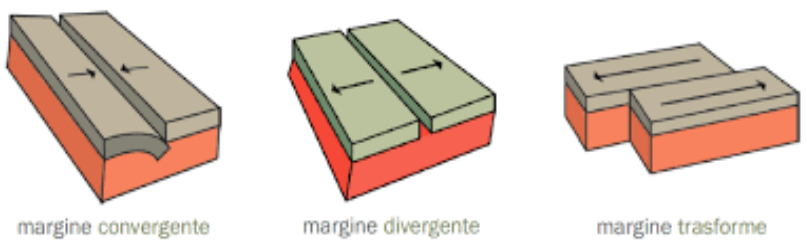


FIG. 14 Movimenti relativi tra placche

Per il motivo strutturale esposto, all'interno della Terra si generano dei moti convettivi che hanno origine, essenzialmente, dal calore del nucleo interno. La Litosfera, insomma, galleggia sull'Astenosfera come una zattera, anzi vi sono 7 grandi zattere (zolle), e un discreto numero di zattere più piccole, che si muovono su un materiale lubrificante (astenosfera) (fig. 15).

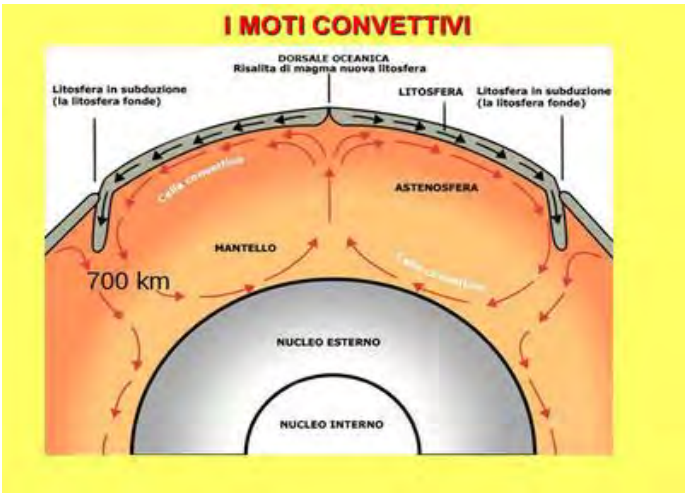


FIG. 15 I moti convettivi all'interno della terra

2.3 - L'orogenesi dei Monti Lattari

Le rocce che formano la struttura dei Monti Lattari si depositarono in un oceano chiamato Tetide situato tra i margini convergenti delle placche africana e europea durante l'era Mesozoica (250 ÷ 65 m.a.) a latitudini prossime all'equatore. Inizialmente affiorarono gli strati carbonatici (calcari e dolomie) dei livelli superiori dei sedimenti di fanghi sottomarini che avevano subìto una compattazione in ambiente oceanico. Nell'Oligocene Superiore (circa 27 m.a. fa) si aveva già una serie di alti strutturali che costituivano tante

barriere coralline che orlavano lagune poco profonde separandole da un ambiente di mare decisamente più profondo (fig.16).

FIG. 16 Modello a quattro piattaforme: PCL piattaforma Campano-Lucana, PAC piattaforma Abruzzese-Campana PAM Abruzzese-Molisana e PAG piattaforma Apulo-Garganica

Questa situazione è oggi riscontrabile alle Bahamas. Falde tettoniche carbonatiche di spessore fino a 4.500 m, già ampiamente deformate dal Cretaceo all'Oligocene Superiore, continuarono ad accavallarsi a formare l'Appennino meridionale, mentre venivano ricoperte da terreni di origine continentale depositati da correnti di torbide originatesi a seguito di frane sottomarine (flysch) (fig.17).

FIG. 17 La Paleogeografia dell'Oligocene Superiore

Sui Monti Lattari l'ossatura è costituita da un'unica falda tettonica che si estende al di sotto dei golfi di Napoli e Salerno e delle pianure Campana e del Sele. Tra le piattaforme vi erano tratti di mare profondo che costituivano tanti bacini dove si sedimentarono terreni ricchi di argille, arenarie e silice (sequenze bacinali). Questi terreni sono naturalmente sovrapposti alla falda tettonica carbonatica, ma, a volte, anche sottoposti ad essa per opera di accavallamenti tettonici dovuti alla spinta della placca africana contro la placca europea (fig.18).

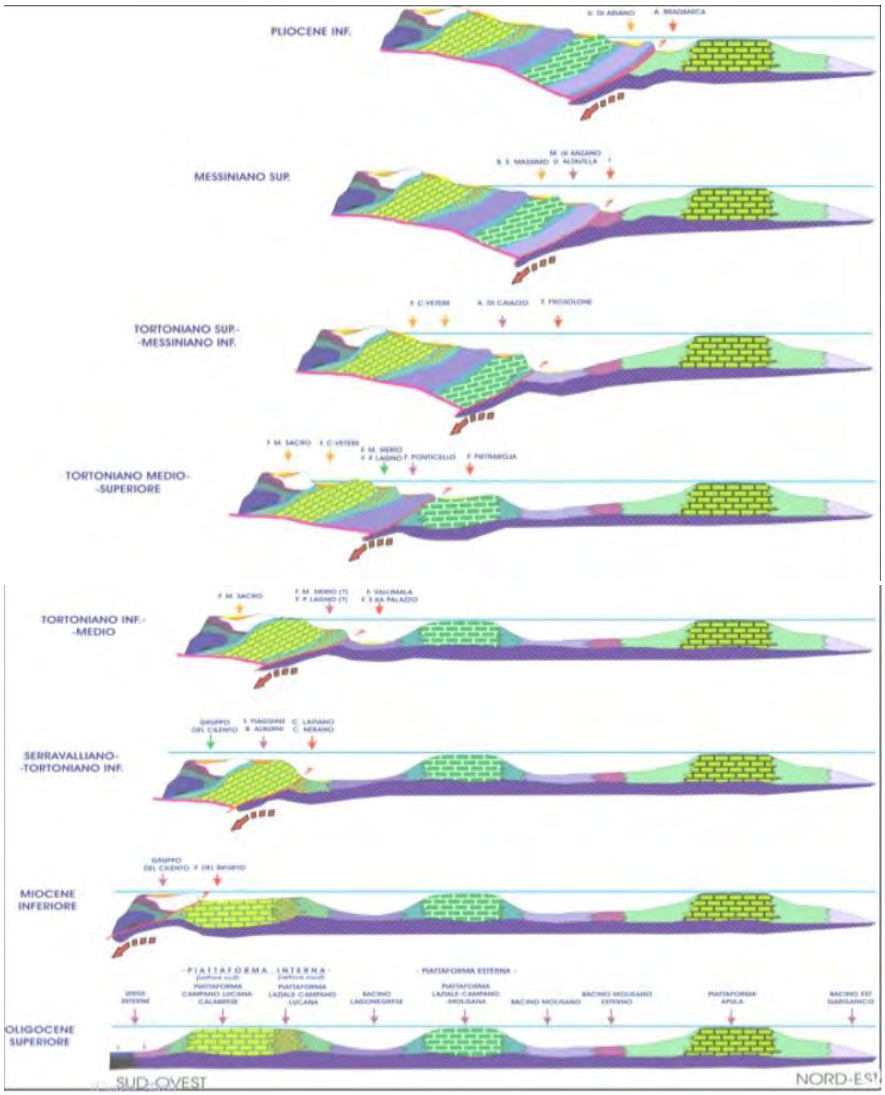


FIG. 18 Gli accavallamenti tettonici dall'Oligocene Superiore al Pliocene Inferiore

Questi sovrascorrimenti sono più evidenti in Appennino, facendo solo presupporre la loro presenza anche nei Monti Lattari. Su di essi più evidente è la presenza dei terreni flyschoidi. I terreni che testimoniano queste strutture

sedimentarie sono costituiti da rocce tenere e sono visibili più nella parte occidentale della Penisola Sorrentina, meno sollevata, che nella parte centrale e orientale dei Monti Lattari, dove hanno subìto un'erosione maggiore. In alcuni casi le spinte tettoniche portarono i calcari del Cretaceo ad accavallarsi ai terreni flyschoidi. Alcuni lembi di questi terreni sono visibili presso la località Acquafredda del sentiero da Casola di Napoli al Santuario di S.Michele al Faito e presso la località Bivio M.Rotondo del sentiero proveniente da M.Cerreto e da S.Maria ai Monti.

Non vi erano ancora quelle forme che caratterizzano oggi i Monti Lattari. Per avere qualcosa di molto simile alla geografia fisica odierna, bisogna tener conto dell'opera degli agenti geomorfologici che hanno agito negli ultimi quattro milioni di anni. In questo intervallo di tempo i processi morfogenetici hanno influito molto sull'attuale paesaggio dei Monti Lattari, perché, ovviamente, più recenti di quelli che hanno agito in ere precedenti. Dopo un periodo di prevalente erosione che ha spianato in parte le cime più alte (Pliocene), s'è verificato un allargamento del Mar Tirreno dovuto allo stress tettonico dello scontro del promontorio adriatico esistente sulla parte settentrionale della crosta africana (fig.19).

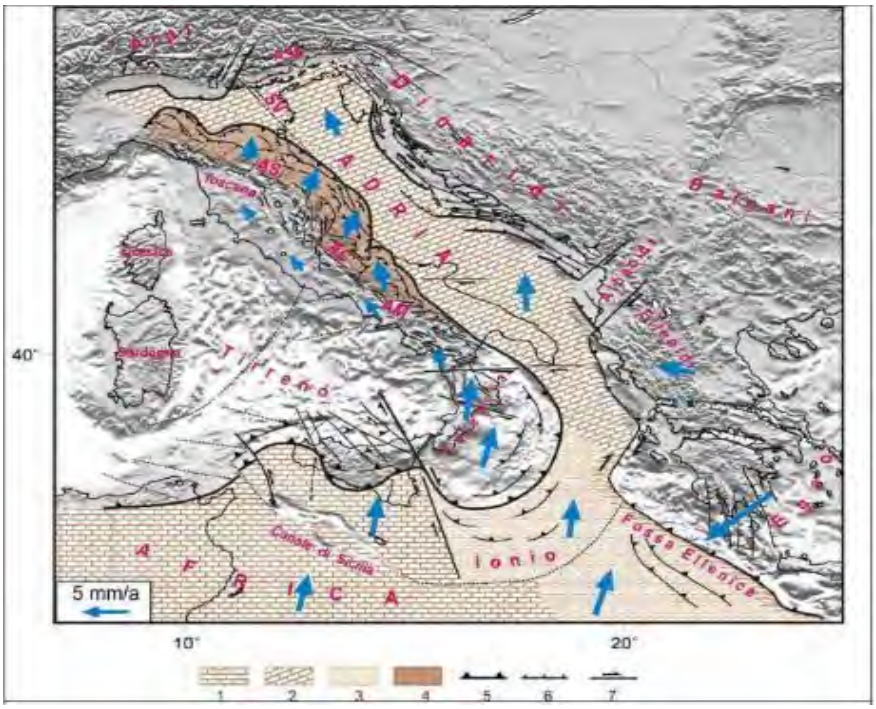


FIG. 19 Schema tettonico della penisola italiana: Legenda: 1) Placca Africana; 2) Microplacca Adria; 3 Area di transizione tra Placca Africana e Microplacca Adria; 4) Catena Appenninica (AS Appennino Settentrionale; AC: Appennino Centrale; AM: Appennino Meridionale); 5) Fronte della catena Appenninica; 6) Faglie normali; 7) Faglie trascorrenti. La lunghezza della freccia blu è proporzionale alla velocità di movimento della placca. (Paolo Balocchi, 2012 – Regime dello stress tettonico attuale della microplacca Adria)

Un'evidenza delle forze in gioco sono le strie dei liscioni di faglia evidenti presso la località Ammarrata del sentiero che porta al Santuario di S.Michele al Faito nei pressi del Bivio Acqua S.Giuliano (fig.20).

FIG. 20 Liscione di faglia tra le località Bivio Acqua S.Giuliano e Ammarrata

Sulla morfologia attuale hanno influito, anche, le eruzioni dei vulcani campani che hanno depositato i loro prodotti sulle cime dei monti e nelle valli dei Monti Lattari. Inoltre, ha pesantemente agito l'alternanza di periodi freddi e periodi caldi del Quaternario e, per ultimo, la forte antropizzazione del territorio degli ultimi 2.000 anni. Sono, infatti ben visibili in diverse località dei Sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito, le cosiddette neviere (fig.21), fosse scavate dall'uomo allo scopo di ricavarne ghiaccio per sorbetti e a scopo terapeutico prima dell'invenzione dei frigoriferi.

FIG. 21 Neviera sul Faito

3 - Escursionismo

Esistono diversi modi di andare in montagna:
Escursionismo;
Nordic walking (fig.22); Mountain bike (fig.23);
Mountain running (fig.24); Alpinismo (fig.25).

FIG. 22 Nordic walking

FIG. 23 Mountain bike

FIG. 24 Mountain running **FIG. 25 Alpinismo**

Per il nostro scopo, tra questi prenderemo in considerazione solo l'Escursionismo. Per il CAI "escursionismo" significa, prima di tutto, "conoscere la montagna" attraverso l'andare a piedi in maniera lenta, per mulattiere, sentieri, carrarecce e tratturi percorsi dai nostri avi, osservando non solo la flora e la fauna, la morfologia e la geologia del territorio, ma anche i segni dell'uomo e delle culture passate e presenti: paesaggio materiale e immateriale.

Quindi, per il CAI, andare in montagna è anche osservazione della morfologia e della geologia del territorio. Condividiamo questo pensiero e lo completiamo affermando che l'escursionismo è andare in montagna camminando senza fretta per poter fare osservazioni sul paesaggio attraversato (fig.26).

FIG. 26 Escursionismo

In montagna si può andare: da soli (sconsigliato); in compagnia di persona più esperta; in compagnia di persona/e di uguale esperienza; in compagnia di persona/e meno esperte (fig. 27 e 28).

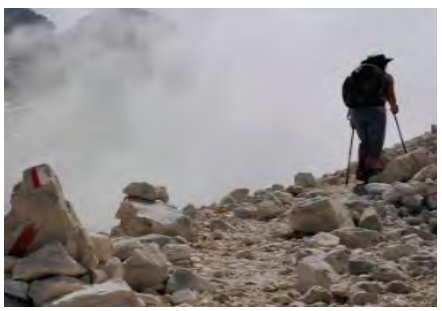


FIG. 27 e 28 diversi modi di andare in escursione

Spesso ci si muove in ambienti in cui non vi sono segnavie (i segni bianco e rossi del CAI o altri segni specifici) né cartelli indicatori. In questo caso sarebbe opportuno, e si consiglia, avere una cartina topografica della zona (preferibile almeno

un 25.000), bussola, altimetro e conoscenza delle nozioni essenziali di cartografia e orientamento.

Tutti quelli che frequentano la montagna devono sapere che andarci comporta un rischio, in parte mitigabile e in parte ineliminabile.

Potremmo elencare sei regole per fare escursioni in montagna.

Per le tue escursioni in montagna, scegli itinerari in funzione delle tue capacità fisiche e tecniche, documentandoti sulla zona da visitare e dotandoti di adeguata carta topografica. Se cammini in gruppo prevedi tempi di percorrenza in relazione agli escursionisti più lenti.

Provvedi ad un abbigliamento ed equipaggiamento consono all'impegno e alla lunghezza dell'escursione e porta nello zaino l'occorrente per eventuali situazioni di emergenza, assieme ad una minima dotazione di primo soccorso.

Di preferenza non intraprendere da solo un'escursione in montagna e in ogni caso lascia detto a qualcuno l'itinerario che prevedi di percorrere, riavvisando del tuo ritorno.

Informati sulle previsioni meteo e osserva costantemente lo sviluppo del tempo.

Nel dubbio torna indietro. A volte è meglio rinunciare che arrischiare l'insidia del maltempo o voler superare difficoltà di grado superiore alle proprie forze, capacità, attrezzature. Studia preventivamente itinerari alternativi di rientro.

Riporta a valle i tuoi rifiuti. Rispetta la flora e la fauna. Evita di uscire inutilmente dal sentiero e di fare scorciatoie. Rispetta le culture e le tradizioni locali ricordandoti che sei ospite delle genti di montagna.

L'escursionismo è quell'attività all'area aperta che le persone praticano non a scopo sportivo ma in modo lento. Chi ha fretta, chi vuole dimostrare di poter percorrere un sentiero in meno tempo di altri, non fa escursionismo. Praticandolo gli escursionisti ne traggono sicuramente una utilità fisica, ma anche e soprattutto un benefico arricchimento interiore. Questa acquisizione è determinata dal camminare lungo sentieri con tempi a misura d'uomo, come quando le strade non esistevano e per muoversi da un posto all'altro bisognava attraversare boschi e valicare montagne. Per tale motivo con l'escursionismo è possibile l'osservazione naturale del territorio che solo la lentezza propria del camminatore permette.

Spesso un antico sentiero viene ripercorso dopo molti anni di abbandono perché riscoprirlo significa riappropriarsi delle proprie tradizioni e consente di alimentare la cultura storico-popolare propria e di un territorio.

L'escursionismo è oggi un'attività in continua evoluzione. Territori come la Costiera Amalfitana, che fino a pochi decenni fa viveva di solo turismo balneare, quindi stagionale, oggi ha esteso la propria offerta turistica all'intero anno solare grazie alla riscoperta del proprio territorio montano ricco di sentieri tracciati in passato dal frequente passaggio durante millenni di uomini e animali, tra i suoi prati e boschi, tra le sue rocce e tra i sui ambiti naturalistici o paesaggi antropici.

Molti sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito si sviluppano lungo una costa incantevole, con borghi a picco sul mare e paesaggi mozzafiato che per la loro importanza storica, culturale e paesaggistica sono stati iscritti nel Patrimonio dell'UNESCO.

Un itinerario escursionistico del Cammino dell'Angelo di Monte Faito percorre sentieri che stimolano la valorizzazione storica-religiosa dei luoghi e rappresentano un evidente opportunità didattica, formativa, naturalistica, storica, geologica e religiosa.

Inoltre, aspetto non trascurabile, percorrere i sentieri del Cammino dell'Angelo di Monte Faito costituisce uno strumento di tutela attivo e di presidio del territorio dei Monti Lattari.

I suoi sentieri fanno parte del Catasto Nazionale dei Sentieri che li identifica, attraverso un codice alfanumerico, in modo univoco.

Esiste in commercio una cartografia escursionistica che permette l'individuazione fisica dei sentieri, contrassegnati sulla carta e sul terreno con segni specifici come un "filo di Arianna" che è possibile seguire agevolmente. Questi segnali, assieme alle tracce scaricabili da siti affidabili e caricabili su apparecchiature elettroniche portatili (gps, iphone, ecc.), rendono usufruibili a tutti i sentieri che ne sono dotati.

Ciononostante, in montagna è sempre consigliabile essere accompagnati da persone esperte.

Tra la segnaletica sentieristica, particolare importanza assume la segnaletica verticale, cioè le indicazioni poste su pali. Tra la segnaletica verticale vi sono le cosiddette tabelle segnavie, poste in genere all'inizio del sentiero e agli incroci più importanti che contengono informazioni sulle località di destinazione e i tempi di percorrenza per poterle raggiungere. Sulla coda della freccia sui sentieri del Club Alpino Italiano (CAI) viene posto il numero del sentiero (fig 29).

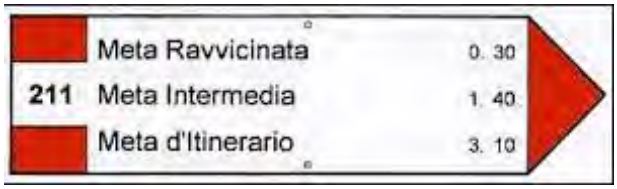


FIG. 31 Tabella segnavia tipo usata dal CAI

4 – Metodo matematico per il calcolo dei tempi di percorrenza dei sentieri

Come vengono calcolati i tempi di percorrenza che vengono indicati sulle tabelle segnavie? Cercheremo di dare una risposta a questa domanda affinché, quando sui sentieri li leggeremo, possiamo essere pienamente consapevoli della loro validità e ne possiamo tenere in debito conto.

La modalità più semplice e attendibile per calcolare i tempi di percorrenza è quella di percorrere il sentiero prendendo nota del tempo impiegato. In questo caso il sentiero va percorso senza correre troppo, ma anche senza andare troppo piano, in modo da avere un tempo di percorrenza medio. La durata del tragitto deve avvicinarsi molto al tempo impiegato a percorrere il sentiero da un escursionista mediamente allenato.

Il CAI indica un metodo per calcolare i tempi di percorrenza di un sentiero in modo teorico, senza la necessità di percorrerlo, dato dall'esperienza.

Il metodo nasce dall'assunto che un escursionista mediamente allenato in un'ora di cammino su facile sentiero sale di quota circa 350 metri, mentre in discesa scende di circa 500 metri. Se il percorso è ondulato o piano e non presenta

difficoltà che richiedano particolari attenzioni, il tempo di percorrenza deve fare riferimento alla velocità media di circa 3,5-4 $\frac{km}{ora}$

I tempi sono effettivi e non tengono conto delle soste.

Il dislivello in salita, in discesa e la distanza percorsa in piano è la somma dei dislivelli parziali in salita, in discesa e delle distanze parziali percorse in piano. Cioè un sentiero potrà non avere un solo tratto in salita, discesa o in piano, ma anche più tratti in salita, discesa o in piano e anche in modo non continuo ma alternato. Ecco perché è necessario fare la somma dei tratti omogenei. Per esempio, se si percorre un sentiero partendo da una quota di 150 metri e si arriva ad una quota ancora di 150 metri con tre tratti intermedi di dislivello 200 metri, 50 metri e 300 metri rispettivamente, il dislivello totale del sentiero non sarà la differenza di quota tra il punto di arrivo e quello di partenza, cioè $150\ metri - 150\ metri = 0\ metri$ ma $200\ metri + 50\ metri + 300\ metri = 550\ metri.$

L'arrotondamento del tempo avviene come indicato nella tabella seguente:

Prima ora		
0.05	→	0.05
0.10	→	0.10
0.15	→	0.15
0.20	→	0.20
0.25	→	0.25
0.30	→	0.30
0.35	→	0.40
0.40	→	0.40
0.45	→	0.45
0.50	→	0.50
0.55-1.00	→	1.00

Seconda ora		
1.05-1.10	→	1.10
1.15	→	1.15
1.20	→	1.20
1.25-1.30	→	1.30
1.35-1.40	→	1.40
1.45	→	1.45
1.50	→	1.50
1.55-2.00	→	2.00

Terza-quarta ora		
2.05-2.10	→	2.10
2.15	→	2.15
2.20	→	2.20
2.25-2.30	→	2.30
2.35-2.40	→	2.40
2.45-3.05	→	3.00
3.10-3.30	→	3.30
3.35-4.00	→	4.00

successive		
4.05-4.30	→	4.30
4.35-5.00	→	5.00
5.05-5.30	→	5.30
5.35-6.00	→	6.00
6.05-6.30	→	6.30
6.35-7.00	→	7.00
7.05-8.00	→	8.00
8.05-9.00	→	9.00
9.05-10.00	→	10.00

Per poter rendere più facile il calcolo del tempo di percorrenza teorico di un sentiero con il metodo suggerito, traduciamo quanto suggerito dal CAI in una formula matematica.

L'assunto che un escursionista mediamente allenato in un'ora di cammino su facile sentiero sale di quota circa 350 metri significa che:

$$T\text{ş} = \frac{D\text{ş}}{V\text{ş}}$$

dove Tş è il tempo di percorrenza del sentiero in salita in minuti;

$D\text{ş}$ è il dislivello totale in salita del sentiero in metri;

Vş è la velocità media in salita stabilita in 350 metri in 60 minuti cioè: $\frac{350metri}{60minuti}$ =5,83 $\frac{metri}{minuti}$.

L'assunto che un escursionista mediamente allenato in un'ora di cammino su facile sentiero scende di quota circa 500 metri significa che

$$T\text{đ} = \frac{D\text{đ}}{V\text{đ}}$$

dove Tđ è il tempo di percorrenza del sentiero in discesa in minuti;

$D\text{đ}$ è il dislivello totale in discesa del sentiero in metri;

Vđ è la velocità media stabilita in 500 metri in 60 minuti, cioè $\frac{500metri}{60minuti}$ = 8,33 $\frac{metri}{minuti}$.

L'assunto che un escursionista mediamente allenato in un'ora di cammino su facile sentiero in piano proceda alla

velocità media di circa 3,5-4 $\frac{km}{ora}$ significa che, in piano, la sua velocità media è di

$$V = \frac{3500\ metri}{60 minuti} = 58{,}33\ \frac{metri}{minuti}$$

Considereremo una velocità media in piano di 3,5 $\frac{km}{ora}$ allo scopo di calcolare un tempo di percorrenza più vicino a quello impiegato da un escursionista mediamente allenato.

$$T_p = \frac{D_p}{V_p}$$

dove T_p è il tempo di percorrenza del sentiero in piano in minuti;

D_p è la distanza totale in piano del sentiero in metri;

V_p è la velocità media stabilita in 3500 metri in 60 minuti cioè $\frac{3500 metri}{60 minuti} = 58{,}33\ \frac{metri}{minuti}$.

In definitiva:

$$T_s = \frac{\sum D_s}{V_s}\ ;\ T_d = \frac{\sum D_d}{V_d}\ ;\ T_p = \frac{\sum D_p}{V_p}$$

$$T_T = T_s + T_d + T_p = \frac{\sum D_s}{V_s} + \frac{\sum D_d}{V_d} + \frac{\sum D_p}{V_p}$$

dove T_T è il tempo di percorrenza totale del sentiero con tratti in salita, in discesa e in piano espresso in minuti.

Vediamo qualche esempio pratico.

Consideriamo il sentiero SCALA - S.MARIA AI MONTI, praticamente solo in salita e dove il dislivello in salita è di 656

metri e la velocità media da considerare è di $\frac{350 metri}{60 minuti}$ = 5,83 $\frac{metri}{minuti}$.

$$T_T = T_ş + T_đ + T_p = \frac{\sum D_ş}{V_ş} + \frac{\sum D_đ}{V_đ} + \frac{\sum D_p}{V_p}$$

$$T_đ = 0; \qquad T_p = 0$$

$$T_ş = \frac{\sum D_ş}{V_ş} \quad D_ş = 656\, metri \quad V_ş = 5{,}83\, metri/minuto$$

$$T_ş = \frac{656\, metri}{5{,}83 \frac{metri}{minuto}}$$ = 112 minuti = 1 ora e 52 minuti

Facciamo un altro esempio con dislivello solo in discesa. Stesso sentiero ma percorso al ritorno in discesa: S.MARIA AI MONTI – SCALA

$$T_T = T_ş + T_đ + T_p = \frac{\sum D_ş}{V_ş} + \frac{\sum D_đ}{V_đ} + \frac{\sum D_p}{V_p}$$

$$T_ş = 0; \qquad T_p = 0$$

$$D_đ = 656\, metri;$$

$$T_đ = \frac{D_đ}{V_đ} = \frac{656\, metri}{8{,}33 \frac{metri}{minuto}}$$ = 79 minuti = 1 ora 19 minuti

Facciamo infine un esempio in cui vi sono tratti sia in salita che in discesa e in piano.

Il sentiero è S.MARIA AI MONTI – BIVIO ACQUE DELLE SCORCHIE che ha una lunghezza complessiva di 10.126 metri, un dislivello in salita complessivo di 478 metri, un dislivello in discesa complessivo di 200 metri e tratti in piano per complessivi 6.896 metri. Questi dati sono stati ricavati caricando la traccia in formato gpx del sentiero, rilevata con

un GPS Garmin Montana, su una base topografica dell'IGM scala 1:25.000.

Quindi:

$$T_T = \frac{\sum D_s}{V_s} + \frac{\sum D_d}{V_d} + \frac{\sum D_p}{V_p} = \frac{478\ metri}{5{,}83\frac{metri}{minuto}} + \frac{200\ metri}{8{,}33\frac{metri}{minuto}} + \frac{6896\ metri}{58{,}33\frac{metri}{minuto}} =$$

= 82 minuti + 24 minuti + 118 minuti = 224 minuti = 3 ore e 44 minuti.

Questi tempi di percorrenza sono stati verificati durante sopralluoghi e durante le numerose escursioni effettuate dai volontari dei gruppi di lavoro delle due sezioni del CAI di Castellammare di Stabia e di Napoli che si interessano di sentieristica. I dati utilizzati per la statistica si riferiscono agli anni dal 2006 al 2019 per la sezione CAI di Castellammare di Stabia e dal 2022 al 2024 per la sezione CAI di Napoli. Possiamo senz'altro affermare che i tempi di percorrenza calcolati teoricamente si avvicinano molto ai tempi di percorrenza rilevati durante le escursioni. Ovviamente si tratta di tempi effettivi, cioè senza considerare i tempi impiegati per le necessarie soste del gruppo, e dipendenti, sicuramente, anche dalle condizioni meteorologiche, stagionali e omogeneità del gruppo.

In ogni caso LA PERCORRENZA TEORICA INDICATA SULLE SEGNALETICA VERTICALE posta sui sentieri va presa come un'indicazione media; quella effettiva dipende, oltre che dai parametri suddetti anche dall'età degli escursionisti e dalla loro preparazione fisica.

5 - Conclusioni

Andare piano per sentieri di montagna permette di osservare e di godere la natura che la fretta non concede.

Riconoscere le forme del Paesaggio significa leggerne la Storia e gli agenti morfogenetici che lo modificano sotto i nostri occhi. Così un'escursione in montagna può essere l'occasione per conoscere meglio l'ambiente che attraversiamo. Purtroppo, negli ultimi tempi, la pressione antropica è diventata un agente morfogenetico importante. Sicuramente le numerose alluvioni che colpiscono tanti territori hanno, in molti casi, un'origine dovuta alle attività dell'uomo che, spesso, rompe il delicato equilibrio del paesaggio naturale.

Il Cammino dell'Angelo di Monte Faito ha un impatto importante sul territorio dei Monti Lattari per la valorizzazione della zona e delle comunità locali. Apporta benefici per il turismo sostenibile e ben rappresenta un esempio di paesaggio tra fede e tradizioni. I suoi sentieri collegano a raggiera i 32 paesi della Penisola Sorrentina e Costiera Amalfitana, patrimonio dell'Unesco. Percorrendolo i volontari del Club Alpino Italiano appartenenti alle sezioni CAI di Napoli e Castellammare di Stabia hanno costituito una banca di dati statistici per verificare un metodo matematico che potesse permettere il calcolo teorico dei tempi di percorrenza dei sentieri in modo diretto secondo quanto suggerito dalla Commissione Escursionistica Nazionale del Club Alpino Italiano.

Bibliografia

Sgrosso I. (1983). Alcuni dati sulla possibile presenza di una quarta piattaforma carbonatica nell'Appennino centro-meridionale, *Rend. Soc. Geol. It., 6; 31-34*.

Roggero D. et al. (2019). Carta dei Sentieri dei Monti Lattari, della Penisola Sorrentina, Costiera Amalfitana e Isola di Capri, *www.caimontilattari.it.*

Brancaccio L. et al. (1979). Prospettive geotermiche e assetto strutturale dell'Appennino meridionale (Campania a Basilicata), *Comm. Comun. Europ. Dir. Generale Ric. Scient. Ed Educ. Progr. Energia Geoter. 59 pp.*

Iannace A. (2024). Appennino meridionale *www.distar.unina.it/it/appennino-meridionale*

Cinque A. (2006). Breve storia geologica dei monti lattari, *wordpress.com/2006-04-27.*

Brancaccio L.& Cinque A. (1988). L'Evoluzione geomorfologica dell'Appennino Campano-Lucano, *Relazioni al 74° Congresso della Soc.Geol.It., 45-48.*

Sezione di Ortona del CAI (2025). Andare in montagna sei-regole per l'escursionista responsabile, *www.caiortona.it.*

Club Alpino Italiano (2010). *Quaderno di escursionismo n.1 – Sentieri: Pianificazione, Segnaletica e Manutenzione – 4^ ed..*

GUIDO TONELLI
Tempo
Il sogno di uccidere *Chrónos*
UNIVERSALE
ECONOMICA
FELTRINELLI / SAGGI

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 93-112

Un viaggio tra le stelle... in compagnia di Ipazia: un'opportunità per un percorso interdisciplinare

Daniela Tossini*

* Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor Vergata, Italia, tossini@axp.mat.uniroma2.it

Sunto:*In questo lavoro si mostra un'attività didattica interdisciplinare svolta in una classe prima della scuola secondaria di I grado italiana, grado 6. L'attività ha al centro la figura di Ipazia, come modello di donna scienziata. Lo studio della sua vita e dei suoi contributi scientifici è spunto per laboratori interdisciplinari innovativi che coinvolgono varie discipline arricchendosi reciprocamente.*

Il laboratorio ha spinto gli alunni a lavorare in maniera indipendente, utilizzando linguaggi espressivi differenti: storytelling, lettere e integrando con il linguaggio di programmazione Scratch, così da potenziare le capacità espressive di ognuno in manierainclusiva. L'obiettivo è lo studio delle stelle e delle costellazioni, unito allo studio delle donne nelle scienze.

Parole Chiave: *Ipazia, parità di genere, scratch, storytelling, STEM*

Abstract: *I present an interdisciplinary teaching activity carried out in an Italian first-year middle school class (grade 6). The proposed activity focuses on the figure of Hypatia, who is presented as a model of a female scientist. The study of her life and scientific contributions launches innovative interdisciplinary workshops that involve and enrich various subjects.*

The fundamental guide for this project is to give students space to work firsthand, using different expressive languages such as storytelling, letters, and including programming in Scratch, to enhance each student's expressive skills with a focus on inclusion. The final goal is the study of stars and constellations, combined with the study of women in science.

Keywords*:Hypatia, gender equality, scratch, storytelling, STEM.*

1 –Introduzione

Ipazia è stata la musa ispiratrice per la realizzazione di una proposta formativa che ha integrato armonicamente diversi ambiti disciplinari.

Lo studio delle figure femminili nelle scienze è un importante strumento che i docenti hanno per stimolare riflessioninei loro studenti,sia su specifici temi scientifici sia sulla parità di genere, sfruttando la didattica laboratoriale ed il lavoro tra pari.

L'idea di questo percorso nasce da un corso, InnovaMentiSTEM, proposto dal Ministero dell'Istruzione e del Merito (MIM) su Scuola Futura, a cura della équipe formativa territoriale. Il corso ha un'impostazione prettamente operativa, ed è rivolto a docenti di ogni ordine e grado: intende fornire spunti e idee per organizzare una speciale lezione STEM (Science, Technology, Engineering e Mathematics) dedicata a tutti, ma pensata in particolare per ispirare le ragazze ad intraprendere studi e carriere scientifiche. Naturalmente la proposta didattica si presta ad essere articolata e adattata dai docenti al proprio contesto scolastico.

La costruzione di questo percorso prende spunto dalla vita di una donna scienziata che diviene il punto di partenza per la progettazione di una lezione aperta e interattiva. Nel caso qui presentatola musa ispiratrice è Ipazia: matematica, astronoma e filosofa greca. La scienziata ha creato una scuola molto famosa nel IV/V secolo d.C. e dimostrato una grande passione per i corpi celesti. Ipazia, infatti, è famosa per la costruzione di un nuovo modello di astrolabio che veniva usato per localizzare la posizione delle stelle e le fasi dello zodiaco. Il fascino della sua vita modello di libertà e passione per lo studio, nonché lasua tragica fine rendono la figura di questa scienziata una esortazionea un maggior coinvolgimento delle donne nelle scienze.

Il percorso proposto è scandito da tre momenti integrati tra loro:

- StorytellingSTEM: una breve narrazione dei momenti salienti della vita della scienziata;
- LabSTEM: realizzazione di una attività laboratoriale, ispirata al lavoro di ricerca della scienziata;
- "Cara Scienziata, ti scrivo": un momento conclusivo di riflessione, proposto come un ideale scambio di messaggi con la scienziata.

Tale lavoro è stato poi condiviso in rete tramite"InnovamentiSTEM". (ScuolaFutura, 2022).

1.1 – Coerenza con le Indicazioni del MIM e della Comunità Europea

Anche se quando questo percorso è stato progettato e realizzato erano in vigore le precedenti Indicazioni Nazionali, le basi di quest'idea progettualesi ritrovano anche nelle recenti

Indicazioni Nazionali e il progetto recepisce anche le indicazioni relative alle materie STEM (MIUR, 2012, e MIM, 2023, 2024, 2025) equelle provenienti dalla Comunità Europea. (Vuorikari et all. 2022).Ad esempio, un punto cardine èlo spirito di una visione culturale integratadegli ambiti umanistico, matematico-scientifico e tecnologico.

La parità di genere è un tema centrale, ed è stato affrontato, facendo studiare la storia di Ipazia e di altre scienziate che hanno dato un contributo significativo al progresso scientifico. (MIM, 2024)

Inoltre, il progetto sottolinea l'importanza del "Potenziamento di una didattica basata su esperimenti e attività laboratoriali" e la "la creazione di un contesto in cui gli alunni siano i soggetti centrali di ogni azione culturale e la creazione di un contesto laboratoriale che attiva processi cognitivi quali la riflessionerealizzato in un contesto laboratoriale, attiva processi cognitivi quali la riflessione, la generalizzazione, l'argomentazione e la giustificazione, stimolando una comprensione profonda dei concetti e una ridefinizione dell'idea di errore; lungi dall'essere un semplice segnale di insuccesso o di lacuna, l'errore emerge come un componente intrinseco e ineludibile del processo scientifico stesso." (MIM, 2025)

La proposta laboratoriale recepisce anche l'idea che la conoscenza matematico-scientifica possa diventare un elemento fondamentale per una cittadinanza attiva.

In linea anche con le indicazioni nazionali per le materie STEM (MIM 2023), si ècercato di proporre in classe delle sinergie nell'ambito delle competenze, conosciute come le 4C: Critical thinking (pensiero critico); Communication

(comunicazione); Collaboration (collaborazione) e Creativity (creatività), potenziate da un approccio integrato STEM.

Infine, si è scelto di lavorare con un approccio transdisciplinare, integrando le varie forme di linguaggio ed utilizzando supporti digitali (MIM, 2023), facendo svolgere ricerche bibliografiche in rete per recepire la necessità di creare delle basi delle regole fondamentali per un utilizzo sicuro e responsabile della relativa tecnologia, come consigliato dalla Raccomandazione C/2024/1030 del Consiglio dell'Unione Europea del novembre 2023 (CE, 2023). Così si è cercato di lavorare su tutte le competenze chiave di cittadinanza per favorire il pieno sviluppo della persona (MPI, 2007)

2 –Il progetto didattico

Il percorso didattico riportato è stato proposto ad una classe prima della scuola secondaria di I grado italiana, grado 6, ma può essere facilmente adattato ad altre classi e ad altri ordini di scuola.La proposta ha naturalmente un impatto maggiore se combinata con altri progettiincentrati sulla parità di genere, presentando esempi di donne importanti nello sviluppo anche di altri settori disciplinarie se associataad altri laboratori di astronomia e associati a proposte che sviluppino capacità di storytelling ed espressione narrativa.

Tutto il progetto ha natura strettamente laboratoriale, metodologia didattica ampiamente valorizzata. (Dedò& Di Sieno, 2013)

2.1 – Struttura del percorso didattico

La classe in cui è stato proposto questo percorso è la IA,composta da 21 alunni, dell'Istituto Falcone e Borsellino di Roma, alla fine dell'a.s. 2022-23. Tutto il percorso si è svolto in orario curriculare in cui le docenti di Matematica e Italiano hanno svolto le attività separatamente, escluso parte dei laboratori con l'uso di Scratch, ma integrando le conoscenze tramite un dettagliato lavoro di condivisione e progettazione iniziale di tutte le fasi dei laboratori proposti. Tutto il percorso è stato supportato dalla presenza di un insegnante di sostegno e dell'OEPAC (Operatore Educativo per l'Autonomia e la Comunicazione), vista la natura strettamente inclusiva delle attività proposte.

2.2– Obiettivi del percorso didattico

Lo scopo di questo percorso è stato quello di far riflettere gli alunni sull'importanza delle donne nelle scienze tramite lo studio della vita di Ipazia e di integrare questa proposta con diverse attività laboratoriali mirate. Si è cercato così di ispirare e di sostenere negli alunni la scelta di un percorso di studi scientifici, specialmente nelle studentesse, cercando di ridurre il gender gap che in questo campo è ancora è elevato.A questo si sono affiancati obiettivi più strettamente disciplinari, come lo studio delle stelle e delle costellazioni, il linguaggio del racconto nello storytelling e stili linguistici nelle lettere formali ed informali.

3 – Attività 1: Storytelling

La prima attività proposta è quella di studiare ed approfondire la travagliata ma affascinante vita e le ricerche scientifiche di Ipazia. Gli alunni, divisi in gruppi non omogenei di 3-4 alunni, tramite l'uso consapevole delle fonti informatiche e la lettura di un fumetto (SUSPI 2023) hanno scoperto le vicende di questa scienziata.Si è scelto di far lavorare i ragazziin gruppo,assegnando dei ruoli (es. il verbalizzatore, l'oratore) e attivando il cooperative learning (Ellerani& Pavan, 2003), così da stimolare il lavoro tra pari e stimolare l'attiva partecipazione di ciascuno.

Ogni gruppo ha riportato le informazioni principali trovate in un quaderno, diario di bordo, che ha poi condiviso con il resto della classe tramite il proprio portavoce.

Le tappe fondamentali della vita di Ipazia e delle sue ricerche sono state riportate su un cartellone (Figura 1), con il testo inserito all'interno di stelle, un richiamo al modello di astrolabio da lei sviluppato per determinare la posizione delle stelle e le fasi dello zodiaco.

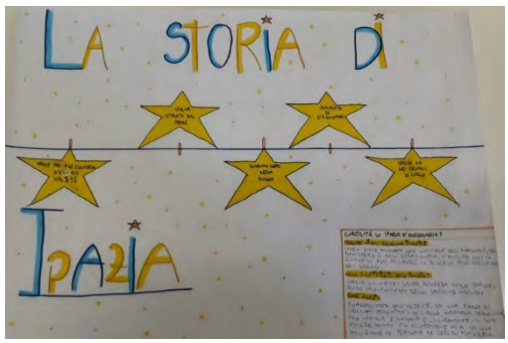


Figura 1.Cartellone con la linea del tempo della vita di Ipazia e curiosità.

Sul cartellone sono riportate anche alcune curiosità.Dopo questa fase di condivisione delle informazioni, la classe ha affrontato un dibattito relativo alla parità di genere in diversi ambiti, tra cui quello scientifico. Tale argomento, molto attuale e che rientra nelle tematiche di educazione civica, ha coinvolto tutto il gruppo classe in un confronto partecipato e costruttivo.

3.1 – Osservazioni

Nessuno degli alunni conosceva la figura storica di Ipazia prima di questo percorso.

Tutti gli alunni hanno lavorato dimostrando buone capacità di organizzazione e di reperimento delle informazioni su internet. Tutti hanno apprezzato la lettura del fumetto, forse un linguaggio comunicativo più vicino alla loro fascia di età. Il lavoro di gruppo ha stimolato in ogni alunno l'uso delle proprie abilità personali, innescando una collaborazione costruttiva tra i diversi componenti del gruppo stesso in uno spirito di cooperazione.

4 – Attività 2: Scratch

Durante il percorso abbiamo ritenuto fosse interessante proporre un linguaggio innovativo. Per questo abbiamo deciso di avvicinare i ragazzi alla programmazione utilizzando Scratch, un linguaggio di programmazione visuale a blocchi, sviluppato dal MIT Media Lab, (Laboratorio di ricerca del Massachusetts Institute of Technology) e progettato specificatamente per avvicinare i bambini e i principianti al mondo della programmazione (Scratch

versione 1.4 https://scratch.mit.edu).Tale scelta è stata motivata dalla facilità di utilizzo: basta trascinare e rilasciare dei blocchi colorati, che rappresentano le istruzioni di codice, per sviluppare un programma permettendo agli utenti di creare storie, giochi, animazioni, ecc. Inoltre, la gratuità del software e la possibilità di utilizzo da remoto rende il suo utilizzo adatto al trasferimento nelle scuole.

Tramite questo linguaggio di programmazione abbiamo proposto lo sviluppo di una componente digitale del progetto, creata dai ragazzi, che si avvale di un approccio interdisciplinare anche nell'ambito della comunicazione.

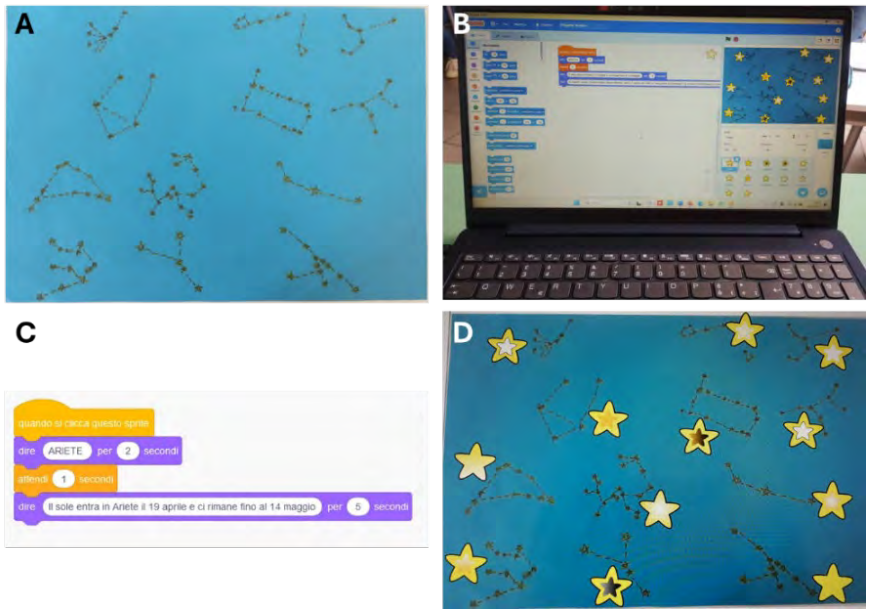


Figura 2.(A) Sfondo con le costellazioni. (B) Immagine di una fase della programmazione. (C) particolare della programmazione a blocchi. (D) Gli Sprite a forma di stella vengono aggiunti allo sfondo.

4.1 – La metodologia / punti salienti del percorso

I ragazzi, seguendo i suggerimenti dell'astrolabio di Ipazia, hanno studiato le stelle, disegnato le costellazioni e prodotto immagini che sono state utilizzate come sfondo per il software che hanno creato loro stessi utilizzando Scratch (Figura 2A).

In questo caso si è preferito creare gruppi più piccoli, da due alunni, ed è stato dato ad ogni gruppo un computer su cui lavorare. Dopo aver fornito le indicazioni per scaricare il programma è stata fornita una spiegazione sulle funzioni base di Scratch così da renderli autonomi nella programmazione.

I ragazzi hanno potuto caricare lo sfondo da loro realizzato e lavorare sul software Scratch (Figura 2B e C), definendo zone attive dello schermo (Sprite) e cosa succede se uno di questi Sprite veniva selezionato. Infatti, ogni gruppo ha inserito vicino ad ogni costellazione uno Sprite a forma di stella, differente per ogni costellazione (Figura 2D). Cliccando su ognuno di questi 12 Sprite, si attiva una voce narrante (Figura 3A e B). Ogni narrazione inizia con il nome della costellazione, quindi presenta una scienziata nata sotto quel segno, il periodo storico in cui è vissuta ed il contributo che ha dato alla conoscenza; quindi, il motivo per cui è ricordata ancora oggi (Figura 3C).

Il testo delle diverse narrazioni è il frutto del lavoro di ogni gruppo che ha studiato una costellazione, trovando il periodo dell'anno a cui è associato il rispettivo segno zodiacale, cercando informazioni sulla corrispondente scienziata. Ciascun gruppo ha presentato il proprio contributo al resto della classe e prodotto l'ipertesto che poi è stato inserito da tutti sul proprio lavoro.

Figura 3. (A) e (B)Selezionando uno Sprite appaiono e vengono riprodotte informazioni su una scienziata.(C) Ad ogni costellazione è associata una scienziata.

4.2 – Osservazioni

Seppur assidui utilizzatori del computer nessuno degli alunni conosceva Scratch prima di questo percorso.

Tutti gli studenti hanno lavorato con interesse ed entusiasmo dimostrando buone capacità informatiche di base e hanno apprezzato l'utilizzo del computer e la facilità della programmazione a blocchi. Il lavoro a coppie ha reso possibile l'utilizzo del computer da parte di ciascuno e, contemporaneamente, la possibilità di una collaborazione tra pari. L'aver poi condiviso sia la ricerca che le informazioni

sullescienziate di cui si doveva creare il profilo da mettere sugli Sprite ha reso attrattiva quella parte di lavoro.

Non sono mancati momenti di attrito tra chi ha più dimestichezza con i supporti informatici e chi si stava approcciando a questa tecnologia per la prima volta.La presenza discreta ma vigile del docente curriculare e di quello di sostegno, oltre alla figura dell'OEPAC, ha reso più facile il lavoro di guida: una figura che non fornisce la strategia risolutiva ma che stimola a condividere le abilità personali e la collaborazione in una strategia di prove ed errori.

Sebbene la gestione dei docenti sia stata fondamentale, in prospettiva futura si potrebbe strutturare una fase preliminare mirata, creando delle "coppie tutorial" in cui gli studenti più esperti guidano i compagni alle prime armi in esercizi base, per livellare le competenze di partenza e rafforzare ulteriormente la collaborazione tra pari.

5 – Attività 3: Cara scienziata, ti scrivo

Questa attività vuole essere un momento conclusivo di riflessione collettiva e si basa sull'idea di poter comunicare con Ipazia. Sono state quindi proposte forme di comunicazione differenti: la comunicazione tramite lettera collettiva e personale.

La lettera collettiva ha permesso, in modo condiviso, di offrire uno spazio a tutti gli studenti per una narrazione dettagliata del lavoro svolto e l'esposizione dell'esperienza vissuta.

La lettera del singolo alunno, più personale essendo un lavoro individuale, è stata una forma molto potente ed

efficace, per esprimere emozioni e sentimenti in modo profondo.

5.1 – La metodologia / punti salienti del percorso

Si è dato ai ragazzi il compito di immaginare di poter comunicare con la scienziata e di produrre quindi un dialogo con lei. I ragazzi hanno scelto di scrivere una lettera aperta ad Ipazia entrando così in confidenza con lei e con il suo mondo. (Figura 4A) Per svolgere questa attività si è sfruttato l'uso di file di scrittura condivisi per permettere ai ragazzi di apprendere un modo innovativo di lavorare in gruppo.

Uno di loro, esprimendo spiccata creatività, si è cimentato anche nel redigerne una individuale. (Figura 4B).

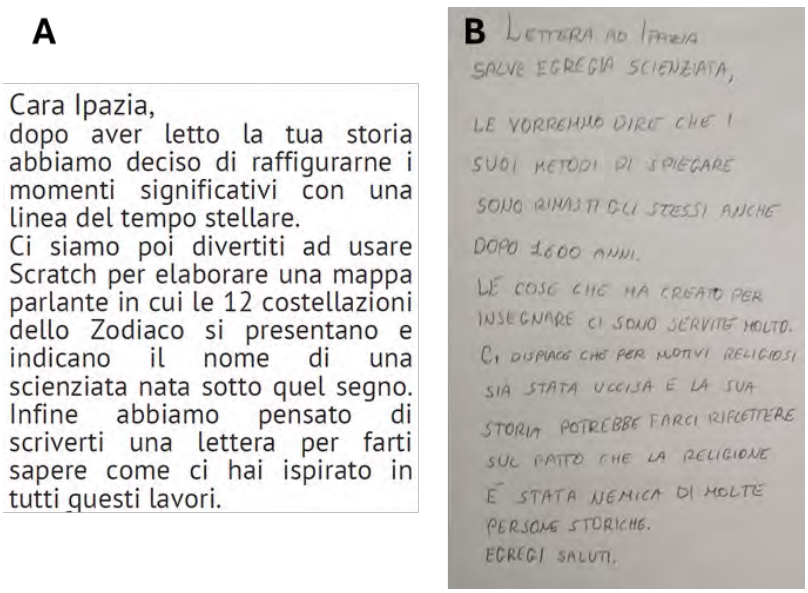


Figura 4. Lettera collettiva (A) e un esempio di lettera individuale (B) scritta dagli studenti a Ipazia.

5.2 – Osservazioni

Questo laboratorio più strettamente linguistico ha dato modo di rivedere e riflettere sulle differenti forme di comunicazione esaltandone i pregi ed individuandone i limiti.

I ragazzi hanno motivato la scelta di redigere una lettera, come forma di comunicazione condivisa, poiché era per loro una forma ed uno strumento versatile, che gli permetteva anche l'utilizzo di un linguaggio informale nel quale si sono sentiti più a loro agio. Hanno così raccontato e condiviso con la figura di Ipazia la loro esperienza, dimostrando affetto per una donna di cui non conoscevano i trascorsi e che hanno imparato ad apprezzare come persona e come scienziata.

L'approccio comunicativo che ha coinvolto tutti gli alunniha creato situazioni autentiche e ha permesso di attivare strategie utili, oltre che al raggiungimento dello scopo prefissato, anche per consentire una eccellente comunicazione tra i ragazzi.

6 – Metodi per la valutazione

La valutazione deve accompagnare ogni fase dei processi di apprendimento e deve essere di stimolo al miglioramento continuo degli apprendimenti e al successo formativo degli stessi. In particolar modo, nell'ambito di un laboratorio didattico come quello proposto, la valutazione dei risultati ottenuti necessita di un cambiamento di prospettiva, che assume in questo caso una preminente funzione formativa educativa. (Dedò& Di Sieno, 2013) Anche la progettazione iniziale del percorso proposto deve essere aperta a variazioni

in itinere, che il docente può dover effettuare per calibrare le attività sui bisogni degli alunni, così come emergono di momento in momento.Si è sviluppato quindi un percorso di valutazione condiviso con la classe, che ha posto l'attenzione sul percorso del singolo alunno, determinato dalle attività e scelte del singolo, finalizzate agli obiettivi preposti.

La valutazione degli studenti ha assunto un carattere essenzialmente formativo: in ogni momento del percorso il docente ha utilizzato i risultati delle verifiche in senso propositivo, fornendo a ogni studente un feedback continuativo sul livello raggiunto. Per far questo sono stati predisposti ed utilizzati vari strumenti ognuno focalizzato e riproposto in ognuna delle fasi del percorso. Nello specifico, si è creata una Rubrica di processo e una Rubrica di prodotto e osservazioni in itinere a cura del docente (Figura 5).

Un metodo importante per giungere ad una comprensione condivisa del percorso fatto è lo sviluppo e la promozione della

Osservazioni in itinere

Nome alunno:													
Ha chiaro come procedere													
Chiede aiuto													
E' concentrato sul lavoro													
Necessita richiami													
Si confronta positivamente con i compagni													
Rispetta il suo ruolo nel gruppo													
Controlla le fasi del lavoro													
Completa il lavoro nei tempi													

0: Per nulla	1: Poco	2: Abbastanza	3: Molto	4: Moltissimo

Figura 5. Esempio di strumento utilizzato dal docente per eseguire una valutazione dei risultati raggiunti.

autovalutazione di ciascun alunno in relazione alle acquisizioni di conoscenze, abilità e competenze, come oramai ampiamente indicato dal MIM. (Figura 6)

Alunno/a: _____ Classe: _____ Data: _____

Storytelling

Metti una crocetta per ogni domanda	Per nulla	Poco	Abbastanza	Molto	Moltissimo
L'attività mi è piaciuta					
Ho partecipato al lavoro					
Ho collaborato nel gruppo					
Mi sono impegnato					
Sono soddisfatto del percorso					

Figura 6. Scheda di feedback in itinere a cura dell'alunno (Esempio di scheda sull'attività di Storytelling).

Inoltre, la valutazione non riguarda più solo lo studente, bensì anche l'azione didattica dell'insegnante e la progettazione del percorso, considerando il processo di insegnamento/apprendimento una costruzione dei saperi teorico-pratici (sapere e saper fare), frutto di condivisione e riflesso di complesse dinamiche.

7 – Conclusioni

Ipazia è stata lo spunto per riflettere sulla parità di genere e per realizzare un percorso laboratoriale innovativo interdisciplinare realizzato con approcci comunicativi differenti.

L'entusiasmo e l'interesse dimostrato dai ragazzi in tutte le fasi proposte, sottolinea l'importanza di una didattica interdisciplinare centrata sull'alunno. L'utilizzo di forme comunicative differenti ha permesso ad ogni ragazzo di

trovare la forma espressiva a lui più consona, attirando così l'interesse e la partecipazione di tutti.

L'organizzazione del lavoro in classe in modalità laboratoriale ha rotto col modello della lezione frontale unidirezionale, per aprirsi a possibilità molteplici che consentono un flusso circolaredi conoscenze e di comunicazione. Il lavoro di gruppo, i momenti di condivisione, l'uso del computer, le attività di autoapprendimento impongono una diversa strutturazione, gestione e fruizione degli spazi; la scansione dei tempi diventa più flessibile, in modo da assecondare i diversi ritmi di apprendimento degli alunni e le esigenze che emergono durante le varie attività. Anche l'introduzione di Scratch non è fine a sé stessa, ma serve a consolidare le conoscenze acquisite in modo creativo e interattivo.

Tutto questo ha richiesto una enorme sinergia e capacità organizzative tra i docenti artefici di tale percorso.

Il lavoro ha anche portato ad una condivisione in rete tramite pubblicazione all'interno di una mappatura nazionale e questo è stato di stimolo e gratificazione per l'intero gruppo classe.

8 – Possibili sviluppi della proposta laboratoriale

Come possibile ampliamento di questa proposta laboratoriale,diversi approfondimenti tematici sono stati previsti, con l'obiettivo di stimolare il percorso interdisciplinare, allargando la proposta laboratoriale anche ad altre discipline.

Questo laboratorio si è focalizzato sulla figura di Ipazia come matematica, astronoma e filosofa. Si è pensato di dedicare uno spazio maggiore al suo ruolo di filosofa e al contesto storico-culturale della Alessandria del IV-V secolo d.C. Questo apre a un'ulteriore collaborazione con l'insegnante di Storia, analizzando le tensioni religiose e culturali dell'epoca che portarono alla sua tragica fine, come accennato in una delle lettere degli studenti.

Ipazia è anche nota per i suoi studi sulle sezioni coniche, ovvero le curve generate dall'intersezione di un piano con un cono. Sebbene non si abbiano prove dirette che abbia scoperto nuove proprietà delle coniche, è certo che abbia insegnato e commentato le opere di Euclide e Apollonio di Perga, che avevano ampiamente trattato l'argomento. Le sue intuizioni, basate sull'analisi delle coniche, potrebbero aver influenzato la teoria eliocentrica, che descrive il movimento dei pianeti attorno al Sole, anche se non ci sono prove che lei stessa abbia sviluppato tale teoria. In quest'ambito, si prevede di estendere la ricerca sull'opera di questa poliedrica scienziata introducendo queste figure geometriche e la loro importanza in diversi ambiti scientifici/astronomici.

Dopo aver studiato le 12 scienziate associate alle costellazioni, una estensione naturale è la proposizione ai ragazzi una ricerca su scienziate contemporanee, possibilmente italiane, che lavorano in ambito astronomico o in altri campi STEM. Questo rende il tema della parità di genere ancora più concreto e tangibile.

In aggiunta alla mappatura nazionale online, in cui il risultato di questo percorso è già stato presentato, una possibile valorizzazione del lavoro dei ragazzi passa per

l'organizzazione di un evento di presentazione finale aperto ai genitori, ad altre classi dell'istituto ed al territorio. Questo non solo gratificherebbe gli studenti, ma darebbe anche maggiore risonanza al progetto e ai suoi importanti messaggi, sociali.

Ringraziamenti

Si ringraziano gli alunni della 1A dell'I.C. Falcone e Borsellino, la docente Chiara Fabrini e tutti coloro che hanno reso possibile tale percorso didattico. Si ringrazia per il supporto finanziario il progetto Dipartimenti di Eccellenza MatMod@TOV (2023-27), assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma Tor Vergata.

Bibliografia e sitografia

CE (2023) Raccomandazione del Consiglio, del 23 novembre 2023, sul miglioramento dell'offerta di abilità e competenze digitali nell'istruzione e nella formazionehttps://eur-lex.europa.eu/eli/C/2024/1030/oj

Dedò, Maria, and Di Sieno, Simonetta, (2013) "The Mathematics Laboratory: An Outline of Contents and Methodologies." *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 6.2 (2013): 321-342.

MIUR (2012), Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione:https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Ministero Pubblica Istruzione (2027) Competenze chiave di cittadinanza da acquisire al termine dell'istruzione obbligatoria competenze chiave di cittadinanza, allegato 2https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all2_dm139new.pdf

MIM (2023) Linee guida per le discipline STEM https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/linee_guida_stem-stampa.pdf

MIM (2024) Linee guida per l'insegnamento dell'Educazione Civica (D.M. n. 183 del 7 settembre 2024)https://www.mim.gov.it/documents/20182/0/Linee+guida+Educazione+civica.pdf

MIM (2025)Indicazioni Nazionali per il curricolo Scuola dell'infanzia e Scuole del Primo ciclo di istruzionehttps://www.mim.gov.it/documents/20182/0/INDICAZIONI_NAZIONALI_7_7_2025.pdf

Pavan, D. eEllerani, P. *Cooperative Learning: una proposta per l'orientamento formativo*. Edito da Tecnodid, 2003.

Scuola Futura (2023). InnovaMentiSTEM, Id percorso: 116004.

SUSPI. (2021) I fumetti matematici: Ipazia. Disponibile da https://www.matematicando.supsi.ch/risorse-didattiche/ipazia-v-sec.

Vuorikari, R., Kluzer, S. and Punie, Y., (2022) DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens - With new examples of knowledge, skills and attitudes, EUR 31006 EN, Publications Office of the European Union, Luxembourg, 2022*, ISBN 978-92-76-48882-8, doi:10.2760/115376, JRC128415*

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 113-130

Le mandrie di Archimede

Un'occasione per parlare di equazioni diofantee

Enrico D'Amora*

*Università degli studi di Salerno, Salerno;
enricochiara4@gmail.com

Sunto:*Le equazioni diofantee, così chiamate in onore di Diofanto di Alessandria, sono equazioni che ammettono soluzioni intere o razionali e rappresentano un tema centrale della Teoria dei Numeri. Già note in India dall'VIII secolo a.C., furono studiate da matematici come Baudhāyana, Aryabhata e Brahmagupta, che affrontarono casi complessi e introdussero metodi risolutivi. L'opera di Diofanto, l'Arithmetica, della quale ci sono pervenuti solo sei libri, consiste in una raccolta di 150 problemi, tutti formulati in termini di esempi numerici specifici, anche se intendevano esemplificare un metodo generale. La sua riscoperta da parte di Pierre de Fermat nel Seicento, diede luce ad una serie di risultati, tra cui l'enunciato dell'Ultimo Teorema di Fermat.*

Tra le più famose equazioni diofantee, vi è l'equazione di Pell: $x^2 - dy^2 = 1$, *con d numero intero. Tale equazione può essere risolta con diverse tecniche della Teoria dei Numeri, in particolare con l'utilizzo delle frazioni continue.*

La più curiosa delle citazioni riguardanti l'equazione di Pell avviene nel cosiddetto problema del bestiame, un manoscritto greco scoperto dal filosofo Gotthold Ephraim Lessing, che nel 1769 fu nominato bibliotecario della Biblioteca Herzog August a Wolfenbüttel, in Germania. Ad oggi, la poesia è attribuita ad Archimede e, come vedremo, risolvere il problema non è semplice, poiché il problema si riduce ad una equazione di Pell di difficile risoluzione.

Parole Chiave*: Equazioni diofantee, problema del bestiame, frazioni continue.*

Abstract: *Diophantine equations, named in honor of Diophantus of Alexandria, are equations that admit integer or rational solutions and represent a central theme in Number Theory. Already known in India as early as the 8th century BCE, they were studied by mathematicians such as Baudhāyana, Aryabhata, and Brahmagupta, who tackled complex cases and introduced solution methods. Diophantus' work, the Arithmetica, of which only six books have survived, consists of a collection of 150 problems, all presented through specific numerical examples, though they were intended to illustrate general methods. Its rediscovery by Pierre de Fermat in the 17th century led to a series of important results, including the formulation of Fermat's Last Theorem.*

Among the most famous Diophantine equations is Pell's equation: $x^2 - dy^2 = 1$, *where d is an integer. This equation can be solved using various techniques from Number Theory, particularly continued fractions.*

One of the most curious references to Pell's equation appears in the so-called Cattle Problem, a Greek manuscript discovered by the philosopher Gotthold Ephraim Lessing, who in 1769 was appointed librarian of the Herzog August Library in Wolfenbüttel, Germany. Today, the poem is attributed to Archimedes and, as we shall see, solving the problem is far from simple, as it reduces to a particularly difficult case of Pell's equation.

Keywords:*Diophantine equations, Cattle Problem, continued fraction.*

1 –Introduzione storica alle equazioni diofantee

Le equazioni diofantee, intitolate così in onore del matematico greco Diofanto di Alessandria (200-300), rappresentano uno dei temi più affascinanti della Teoria dei Numeri.

Queste equazioni, che richiedono soluzioni intere o razionali, hanno stimolato la mente dei matematici per secoli, portando a sviluppi significativi non solo nella teoria dei numeri, ma anche in campi apparentemente distanti come la crittografia e la teoria delle informazioni.

Come possiamo leggere da [3], la storia delle equazioni diofantee inizia molto prima di Diofanto, con le prime notizie di problemi simili che si trovano in India, a partiredall'800a.C. fino al Medioevo. Matematici come Baudhayana (800 a.C.) e Apastamba (510 a.C.-240 a.C.) lavorarono su equazioni che coinvolgevano fino a cinque incognite. Nel 500 d.C., Aryabhata (Assaka, 476-550) scrisse l'Aryabhatiya, che includeva un algoritmo per risolvere equazioni diofantee lineari. Nel VII secolo, Brahmagupta (598-668) investigò alcuni casi dell'equazione che più tardi divenne nota come equazione di Pell. L'opera di Diofanto, l'Arithmetica, della quale ci sono pervenuti solo sei libri, consiste in una raccolta di 150 problemi, tutti formulati in termini di esempi numerici specifici, anche se intendevano esemplificare un metodo generale. Non viene sviluppato alcun ragionamento partendo da postulati, né si tenta di trovare tutte le soluzioni possibili. Nel caso delle equazioni di secondo grado con due radici positive, viene fornita solo la radice maggiore, mentre le radici negative non vengono considerate. Non vi è distinzione tra problemi determinati e indeterminati; per questi ultimi, dove le soluzioni possono essere illimitate, viene presentata solo una soluzione. Diofanto risolveva problemi che comportavano parecchie incognite esprimendole tutte in funzione di un'unica.

La sua opera fu riscoperta da Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1601-1665) nel Seicento, il quale, studiando l'Arithmetica, fece una serie di scoperte, tra cui l'enunciato dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Nel XX secolo, il decimo problema di David Hilbert (Konigsberg, 1862-1943) chiedeva l'esistenza di un algoritmo

generale per la soluzione di un'equazione diofantea arbitraria. Nel 1970, Yuri Matijasevich (Leningrado, 1947) dimostrò che tale algoritmo non esiste, e in particolare provò che gli insiemi ricorsivamente enumerabili sono equivalenti agli insiemi diofantei.

2 –Frazioni continue ed equazioni diofantee quadratiche

In questa sezione presenteremo, in breve, le frazioni continue e alcuni risultati che serviranno in seguito.

Inoltre, verrà presentato un primo esempio di equazione diofantea quadratica, risolubile per via geometrica.

Definizione 1

Una frazione continua è una espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

dove gli a_i sono detti quozienti parziali.

In particolare, diremo che la frazione continua è finita se gli a_i sono in numero finito, e infinita se gli a_i sono in numero infinito.

Definizione 2

Se un numero α è tale che:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

allora il numero αsi dice valore della frazione continua.

Notazione

Per semplicità scriveremo le frazioni continue con l'espressione $[a_0, \dots, a_n]$.

Di seguito vediamo due risultati, che sono utili per i nostri scopi.

Proposizione 1

Sia α un numero razionale non negativo e sia $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Allora sono univocamente determinati un numero naturale n e una sequenza ordinata di numeri naturali $a_0, \dots, a_n$ con $a_n \geq 2$ tali che α sia il valore della frazione continua finita$[a_0, \dots, a_n]$. Viceversa, ogni sequenza ordinata di numeri naturali$a_0, \dots, a_n$ con $a_n \geq 2$ è associata ad un unico numero razionale non interoα avente come parte intera un numero naturalea_0 .

Proposizione 2

Sia α un numero irrazionale arbitrario e sia $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Allora è univocamente determinata la successione di numeri naturali $a_0, \dots, a_n, \dots$ tali che risulti: $\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots]$. Viceversa, ogni successione di numeri naturali $a_0, \dots, a_n, \dots$ è associata ad un unico numero irrazionale α avente come parte intera un numero naturale a_0.

Inoltre, serve specificare che se l'irrazionale è la radice di un naturale non quadrato perfetto, la sua espressione in frazione continua è periodica, cioè da un certo punto in poi i quozienti del periodo si ripetono all'infinito.

Definizione 3

Data una frazione continua finita qualsiasi α =$[a_0, \dots, a_n]$,ogni frazione continua c_m= $[a_0, \dots, a_m]$, con m ≤ n, si chiama convergente m-esima.

Essendo c_m il valore di una frazione continua finita, per la proposizione 1 esso è un numero razionale, diciamo$\frac{p_m}{q_m}$.

Dalle relazioni di Eulero-Wallis, abbiamo che:

- $p_m = a_m \cdot p_{m-1} + p_{m-2}$
- $q_m = a_m \cdot q_{m-1} + q_{m-2}$

con condizioni iniziali: $p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$ e $q_1 = 1$.

Esaminiamo adesso un problema semplice:

Trovare due numeri tali che il quadrato del primo meno il secondo dà come risultato 100.

Matematicamente possiamo riscriverlo nella seguente forma:

$$x^2 - y = 100,$$

da cui:

$$x^2 - 100 = y.$$

Questo tipo di problemi è interessante, poiché è possibile utilizzare un approcciografico.

Prendiamo x=11:

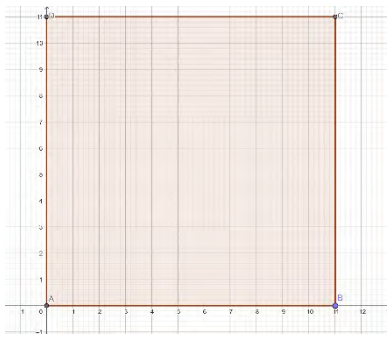


Fig.1-Quadrato di lato 11

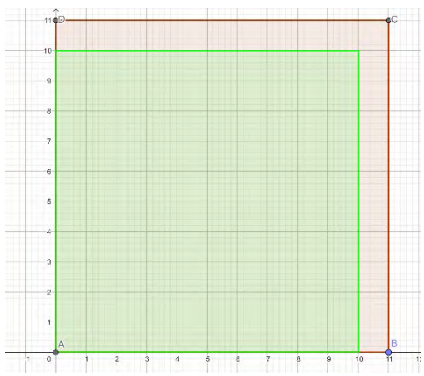


Fig.2-Quadrato di lato 11 (rosso) e di lato 10 (verde)

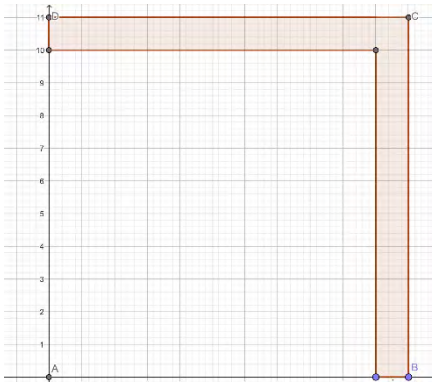


Fig.3-Differenza dei due quadrati

È semplice osservare che quindi questa equazione ha infinite soluzioni, a partire da x=10.

3– Equazione di Pell

L'ultimo esempio mostrato è un caso di equazione diofantea quadratica, di facile risoluzione. In generale, le equazioni quadratiche possono essere più o meno insidiose a seconda della tipologia.

Vediamo alcuniesempi:

- Equazione di Pell: $x^2 - dy^2 = 1$
- Equazione di Pell generalizzata: $x^2 - dy^2 = n$
- Forma quadratica: $ax^2 + bxy + cz^2 = m$
- Somma di quadrati :$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = t$

In questa sezione ci concentreremo principalmente sull'equazione di Pell [Vedi 4]. Vedremo in che modo trovare

le soluzioni (che sono infinite) e che legame c'è con il problema del bestiame.

Definizione 4

Data una equazione di Pell: $x^2 - dy^2 = 1$, chiameremo soluzione fondamentale la più piccola soluzione positiva.

Teorema 3

Sia d un intero positivo non quadrato perfetto e sia l la lunghezza del periodo dell'espressione in frazione continua di $\sqrt{d}$. Allora la soluzione fondamentale di $x^2 - dy^2 = 1$ è data da:

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p_{l-1}, q_{l-1}) sel \text{ è } pari \\ (p_{2l-1}, q_{2l-1}) sel \text{ è } dispari \end{cases}.$$

Teorema 4

Sia d un intero positivo non quadrato perfetto e sia (x_1, y_1) la soluzione fondamentale di $x^2 - dy^2 = 1$. Allora, tutte le sue soluzioni sono date da (x_n, y_n), dove

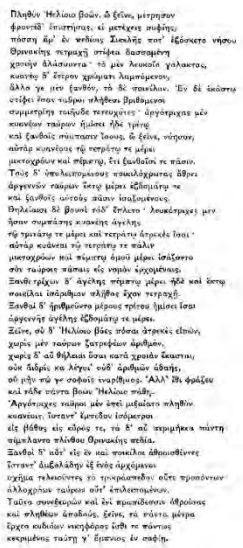
$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

3.1 –Problema del bestiame

Un' applicazione interessante dell'equazione di Pell la ritroviamo nel cosiddetto problema del bestiame (Vedi [2]).

Tale problema è una poesia greca, tradotta dal filosofo Lessing G. (Kamenz, 1729-1781) quando divenne bibliotecario della Biblioteca Herzog August a Wolfenbüttel, in Germania.

Il testo originale è il seguente:



Πληθὺν Ἡελίου βοῦν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίσας ἐπιστήμας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσσα ἄρ' ἐν κείνοις Σικελὴς ἔνεμ' ἐξόκετο νήσου
Θρινακίης πετραχῆ στίφεα δασαμένη
χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὰ μὲν λευκοῖα γαλάκτος,
κυανέα δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλα γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἓν δὲ ἑκάστοις
στίφεϊ ἦσον ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
σμμετρίῃ τοιήνδε τετυχότες· ἀργότριχες μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἦλθε τρίτῳ
καὶ ξανθοὺς σώστασαν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὖταρ κυανέους τῷ τετάρτῳ σε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθροι
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἐξδεκάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς ὠστοῦν πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τόδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετάρτῳ ἀτρεκὲς ἴσαι·
αὖταρ κυάνεαι τῷ πεντάτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ ἕκτῳ ἡμισυ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομένοις.
Ξανθαὶ τρίχες δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἦδε καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἐπάρθμων πλήθεϊ ἔχον τετραχῆ.
Ξανθαὶ δ' ἀριθμοῦντο μέρεσι τρίτοις ἡμίσει ἴσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑξδεκάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἡελίου βόας πόσσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ξυτρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρις κα λέγοις· οὐδ' ἀριθμῶν ἄβαής,
οὐ μὴν τῷ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τόδε πάντα βοῶν Ἡελίου πάθε.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μεβαῶτο πληθὺν
κυάνεοι, ἵστανθ' ἑμπέδου ἰσάμετροι
εἴς ἠθέος εἶς εἰδός τε, τὰ δ' αὖ ἐπιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἶς ἐν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵστανθ' ἀμξαλλάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελεσίντες τὸ τριφράσσεδον· οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλεσομένων.
Ταῦτα συνεβαίνει καὶ ἐνὶ πρωσθίοσιν ἀθροίσας
καὶ πληθὺν ἀπαδαῖος, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχετο κυδιόων νικηφόρος ἔσθ' τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ἔμπεινος ἐν σοφίῃ.

Fig.4-Testo originale problema del bestiame

che tradotto è enunciato nel seguente modo:

Calcola, o amico, il numero del bestiame del sole che un tempo pascolava sulle pianure della Sicilia, diviso per colore in quattro mandrie, una bianca come il latte, una nera, una screziata e una gialla. Il numero di tori è maggiore del numero delle mucche e le relazioni tra loro sono le seguenti:

- $Tori\ bianchi = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) tori\ neri + tori\ gialli;$
- $Tori\ neri = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) tori\ screziati + tori\ gialli;$
- $Tori\ screziati = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) tori\ bianchi + tori\ gialli;$
- $Mucche\ bianche = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) mandria\ nera;$
- $Mucche\ nere = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) mandria\ screziata;$
- $Mucche\ screziate = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) mandria\ gialla;$
- $Mucche\ gialle = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) mandria\ bianca.$

Se puoi dare, o amico, il numero di ogni tipo di tori e vacche, non sei un novizio nei numeri, eppure non puoi essere considerato di grande abilità. Considera, tuttavia, le seguenti relazioni aggiuntive tra i tori del sole:

- Tori bianchi + tori neri= un numero quadrato;
- Tori screziati + tori gialli= un numero triangolare.

Se hai calcolato anche questi, o amico, e hai trovato il numero totale del bestiame, esulta come un vincitore, perché ti sei dimostrato il più abile nei numeri.

La prima parte del problema, è effettivamente facile da calcolare, trattandosi sostanzialmente di un sistema di 7 equazioni in 8 incognite.

Infatti, denotando con $T_B = tori\ bianchi$, $T_N = tori\ neri, T_S = tori\ screziate$, $T_G = tori\ gialli$, $M_B =$

$mucche\ bianche,\ M_N = mucche\ nere,\ M_S = mucche\ screziate,$
$M_G = mucche\ gialle$

il sistema diventa:

$$6T_B - 5T_N - 6T_G = 0$$
$$20T_N - 9T_S - 20T_G = 0$$
$$42T_S - 13T_B - 42T_G = 0$$
$$12M_B - 7T_N - 7M_N = 0$$
$$20M_N - 9T_S - 9M_S = 0$$
$$30M_S - 11T_G - 11M_G = 0$$
$$42M_G - 13T_B - 13M_B = 0$$

Dopo una serie di calcoli, si giunge facilmente alla seguente soluzione:

$$T_N = 7460514 \cdot k$$
$$T_B = 10366482 \cdot k$$
$$T_S = 7358060 \cdot k$$
$$T_G = 4149387 \cdot k$$
$$M_N = 4893246 \cdot k$$
$$M_B = 7206360 \cdot k$$
$$M_S = 3515820 \cdot k$$
$$M_G = 5439213 \cdot k$$

Per la seconda parte, invece, dobbiamo impostare le seguenti condizioni:

$(10366482+7460514) \cdot k = m^2$

$(7358060+4149387) \cdot k = \frac{t^2+t}{2}$

da cui:

$2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot k = m^2$ (1)

$11507447 \cdot k = \frac{t^2+t}{2}$ (2)

Dunque, per la condizione 1, k sarà della forma:

$3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot q^2$

e sostituendo nella 2 si avrà:

$11507447 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot q^2 = \frac{t^2+t}{2}$.

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t, si ottiene la seguente soluzione:

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 102571605819606 \cdot q^2}}{2}$$

da cui:

$$1 + 4 \cdot 102571605819606 \cdot q^2 = p^2$$

cioè:

$p^2 - 4 \cdot 609 \cdot 7766 \cdot 4657^2 \cdot q^2 = 1.$

Denotando $u = p$ e $v = 2 \cdot 4657 \cdot q$, si ottiene la forma finale:

$$u^2 - 4729494 \cdot v^2 = 1.$$

Purtroppo, la soluzione non è facile da trovare; la difficoltà sta nel fatto che v deve dividere $2 \cdot 4657$. La più piccolasoluzione, trovata da A. Amthor (Gotha, 1845 -1916) nel 1880, ha più di 100000 cifre.

4 – Problema del bestiame semplificato

In chiusura, analizzeremo un caso semplificato del problema del bestiame, alla portata di studenti di una secondaria di secondo grado.

L'enunciato è il seguente:

Amico mio, prova a calcolare il numero di conigli del contadino, divisi per colore in quattro gruppi: uno bianco come il latte, uno nero, uno screziato e uno marrone. Ecco le relazioni tra di loro:

- Conigli bianchi = $\left(\frac{2378017}{4480317}\right)$ conigli neri + conigli marroni
- Conigli neri = $\left(\frac{13440903}{25}\right)$ conigli screziati + coniglimarroni
- Conigli neri = $\left(\frac{6720463}{24}\right)$ conigli marroni + conigli screziati

Se riesci a trovare il numero di ogni tipo di coniglio, beh, non sei certo alle prime armi con i numeri... ma non sei neanche un vero esperto! Considera anche le seguenti relazioni aggiuntive:

- Conigli bianchi + conigli neri= un numero quadrato;
- Conigli screziati + conigli marroni= un numero triangolare.

E se alla fine riesci a risolvere tutto e scoprire quanti sono in totale i conigli, allora sì, puoi esultare come un vero campione, perché avrai dimostrato di essere un vero maestro dei numeri!

Anche in questo caso riscriviamo la prima parte:

$$C_B = \left(\frac{2378017}{4480317}\right) C_N + C_M$$
$$C_N = \left(\frac{13440903}{25}\right) C_S + C_M$$
$$C_N = \left(\frac{6720463}{24}\right) C_M + C_S$$

ottenendo come soluzione:

$$C_M = 48 \cdot k$$
$$C_N = 13440951 \cdot k$$
$$C_B = 7134099 \cdot k$$
$$C_S = 25 \cdot k$$

Per la seconda parte, si hanno le seguenti condizioni:

$(7134099+13440951) \cdot \mathrm{k} = m^2$

$(25+48) \cdot \mathrm{k} = \frac{t^2+t}{2}$

da cui:

$5^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot \mathrm{k} = m^2$ (1)

$73 \cdot \mathrm{k} = \frac{t^2+t}{2}$ (2)

Dunque, per la condizione 1, k sarà della forma:

$$2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot q^2$$

e sostituendo nella 2 si avrà:

$$73 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot q^2 = \frac{t^2+t}{2}.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t, si ottiene la seguente soluzione:

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 120158292 \cdot q^2}}{2}$$

da cui:

$$1 + 4 \cdot 120158292 \cdot q^2 = p^2$$

cioè:

$$p^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1879 \cdot 73^2 \cdot q^2 = 1.$$

Denotando $u = p \; e \; v = 4 \cdot 73 \cdot q$, si ottiene la forma finale:

$$u^2 - 5637 \cdot v^2 = 1.$$

In questo caso, applicando il teorema 3 è possibile calcolare la soluzione fondamentale: (3306453751, 44039100), in cui v non divide $4 \cdot 73$. Ma, applicando il teorema 4, possiamo trovare una seconda soluzione, in corrispondenza di n=2:

$$(3306453751+44039100\sqrt{5637})^2 =$$
$$21865272815003940001 + 291226494771328200\sqrt{5637}.$$

In questo caso v divide $4 \cdot 73$, quindi andando a ritroso possiamo trovare una soluzione cercata, che è:

$$C_B = 7134099 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot 997351009490850^2$$

$$C_S = 25 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot 997351009490850^2$$
$$C_N = 13440951 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot 997351009490850^2$$
$$C_M = 48 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 73 \cdot 1879 \cdot 997351009490850^2$$

5 – Conclusioni

Il problema del bestiame rappresenta un esempio di come, già in età antica, la matematica potesse raggiungere livelli notevoli di complessità. Dietro un enunciato apparentemente semplice, si cela un'equazione di Pell tutt'altro che banale da risolvere.

Ma la cosa interessante non è la risoluzione in sé, quanto il percorso logico che conduce a quel tipo di equazione. In una scuola secondaria, un problema del genere può diventare uno strumento didattico capace di stimolare il ragionamento matematico:gli studenti si possono trovare ad affrontare problemi diversi ma con tecniche simili, come ad esempio è stato fatto in questo articolo, o problemi anche molto distanti.

Bibliografia

Abbondandolo A. (2006). Equazioni diofantee. *Manuscript,*

https://people.cs.dm.unipi.it/abbondandolo/divulgazione/eqdiof.pdf

Bartocci U., Vipera M. C. (2004). Variazioni sul problema dei

buoi di Archimede, ovvero, alla ricerca di soluzioni "possibili"… Disponibile da

https://www.cartesio-episteme.net/mat/archim.htm

Colebrooke H. T. (1817). Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara. London: John Murray, Albemarle Street.

Mollin R. (2019).Fundamental Number Theory with Applications,CRC Press.

Wikipedia, L'enciclopedia libera. Problema del bestiame diArchimede. Disponibile dahttps://www.wikiwand.com/it/articles/Problema_del_bestiame_di_Archimede#Note

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 131-160

Le Terne Pitagoriche

Federica Giordano*, Giovanni Vincenzi**

*Studentessa CL Magistrale in Matematica Università di Salerno, Italia;
f.giordano102@studenti.unisa.it

**Dipartimento di Matematica, Università di Salerno, Italia;
vincenzi@unisa.it

Sunto*: Dopo aver brevemente illustrato alcune ipotesi sulle origini delle terne Pitagoriche, ci soffermeremo su due proprietà molto interessanti che forse sono poco citate in letteratura. La prima è la connessione delle terne Pitagoriche con la successione di Fibonacci, la seconda riguarda la loro natura algebrica, in quanto tra le terne pitagoriche si può definire un'operazione che permette di individuare il gruppo delle terne pitagoriche.*

Parole Chiave*: Terne Pitagoriche, Matematica Babilonese, Successione di Fibonacci, Strutture Algebriche*

Abstract*: After briefly reviewing some hypotheses concerning the origins of Pythagorean triples, we shall focus on two noteworthy properties that appear to be relatively underexplored in the existing literature. The first is the connection between Pythagorean triples and the Fibonacci sequence; the second pertains to their algebraic structure, as one can define an operation on Pythagorean triples that gives rise to a group structure.*

Keywords*: Pythagorean triples, Babylonian mathematics, Fibonacci sequence, Algebraic Structure.*

1 – Le Origini

Per la loro natura aritmetica e geometrica, le terne pitagoriche si collocano in una posizione centrale della matematica. L'interesse per le terne pitagoriche ha origini molto antiche seppur non si conosca con precisione né il luogo e né il momento preciso in cui si iniziò a porre l'attenzione su questo argomento. Il loro studio e le generalizzazioni ad esse connesse, hanno sollecitato l'attenzione di matematici di tutti i tempi dai babilonesi a Pitagora e poi Diofanto, Pappo, Thābitibn al Qurra, Fibonacci, Pell, Fermat, Eulero, Gauss, Galois, Mordell, e più recentemente, Wiles.

Nella usuale pratica didattica, il primo collegamento che si fa quando di parla di terne pitagoriche è con il Teorema di Pitagora:

Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto.

(Prop. 47, Libro I, "Gli Elementi" di Euclide).

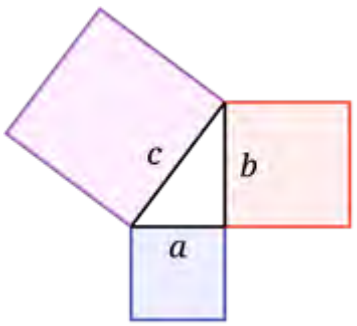


Figura 1: Teorema di Pitagora

In simboli, facendo riferimento alla figura 1,

$$a^2+b^2=c^2, \qquad (1)$$

dove *c*'è la lunghezza dell'ipotenusa, e *a* e *b* le lunghezze dei due cateti.

In effetti, questa proprietà dei triangoli rettangoli era conosciuta già molti anni prima della nascita di Pitagora (580 AC, Samo).

Si osservi che l'equazione (1) assume significato anche per numeri non interi, e quindi ci si può chiedere:

che succede se i valori *a, b* e *c* dell'equazione (1) sono visti come misure dei lati di un triangolo?

A tal proposito vale il seguente risultato noto come "l'inverso del Teorema di Pitagora".

Se il quadrato su uno solo dei lati di un triangolo è uguale ai quadrati sui restanti due lati del triangolo, l'angolo compreso dai restanti due lati del triangolo è retto.

(Prop. 48, Libro I, "Gli Elementi" di Euclide).

È plausibile che l'interesse delle antiche civiltà sulle questioni matematiche fosse semplicemente spinto da motivi pratici, e questo giustificherebbe il motivo per cui spesso non si trovano tracce di formulazioni di un vero e proprio enunciato o di una dimostrazione di un teorema. Nel caso specifico dei triangoli, è presumibile che già gli egizi (III millennio AC) erano a conoscenza del fatto che un triangolo costruito seguendo quella relazione avesse un angolo retto, e questa proprietà veniva utilizzata nella progettazione di

edifici o nella suddivisione dei campi. In Egitto, ad esempio, vi erano i cosiddetti "tiratori di corde" (paragonabili ai "geometri" di oggi) che diedero un contributo fondamentale nella costruzione di opere architettoniche, come piramidi e templi, ma anche nella suddivisione dei terreni (specialmente dopo le inondazioni del Nilo). Sia gli egizi che i babilonesi non conoscevano il Teorema di Pitagora, eppure sapevano che un triangolo di lati 3, 4 e 5 fosse un triangolo con un angolo retto, e per realizzarlo, usavano una corda con 12 nodi equidistanti che veniva tesa sul terreno per mezzo di paletti (vedi figura 2).

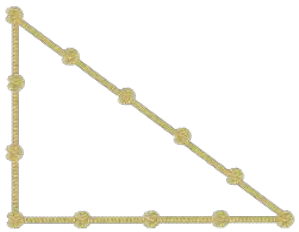


Figura 2: Corda con 12 nodi per costruire angoli retti

Come si può immaginare, il passaggio da una conoscenza empirica delle proprietà matematiche ad una loro contestualizzazione teorica fu lento e graduale e impiegò vari secoli. In questa fase di transizione la civiltà egizia e poi quella babilonese diedero un contributo determinante.

1.1 – La Matematica Babilonese

La civiltà babilonese si stanziò nell'antica Mesopotamia tra il 2000 e il 300 a.C. e divenne una delle civiltà più influenti del territorio. In quegli anni la Terra dei Due Fiumi era segnata da profondi conflitti spinti sia da un desiderio di espansione

territoriale ma soprattutto per il controllo delle risorse naturali offerte dal territorio, essendo molto fertile. Un forte elemento di coesione era rappresentato dall'utilizzo della stessa forma di scrittura, ossia quella cuneiforme. Gli scribi scrivevano su tavolette di argilla per mezzo di uno stilo e successivamente le cuocevano al sole o in forni per migliorarne la conservazione.

Sono state ritrovate molte tavolette che riguardano argomenti di vario genere, del tipo: calcolo delle tasse, lezioni scolastiche, leggi, gestione dei sistemi di irrigazione e dei trasporti e così via. Le conoscenze matematiche dei babilonesi influenzarono notevolmente le culture successive e come sistema di numerazione utilizzavano quello posizionale sessagesimale.

Si tratta di un sistema numerico posizionale in base 60. Le cifre venivano scritte con un criterio additivo basato su tre simboli:

chiodo verticale per rappresentare l'unità,

un punzone con la punta diretta a sinistra che rappresentava la decina,

due chiodi obliqui per rappresentare la quantità nulla (solo nel tardo periodo).

Si tratta di un sistema:

- additivo, infatti, i numeri inferiori a 60 vengono scritti come somma dei simboli che lo costituiscono;
- posizionale, infatti, il valore di un simbolo dipende dalla posizione assunta all'interno del numero.

Più delicata è la questione riguardante la quantità nulla. Si iniziò ad utilizzare il simbolo con i due chiodi obliqui solo nel tardo periodo, infatti, prima dell'utilizzo di questo simbolo si lasciava semplicemente uno spazio bianco per indicare lo zero, creando inevitabili ambiguità. Nonostante ciò, spesso non veniva utilizzato se lo zero si trovava in posizione terminale quindi i babilonesi non giunsero mai a una profonda precisione del loro sistema posizionale.

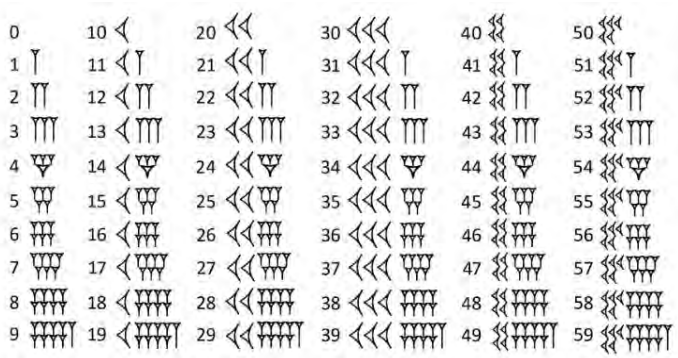


Tabella 1: Numeri da 1 a 59 scritti nella scrittura cuneiforme

È accertato che i babilonesi sapessero eseguire l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione tra numeri essenzialmente seguendo regole simili a quelle che noi usiamo oggi nel sistema decimale, ovvero con i riporti. Ciò richiedeva importanti capacità di calcolo e di memoria in quanto bisognava ricordarsi quelle che noi oggi chiamiamo le tabelline di tutti i numeri da 1 a 60. La divisione invece era concepita come una moltiplicazione. Precisamente per i babilonesi pensare di dividere m per un numero n, significava moltiplicare m per il reciproco di n. Questa loro interpretazione può apparire bizzarra, ma in realtà è del tutto

plausibile se si pensa che i numeri 2, 3, 4, 5, 6, nel sistema sessagesimale hanno come reciproci rispettivamente:
0; 30, 0; 200; 15 0; 12 0; 10 (vedi tavoletta YBC 7354).
Quindi, per esempio 7 diviso 5 risulta essere 7 · 0; 12 = 1; 24.

Pertanto, per i babilonesi una gran quantità di numeri anche frazionari risultavano essere rappresentabili mediante una scrittura "lineare".

È plausibile che i babilonesi abbiano realizzato rapidamente l'importanza dei "reciproci"e che ciò abbia motivato la ricerca di metodi per determinare i reciproci di tutti i numeri. Tali sforzi che oggi sappiamo essere inutili per i numeri coprimi con 60, portarono tuttavia alla compilazione di numerose tabelle con delle approssimazioni, sebbene qualche volta con errori di vario tipo (vedi tabella di [Mansfield 2023, p180], tavola M10).

Table 2. M10: An Old Babylonian table of reciprocals for irregular numbers

n	Approximate reciprocal $\tilde{n}$	Description	Calculated to one place beyond text
0; 07	8;34 : 16 : 59	deficit	8;34 : 17 : 08 : 34
0; 07	8;34 : 18	excess	8;34 : 17 : 09
0; 11	5;27 : 16 : 22	deficit	5;27 :16 : 21 : 49
0; 13	4;36 : 55	deficit	4;36 : 55 : 23
0; 14	42; 51 : 25 : 40	deficit	42; 51 : 25 : 42 : 51
0; 17	35;17	deficit	35;17 : 39

Note: Zeros, radix points and final column added by the author.

Tabella 2: Tabella con i reciproci di alcuni numeri non regolari

I numeri per cui esisteva un reciproco rappresentabile venivano catalogati e successivamente chiamati *regolari*. Il reciproco di un numero n verrà poi denotato con $\bar{n}$.

Talvolta invece del reciproco per motivi non ancora chiari consideravano il reciproco decuplicato che verrà poi denotato con $\tilde{n}$.

Per la classificazione di queste tavolette sono stati individuati due periodi:

- Il periodo babilonese antico (primi secoli del secondo millennio a.C.) al quale appartengono le tavolette che hanno dato maggiore contributo matematico;
- Il periodo seleucidico (ultimi secoli del primo millennio a.C.).

Un reperto fondamentale per comprendere gli avanzamenti della matematica apportati dai babilonesi è la Tavoletta di Yale n.7289. Si tratta di una tavoletta circolare di 7 cm di diametro risalente ad un periodo individuabile tra il 1800 e il 1600 a.C. e conservata presso la Yale Babylonian Collection (abbreviata YBC) che raffigura un quadrato con le sue due diagonali.

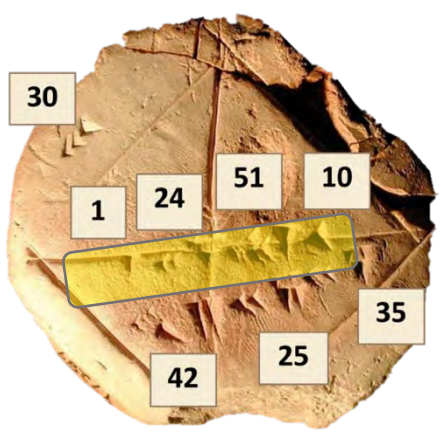


Figura 3: La tavoletta di Yale n. 7289

Un lato del quadrato è etichettato con il numero sessagesimale 30 mentre la diagonale con i numeri: 1;24:51:10 e 42;25:35. Ciò che attribuisce importanza a questa tavoletta è proprio il numero 1;24:51:10, infatti trasformandolo in base 10 si ottiene:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\approx 1{,}4142129963$$

Ovvero un'approssimazione di$\sqrt{2}$accurata fino a 6 cifre significative:

$\sqrt{2}$ =1, 41421356237309504880 1... (vediVincenzi-Anatriello (2024).

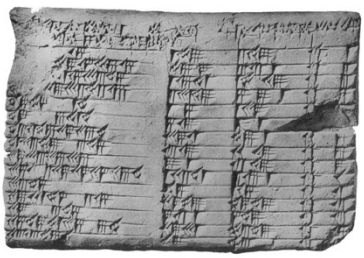
2 – Le Terne Pitagoriche della Plimpton 322

2.1 – Descrizione della Tavoletta

La tavoletta babilonese Plimpton 322, catalogata con il numero 322 nella collezione G.A Plimpton presso la Columbia University, è uno degli artefatti matematici più celebri e complessi. Prese questo nome da George Arthur Plimpton, un editore e collezionista di antichi testi matematici, che agli inizi del '900 la acquistò a soli 10 dollari da Edgar J. Banks, un commerciante americano di reperti archeologici. Secondo Banks questa tavoletta venne ritrovata a Tell Senkereh, un sito archeologico nel sud dell'Iraq corrispondente all'antica città di Larsa. Dopo la morte di Plimpton venne donata in eredità alla "Rare Book and Manuscript Library" della Columbia University di NewYork.Nel 1945 è stata poi decifrata da Otto

Neugebauer[1], un eminente storico matematico, e dal suo assistente Sachs[2].

Dall'analisi di questa tavoletta si evince che la tavoletta contiene terne pitagoriche, che appaiono quindi oltre mille anni prima della nascita di Pitagora.



I "*******"	II *"Quadrato della larghezza"*	III *"Quadrato della diagonale"*	IV *"Nome"*
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 56 15	56 07	3 12 1	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5 [3]10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	[6]
[1]43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 01	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1]29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [00] 03 45	7 12 01	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	[15]

Tabella 3: La Plimpton 322 e la sua traslitterazione (si noti la rappresentazione dei numeri nel sistema sessagesimale)

Sebbene non ci sia un riferimento ad una dimostrazione, risulta sorprendente scoprire che l'idea alla base del teorema fosse conosciuta già a quell'epoca.

---

[1] Otto Eduard Neugebauer (1899-1990), astronomo e matematico austriaco, noto per i suoi studi sui testi matematici.

[2] Abraham Sachs (1914-1983), assiriologo e matematico americano, noto per la collaborazione con Neugebauer nello studio della matematica mesopotamica.

Inizialmente gli storiografi pensavano che si trattasse semplicemente di un resoconto di transazioni commerciali. Divenne poi uno dei documenti di matematica antica più importanti dopo gli studi di Neugebauer e Sachs che osservarono la presenza delle terne pitagoriche.

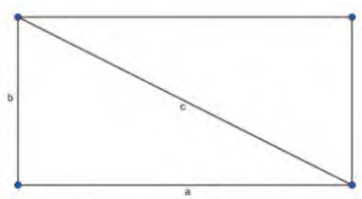
La Plimpton 322 è una tavoletta di dimensioni ridotte (13x9x2 cm) e presenta profonde scheggiature che non consentono di leggerne perfettamente il contenuto; queste fratture suggeriscono anche che inizialmente questa tavoletta fosse di dimensioni maggiori. Il lato posteriore è liscio mentre sul lato anteriore è incisa una tabella di numeri in notazione sessagesimale babilonese. La scrittura utilizzata dai babilonesi è quella del periodo antico e quindi i simboli utilizzati sono solo quelli per indicare le unità e le decine, dato che il simbolo per rappresentare lo zero venne introdotto solo successivamente. I simboli sono stati incisi utilizzando uno stilo a base triangolare.

La tabella è formata da 4 colonne e 16 righe, di cui la prima riga rappresenta l'intestazione mentre la quarta colonna enumera le righe (da 1 a 15). Di seguito il contenuto del lato frontale della tavoletta, con i numeri estrapolati tra parentesi:
Seguono le intestazioni delle colonne facendo uso dell'interpretazione di Neugebauer e Sachs:

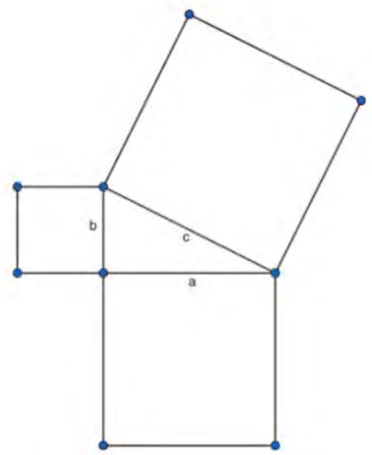
- Prima colonna "rapporto tra il quadrato della diagonale e il quadrato della lunghezza";
- Seconda colonna "quadrato della larghezza";
- Terza colonna "quadrato della diagonale";
- Quarta colonna "il suo nome".

La colonna sulla quale ci sono maggiori ambiguità è la prima, infatti, Bruins[3] rimuove l'1 estrapolato e osserva che i numeri di questa colonna rappresentano invece il rapporto tra il quadrato della larghezza e il quadrato della lunghezza, cioè b^2/a^2.

Queste intestazioni hanno senso dato che i babilonesi consideravano i lati del triangolo rettangolo come la lunghezza e la larghezza di un rettangolo, la cui diagonale è l'ipotenusa del triangolo dato come mostrato nella figura A (a: lunghezza, b: larghezza, c: diagonale). Nella Figura B si mostra invece lo stretto legame che vi è con il Teorema di Pitagora.



(A) Diagonale del rettangolo come ipotenusa del triangolo rettangolo formato dai lati.



(B) Quadrati costruiti sui cateti del triangolo rettangolo.

[3]E. M. Bruins (1909–1990), storico e matematica olandese, noto per i suoi contributi allo studio della matematica antica, in particolare quella babilonese ed egizia.

Esempio 2.1

Consideriamo la riga 7 e verifichiamo la validità dell'interpretazione di Neugebauer e Sachs:

c^2/a^2	b	c	*Nome*
[1]43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7

Sappiamo che: b=38 11, c= 59 01.

Vogliamo verificare che il numero nella prima colonna rappresenta c^2/a^2.

Calcoliamo:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (59\ 01)^2 - (38\ 11)^2 = (45\ 00\ 00)^2$$

di conseguenza: $\frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{59\ 01}{45\ 00\ 00}\right)^2 = 1\ 43\ 11\ 56\ 28\ 26\ 40.$

2.2 – Ipotesi sui possibili metodi usati dai babilonesi per costruire le terne pitagoriche

Già dai primi commenti sulla Plimpton ci si rende conto che risulta impossibile che i babilonesi abbiano scoperto le terne riportate su di essa per puro tentativo. Le ricerche da parte di studiosi riconducono l'analisi a due metodi maggiormente accreditati per la ricostruzione della tavola.

Metodo 1: proposto da Neugebauer e Sachs, noto come "*metodo della coppia generatrice*" che si basa sulla generazione di terne pitagoriche utilizzando due numeri interi *m* e *n*.

Metodo 2: proposto da Bruins, noto come "*metodo dei reciproci*" in cui a partire da un numero regolare (ovvero quei numeri divisibili solo per 2, per 3 o per 5) vengono calcolati i lati di un triangolo rettangolo.

Metodo 1

Sia $x > 1$ un numero intero dispari, allora:
$x, \ \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad e \quad \frac{1}{2}(x^2 + 1)$
soddisfano l'equazione Pitagorica: $x^2 + \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2$.Sostituendo x con $\propto >$ 0 e dividendo per $\propto^2$, si ottiene l'equazione normalizzata:

$$1 + \left(\frac{\propto - \frac{1}{\propto}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\propto + \frac{1}{\propto}}{2}\right)^2 \quad \forall \propto \in \mathbb{R}^+$$

Considerando il caso in cui $\propto \in \mathbb{Q}$ ed è regolare, possiamo esprimere $\propto$ nella forma m/n, con m e n numeri interi regolari. Di conseguenza si ottiene che:

$$1 + \left(\frac{m^2 - n^2}{2mn}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn}\right)^2 \qquad (2)$$

Moltiplicando per $(2mn)^2$, si osserva che dire che vale l'equazione (2) equivale ad affermare che i numeri:
$a = 2mn, \ b = m^2 - n^2 \ e \ c = m^2 + n^2$
formano una terna pitagorica.

m	n	$a = 2mn$	c^2/a^2	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$	$riga$
12	5	2 00	1 59 00 15	1 59	2 49	1
1 04	27	57 36	1 56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	2
1 15	32	1 20 00	1 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
2 05	54	3 45 00	1 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
9	4	1 12	1 48 54 01 40	1 05	1 37	5
20	9	6 00	1 47 06 41 40	5 19	8 01	6
54	25	45 00	1 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
32	15	16 00	1 41 33 45 14 03 45	13 19	20 49	8
25	12	10 00	1 38 33 36 36	8 01	12 49	9
1 21	40	1 48 00	1 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
2	1	4	1 33 45	3	5	11
48	25	40 00	1 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
15	8	4 00	1 27 00 03 45	2 41	4 49	13
50	27	45 00	1 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
9	5	1 30	1 23 13 46 40	56	1 46	15

Tabella 4: Plimpton 322 estesa con i valori di a, m ed n.

Metodo 2

Sia $r = m\bar{n}$ numero regolare, allora i numeri regolari:

$$x = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \; e \; y = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \qquad (3)$$

soddisfano l'equazione: $1 + x^2 = y^2$.

Per ogni riga della tavoletta, esiste un numero regolare r individua una coppia di numeri x e y che soddisfano la suddetta equazione. Dividendo x e $y$per i loro fattori comuni, si ottengono i valori riportati nella seconda e terza colonna.

Esempio 2.2

Consideriamo la riga 5 della Tabella.

m	n	$a = 2mn$	c^2/a^2	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2 + n^2$	$riga$
9	4	1 12	1 48 54 01 40	1 05	1 37	5

Sapendo che $m = 9$ e $n = 4$, si ottiene che:

$$r = m\bar{n} = 9\,\bar{4}\ = 2; 15\ e\ \frac{1}{r} = 0; 26\ 40,$$

e dalla relazione (3) segue:

$$x = 0; 54\ 10 \text{ e } y = 1; 20\ 50.$$

Poiché $x\ e\ y$ risultano 'divisibili' per 10, moltiplichiamoli per 6 ($oequivalentementedividiamoli$ per 10). Si ottiene:
$x = 5; 25\ e\ y$
$= 8; 05$.Moltiplicando per 12 (o equivalentemente dividendo per 5) si ottiene $1\ \ 05\ e\ 1\ \ 37$.

2.3 – Spiegazione degli errori

La tavoletta Plimpton 322 contiene errori di diversa natura e una sua comprensione approfondita richiede un'attenzione particolare. Le principali tipologie di errori che si riscontrano sono due: errori tipografici ed errori computazionali.

Gli errori tipografici sono mostrati nella seguente tabella:

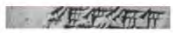
Errore	Riga	Colonna	Numero scritto	Numero corretto
1	2	I	58 14 **56** 15 	58 14 **50 06** 15
2	8	I	41 33 **59** 03 45	41 33 **45 14** 03 45
3	9	II	**9** 01	**8** 01
4	13	I	27 03 45	27 **00 03** 45

Tabella 5: Gli errori tipografici in alcune righe della Plimpton 322

- Errore 1: nella seconda riga lo scriba ha scritto il numero 6 troppo vicino al numero 50 (questo fa capire l'importanza

della successiva introduzione di un simbolo per rappresentare lo 0 che pose fine ad errori di questo tipo);

- Errore 2: nell'ottava riga invece di scrivere i numeri 45 e 14 lo scriba ha scritto direttamente la loro somma, cioè 59;
- Errore 3: nella nona riga è stato copiato male il numero e quindi lo scriba invece di scrivere 8 ha scritto 9;
- Errore 4: nella tredicesima riga manca una coppia di zeri tra il numero 27 e il numero 03.

Gli errori computazionali, riportati nella prossima tabella (tabella 6), risultano più difficili da analizzare infatti la comunità scientifica non ha ancora raggiunto un accordo unanime. Ogni studioso, infatti, si è proposto di provare a comprendere il possibile procedimento "sbagliato" che è stato fatto dai babilonesi per arrivare a commettere quegli errori.

Errore	Riga	Colonna	Numero scritto	Numero corretto
1	2	III	3 12 01	1 20 25
2	13	II	7 12 01	2 41
3	15	II	56	28

Tabella 6: Gli errori computazionali della Plimpton 322

Le successive tabelle propongono un confronto tra i valori dei numeri incisi sulla tavoletta in notazione sessagesimale (tabella 7) con quelli in notazione decimale (tabella 8).

I $(c/a)^2$	**II (*b*)**	**III (*c*)**	**IV**
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 56 15	56 07	3 12 1	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5 [3] 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 01	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [00] 03 45	7 12 01	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	15

Tabella 7: Plimpton 322 in base 60

I $(c/a)^2$	**II (*b*)**	**III (*c*)**	**IV**
[1], 9834028	119	169	1
[1], 9491586	3367	11521	2
[1], 9188021	4601	6649	3
[1], 8862479	12709	18541	4
[1], 8150077	65	97	5
[1], 7851929	319	481	6
[1], 7199837	2291	3541	7
[1], 6845877	799	1249	8
[1], 6426694	481	769	9
[1], 5861226	4961	8161	10
[1], 5625000	45	75	11
[1], 4894168	1679	2929	12
[1], 4500174	25921 (161)*	289	13
[1], 4302388	1771	3229	14
[1], 3871605	56 (28)*	53	15

Tabella 8: Plimpton 322 in base 10 con correzioni tra parentesi

Nell'ultima tabella di questa sezione riportiamo le corrispondenti terne pitagoriche della Plimpton 322.

a	**b**	**c**	**Riga**
120	119	169	1
9520	3367	11521	2
4800	4601	6649	3
13500	12709	18541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2700	2291	3541	7
960	799	1249	8

600	481	769	9
6480	4961	8161	10
60	45	75	11
2400	1679	2929	12
240	161	289	13
2460	1771	3229	14
45	28	53	15

Tabella 9: Le 15 Terne pitagoriche della Plimpton 322

3 - Le terne pitagoriche nella successione di Fibonacci

Proposizione 3.1. *Se si considerano 4 numeri consecutivi della successione di Fibonacci (a,b,c,d), allora la terna (ad, 2bc,* b^2+c^2 *)è pitagorica.*

Dim.- Bisogna provare che$a^2d^2+4b^2c^2= (b^2+c^2)^2$.
Essendo *a, b, c, d* numeri consecutivi di Fibonacci, la quaterna *(a,b,c,d)* la possiamo scrivere come *(c-b, b, c, c+b)*. Allora abbiamo che:
$a^2d^2+4b^2c^2=(c- b)^2(c+b)^2+ 4b^2c^2= =(c^2- b^2)^2+ 4b^2c^2=(c^4+ b^4)++2b^2c^2= =(c^2+b^2)$. ▢

Le terne ottenute in questo modo si chiamano *terne Pitagoriche di Fibonacci:*

Dalla successione di Fibonacci alle terne pitagoriche

	Numeri di Fibonacci	Cateto F_i * F_{i+3}	Cateto 2 *F_{i+1} * F_{i+2}	Ipotenusa F^2_{i+1} + F^2_{i+2}
F_1	1	3	4	5
F_2	1	5	12	13
F_3	2	16	30	34
F_4	3	39	80	89
F_5	5	105	208	233
F_6	8	272	546	610
F_7	13	715	1428	1597
F_8	21	1869	3740	4181
F_9	34	4896	9790	10946
F_10	55	12815	25632	28657
F_11	89	33553	67104	75025
F_12	144		175682	196418
F_13	233			
F_14	377			

Tabella 10: Le prime 11 terne Pitagoriche di Fibonacci

4 - La struttura delle terne pitagoriche

In questa sezione riportiamo una sintesi di un recente articolo (Anatriello e Vincenzi 2024) in cui si prova la natura algebrica delle terne pitagoriche.

Innanzitutto, estendiamo la definizione di terna come segue:

<u>Definizione 4.1</u>

Una terna $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ si dice *pitagorica* se è soluzione dell'equazione: $a^2 + b^2 = c^2$.

Esempio: (3,4,5) è una terna pitagorica infatti $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

A partire da una qualsiasi terna pitagorica non banale (a, b, c), con termine massimo c, è possibile associare altre otto terne ordinate con termine massimo c:
(a, b, c), $(-a, b, c)$,$(-b, -a, c)$, $(a, -b, c)$, $(-a, -b, c)$, (b, a, c), $(-b, a, c)$, $(b, -a, c)$.

Definizione 4.2
Una terna pitagorica (a, b, c) con il termine massimo c, si dice *banale* se a o b sono 0.

Definizione 4.3
Una terna pitagorica (a, b, c) non banale si dice *primitiva* se $MCD(a, b, c) = 1$ (ossia se i suoi termini sono coprimi), diversamente si dice *derivata*.
A partire da una qualsiasi terna pitagorica primitiva (a, b, c)e moltiplicandola per un qualsiasi intero$k > 1$si ottiene una terna pitagorica derivata: (ka, kb, kc).

Un risultato utile per determinare terne pitagoriche non banali è il seguente:

Proposizione 4.4 (Formula di Euclide)
Siano m ed n numeri interi positivi, con m>n. Allora (a,b,c) è una terna Pitagorica, dove $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn, c = m^2 + n^2$.

Il seguente risultato caratterizza le terne pitagoriche primitive:

Proposizione 4.5 *Siano m> n due interi positivi. Allora la terna* $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ *è primitiva se e solo se m e n sono coprimi e m+n è un intero dispari.*

m	n	$m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2$	
2	1	3, 4, 5	Primitiva
3	1	8, 6, 10	Derivata
3	2	5, 12, 13	Primitiva
4	1	15, 8, 17	Primitiva
4	2	12, 16, 20	Derivata
4	3	7, 24, 25	Primitiva
5	1	24, 10, 26	Derivata
5	2	21, 20, 29	Primitiva
5	3	16, 30, 34	Derivata
5	4	9, 40, 41	Primitiva

Tabella 11: Dieci terne pitagoriche generate dalla Formula di Euclide

Proposizione 4.6 (Formula di Diofanto e Brahmagupta)

Siano $a,\ b,\ c,\ d$ numeri interi. Il prodotto di due numeri espressi come somma di quadrati può essere espresso come somma di due quadrati, ossia:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$
$$= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Proposizione 4.7

Sia p un numero primo dispari $p \equiv 1 (mod 4)$. Allora per ogni intero positivo h esiste un'unica terna pitagorica primitiva (a, b, p^h) con $0 < a < b < p^h$.

Utilizzando questa proposizione è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 4.8

Quando $p \equiv 1(mod4)$, l'unica terna pitagorica primitiva del tipo$(a(p^h), b(p^h), p^h)$con $a(p^h) < b(p^h) < p^h$ la diremo terna *Pitagorica Principale di massimo termine* p^h.

4.1 - Il gruppo delle terne pitagoriche primitive

Dopo richiamato le principali proprietà delle terne pitagoriche, in questa sezioneevidenzieremo alcune loro proprietà di tipo algebrico.

Sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle seguenti terne pitagoriche:

$$\mathcal{P} := \{(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2\}$$

Siano (a, b, c), $(a', b', c') \in \mathcal{P}$, sfruttando la Formula di Diofanto e Brahmagupta, si ottiene che anche $(aa' - bb', ba' + b'a, cc') \in \mathcal{P}$.Pertanto è possibile definire la seguente operazione:

$$\star : \big((a, b, c), (a', b', c')\big) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to (a, b, c) \star (a', b', c') := (aa' - bb', ba' + b'a, cc') \in \mathcal{P}$$

Esempi

a) $(4, 3, 5) \star (5, 12, 13) = (4 \cdot 5 - 3 \cdot 12;\ 4 \cdot 12 + 3 \cdot 5,\ 5 \cdot 13) = (-16, 63, 65)$.

b) $(3, 4, 5)^2 = (3, 4, 5) \star (3, 4, 5) = (-7, 24, 25)$.

c) $(3, 4, 5)^3 = (3, 4, 5) \star (-7, 24, 25) = (-117, 44, 125)$.

L'operazione '$\star$'non solo permette di costruire innumerevoli terne pitagoriche, ma come vedremo evidenzia una profonda natura algebrica delle terne pitagoriche che per secoli non è stata evidenziata.

Teorema 4.1.1

$(\mathcal{P}, \star)$ è un monoide commutativo.

Dim. – Proviamo che l'operazione è chiusa, associativa e che esiste elemento neutro.

Chiusura: siano(a, b, c), $(a', b', c') \in \mathcal{P}$, cioè $a^2 + b^2 = c^2$ e $a'^2 + b'^2 = c'^2$, allora applicando la formula di Brahmagupta si ottiene che

$(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 = (cc')^2$.Di conseguenza$(aa' - bb', ab' + ba', cc') \in \mathcal{P}$ e l'operazione $\star$è chiusa.

Associatività: siano (a, b, c), (a', b', c'), $(a'', b'', c'') \in \mathcal{P}$, allora:

((a,b,c) ⋆(a′,b′,c′))⋆ (a′′,b′′,c′′)

= (aa′-bb′, ab′+ba′, cc′) ⋆(a′′,b′′,c′′)

=((aa′-bb′) a′′ – (ab′+ba′)b′′, =((aa′-bb′)b′′+ (ab′+ba′)a′′, cc′c′′

= (aa′a′′-bb′a′′-ab′b′′-ba′b′′, aa′b′′- bb′b′′+ ab′a′′+ba′a′′, cc′c′′);

Analogamente:

(a,b,c) ⋆ ((a′,b′,c′)⋆ (a′′,b′′,c′′))

=(a,b,c) ⋆ (a′a′′- b′b′′, a′b′′+b′a′′, c′c′′)

= (a(a′a′′- b′b′′) – b(a′b′′+b′a′′), a (a′b′′+b′a′′)+b(a′a′′-bb′′),cc′c′′)

= (aa′a′′-ab′b′′- ba′b′′-bb′a′′, aa′b′′+ab′a′′+ba′a′′-bb′b′′, cc′c′′).

Pertanto l'operazione è associativa.

Esistenza dell'elemento neutro.

Verifichiamo che è l'elemento neutro è la terna *(1,0,1)*

$(1,0,1)\star(a, b, c) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a, 1 \cdot c) = (a, b, c)$e

$(a, b, c)\star(1,0,1) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, b \cdot 1 + 0 \cdot a, 1 \cdot c) = (a, b, c)$.

Dunque, (1,0,1) è l'elemento neutro.

Commutatività:

$(a, b, c)\star(a', b', c') = (aa' - bb', ab' + ba', cc')$;

$(a', b', c')\star(a, b, c) = (a'a - b'b, a'b + b'a, cc')$.

Essendo le componenti delle terne dei numeri interi,
l'operazione "$\star$" è commutativa.
La dimostrazione è completa. ▢

Si osserva che $(\mathcal{P},\star)$ non è un gruppo in quanto gli unici elementi in$\mathcal{P}$ che ammettono inverso sono quelli che formano
il sottogruppo finito C_4:
$C_4 = \langle(0,1,1)\rangle = \{(1,0,1),(0,1,1),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$.

In $(\mathcal{P},\star)$ è possibile definire la seguente relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$:

(a, b, c) $\mathfrak{R}$ (a', b', c') $\Leftrightarrow \exists$ n, m $\in$ Z \ {0} : ma = na', mb = nb', mc = nc'.

Se (a, b, c) e (a', b', c') verificano la relazione diremo che sono *commensurabili.*

Osservazione 4.1.2

La relazione$\mathfrak{R}$risulta essere una congruenza in $(\mathcal{P},\star)$, infatti, se $(a,b,c)\ \mathfrak{R}\ (a',b',c')$ e $(x,y,z)\ \mathfrak{R}\ (x',y',z')$, allora $(a,b,c) = h(a',b',c')$ e $(x,y,z) = h'(x',y',z')$ con $h,h' \in \mathbb{Q}$. Si ottiene che:

$$(ax-by, bx+bx, cz) = hh'(a'x-b'y, b'x+b'x, c'z)$$

Segue che

$$[(ax-by, bx+bx, cz)]_{\mathrm{R}} = [(a'x-b'y, b'x+b'x, c'z)]_{\mathrm{R}},$$

e quindi

(a, b, c)$\star$ (x,y,z) $\mathfrak{R}$ (a', b', c')$\star$ (x',y',z').

Allora possiamo considerare l'operazione quoziente indotta in G $:= \mathcal{P}/\mathfrak{R}$:

$$\star : ([(a,b,c)]_{\mathfrak{R}}, [(a',b',c')]_{\mathfrak{R}}) \in G \times G$$
$$\longmapsto [(a,b,c)]_{\mathfrak{R}} \star [(a',b',c')]_{\mathfrak{R}} \in G$$

definita ponendo:

$$[(a,b,c)]_{\mathfrak{R}} \star [(a',b',c')]_{\mathfrak{R}} := [(aa' - bb', ba' + b'a, cc')]_{\mathfrak{R}}.$$

Teorema 4.1.3 *(G, ⋆) è un gruppo abeliano.*

Dim. – Per il risultato precedente, è sufficiente verificare che ogni elemento è invertibile. Per provare questo basta osservare che per ogni elemento $[(a,b,c)]_{\mathfrak{R}} \in$ G,risulta:

$[(a,b,c)]_{\mathfrak{R}} \star [(a,-b,c)]_{\mathfrak{R}} = [(aa+bb,0,cc)]_{\mathfrak{R}} = [(cc,0,cc)]_{\mathfrak{R}}$ $= [(1,0,1)]_{\mathfrak{R}}$. Pertanto l'inverso di un elemento del tipo $[(a,b,c)]_{\mathfrak{R}}$ è $[(a,-b,c)]_{\mathfrak{R}}$. ▢

Definizione 4.1.4

Il gruppo $(G,\star)$ lo diremo *gruppo delle terne pitagoriche primitive*; i suoi elementi infatti possono essere rappresentati da un'unica terna pitagorica primitiva.

Vale il seguente teorema (vedi Teorema 4.8, Anatriello e Vincenzi, (2024)), che descrive il gruppo delle terne primitive:

Teorema 4.1.5

Sia G:=$P/\mathfrak{R}$ *il gruppo delle terne pitagoriche primitive. Allora G è il prodotto diretto diun gruppo abeliano libero e un gruppo ciclico finito di ordine 4, ossia:*

$$\left(Dr_{p\in P}\langle[(a(p),b(p),c)]_{\mathfrak{R}}\rangle\right) \times \langle[(0,1,1)]_{\mathfrak{R}}\rangle \simeq (C_\infty \times \ldots \times \ldots) \times C_4,$$

dove P è l'insieme dei numeri primi (positivi) p tali che p ≡ 1 (mod 4), e (a(p), b(p), p) è la terna principale con termine massimo p. Inoltre, per ogni terna non banale (a, b, c), l'elemento $[(a, b, c)]_R$ *ha ordine infinito.*

In sintesi, la congruenza $\mathfrak{R}$ individua un quoziente G= $\mathcal{P}/\mathfrak{R}$ che risulta essere un gruppo isomorfo al prodotto diretto di infinite (numerabili) copie di C_∞ e un gruppo ciclico finito di ordine 4.

5 – Conclusioni

Questo studio ci ha permesso di compiere un viaggio attraverso la storia delle terne pitagoriche, partendo dall'antica Mesopotamia fino ad arrivare ad una formalizzazione algebrica del concetto di terna pitagorica. È emerso come tali terne suscitarono l'interesse dell'uomo sin dall'antichità, attraversando nel corso degli anni civiltà diverse.

Dopo un'analisi del contesto storico con particolare riferimento alla matematica babilonese, ci si è soffermati sull'esame delle loro tavolette. In particolare, è stata analizzata la tavoletta Plimpton 322 che rappresenta uno dei reperti fondamentali di questa eredità. Ci ha permesso di comprendere quanto i babilonesi fossero affascinati da queste terne, facendoci restare esterrefatti sulle loro abilità nell'individuare e maneggiare terne pitagoriche pur senza una formalizzazione teorica. Sono stati poi proposti due metodi alternativi per la ricostruzione di queste tavolette, che la analizzano da prospettive diverse permettendo di avere un'interpretazione completa. Infine, sono stati classificati i vari tipi di errori commessi dai babilonesi nell'incisione dei numeri sulla tavoletta.

In conclusione, la matematica antica ha incontrato quella moderna con un approccio algebrico delle terne pitagoriche. Sono state mostrate le principali definizioni, proprietà di queste terne e questo ci ha permesso di definire un'operazione interna che individua una struttura algebrica. Il culmine risiede nel Teorema 4.1.5 che fornisce una descrizione accurata della struttura del gruppo delle terne pitagoriche primitive.

Le terne pitagoriche costituiscono quindi un ponte tra passato e presente. L'unione tra l'intuizione babilonese e il rigore della formalizzazione teorica moderna mostra come un concetto così antico e semplice nasconda in realtà una notevole profondità, che emerge solo attraverso uno studio algebrico accurato.

Bibliografia

A. A. Abdulaziz, (2010).The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples. In: *University of Balmond*

G. Anatriello e G. Vincenzi, (2024).On the algebraic structure of Pythagorean triples. In: *Atti della Accademia Peloritiana dei Pericolanti 102.1*

C. B. Boyer, (2011).*Storia della matematica,* Oscar Mondadori. ISBN: 978-88-04-33431-6.

D. M. Burton, (2011).*The History of Mathematics: an introduction*, McGraw-Hill Companies. ISBN: 978-0-07-338315-6.

K. Muroi, (1992). Piccoli problemi di canale della matematica babilonese. In*: Historia Sci.*

D. F. Mansfield (2023). Mesopotamian square root approximation by a sequence of rectangles,*British Journal for the History of Mathematics, 38:3, 175-188.*

O. Neugebauer e A. Sachs, (1945).*Mathematical Cuneiform Texts, Vol. 29*, American Oriental Society.URL: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015017376834&seq=54

E. Robson, (2002).Words and pictures: new light on Plimpton 322. In: *American Mathematical Monthly, pp. 105–120.*

Sitografia

Gli "Elementi" di Euclide.
https://www.scienzaatscuola.it/euclide.html

G. Vincenzi e G. Anatriello 2024. Come fecero i babilonesi ad approssimare la radice di 2 alla quinta cifra decimale?*XXIII congresso della Società Italiana Di Storia Delle Matematiche, Trento 14-16 Novembre 2024.p.37*
https://drive.google.com/file/d/1pzamecnmHli5niigJaX6VijbHWPhZdiK/view
https://drive.google.com/file/d/1U-67FJKdKdn6iXQMMgtOwHnJio4sPnVy/view?usp=sharing

E. C. Zeeman, (1995).Plimpton 322: a remarkable ancient Babylonian tablet on number theory. URL: http://web.archive.org/web/19970428123641/http://www.math.utsa.edu:80/ecz/1_p.html

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 161-190

I Nuclei di Ricerca Didattica nella seconda metà del XX secolo

Contributo dei Pedagogisti-Didattici per un insegnamento della matematica coronato da interrelazioni con le altre discipline

Ferdinando Casolaro*

*Presidente ANFSU "R. Caccioppoli" - ferdinando.casolaro@gmail.com

Sunto*: Nel proporre un'analisi dei mutamenti all'approccio didattico conseguente all'avvento della tecnologia, che è influenzata oggi in modo eccessivo dall'Intelligenza Artificiale, si presentano alcune riflessioni di pedagogisti che hanno operato nei Nuclei di Ricerca Didattica della matematica istituiti nelle Università italiane nella seconda metà del secolo scorso. Saranno evidenziate sia le indicazioni per un insegnamento della matematica con vari riferimenti alle altre discipline ed agli eventi in itinere nel mondo che ci circonda, sia l'esigenza dell'ampliamento del modello euclideo ad altre geometrie che sono alla base della Fisica moderna (geometrie sullo spazio curvo), dell'Arte e dell'Architettura (proiettiva e descrittiva).*

Parole Chiave: *Didattica, interdisciplinarità, pedagogisti, conquiste civili*

Abstract*: In proposing an analysis of the changes in teaching approaches resulting from the advent of technology, which is now excessively influenced by Artificial Intelligence, we present some reflections by pedagogists who worked in*

the Mathematics Teaching Research Units established in Italian universities in the second half of the last century. We will highlight both recommendations for teaching mathematics with various references to other disciplines and to ongoing events in the world around us, and the need to expand the Euclidean model to other geometries that form the basis of modern physics (geometries on curved space), art, and architecture (projective and descriptive).

Keywords: *Teaching, interdisciplinarity, pedagogy, civil conquests*

1 – Introduzione

Negli ultimi quaranta anni del secolo scorso - dagli anni 'Sessanta' al duemila - hanno operato nelle Università italiane i Nuclei di Ricerca Didattica della Matematica, in collaborazione con docenti di Scuola secondaria, al fine di aggiornare l'insegnamento allo sviluppo scientifico e tecnologico del tempo.

L'evoluzione culturale di quel periodo è stata abbastanza ricca, sia con lo sviluppo della fisica dopo i risultati sulla Teoria della Relatività e della Meccanica Quantistica dell'inizio del secolo, sia alla luce dei cambiamenti storico-politici avvenuti dopo il secondo conflitto mondiale.

Nei paragrafi che seguono richiamerò indicazioni e suggerimenti di alcuni esponenti della Comunità matematica che operavano nella Scuola e nelle Università italiane in quel periodo, che avrebbero meritato maggiore attenzione nei decenni successivi.

Mi riferisco in particolare alla lettura del mondo che cambiava attraverso la tecnologia ed all'impegno nel sociale che, al di là della disciplina che un docente insegnava, ha contribuito alla conquista dei diritti civili nel trentennio

centrale dell'ultimo mezzo secolo (dall'inizio degli anni 'Sessanta' alla fine degli anni 'Ottanta'), a cui farò riferimento in appendice a calce di questo lavoro.

Uno degli obiettivi della mia proposta, per un insegnamento moderno e costruttivo, è quello di partire dall'interdisciplinarità individuale.

Precisamente, nel dialogo con gli studenti, l'apertura di un docente alle tematiche 'oltre la propria disciplina' è la base per un reale insegnamento interdisciplinare, da realizzare poi attraverso la collaborazione con altri docenti (F. Casolaro, G. Della Vecchia, 2018).

A tal proposito, sono fermamente convinto che, con i drammatici eventi di oggi (guerre, pandemia, genocidi, … ecc.), un docente non può stare in silenzio e non può evitare democratici dibattiti e informazioni con i propri studenti sul futuro che si sta costruendo per le nuove generazioni.

2 – Dalla Riforma Gentile al Progetto Brocca

L'evoluzione dei programmi nelle Scuole secondarie di secondo grado dalla riforma Gentile (1923) all'istituzione della Commissione Brocca (1988).

Nel periodo 1923-1945 i programmi per le scuole secondarie di secondo grado erano rimasti fermi alla riforma Gentile.

Nel 1945 una Commissione nominata dai governi delle potenze vincitrici della Seconda guerra mondiale formulò dei piani di studio destinati a sostituire quelli di epoca gentiliana.

Nel 1950 la *Comunità matematica italiana* diede inizio a nuovi piani di studio, tenendo anche conto delle esperienze maturate in altre nazioni, in particolare in Francia, Belgio e Inghilterra (F. Casolaro, 2014).

Nel periodo 1960-1990 furono elaborate tre consecutive proposte di modifica della riforma Gentile.

1) ***1961-1962 - Prima modifica alla riforma***. Relativamente alla matematica, furono istituite dalla Commissione scientifica, nominata dal Ministro dell'istruzione Giacinto Bosco, le "*classi pilota*" nelle quali si affrontavano temi di "*matematica moderna*" e l'anno successivo (Ministero Luigi Gui, 1963) fu nominata una Commissione UMI-CIIM ("*Commissione di Frascati*" perché si riuniva a Frascati) che ebbe il compito di elaborare nuovi programmi di matematica per i licei.

I programmi di Frascati presentano un primo ampliamento nella trattazione della geometria rispetto alla impostazione euclidea (A. Morelli, 1985): per il terzo anno si parla di *piano vettoriale geometrico* (due dimensioni) e di gruppi delle congruenze e delle similitudini del piano, per il quarto anno si passa allo *spazio vettoriale geometrico* (tre dimensioni) e per il quinto anno si parla di *spazio vettoriale astratto* (non rappresentabile graficamente ma con forte significato nell'intuizione logica).

2) ***1985 - Seconda modifica alla riforma dei programmi di matematica.*** Piano Nazionale per l'Informatica (PNI), promosso nel 1985 dal ministro della Pubblica Istruzione Franca Falcucci.

Fu costituito un Comitato ristretto di cui faceva parte, per l'area matematica, Giovanni Prodi.

L'attuazione del piano ebbe inizio con la formazione iniziale di un gruppo di formatori, che a loro volta contribuivano alla formazione dei docenti in attività.

3) ***1988 - Terza modifica alla riforma.*** Il ministro della P.I. Giovanni Galloni istituì una Commissione col compito di procedere alla revisione dei programmi dei primi due anni dell'istruzione secondaria di secondo grado.

Successivamente la medesima Commissione fu incaricata di estendere il lavoro anche ai programmi del triennio.

Coordinatore dei lavori fu nominato il sottosegretario alla Pubblica Istruzione Beniamino Brocca, da cui il nome "*Commissione Brocca*".

2.1 – Prima modifica 1962. Istituzione della Scuola Media Unificata

La prima *proposta di modifica della riforma Gentile*, iniziata nel 1962, ha avuto un'importanza epocale perché rientrava in essa l'istituzione della Scuola Media Unificata, che poneva fine al percorso di Avviamento, considerata la Scuola dei poveri, che imponeva ai ragazzi che desideravano continuare gli studi di sostenere un esame integrativo di Italiano e Matematica per accedere all'Istituto Tecnico e non permetteva in alcun caso di accedere ai corsi liceali.

Le conseguenze di questa legge portarono successivamente a decretare altri benefici, come la possibilità di frequentare alcune facoltà universitarie per gli studenti non provenienti dai Licei. In particolare, i diplomati degli Istituti Tecnici

Industriali ebbero accesso alle Facoltà di Ingegneria e di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, i diplomati degli Istituti Commerciali potevano accedere alla facoltà di Economia e Commercio.

La legge che sanciva la fine di questa discriminazione è dovuta al deputato Tristano Codignola[1], responsabile dell'Istruzione pubblica del Partito Socialista che, per la prima volta, appoggiava dall'esterno un governo a guida democristiana presieduto da Amintore Fanfani.

La Comunità matematica diede il suo contributo anche di carattere sociale, attraverso dibattiti nelle Università, nelle Scuole e nelle Associazioni scientifiche, di cui le più significative, già da allora, erano la Mathesis, la CIIM e l'UMI.

Tra i tanti esponenti che facevano sentire la propria voce, mi limiterò ad un breve richiamo di significative indicazioni di matematici-pedagogisti, dai quali - da giovane professore negli anni 'Settanta e Ottanta' - ho avuto la possibilità di attingere conoscenze attraverso convegni ed attività Mathesis, oltre a sporadiche partecipazioni a convegni UMI.

Lucio Lombardo Radice[2] e Bruno de Finetti[3] furono protagonisti assoluti nei rapporti con le istituzioni politiche e

[1]Tristano Codignola (1913-1981) è stato un politico, editore e giornalista italiano. Fu deputato all'Assemblea Costituente e senatore per il Partito Socialista.

[2]Lucio Lombardo Radice (1916-1982) è stato un matematico, pedagogista, politico, dirigente comunista italiano.

[3] Bruno De Finetti (1906-1985) è stato un matematico e statistico italiano, noto soprattutto per la formulazione della concezione soggettiva operazionale della probabilità.

con la base di Scuola e Università costituita da docenti e studenti.

Giovanni Prodi, Emma Castelnuovo, Vinicio Villani, … ed altri hanno lasciato proposte che avrebbero meritato approfondimenti e riflessioni, ma le loro indicazioni sono state frenate dai successivi eventi politici sui quali mi soffermerò nei prossimi paragrafi.

2.2 – Lucio Lombardo Radice

Nel 1963 Lucio Lombardo Radice, matematico che più di altri ha sottolineato i limiti del Modello euclideo attraverso riflessioni sugli ampliamenti alla Geometria Proiettiva ed alla Geometria Affine, avviò un dibattito sulla formazione degli insegnanti dalle pagine di "Riforma della Scuola", che alimentò nei mesi successivi ben 15 repliche da pedagogisti, docenti e cultori di tutte le discipline (Lombardo Radice 1963, pag. 8):

Insegnare - dice Lucio - *è un mestiere bellissimo, artigianale ma che richiede certamente una nuova formazione dei docenti. Questi, infatti, sono chiamati a rinnovare la didattica scolastica, dando spazio ad attività culturali sollecitate dagli interessi degli studenti* (secondo l'orientamento attivistico interpretato dalla pedagogia laico-progressista italiana di quegli anni) *e realizzate con quello spirito comunitario che trasformi la scuola in una Comunità di esperienza vitale, dove*

- *l'insegnante di lingue si fa regista di recite,*
- *il professore di scienze è segretario di un circolo naturalistico,*

- il professore di materie letterarie organizza letture e dibattiti, mentre il suo collega pittore o musicista cura la mostra o il concerto.

Questo concetto fu ripetuto in un articolo successivo in cui ribadisce:

Insomma, attività che rendano lo studente parte attiva del processo di apprendimento, nell'ambito di una idea di formazione non più trasmissiva bensì attiva, dove i voti vengano ridotti "per quantità, per frequenza, per peso nella vita della classe; insegnanti e alunni debbono essere serenamente attivi, liberi dalla preoccupazione, dall'incubo del 'voto" (Lombardo-Radice, 1964).

Lucio è stato allievo di Guido Castelnuovo e Federigo Enriques, dai quali ha ereditato alcuni dei valori che ha manifestato in tutto il suo percorso professionale.

Per la sua duttilità di conoscenze, che andava oltre la matematica e la fisica, fu uno dei maggiori esponenti della cultura italiana nei decenni successivi al secondo conflitto mondiale.

Politico, con militanza attiva nel Partito Comunista negli anni del dopoguerra, già precedentemente nel 1939 non poté prendere servizio come assistente alla cattedra di Geometria analitica perché fu arrestato e condannato a quattro anni di reclusione, in quanto oppositore al regime fascista (Casolaro, Cirillo, 2018).

Solo nel 1945 fu ammesso come assistente all'Università "La Sapienza" di Roma e fu l'inizio di una brillante carriera come professore universitario.

I suoi poliedrici interessi si intravedono in tutta la produzione culturale-scientifica che ha lasciato. Tra i matematici di quel periodo, Lombardo Radice fu tra i più convinti propositori per l'insegnamento di una geometria più ampia rispetto al modello euclideo, come si evince dal volume prodotto con Lina Mancini Proia "Il metodo matematico" che fu adottato in tante scuole.

Si dedicò con successo alla divulgazione scientifica e matematica, ma contemporaneamente fu pedagogista, didatta e, in qualità di scrittore, fu autore di libri di giochi per bambini e ragazzi.

Partecipò a programmi radiofonici e trasmissioni televisive, di cui è particolarmente significativa la collaborazione con la RAI, tra il 1970 e il 1973, in qualità di consulente scientifico, per il film in tre puntate "Non ho tempo", incentrato sulla figura di Évariste Galois.

Nel film, lo stesso Lucio recitò nel ruolo del professor Louis Paul Émile Richard[4], universalmente riconosciuto come maestro di Galois (F. Casolaro, 2022, pag. 62).

Negli anni Cinquanta è stato il fondatore del "Movimento dei Partigiani per la Pace". Il Movimento, nato in Francia nel 1949 e riportato in Italia da Lucio due anni dopo, si sviluppava principalmente nelle manifestazioni, a cui aderivano esponenti della cultura e cittadini comuni, che si svolgevano in molte parti d'Europa.

[4] Louis Paul Émile Richard (1745-1849) è stato un matematico francese e insegnante al Collège Louis-le-Grand. Fu uno degli insegnanti di Évariste Galois.

Significativo il Congresso Mondiale dei Partigiani della Pace nel marzo 1950 a Stoccolma, in cui riuscì a partecipare il poeta Pablo Neruda dopo tante peripezie negli spostamenti, perché il governo cileno gli aveva negato il visto per lasciare il Cile in quanto aderente al Partito Comunista.

Alla manifestazione, presieduta ed introdotta da Frédéric Joliot-Curie, con il manifesto del congresso rappresentato dalla famosa "Colomba della Pace" disegnata da Picasso, parteciparono anche Renato Caccioppoli, Albert Einstein, Pietro Nenni, Renato Guttuso, Salvatore Quasimodo, Natalia Ginzburg, ... ed altri esponenti significativi della cultura italiana e internazionale.

2.3 – Bruno de Finetti

Bruno de Finetti, Presidente Mathesis dal 1970 al 1981, affermava l'opportunità di ritornare ad un tipo di insegnamento che stimolasse ed esercitasse maggiormente le facoltà intuitive degli allievi.

Con de Finetti rinacque nel 1972 «Il Periodico di Matematiche» del quale, per difficoltà principalmente di natura economica, la Zanichelli aveva sospeso la pubblicazione dal numero 1-2 del 1970.

Bruno de Finetti riteneva che la pubblicazione della rivista fosse necessaria per il miglioramento della preparazione alla didattica dei docenti di Matematica perché permetteva, anche attraverso l'articolazione delle sezioni, un continuo scambio di esperienze e riflessioni sui contenuti essenziali per un insegnamento non caratterizzato da ripetizioni di nozioni assimilate durante il percorso di studi, ma mai messe in discussione.

Il primo numero della rivista uscì come notiziario sotto forma di ciclostilato, ma già dal numero successivo de Finetti pensò di trasformarlo in una rivista di natura didattica che riflettesse soprattutto sulle proposte delle varie sezioni della Mathesis, ma anche sulle risultanze delle novità che sarebbero successivamente emerse dai Nuclei di Ricerca. Pertanto, dal 1972 il «Periodico di Matematiche» diventò l'organo ufficiale della Mathesis (B. Rizzi, 1995).

Il primo numero del 1972 si apriva con un editoriale di de Finetti in cui si elencavano i temi principali che sarebbero stati trattati in ogni numero del Periodico dando risalto principalmente a problemi di carattere educativo e scolastici in generale.

All'editoriale seguiva il primo articolo dal titolo "*La Mathesis e l'ansia di rinnovamento nella Scuola*" in cui de Finetti scriveva del matematico tedesco Felix Klein che fu profondo cultore di didattica della matematica e colui che ebbe l'intuizione di collegare le Geometrie alla teoria dei Gruppi (secondo la concezione di Jordan) - individuando nei Gruppi di Trasformazioni il nocciolo centrale comune a tutte le geometrie che si erano sviluppate nel XIX secolo (F. Casolaro "Il Programma di Erlangen" in Cundari 1997, pag. 101).

Nel riconoscere a Klein la genialità delle proprie idee ed il contributo allo sviluppo delle geometrie non euclidee, de Finetti citava un brano in cui Klein analizza e fa un confronto sullo stato dell'insegnamento della matematica nei vari paesi europei (B. de Finetti, 1972).

Alla citazione sullo stato dell'insegnamento medio in Italia, de Finetti sottolinea che

> *negli ultimi tempi si fanno valere tendenze di riforma che, nel senso dei movimenti tedesco e francese, rifiutano la considerazione della logica astratta e la "angusta aderenza alla materia di Euclide", e intendono vivificare l'insegnamento mediante momenti intuitivi e mediante il riferimento alle applicazioni.*

Riguardo queste nuove tendenze, richiama esplicitamente il contributo di Emma Castelnuovo[5] alla crescita della Mathesis negli anni 'Settanta', che per lui significava maggiore avvicinamento dei docenti all'interesse di migliorare la didattica della matematica.

Di Emma Castelnuovo de Finetti apprezzava molto le modalità di insegnamento, tanto che fece in modo che la propria figlia Fulvia avesse come insegnante di Matematica proprio Emma, per l'originalità e l'ampiezza delle sue idee sull'esigenza di insegnare una Geometria dinamica e aderente all'evoluzione del mondo reale.

L'impegno di Bruno de Finetti, che più di tutti ha indicato l'applicazione della logica e del rigore della matematica alla vita di tutti i giorni, andava oltre lo studio e la divulgazione della Matematica.

Egli era molto attento ai problemi di carattere sociale con particolare attenzione alle esigenze degli studenti. Militante nel Partito Radicale, ha ricoperto il ruolo di responsabile della testata giornalistica 'Notizie radicali', dove pubblicava articoli di denuncia, cosa che gli comportò nel 1977 anche qualche ora

[5] Emma Castelnuovo è stata un'insegnante e matematica italiana, figlia del matematico Guido Castelnuovo. Ha dato significativi contributi alla didattica della matematica, rivoluzionando completamente il modo di insegnare la geometria.

in carcere con un arresto "per l'istigazione dei militari alla disobbedienza".

Era il periodo dei Movimenti degli studenti nelle Scuole e nelle Università. Lo stesso de Finetti così descriveva l'episodio[6]:

> *Fui arrestato il 18-11-1977 al termine della cerimonia inaugurale dell'anno accademico ai Lincei; condotto in questura e quindi al carcere di Regina Coeli, si seppe che l'ordine di cattura sarebbe stato revocato e appena ne giunse conferma ufficiale fui rilasciato. La stampa diede molto risalto a tale notizia ed anche la TV trasmise interviste fattemi prima dell'arresto. È evidente che l'arresto rappresentava solo uno scoop pubblicitario per le forze dell'ordine che miravano a dimostrare il loro impegno senza guardare in faccia a nessuno.*

2.4 – Emma Castelnuovo

Emma Castelnuovo figlia del matematico Guido e nipote di Federigo Enriques, vinse la cattedra di insegnante di scuola media nell'agosto del 1938 ma, essendo di religione ebraica, alcuni giorni dopo venne sospesa dal servizio a causa delle leggi razziali che costrinsero anche la famiglia Castelnuovo a rifugiarsi presso amici, ospedali, istituti religiosi per sfuggire ai rastrellamenti nazi-fascisti.

---

[6] Particolari e riflessioni di Bruno de Finetti sulla vicenda del suo arresto in F. Casolaro-L. Cirillo "Cinquant'anni di attività della Mathesis" sono stati gentilmente forniti dalla figlia Fulvia de Finetti

Reintegrata in servizio solo dopo la guerra, ha insegnato presso la scuola media *Torquato Tasso* di Roma fino al 1979. Nel 1948 ha pubblicato la prima di varie edizioni del libro *Geometria intuitiva*.

Per tutta la vita, oltre all'insegnamento sempre nella stessa scuola, ha svolto una continua attività di ricerca in didattica della matematica, in collaborazione in Italia con le Università attraverso i Nuclei di Ricerca e all'estero su inviti a divulgare le proprie metodologie, che ha prodotto oltre cento articoli sulle più importanti riviste nazionali e internazionali.

I suoi testi di didattica sono stati tradotti in altre lingue e usati nelle scuole, specialmente dei paesi di lingua spagnola.

Nel 1978 e nel 1980 viene inviata dall'UNESCO in Niger per insegnare in una classe corrispondente alla terza media italiana.

Emma, convinta che la geometria non dovesse essere astratta ma concreta, sintetizzata le proprie idee con il seguente concetto: *Quando si inizia lo studio della Geometria, si deve attirare l'attenzione sulla realtà che ci circonda: l'area dei campi, i perimetri, la realtà; si deve poter osservare, misurare*.

I testi in commercio non aiutavano i suoi allievi; erano manuali con poche figure, carichi di formule ed esercizi, per cui Emma - che aveva deciso di insegnare esclusivamente nella Scuola media - cominciò a scrivere basandosi sulle sue esperienze in classe (R. Natalini, 2004).

2.5 – Seconda modifica alla riforma dei programmi di matematica. Piano Nazionale per l'Informatica

Nel 1985 fu introdotta dall'allora Ministro della Pubblica Istruzione Franca Falcucci la seconda modifica ai programmi Gentile del 1923 con la sperimentazione del P.N.I. (Piano Nazionale dell'Informatica).

Con il P.N.I. l'insegnamento della Matematica è stato affiancato dagli strumenti informatici e dall'uso del computer.

Per l'attuazione del Progetto fu costituito un Comitato ristretto di cui faceva parte, per l'area matematica Giovanni Prodi[7], per l'area linguistica Tullio De Mauro[8], che saranno anche tra gli esponenti più significativi della stesura del Progetto Brocca, la successiva terza modifica alla riforma Gentile.

Il Comitato stabilì una programmazione che ebbe inizio con la formazione iniziale di un gruppo di formatori, che a loro volta contribuivano alla formazione dei docenti in attività.

La presenza delle nuove tecnologie nel sistema educativo andò in vigore dall'inizio degli anni 'Novanta' e diventò una realtà sempre più in rapida espansione che oggi coinvolge tutte le discipline, contribuendo ad allargare e diffondere i

---

[7] Giovanni Prodi (1925-2010) è stato un matematico italiano. È noto anche per le sue molteplici attività riguardanti l'insegnamento della matematica e per l'impegno politico come assessore all'istruzione, prima del comune di Trieste (inizio anni 'Sessanta') e più tardi nel comune di Pisa (1970).

[8]Tullio De Mauro (1932-2017) è stato un importante linguista, lessicografo e saggista italiano. È stato Ministro della Pubblica Istruzione nel governo Amato II dal 2000 al 2001 e, precedentemente, consigliere ed assessore alla Cultura della regione Lazio, eletto come indipendente del Partito Comunista nel periodo 1976-1980

paradigmi fondamentali che investono la Comunicazione e forniscono ai docenti, non solo di materie tecniche e scientifiche, strumenti didattici avanzati.

Relativamente alle applicazioni della Geometria furono strutturati programmi applicativi di tecniche informatiche sempre più sofisticati quali Cabry, GET, CAD, …, fino al software di geometria dinamica 'Geogebra' utilizzato oggi da docenti di ogni disciplina.

2.6 – Terza modifica alla riforma dei programmi di matematica. Progetto 'Brocca'

Con la terza modifica - Progetto Brocca - l'informatica diventa patrimonio dei docenti di tutte le discipline.

Nel 1988 il ministro della P.I. Giovanni Galloni istituì una Commissione col compito di procedere alla revisione dei programmi dei primi due anni dell'istruzione secondaria di secondo grado e successivamente la medesima commissione fu incaricata di estendere il lavoro anche ai programmi del triennio.

A tal proposito fu inserito, parallelamente al piano di studio "*Brocca*", un Progetto sulle *interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno*, destinato inizialmente ai docenti delle due discipline, col compito di addestrare successivamente i docenti di tutte le discipline all'utilizzo delle nuove tecnologie.

Il Progetto - redatto e costruito nel periodo 1990-1993 - fu coordinato da Cesare Cundari[9] per il Disegno e da Bruno

[9] (1941-2023) Ordinario di Disegno dell'Architettura alla facoltà di Architettura dell'Università "*La Sapienza*" di Roma.

Rizzi[10] per la Matematica (C. Cundari, 1997) ed aveva come obiettivo:

- per il disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI',...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;

- per la matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la Geometria Proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università.

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, fu incaricato il sottoscritto, Ferdinando Casolaro, le cui risultanze sono in bibliografia (F. Casolaro in C. Cundari, 1997) alle pagine 73-78; 85-118; 205-268.

Il Progetto 'Matematica e Disegno', delineato dopo tanto studio e ricerca dei collegamenti con le altre discipline scientifiche, doveva essere principalmente il trampolino di lancio per l'ammodernamento dell'insegnamento della Geometria che doveva tener conto della nuova visione del mondo.

A tal proposito, la Direzione Generale per l'Istruzione Tecnica affidò ai proff.ri Cesare Cundari e Bruno Rizzi il compito di selezionare tredici Scuole Polo localizzate in cinque regioni (Lombardia, Emilia Romagna, Lazio, Umbria, Abruzzo, Campania) alle quali, successivamente, fu aggiunta la Calabria con un ITG nella cittadina di Soverato.

---

[10] (1935-1995) Ordinario di Analisi Matematica alla facoltà di ingegneria della Terza Università di Roma.

L'obiettivo, come accennato sopra, era quello di addestrare formatori che avrebbero avuto il compito di divulgare le risultanze del Progetto nelle Scuole del proprio territorio; questi nuovi esperti avrebbero dovuto a loro volta formare altri docenti per allargare la conoscenza delle tematiche all'interno delle Scuole di altri territori.

Furono incaricati - e distaccati al Ministero per essere inviati a tenere seminari con cadenza settimanale nelle tredici Scuole Polo - i tre coordinatori che avevano strutturato il Progetto già dai primi seminari del 1990: il sottoscritto Ferdinando Casolaro, docente di matematica all'ITG "Della Porta" di Napoli, per la divulgazione della parte matematica con l'ampliamento del Modello euclideo ad altre geometrie, l'architetto Clelia De Lucia, docente di Disegno e Costruzioni all'ITG "Martino" di Roma per l'insegnamento del Disegno e le applicazioni a materie affini (Tecnologia, Costruzioni, Estimo) e l'ing. Gabriella Corbo, docente di Sistemi all'ITI "Pascal" di Roma, per le proposte interdisciplinari relative all'insegnamento dell'Informatica.

Entrambi i programmi 'Brocca' e 'Matematica e Disegno' furono pubblicati dal M.P.I. e furono distribuiti ai docenti operanti nelle classi sperimentali, ma - come affermò Giovanni Prodi - *non furono mai resi disponibili al pubblico attraverso i normali canali commerciali. I piani di studio Brocca, sempre in riferimento alla matematica, hanno recepito molte delle indicazioni dei programmi di Frascati e del PNI, in particolare ciò che riguarda la geometria, e più specificamente la geometria basata sulle trasformazioni geometriche* (Giovanni Prodi).

3 - Dalle proposte Berlinguer alla riforma Moratti

Siamo a cavallo del terzo millennio e l'analisi di Giovanni Prodi (*non furono mai resi disponibili al pubblico attraverso i normali canali commerciali*), da cui si evince l'abbattimento totale di decenni di studio e lavoro all'interno dei dipartimenti scientifici delle Scuole e dei Nuclei di Ricerca delle Università, si giustifica con i successivi cambiamenti politici nella direzione della Scuola attraverso il passaggio dal ministro Luigi Berlinguer del primo governo Prodi e del successivo governo D'Alema (1996-2000) al ministro Moratti del secondo governo Berlusconi (2001-2006), collegati da un breve periodo ministeriale di Tullio De Mauro.

Luigi Berlinguer, che pure aveva eliminato alcuni tasselli della sperimentazione Brocca, come l'aumento del numero di materie da studiare in alcuni indirizzi scolastici, era convinto che si dovesse combattere senza tregua la dispersione scolastica, per cui riteneva fondamentale un aumento degli investimenti sulla formazione.

Da qui l'idea di tenere aperti gli istituti per tutto il giorno, con la necessità di costruire anche nei sistemi formativi una dimensione europea. Del resto in alcune nazioni (in particolare in Francia e negli ex satelliti dell'Unione Sovietica) le tematiche su indicate per la didattica erano in atto già da decenni (F. Casolaro in C. Cundari, 1997, pag. 101).

A tal proposito, il ministro riteneva che per la Comunità scolastica l'Europa doveva fare di più per uniformare la formazione, rendere più facile la mobilità, costruire una maggiore integrazione tra i sistemi scolastici.

La Riforma Moratti, iniziata nel 2002 e attuata nel 2003, che ha introdotto cambiamenti nell'ordinamento scolastico italiano con alcuni passaggi di ritorno alla scuola gentiliana (primo tra tutti l'istituzione del maestro unico nella scuola elementare), è stata accompagnata da tagli ai finanziamenti per la scuola pubblica, tagli che la ministra giustificava con la necessità di ridurre il deficit pubblico, ma che in realtà finanziavano la scuola privata, diventata paritaria con il decreto legge del marzo 2000.

4 – Indicazioni emerse dai Nuclei di Ricerca Didattica sull'insegnamento della geometria

Già nell'aprile 1979, il V° Convegno Nazionale della Didattica della Matematica fu principalmente dedicato all'insegnamento della geometria.

Allora emersero le tendenze e le scelte dei Nuclei di Ricerca Didattica che operavano in varie Università.

Il prof. Alberto Conte[11] nella sua relazione introduttiva notava già in quella occasione, con una certa amarezza, che *la geometria nelle scuole medie (attuali secondarie di primo e secondo grado) si insegna sempre di meno*.

Purtroppo, ciò è senz'altro vero ancora oggi, addirittura nei licei scientifici, la geometria dello spazio è di fatto esclusa (anche se non ufficialmente) da quasi tutti i docenti; ciò va

[11] Alberto Conte (Asti, 1942) è un matematico italiano. È stato docente ordinario di Geometria Superiore nell'Università di Torino. Ha inoltre svolto l'incarico di consigliere comunale della Città di Torino dal 1985 al 1990.

spiegato con la complessità del problema che fa preferire argomenti più facili e più di moda.

Personalmente ritengo che, in passato (oggi si fa copia-incolla da internet), la difficoltà che gli studenti avevano nell'affrontare la geometria dello spazio fosse dovuta alla mancanza delle conoscenze di tecnica del disegno: nei licei classici e negli istituti tecnici e professionali per il commercio non è stato mai previsto lo studio di questa disciplina.

Le nuove tendenze, che in quegli anni si sono affermate nella concezione dello sviluppo della Matematica, hanno interessato sicuramente la geometria elementare, ma si è cercato anche un primo approccio ai modelli non euclidei.

Si è accentuato il bisogno di rigore logico e di chiarezza di impostazione e si è sviluppata la ricerca delle idee unificanti attraverso le strutture algebriche che sono alla base delle varie teorie (A. Morelli, 1985).

L'obiettivo principale nello studio della geometria elementare è stato individuato nella scoperta della struttura di *spazio vettoriale* insita nel piano euclideo (F. Casolaro, 2002)

Anzi, è stato proposto, in particolare dal matematico francese Jean Dieudonné (1906-1992), di insegnare la "*geometria piana*" partendo dall'assioma unico:

Il piano è uno spazio vettoriale di dimensione due, dotato di prodotto scalare commutativo (F. Casolaro in C. Cundari pag. 101-118).

La convinzione di Dieudonné è anche mia, anzi l'ho proposta già dai miei primi anni di insegnamento con l'adozione del testo - adottato da molti docenti negli anni 'Settanta' e 'Ottanta' - "*Il metodo matematico*" di Lina Mancini Proja-Lucio Lombardo Radice.

L'impostazione con la presentazione del piano come 'spazio vettoriale dotato di prodotto scalare commutativo' è alla base di un Modello Geometrico per la comprensione dello spazio fisico in chiave moderna (F. Casolaro, R. Prosperi 2019).

Nel testo citato, di Mancini Proja-Lombardo Radice, è esplicitamente detto: *la geometria euclidea è fondata proprio su un'assiomatica a base metrica; però si rinuncia a dichiarare subito in modo esplicito il sistema di assiomi, rimandando alla fine del testo il discorso chiarificatore sul metodo assiomatico e sulle diverse geometrie. Si preferisce far leva sulle capacità intuitive degli allievi e si rilevano due caratteristiche comuni alle trattazioni moderne:*

1) *Lo studio e l'utilizzazione delle Trasformazioni geometriche con la scoperta delle strutture algebriche ad esse collegate: gruppo e spazio vettoriale* (F. Casolaro, A. Rotunno, 2015).

2) *La considerazione e l'utilizzazione del riferimento cartesiano*.

Su questi due punti - Trasformazioni geometriche e piano cartesiano - sarebbe opportuno riflettere sulle indicazioni di Giovanni Prodi che, con le sue lezioni su "La sperimentazione", descritte nel libro *'Matematica come scoperta'*, investiva tutte le discipline nessuna esclusa.

In particolare, Prodi - condiviso da Emma Castelnuovo, Tullio Viola e dallo stesso de Finetti - sottolineava l'esigenza di un insegnamento dinamico che partisse dall'anticipazione della geometria analitica rispetto alla risoluzione di equazioni e disequazioni di secondo grado, convinto che lo strumento delle '*trasformazioni del piano*' è molto più potente rispetto alle rappresentazioni analitiche. Riporto una sua dichiarazione relativamente a quanto sopra: *la componente visiva di un grafico*

rende molto più agile e significativa questa parte dell'algebra e saper leggere un grafico è parte essenziale della vita di un cittadino.

Personalmente sono molto attento a queste riflessioni in quanto nel mio percorso professionale, su insegnamento del prof. Aldo Morelli, ho sempre anticipato la visualizzazione grafica a formule e tecnicismi.

5 - Conclusioni

Allo sviluppo delle idee su un ammodernamento dell'insegnamento della matematica, contribuivano anche gli studi sugli approfondimenti di altre discipline.

Oltre ai personaggi citati, che sono stati i più significativi, nell'ambito dei Nuclei di Ricerca, operavano a pieno titolo Aldo Morelli, Angelo Fadini, Bruno Rizzi, Francesco Speranza e, tra i viventi, Franco Eugeni, Luigi Tomasi, … ed altri, compreso il sottoscritto.

Relativamente alle interrelazioni con le altre discipline, è stato significativo - negli anni 'Ottanta-Novanta' - il contributo di Bruno D'Amore, tra i primi pedagogisti ad organizzare Seminari, Convegni e Manifestazioni (in atto ancora oggi) con i docenti di ogni ordine e grado, al fine di introdurre nella Scuola le riflessioni sulle interrelazioni tra Matematica e Letteratura.

Da non trascurare le sollecitazioni di Vinicio Villani[12] che, dalla sua esperienza di professore di discipline matematiche nella facoltà di Medicina e di Presidente della CIIM prima e dell'UMI dopo, ha trattato in vari convegni le interrelazioni con la biologia, la chimica, l'anatomia per l'approfondimento della ricerca medica.

Le sollecitazioni del prof. Villani, che si ritrovano nel testo *Matematica per discipline Bio-Mediche*, sarebbero oggi attuali per le varie problematiche relative all'inquinamento ambientale ed ai continui focolai di infezioni ai quali siamo sottoposti da alcuni anni.

Ma l'impegno di Vinicio Villani per la didattica della matematica è stato molto più concreto e continuo di quanto viene ricordato. A tal proposito, cito alcune sue osservazioni emerse in un'intervista concessa al prof. Angelo Guerraggio nel giugno 2004, da cui emergono alcune interessanti citazioni ai contributi dei matematici che ho richiamato in questo mio lavoro (A. Guerraggio, 2004).

Alla domanda di Guerraggio sull'impegno per la didattica in quei decenni: "Siamo quindi nel clima del 'Sessantotto' o nelle sue immediate vicinanze"…., Villani risponde:

[12] Vinicio Villani (1935-2018) è stato un matematico italiano che si è occupato anche di didattica della matematica e della geometria. Dal 1974 al 1979 è stato presidente della Commissione italiana per l'insegnamento della matematica (CIIM). Dal 1982 al 1988 è stato presidente dell'UMI-Unione matematica italiana

Beh, sì. È stato questo nuovo clima culturale e politico, questo desiderio di rinnovamento, sia pure confuso e pieno di contraddizioni, a decidere o a intensificare il mio "impegno" - come si diceva allora - e quello di altri Colleghi. Capivamo che, dietro le proteste degli studenti e dietro il disorientamento degli insegnanti, c'erano esigenze giuste e sacrosante. Ma non potevamo assolutamente accettare che portassero alla negazione e alla distruzione della scuola, della cultura, dello studio. Bisognava rimboccarci le maniche, per interloquire - anche da posizioni diverse - con il mondo studentesco.

Già nel 1963 il Ministero della P.I. aveva istituito un certo numero di "classi pilota", per sperimentare un insegnamento di stampo bourbakista, incentrato sulle strutture basilari della Matematica (in analogia con quanto negli stessi anni veniva tentato in Francia e in Belgio).

Nel 'Sessantotto' ferveva in ambito matematico la polemica pro o contro questa impostazione. Più in generale, si discuteva animatamente sulle finalità (culturali? professionali? utilitaristiche?) dell'insegnamento della nostra disciplina.

In questo clima di aspirazione ad una qualche forma di rinnovamento della scuola, fui coinvolto in varie iniziative di un'UMI che, attraverso la CIIM, svolse un ruolo importante nell'elaborazione dei nuovi programmi della scuola media (1979), della scuola elementare (1985) e - all'inizio degli anni 'Novanta' - del Piano Nazionale dell'Informatica, della Commissione Brocca, ecc.

Anni di impegno e di buon lavoro, penso di poterlo dire senza eccessiva nostalgia e benevolenza verso il passato.

In questo clima riflettevamo su che cosa e come insegnare in un modo nuovo, adeguato ad una società che stava cambiando velocemente. Avevamo - ciascuno di noi - un "gruppetto" di insegnanti con i quali collaboravamo e con cui verificavamo "in diretta" la bontà o meno delle nostre impostazioni.

Ma avevamo capito che il libro di testo è uno strumento essenziale, per la diffusione delle idee in tema di insegnamento. A Pisa c'eravamo Giovanni Prodi e io. A Roma c'era Emma Castelnuovo, Lucio Lombardo-Radice e Bruno de Finetti. Quest'ultimo si è poi defilato - insofferente com'era delle "commissioni" e del loro lavoro, soprattutto burocratico e rituale - ma ha avuto un ruolo molto attivo in quelli che sono noti come "programmi di Frascati".

Ricordo che era contrario - proprio lui! - all'inserimento della Probabilità nell'insegnamento medio. Diceva che o la si insegna bene - e questo non, sarebbe stato possibile nella scuola - o, altrimenti, meglio lasciar perdere (A. Guerraggio,2004).

L'intervista completa, che sembra addirittura un sunto di quanto da me esposto nei precedenti paragrafi, si trova anche su Wikipedia alla voce: "*A colloquio con Vinicio Villani sui libri di testo (di Angelo Guerraggio)*".

6 – Appendice

Concludo questo lavoro con una mia riflessione che sicuramente non è da tutti condivisa, ma trova riscontro nell'evoluzione degli eventi politico-sociale di questi primi decenni del terzo millennio.

L'Italia degli anni Cinquanta era abbastanza classista ed erano pochi i figli delle classi più deboli ad accedere ai livelli più alti di studio come l'Università.

Come dettagliato nel paragrafo 2.1 di questo lavoro, già all'inizio degli anni Sessanta, si incominciarono a intravedere nell'ambito della Formazione riforme che eliminavano alcune differenze di carattere sociale.

Nel decennio successivo - anni Settanta, che purtroppo vengono ricordati dai mass-media solo per le stragi di Stato e gli atti di terrorismo - l'Italia subì molte trasformazioni in ambito politico, economico-sociale e culturale, sicuramente come conseguenze delle proteste post-Sessantotto, ma anche con il contributo delle componenti istituzionali Scuola-Università, tra le quali si era creato un clima di dialogo nel rapporto con le istituzioni politiche e la base scolaresca (sia docenti che studenti).

È da questo clima favorevole che sono nate le conquiste civili di cui oggi usufruiamo (F. Casolaro, 2020, pagine 81-99).

Bibliografia

Lombardo Radice L. (1963), Un mestiere bellissimo. *Riforma della scuola, IX, 8-9*

Lombardo Radice L. (1964), La logica dell'amministrazione non è quella della pedagogia. *Riforma della scuola, X, 10: 8-10.*

De Finetti Bruno (1972), "La Mathesis e l'ansia di rinnovamento nella Scuola". *Periodico di Matematiche n. ½-1972, pag. 5.*

Morelli Aldo (1985), Sull'insegnamento della geometria elementare. Orientamenti moderni. *Periodico di Matematiche n. 1-2, 1985.*

Rizzi Bruno (1995), Bruno de Finetti e il Periodico di Matematiche. *Periodico di Matematiche n.2/3 - 1995, pp. 69-76.*

Cundari Cesare (1997), Matematica e Disegno. proposte per una didattica finalizzata all'uso delle nuove tecnologie - Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione dell'Università "La Sapienza" di Roma. *Atti dei lavori svolti nei periodi: 11-15 dicembre 1990; 06-10 maggio 1991; 08-12 dicembre 1991.*

F. Casolaro (2002), Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". *Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo" - 17-19 ottobre Bergamo 2002; pag.185-198.*

Natalini Roberto (2004), Conversazioni con Emma Castelnuovo. *Lettera matematica PRISTEM n. 52, giugno 2004*

Guerraggio Angelo (2004), *"A colloquio con Vinicio Villani". Lettera Matematica PRISTEM, numero 53, ottobre 2004.*

F. Casolaro (2014), L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola? *Science&Philosophy, Vol. 1, n. 1 - Giugno 2014, pag. 39-48.*

F. Casolaro, A. Rotunno (2015): "Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations". *University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.*

F. Casolaro, G. Della Vecchia (2018): "Mathematics, Arts and Literature". *Science & Philosophy ISSN: 2282-7757 Vol. 6(1), 2018. Pag.177-186.*

F. Casolaro, L. Cirillo (2018), Cinquanta anni di attività delle sezioni Mathesis tra evoluzione politica e sviluppo scientifico dal 1959 al 2008. *Arte&Scienza N. 10 dicembre 2018. Pag. 107-146.*

F. Casolaro, R. Prosperi (2019), Quale Geometria per la Fisica classica? La Geometria euclidea in S_2 e in S_3 per la rappresentazione dei fenomeni fisici. *Corso di Formazione per l'insegnamento della Fisica nella Scuola Secondaria di II grado - Dipartimento di Architettura Università Federico II. Quaderni APAV n. 4 - 2019, pagine 17-26.*

F. Casolaro (2020), *Il bocciato, un matematico per caso*, Edizione Aracne 2020, pagine 81-99

F. Casolaro (2022), Il Neorealismo a Napoli nel pensiero di Renato Caccioppoli: è attuale oggi? *IV° Congresso Federazione Italiana Mathesis: Matematica 2022, nuove proposte didattiche - Matematica, arte e società, 30 novembre-2 dicembre 2022.*

Luca Nicotra
La verità in matematica
Da Gödel a Euclide
Il filo della conoscenza
in riga
edizioni

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 191-212

Quando il calcolo diventa "sublime"

Il contributo di Fermat e Leibniz alla nascita dell'analisi infinitesimale

Giovanna della Vecchia*

* DIARC Università di Napoli "Federico II";
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Sunto*: La nascita dell'analisi infinitesimale si fa risalire storicamente ai due grandi matematici del Seicento, Newton e Leibniz, ma è noto che il problema sia stato affrontato precedentemente da numerosi altri matematici del Seicento.*

Scopo del presente lavoro è illustrare il contributo dato da Pierre de Fermat e Gottfried Wilhelm Leibniz al lungo e intricato percorso che ha condotto, nel XVII secolo, alla nascita di quella scienza chiamata "Calcolo Sublime" che avrebbe dato vita al calcolo infinitesimale, successivamente chiamato Analisi Matematica.

Fermat presenta un originale metodo per risolvere geometricamente il problema delle tangenti sfruttando la geniale intuizione secondo cui la differenza tra una curva e la sua tangente, presenta un minimo (o un massimo) nel punto di tangenza.

Leibniz espone per la prima volta, in modo organico, il metodo del calcolo infinitesimale, fornendo le principali regole di differenziazione senza mai parlare di derivata. Bisognerà aspettare un secolo e mezzo prima che i concetti di differenziale e di infinitesimo possano acquisire il rigore logico e formale con cui vengono oggi trattati.

Parole Chiave*: Analisi infinitesimale, Fermat, Leibniz.*

Abstract*: The birth of infinitesimal analysis can be traced back historically to two great mathematicians of the seventeenth century, Newton and Leibniz, but it is known that the problem had been addressed previously by numerous other mathematicians of the seventeenth century.*

The purpose of this paper is to illustrate the contribution made by Pierre de Fermat and Gottfried Wilhelm Leibniz to the long and intricate path that led, in the 17th century, to the birth of the science called 'Sublime Calculus,' which would give rise to infinitesimal calculus, later called Mathematical Analysis.

Keywords*: Infinitesimal calculus, Fermat, Leibniz.*

1 - Introduzione

La nascita dell'analisi infinitesimale si fa risalire storicamente ai due grandi matematici del Seicento, Newton e Leibniz, ma è noto che il problema sia stato affrontato precedentemente da numerosi altri matematici del Seicento.

Alla base dello sviluppo di tale branca della Matematica c'erano i principali problemi scientifici del XVII secolo, legati fondamentalmente allo studio dell'astronomia e della fisica.

In particolare, gli studi astronomici necessitavano di sistemi ottici precisi e attendibili: per studiare ad esempio il passaggio della luce attraverso una lente e potere poi applicare la Legge di Rifrazione, bisognava conoscere l'angolo secondo cui il raggio colpisce la superficie della lente: l'angolo è quello formato dal raggio luminoso e dalla normale alla curva.

Essendo tale normale perpendicolare alla tangente, il problema si riconduceva alla ricerca di quest'ultima.

La necessità di definire la tangente ad una curva si riscontrava anche nello studio del moto dei corpi dal momento in cui la direzione del moto di un corpo coincide, in

ciascun punto della sua traiettoria, con la direzione della tangente alla traiettoria nel punto.

Lo studio del moto dei pianeti comportava altresì problemi di massimo e minimo, come quello di trovare, ad esempio, la massima e la minima distanza di un pianeta dal sole.

Un ulteriore problema legato allo studio del moto dei pianeti era quello di trovare la lunghezza delle curve e le aree da esse limitate.

I greci avevano usato, per calcolare alcune aree e volumi, il metodo di esaustione ma tale metodo, oltre a mancare di generalità, richiedeva procedure un po' troppo ingegnose per cui venne modificato gradualmente, fino a subire un cambiamento radicale proprio con l'invenzione del calcolo infinitesimale.

Per ricostruire il lungo percorso che ha condotto allo straordinario sviluppo di tale branca della matematica bisogna risalire al grosso risultato che caratterizzò la seconda metà del XVII secolo: l'introduzione da parte di Renè Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) dei fondamenti della geometria analitica.

La nascita della geometria analitica favoriva già la soluzione del problema della ricerca dei massimi e dei minimi nonché quello di determinare la retta tangente ad una curva in un suo punto, ma il metodo utilizzato non era applicabile a tutte le curve.

2 - Il contributo di Pierre de Fermat

Figlio di un mercante di cuoio, Fermat aveva studiato legge e, all'età di 30 anni, divenne "Commissario alle Richieste" del Parlamento di Tolosa.

Egli raggiunse rapidamente i vertici della pubblica amministrazione diventando membro dell'élite sociale e ottenendo il privilegio di aggiungere "de" al suo cognome.

Pur dedicandosi alla Matematica solo nel tempo libero, i suoi risultati in tale ambito furono tanto proficui e preziosi da fargli guadagnare l'epiteto di "**il principe dei dilettanti"**

Fermat non amava però pubblicare i risultati dei suoi lavori e le sue scoperte sono arrivate a noi grazie alla corrispondenza scambiata con altri matematici, come Mersenne o Pascal, o, addirittura, ai commenti che era solito lasciare in margine ai libri che leggeva.

Dalle sue memorie, molte delle quali scritte su frammenti di fazzolettini di carta, si evincono le ragioni di questo insolito comportamento:

> *Sono un uomo molto ansioso e insicuro. Non potrei tollerare un rifiuto alla mia proposta di pubblicazione: preferisco quindi non "scrivere libri" ma "scrivere sui libri". Quando mi si domanda se c'è qualche libro che contiene miei lavori io rispondo: certo! Ed è la verità. In giro è pieno di libri con sopra i miei scarabocchi.*

2.1 – Determinazione di massimi e minimi

Pierre de Fermat (1601 -1655), contemporaneo di Descartes, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* affronta il problema partendo da una prospettiva

completamente diversa rispetto a Descartes e sembra che, dalle sue intuizioni, abbiano tratto spunto i metodi sviluppati più tardi da Leibnitz e Newton.

Data la curva di equazione y= $f(x)$, egli si propone di trovare l'ascissa x di un suo punto di massimo o di minimo.

Denotata con e una quantità "estremamente piccola", egli considera l'ascissa $x + e$.

Di solito, assegnati alla variabile i valori x e $x+e$, i corrispondenti valori f(x) e f($x+e$) risultano nettamente diversi.

L'idea di base di Fermat è che, invece, "…nell'intorno del massimo (o del minimo) le variazioni saranno insensibili...", cioè la differenza tra le due quantità sarà quasi impercettibile, dunque

$$f(x) \cong f(x + e)$$

e non dice che eguaglia i valori ma li "adeguaglia".

E quanto più piccolo è l'intervallo e tra i due punti, tanto più l'adeguaglianza si avvicina a una vera e propria uguaglianza.

Pertanto, in un conveniente intorno dell'ascissa x di un punto di massimo o di minimo, egli arriva a scrivere

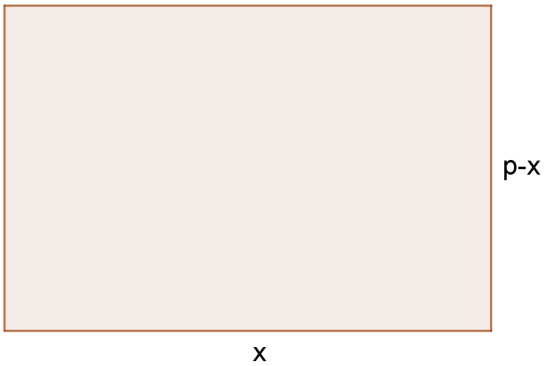
$$f(x) = f(x + e)$$

Divide *dunque* i due membri per e, opera le semplificazioni, quindi pone $e = 0$.

I risultati ottenuti gli danno le ascisse dei punti di massimo o minimo della curva.

L'esempio seguente, tratto dallo stesso Fermat, può chiarire meglio la procedura:

"Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$, quello di area massima risulta essere il quadrato"



Denotata con x la misura della base del rettangolo e con p-x l'altezza, l'area risulta:

$$A\ (x) = x \cdot (p - x)$$

Aggiungendo ad x la quantità piccolissima e, i lati del rettangolo diventano $(x+e)$ e $(p-x-e)$ e l'area:

$$A(x + e) = (x + e) \cdot (p - x - e)$$

Utilizzando il metodo di Fermat si avrà:

$$x \cdot (p - x) \cong (x + e) \cdot (p - x - e)$$

da cui, eseguendo le moltiplicazioni e riducendo i termini simili si avrà:

$$-2ex + ep - e^2 \cong 0$$

Dividendo per e:

$$-2x + p - e \cong 0$$

Posto e = 0 si ottiene:

$$-2x + p = 0$$

da cui:

$$x = \frac{p}{2}.$$

Dunque, il valore di x per cui il rettangolo ha area massima corrisponde al lato del quadrato.

In questo esempio Fermat sceglie un problema di geometria piana da cui ottiene un'espressione polinomiale; ma quando l'espressione a cui si giunge non è polinomiale, il metodo risulta inadatto e non sempre garantisce risoluzione dal punto di vista algebrico.

2.2 – Il problema della tangente

In merito poi al problema della tangente Fermat fa le seguenti considerazioni:
denotato con P **(x_0, f(x_0))** un punto della curva di equazione **y=f(x)**, la retta tangente alla curva in P, in un conveniente intorno di x_0, lascia la curva tutta da una parte rispetto a tale retta (o tutta al di sotto o tutta al di sopra) (Fig. 2).

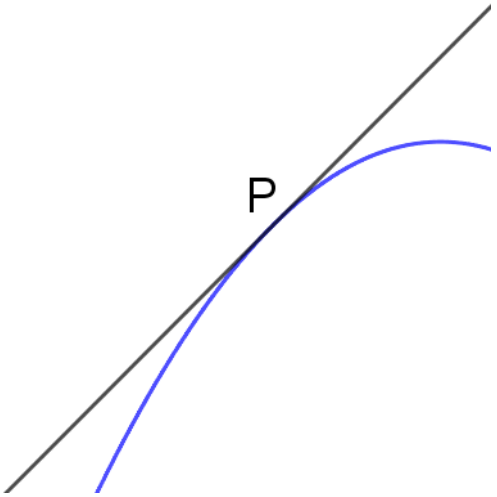


Fig. 2

La tangente in P alla curva è una delle infinite rette del fascio di centro P:

$$y = f(x_0) + m\,(x-x_0)$$

Nel caso della Fig. 2, osservando che la parte della curva sta tutta sotto alla tangente, la differenza tra la curva e la tangente risulta negativa o, al massimo, nulla per $x = x_0$; si ha pertanto, intorno a x_0:

$$f(x) - f(x_0) - m\,(x-x_0) \leq 0$$

dunque

$$f(x) - m\,x \leq f(x_0) - m\,x_0 \qquad (1)$$

Ma se, in un intorno di x_0 vale la (1), allora la funzione $f(x) - mx$, ha in x_0 un massimo: è questa la condizione da imporre per ricavare il valore di m.

Posto

$$\boldsymbol{h(x) = f(x) - m\,x}$$

essendo x_0 l'ascissa del massimo, applichiamo ad $h(x)$ il metodo di Fermat:

$$h(x_0) \cong h(x_0 + e) \tag{2}$$

$$f(x_0) - mx_0 \cong f(x_0 + e) - m(x_0 + e) \tag{3}$$

Per chiarire meglio il risultato a cui si perviene, utilizzando un esempio fornito dallo stesso Fermat, supponiamo che sia

$$f(x) = x^2$$

la (2) diventa:

$$x_0^2 - m\,x_0 \cong (x_0 + e)^2 - m\,(x_0 + e)$$
$$x_0^2 - m\,x_0 \cong x_0^2 + 2\,x_0\,e + e^2 - m\,x_0 - m\,e$$
$$0 \cong 2\,x_0\,e + e^2 - m\,e$$

Dividendo tutto per e si ha:

$$2\,x_0 + e - m \cong 0$$

da cui, ponendo $e = 0$:

$$m = 2\,x_0.$$

E, in termini moderni, $2\,x_0$ è proprio la derivata di $f(x) = x^2$, calcolata nel punto x_0.

Si noti che Fermat non spiegò perché fosse possibile prima dividere per e (trattandola come una quantità diversa da zero) e poi eliminarla, come se valesse zero.

Se esaminiamo con attenzione i passaggi compiuti, nella (2) abbiamo posto:

$$h(x_0 + e) - h(x_0) \cong 0$$

poi abbiamo diviso per e:

$$\frac{h(x_0+e)-h(x_0)}{e} \cong 0$$

e infine abbiamo posto $e = 0$

$$\left[\frac{h(x_0 + e) - h(x_0)}{e} = 0\right]_{e=0}$$

che corrispondono ai passaggi dell'operazione $h'(x_0) = 0$.

La differenza è che Fermat divide prima la differenza per e, poi pone $e = 0$; noi facciamo il limite (del rapporto incrementale) per e che tende a 0 e otteniamo lo stesso risultato.

Il metodo funziona sicuramente quando si giunge ad una espressione polinomiale; in caso contrario però, non sempre garantisce il risultato.

Il primo ad accusare Fermat di aver costruito un metodo privo di validità generale fu proprio Descartes che però ben presto dovette ricredersi e confermare, in molti casi, la sua validità.

Resta comunque il fatto che il "principe dei dilettanti" abbia avuto la grande intuizione secondo cui la differenza tra una curva e la sua tangente, presenta un massimo (o un minimo) nel punto di tangenza.

Dal punto di vista strettamente geometrico il metodo di Fermat per determinare la tangente ad una curva (dividere per *e* poi eliminare *e*) fu escogitato prima del 1629 e ritrovato nel 1637 nel suo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam.*

Il metodo è molto vicino a quello che utilizziamo oggi (v Fig 3):

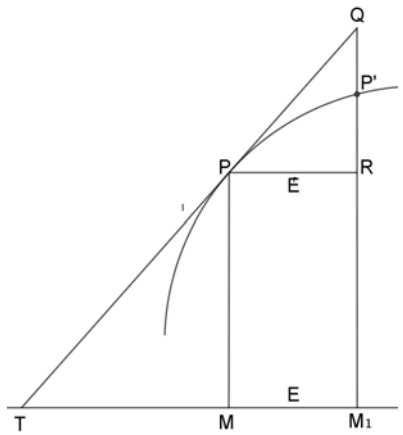


Fig.3

Sia MM_1 un incremento dell'ascissa x di P di lunghezza E: dalla similitudine dei triangoli TMP e PRQ si ha:

$$TM : PM = E : QR$$

Ma, secondo Fermat, per un E sufficientemente piccolo, il punto P' di coordinate x+E ed f(x+E) si troverà così vicino alla tangente che lo si potrà considerare approssimativamente come giacente sulla tangente oltre che sulla curva.

Dunque, QR è quasi uguale a P'R, quindi:

$$TM : PM \cong E : P'R$$

$$TM : PM \cong E : (P'M_1 - RM_1)$$
$$TM : f(x) \cong E : [f(x+E) - f(x)]$$

da cui:

$$TM \cong \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}$$

Nell'esempio fornito da Fermat è possibile dividere numeratore e denominatore per E:

$$TM \cong \frac{f(x)}{\frac{f(x+E) - f(x)}{E}}$$

Infine, Fermat pone E = 0 trovando così TM.

E, una volta trovato il valore di TM è possibile risalire al punto T e quindi alla tangente TP.

2 – Il contributo di Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), filosofo, matematico, giurista, storico, è una delle figure più rappresentative dell'epoca in cui è vissuto.

Nella storia della Matematica il suo nome è solitamente associato a quello di Isaac Newton: entrambi svilupparono strumenti matematici potentissimi, capaci di risolvere problemi che fino ad allora erano stati trattati in maniera poco rigorosa o con metodi improvvisati.

E mentre Newton, in Inghilterra, sviluppava il cosiddetto "metodo delle flussioni", Leibniz, in Germania, elaborava il

"calcolo differenziale", introducendo notazioni ancora oggi utilizzate.

Nel XVII secolo le dispute sulla paternità di risultati scientifici non erano rare, ma, nella storia della scienza, poche controversie hanno avuto il peso, la forza polemica e la durata di quella tra Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz sull'invenzione del calcolo infinitesimale.

Nel 1699, iniziarono addirittura a partire accuse di plagio: i sostenitori di Newton insinuavano che Leibniz avesse avuto accesso ai manoscritti di Newton e avesse copiato le sue idee.

La disputa non si risolse durante l'intera vita dei due protagonisti: Leibniz morì nel 1716, amareggiato dall'ostracismo e dalle accuse, mentre Newton mantenne fino alla fine la sua posizione di supremazia.

Solo col tempo si riconobbe che entrambi, indipendentemente l'uno dall'altro, avevano elaborato, idee geniali e che, in seguito, la notazione leibniziana si sarebbe imposta per chiarezza ed efficacia.

I primi studi matematici di Leibniz erano rivolti allo sviluppo di serie infinite e, proprio mentre lavorava sulle serie, ebbe una geniale intuizione che comunicò in una lettera a Wallis (maggio1697):

> *La prima idea l'ho avuta quando, considerando le differenze e le somme nelle serie dei numeri, mi accorsi che le differenze corrispondevano alle tangenti e le somme alle quadrature.*

Per Leibniz una curva è una poligonale con infiniti lati ognuno di lunghezza infinitesima e, partendo dal presupposto che:

- per determinare la tangente ad una curva occorreva considerare le differenze delle ordinate e delle ascisse quando tali differenze diventavano infinitamente piccole
- per determinare una quadratura occorreva considerare le somme di rettangoli infinitamente piccoli sottesi alla curva

egli intuì che le due operazioni, la determinazione della tangente alla curva in un punto e della quadratura, sono strettamente connesse tra loro tanto da risultare l'una l'inversa dell'altra.

2.1 – Il problema della tangente

Storicamente si può affermare che il calcolo infinitesimale vede la luce nel 1684 sugli ACTA ERUDITORUM con una memoria di Leibniz dal titolo " *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*".

Leibniz affronta il problema della tangente facendo uso del *triangolo caratteristico* che descrive nei termini seguenti (Fig.4):

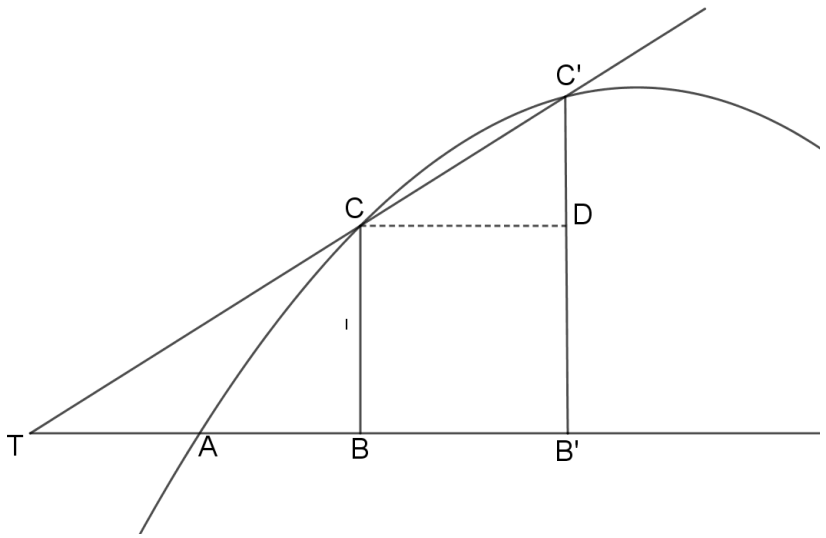


Fig.4

Data una curva ACC′, si tracci una secante alla curva in modo che la tagli nei due punti C e C′. Da C e da C′ si abbassino, rispettivamente, le perpendicolari CB e C′B′ all'asse dell'ascisse. Da C si tracci la normale CD a C′B′. Il triangolo caratteristico è il triangolo CC′D.

> *…è evidente che CD è la differenza delle ascisse AB e AB′ e, analogamente, che DC′ è la differenza delle ordinate BC e B′C′. E se la retta TC incontra l'asse AB in T, è evidente che i triangoli TBC e CDC′ sono simili ….*

Il problema nasce quando la secante, oggi diremo *al tendere di CD a 0*, assume la posizione di tangente alla curva.

> *Ma nel caso del contatto, quando la retta TC non seca la curva ACC′, ma la tocca, ossia quando i punti C e C′ coincidono o distano di un intervallo infinitamente piccolo, è evidente che il triangolo CDC′ diventa* ***in assegnabile****, essendo formato da lati infinitamente piccoli e che CD è un*

elemento di ascissa e DC′ è un elemento di ordinata e CC′ è un elemento di curva.

Tale triangolo in assegnabile CDC′ è simile al triangolo TBC e, mediante il rapporto fra quantità in assegnabili si trova il rapporto fra le quantità assegnabili TB e BC e quindi il modo di condurre la tangente TC.

Per rappresentare differenze infinitesime, Leibniz, impiega la lettera "*d*" applicata alle variabili.

Siano date ad esempio la curva y=f(x) e la sua tangente in un dato punto P(x,y) (Fig.5):

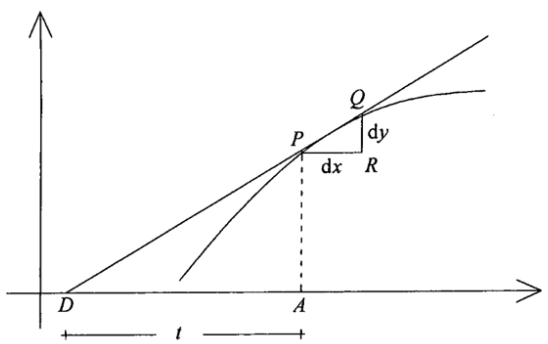


Fig.5

Leibniz dà alla x un incremento qualsiasi che chiama **differenza** e denota con il simbolo dx:

Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto dx

A partire da questo segmento totalmente arbitrario, considera un segmento dy che sta a dx come AP (y) sta ad DA (t), cioè costruisce il triangolo PRQ simile al triangolo DPA in cui :

$$dy : dx = y : t \qquad (4)$$

[In tal modo il rapporto $\frac{dy}{dx}$ coincide col coefficiente direttivo della tangente (ossia la derivata)].

Egli chiama dx differenza delle ascisse, dy differenza delle ordinate:

> *… ora questi dx e dy sono presi infinitamente piccoli, cioè i due punti della curva sono intesi essere a una distanza che è minore di ogni lunghezza data …".*

Chiama allora dy "*incremento momentaneo*" della y quando l'ordinata si muove lungo l'asse x, ma il segmento PQ della figura è ancora considerato rettilineo: esso è "*un elemento della curva o un lato del poligono di infiniti lati che sta per la curva …*".

Leibniz ha dunque introdotto **un operatore,** indicato con la lettera "*d*" che non agisce sulle funzioni ma sulle variabili e sulle loro combinazioni. Applicare tale operatore a una variabile corrisponde a considerare la differenza tra due valori infinitamente vicini della variabile in questione.

Utilizzando le differenze infinitesime, il corrispondente triangolo caratteristico PRQ si può pensare composto da lati tutti di grandezza infinitesima.

Si possono, cioè, indicare i cateti con dx e dy, mentre l'ipotenusa infinitesima con ds. L'ipotenusa del triangolo, prolungata, dà luogo alla tangente alla curva: proprio il fatto che dx sia infinitesimo consente di identificare a un certo punto l'appartenenza alla curva con quella alla tangente.

Scrive lo stesso Leibniz:

> *Trovare la tangente significa tracciare una retta che congiunga due punti della curva che abbiano tra loro una distanza infinitamente piccola, ossia prolungare il lato del poligono infinitangolo inscritto, che per noi equivale alla curva. Questa distanza infinitamente piccola, d'altra parte, può sempre venire espressa mediante una relazione a esso, cioè mediante una tangente nota.*

Ricavata dalla (4) la sottotangente t

$$t = y \cdot \frac{dx}{dy}$$

bisognava ora stabilire delle regole che consentissero di calcolare il rapporto *dx/dy,* a partire dall'equazione della curva.

Leibniz enuncia tali regole senza mai parlare di derivata e senza introdurre i concetti di limite o di infinitesimi di vari ordini. Non ne dà alcuna dimostrazione, soltanto ad un certo punto scrive:

> *… dalla conoscenza di questo particolare algoritmo, o di questo calcolo che io chiamo differenziale, …, possono … ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti …*

… His positis, calculi regulae erunt tales. (W.G.Leibniz, Nova Methodus …, 1684)

Fatte queste premesse, le regole del calcolo saranno le seguenti:

Sia *a* una quantità costante, sarà

$$da = 0 \quad e \quad d(ax) = adx.$$

Se è $y = v$ sarà

$$dy = dv.$$

Addizione e Sottrazione: se

$$z - y + w + x = v$$

risulterà

$$d\,(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx.$$

Moltiplicazione: se

$$xv = y$$

sarà

$$dy = d(xv) = xdv + vdx.$$

Divisione: se

$$\frac{v}{y} = z$$

sarà

$$d\frac{v}{y} = dz = \frac{\pm vdy \pm ydv}{y^2}$$

Sulla base delle regole enunciate costruisce poi le regole di differenziazione di potenze e radici.

Successivamente, in un articolo del 1686, Leibniz dà i differenziali delle funzioni logaritmica ed esponenziale.

2.2 – Il problema delle quadrature

Per risolvere il problema della quadratura Leibniz divide il segmento AB (v Fig. 6) in infiniti segmenti, quindi, scompone l'area in infiniti rettangoli aventi ciascuno una base infinitesima e un'altezza che tende all'ordinata dei singoli punti della curva.

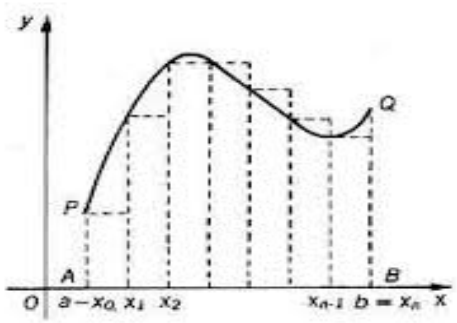


Fig.6

L'area sottesa dalla curva risulta essere la somma di un'infinità di rettangoli ciascuno dei quali ha area ***ydx***.
Per designare tale somma, Leibniz utilizza prima il segno "*omn*" (abbreviazione di omnes lineae preso in prestito da Cavalieri) poi lo sostituisce con il simbolo $\int$ di una S maiuscola allungata, indicando l'area sotto la curva come

$$\int y\,dx.$$

I due simboli, quello di differenziale e quello di integrale, vengono introdotti da Leibniz tra il 1684 e il 1686 ed entrambi vengono utilizzati ancora oggi per le due operazioni.

Sembra che anche il termine "*integrale*" sia stato coniato da lui su suggerimento dei fratelli Bernoulli.

Leibniz intuisce il rapporto di reciprocità che intercorre tra le due operazioni, la differenziazione e la somma, affermando che:

$$\int dx = x \qquad e \qquad d\int x = x$$

In particolare, si rende conto che (utilizzando il suo linguaggio):

$$\text{se} \qquad F(z) = \int_a^z f(x)dx \qquad \text{allora} \qquad dF(x) = f(x)$$

In generale tutta l'opera di Leibniz, per quanto profonda e suggestiva, era talmente incompleta e frammentaria da risultare a tratti incomprensibile.

L'articolo *Nova methodus* …, lungo sei pagine, è così confuso che i fratelli Bernoulli lo chiamavano "un enigma piuttosto che una dimostrazione".

Per fortuna i due fratelli, che rimasero comunque profondamente colpiti da quelle idee, elaborarono i suoi lavori e produssero un numero enorme di nuovi sviluppi tanto che Leibniz diceva che il calcolo infinitesimale era tanto suo quanto loro.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S. (2010). *Infiniti infiniti*, Trento: Erickson.

Bottazzini U. (1990). *Storia della Matematica (Moderna e contemporanea*), Torino: UTET.

Boyer C. (1990). *Storia della matematica*, Milano: Oscar Mondadori.

Castelnuovo G. (1962). *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano: Feltrinelli.

Morris Kline (1999). *Storia del pensiero matematico I,* Torino: Einaudi.

Sitografia

https://www.math.unipd.it/~alvise/TALKS/LINCEI/PDF/lo%20sviluppo%20del%20calcolo%20integrale.pdf

https://digilander.libero.it/leo723/materiali/analisi/fermat_newton_leibniz.pdf

https://archimede.dimai.unifi.it/archimede/archimede/note_storia/Gavagna-Laboratorio-tangenti.pdf

http://dm.unife.it/storia/massimi.htm

https://fisicamente.blog/2020/08/18/appunti-per-una-brevissima-storia-della-nascita-e-del-primo-sviluppo-del-calcolo-sublime/

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 213-224

La fisica spiegata da futuri maestri

Loredana Lunasco*, Matteo Torre**

*IC Bassa Valle Scrivia, Castelnuovo Scrivia, loredanalunasco@gmail.com
**Liceo Scientifico "G. Peano", Tortona (AL), matteo.torre1984@gmail.com

Sunto*: Il contributo descrive un progetto svolto nell'a.s. 24-25 con 25 alunni di una V Liceo delle Scienze Umane che hanno realizzato alcune UdA sulla Fisica, poi sperimentate in una classe quinta Primaria. La sperimentazione delle UdA, progettate con il docente di Fisica, ha costituito per gli studenti un valore aggiunto dal punto di vista didattico e dal punto di vista orientativo. Essi, infatti, hanno avuto l'opportunità di lavorare sul piano metacognitivo, in seguito ai feedback forniti dalla docente sperimentale: un'occasione unica e irripetibile di autentica progettazione verticale e collaborazione professionale.*

Parole Chiave*: didattica, fisica e scuola Primaria, EBE e STEM*

Abstract*: The paper describes a project carried out during the 2024–2025 school year with 25 students from the fifth year of a Liceo delle Scienze Umane, who developed several Learning Units (UdA) on Physics, later tested in a fifth-grade primary school class. The trial implementation of the Learning Units, designed in collaboration with the Physics teacher, represented an added value for the students both from a didactic and an orientation perspective. Indeed, they had the opportunity to work on a metacognitive level, thanks to the feedback provided by the experimental teacher: a unique and unrepeatable opportunity for genuine vertical planning and professional collaboration.*

Keywords*: education, physics in Primary school, EBE and STEM*

1 - Introduzione

La didattica della fisica nella scuola primaria rappresenta una sfida complessa e, al tempo stesso, un'opportunità formativa di grande valore. Le concezioni spontanee dei bambini, radicate nell'esperienza quotidiana, costituiscono spesso un ostacolo all'apprendimento scientifico formale, ma possono anche essere un punto di partenza per interventi educativi mirati (Driver et al., 1994; Vosniadou, 2013, Torre et al., 2024).

In tale prospettiva, nasce il progetto "*Come spiegherei…*" che ha visto coinvolta nell'a.s. 2024-25 un'intera classe di Liceo delle Scienze Umane (composta da 25 studenti) in un percorso di progettazione didattica autentica. Gli studenti di questa classe, potenziali membri del futuro corpo docente della scuola del I ciclo, hanno vissuto in prima persona (e per la prima volta nel loro percorso scolastico) le complessità della mediazione concettuale e della pianificazione pedagogica.

Il progetto "*Come spiegherei…*" nasce dall'incontro tra due esigenze comuni e condivise dai suoi due ideatori:

- Formare negli studenti liceali competenze di progettazione educativa aderenti ai contesti reali di insegnamento nella scuola primaria e con un intrinseco valore orientativo.
- Promuovere una riflessione metacognitiva sulle strategie per indurre un cambiamento concettuale nei bambini, partendo dalle *misconcezioni* più comuni.

Il lettore interessato alle misconcezioni più comuni in fisica presenti nei bambini del I ciclo, può trovare interessanti riferimenti in bibliografia (Calvani et al. 2024). Ora descriveremo nel dettaglio il progetto.

2 – Il progetto "*Come spiegherei…*"

Il progetto "*Come spiegherei…*" è stato svolto nell'arco di quattro mesi (da febbraio a maggio 2025), sotto la guida del docente di Fisica, con l'attenta e scrupolosa collaborazione della docente di scuola Primaria.

L'idea di partenza è stata quella di affrontare con gli studenti del Liceo il problema delle concezioni ingenue in fisica (o misconcezioni), ampiamente documentato in letteratura (Driver et al., 1994; Calvani et al., 2024). Con i ragazzi abbiamo capito che queste concezioni, nate dall'osservazione diretta del mondo e dall'esperienza quotidiana, tendono a essere per i bambini della scuola Primaria resistenti al cambiamento e necessitano di interventi mirati per essere modificate (Posner et al., 1982). Per la prima volta nel loro percorso liceale gli studenti, che hanno nel loro curriculum di studi anche pedagogia, hanno potuto vedere applicati alcuni principi e teorie che talvolta (parole loro) hanno percepito come distanti dall'applicazione pratica nella scuola. Hanno riconosciuto nel modo di procedere di Piaget e di Montessori, utili strumenti per pianificare le loro UdA. Guidati dal docente di fisica, hanno individuato le principali misconcezioni su alcune tematiche centrali per la programmazione della scuola Primaria, come previsto dalle Indicazioni Nazionali 2012, così da provare a realizzare UdA mirate a superare tali conoscenze ingenue.

Gli studenti hanno, infine, letto e discusso estratti (scelti dal docente) tratti dal testo *La fisica ingenua* di Paolo Bozzi (1990), così da poter riflettere su situazioni ancora più concrete: perché una nave galleggia anche se è molto pesante, perché

l'aria "non pesa", perché un magnete sembra "attirare a distanza".

A questo punto gli studenti erano pronti per incontrare la docente di scuola Primaria che avrebbe messo in atto le loro UdA nella sua classe quinta, composta da 22 alunni. La docente ha presentato agli studenti le peculiarità della classe, il suo stile di insegnamento e i traguardi di apprendimento che avrebbe voluto far raggiungere ai suoi alunni, anche in vista del loro passaggio di grado d'istruzione. Gli studenti hanno concordato la struttura di ogni UdA secondo un modello in grado di produrre un *conceptual change* nei bambini e il superamento delle loro misconcezioni. Le UdA sono state pensate senza formule, con attività sperimentali capaci di generare conflitto cognitivo secondo una struttura a tre fasi:

- Riconoscimento dell'inadeguatezza della propria idea.
- Comprensione e accettazione di un nuovo modello.
- Metacognizione sulle idee iniziali.

Le tematiche da affrontare sono state: il galleggiamento, l'aria, il suono, l'elettricità, il magnetismo. Il progetto ha quindi preso il via nelle sue varie fasi che descriveremo nel prossimo paragrafo.

3 – Le fasi del progetto

La classe è stata suddivisa in cinque gruppi, ciascuno incaricato di sviluppare un'UdA su un tema specifico tra quelli individuati con l'insegnante di scuola Primaria. In particolare, ogni gruppo ha scelto una misconcezione da affrontare tra le tante elencate dal docente di fisica e intorno

ad essa ha costruito un'UdA e poi nello specifico una lezione, da far sperimentare in classe, seguendo uno schema comune che prevedeva quattro fasi:

- Domande stimolo per attivare il pensiero critico.
- Attività sperimentali con materiali semplici (e sicuri).
- Metacognizione e rielaborazione del concetto teorico.
- Breve test a risposta multipla e/o con risposte brevi[1].

Nel seguito (cfr. 3.1) riporteremo un esempio di UdA ideata da un gruppo di studenti. Ora proseguiamo nella descrizione sintetica delle varie fasi del progetto.

Le UdA sono state quindi condivise con una docente di scuola primaria con esperienza nel secondo e quinto anno. La docente ha fornito un primo feedback, suggerendo modifiche sul linguaggio, tempi e modalità di gestione degli esperimenti.

In questa fase gli studenti del Liceo hanno sperimentato la difficoltà di adattare contenuti scientifici a livelli cognitivi diversi, un esercizio prezioso dal punto di vista professionale, ma soprattutto hanno capito che "sapere un concetto non coincide con il saperlo insegnare" e che la difficoltà cresce quando l'interlocutore è un bambino.

Dopo la revisione delle UdA da parte degli studenti liceali, fatta tenendo conto delle osservazioni della docente di scuola Primaria, è avvenuta la sperimentazione nella classe quinta primaria. Essa ha avuto una durata complessiva di circa un mese e a uno studente liceale per gruppo, è stata data la possibilità di assistere in presenza (nelle ore pomeridiane) alle attività: i liceali hanno osservato in prima persona le reazioni

[1] Molte domande dei test a risposta multipla sono state prese dal questionario CEF (Torre et al., 2024), consultabile all'indirizzo: https://sapie.it/wp/wp-content/uploads/2023/03/CEF_PRESENTAZIONE_20-11-1.pdf.

dei bambini, le difficoltà incontrate e le strategie adottate dall'insegnante per mantenere sempre alta l'attenzione e per guidare la riflessione metacognitiva.

Terminata la sperimentazione, si è svolto un incontro conclusivo al Liceo in cui la docente di scuola Primaria ha restituito agli studenti liceali un'analisi dei punti di forza e delle criticità di ciascuna UdA. Questa fase ha rappresentato un momento di lavoro metacognitivo fondamentale per gli studenti liceali: essi hanno potuto confrontare le proprie ipotesi didattiche (cioè, quelle riportate dai cinque studenti presenti agli incontri sperimentali nella classe di scuola primaria) con il feedback di un'esperta del settore con anni di docenza alle spalle, comprendendo quanto sia grande la distanza tra progettazione teorica e la didattica in classe. L'incontro ha avuto anche un eccellente valore orientativo per gli studenti che, forse per la prima volta, hanno toccato con mano quanto il lavoro del docente sia complesso, sfaccettato e ricco di molte variabili nascoste, ma anche capire il ruolo dell'auto-regolazione nelle pratiche di classe del docente (Mngomezulu et al., 2024).

3.1 – Un esempio di UdA

A titolo puramente esemplificativo, ma con l'intenzione di far capire le quattro fasi comuni a tutte le UdA, riportiamo in questo paragrafo l'UdA sul galleggiamento.

Per prima cosa spieghiamo le scelte fatte dai ragazzi (insieme al docente di fisica) per individuare le misconoscenze che potrebbe essere lecito attendersi da bambini che frequentano la classe quinta primaria. La ricerca in didattica ci dice che l'idea di galleggiamento non risulta chiara ai bambini

perché il concetto di densità appare tardi nelle spiegazioni di fisica e ciò comporta la mancata differenziazione dei concetti di peso e densità. I ragazzi hanno riconosciuto nella famosa domanda di Piaget (1972), "*perché le navi, che sono fatte di materiale pesante, non affondano?*", la strategia efficace su cui costruire l'UdA, ovvero la domanda stimolo per far giungere i bambini a una piena comprensione del galleggiamento.

Nel seguito riportiamo le azioni didattiche previste nelle 4 fasi (descritte in precedenza) dell'UdA nella versione finale, dopo i feedback della docente di scuola Primaria, così come sperimentate in classe.

FASE 1

Domande stimolo

- Sai nuotare?
- In acqua ti senti più leggero? Perché?
- Cosa significa galleggiare?
- Quali corpi galleggiano? Perché?

FASE 2

Esperimento 1

I bambini hanno a disposizione diversi oggetti (pezzo di legno, sasso, gomma, tappo di sughero, moneta, pezzo di ceramica, un mandarino con buccia e uno senza buccia) e vengono invitati a esplorare il comportamento di tali oggetti in acqua, arrivando a suddividerli in due categorie: quelli che affondano e quelli che galleggiano. Essi dovranno posizionarli uno a uno sulla cattedra divisa a metà (galleggia - NON galleggia), nella parte a loro giudizio corretta.

Esperimento 2

Si fornisce a ciascun bambino una pallina di plastilina. Essa affonda in acqua. Si chiederà ai bambini di modellarla affinché possa galleggiare, facendolo loro scoprire che lo stesso materiale può sia galleggiare che affondare in base a come è distribuita la sua massa.

Esperimento 3
A ciascun bambino si mettono a disposizione 3 foglietti di alluminio identici. Si propone ai bambini di svolgere queste tre prove:

- appoggiare un foglietto di alluminio steso sull'acqua;
- appallottolare un secondo foglietto di alluminio e gettarlo in acqua;
- appallottolare il terzo foglietto sott'acqua e gettarlo in acqua.

Prima di far realizzare le prove ai bambini si raccolgono le loro opinioni circa il galleggiamento dei tre foglietti.

FASE 3

Domande di consolidamento (con feedback immediato)

- Perché il nostro corpo galleggia?
- Perché con il salvagente ci aiuta a non affondare in acqua?
- Come è la densità del salvagente insieme al nostro corpo rispetto alla densità dell'acqua?
- Hai a disposizione una barchetta di metallo che affonda in acqua, indica almeno un modo per farla galleggiare.

FASE 4

Test finale
Il test finale è composto da una domanda aperta:
I pesci acquisiscono l'aria dall'acqua del mare attraverso le branchie. Come faranno i pesci ad andare verso il pelo dell'acqua o verso il fondo (oltre ad usare le pinne)? Come faranno i sommergibili a immergersi o ad emergere?

e dalle domande n° 1.13, 1.14, 1.16, 1.17 a risposta multipla tratte dal *Questionario CEF* (Torre et al., 2024), consultabile al link: https://scienza.sapie.it/wp-content/uploads/2022/12/CEF_PRESENTAZIONE_20-11.pdf.

Come si potrà notare, la struttura di questa UdA (così come quella di tutte le altre) segue la teoria di Jerome Bruner sull'apprendimento "a spirale": si inizia con una spiegazione semplice e intuitiva di un concetto, per poi tornare

ciclicamente su quella stessa idea, approfondendola con dettagli e formalizzazioni via via maggiori. La ricerca in didattica della fisica per il I ciclo di istruzione (Leone, 2020) è concorde nel ritenere questo approccio come ideale per permettere ai bambini di costruire una comprensione sempre più profonda e strutturata, partendo dalle loro esperienze e conoscenze iniziali.

4 – Discussione dei risultati e prospettive future

L'esperienza ha confermato il valore pedagogico della progettazione verticale, in cui docenti di ordini di scuola diversi collaborano per un obiettivo comune. La scelta di partire da attività sperimentali semplici, non usare formule, si è rivelata efficace per stimolare la curiosità dei bambini e creare le condizioni per un *conceptual change*.

Per rendere più oggettiva la valutazione dell'efficacia delle UdA progettate, è stata effettuata un'osservazione sistematica durante la fase di sperimentazione in classe, oltre al questionario a risposta multipla previsto per ogni UdA. L'osservazione sistematica è stata svolta congiuntamente dalla docente di scuola primaria, dagli studenti presenti a lezione e dal docente di Fisica, andando a considerare:

- Il coinvolgimento e la partecipazione attiva dei bambini.
- L'effettivo *conceptual change* sulle misconcezioni, anche tenendo conto degli esiti dei test finali.

Gli appunti presi dai vari attori dell'osservazione sistematica sono stati poi condivisi e discussi nell'incontro conclusivo del progetto e si possono così riassumere:

- tutte le UdA hanno prodotto una diminuzione delle misconcezioni iniziali, attuando nei bambini un grado soddisfacente di *conceptual change*.
- le UdA considerati più efficaci in termini di *conceptual change* sono state quelle su galleggiamento ed elettricità.
- I bambini hanno dimostrato un buon livello di coinvolgimento e partecipazione: il carattere ludico delle esperienze laboratoriali e l'assenza di formalismo matematico sono strategie efficaci per stimolare l'interesse e la partecipazione attiva.

Le impressioni degli studenti del Liceo hanno, infine, confermato che su di essi il progetto ha avuto un forte impatto motivazionale ed emotivo. Dal punto di vista metodologico, essi hanno apprezzato l'alternanza tra momenti di approfondimento teorico, progettazione, sperimentazione indiretta e feedback di esperti, che ha permesso loro di vivere un ciclo completo di *thinking design* in ambito educativo.

Su questo aspetto è risultato vincente il binomio tra il docente di Fisica, in grado di dare feedback puntuali da un punto di vista didattico e teorico, e la docente di scuola primaria che non è stata soltanto una sperimentatrice, ma un vero e proprio mentore formativo, capace di trasformare l'attività progettuale in una palestra professionale (e orientativa) per i giovani liceali.

Visto il successo e l'efficacia sul piano dell'orientamento scolastico, la speranza è quella di poter radicare questo progetto nel tempo, provare a realizzare nuove UdA su altre tematiche fisiche e trasformarlo in un appuntamento fisso per gli studenti del Liceo delle Scienze Umane anche nei prossimi anni scolastici.

Bibliografia

Bozzi P. (1998). *Fisica Ingenua*. Milano: Garzanti.

Calvani, A., Leone, M., Torre, M. (2024). Misconoscenze di fisica nella scuola del I ciclo: un questionario didattico. *Educational, Cultural and Psychological Studies" (ECPS Journal), 29, pp. 21-41.*

Leone M. (2020). *Insegnare e apprendere fisica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Milano: Mondadori.

Mngomezulu, H., Mkhize, T. F., & Nhlumayo, B. S. (2024). The role of formative feedback in teaching and learning: Grade 10 Physical Sciences teachers' perspectives. *Interdisciplinary Journal of Education Research, 6, pp. 1-12.*

Piaget J. (1972). *The child's conception of physical causality*. New York: Littlefield Adams.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education, 66(2), 211–227.*

Vosniadou S. (2013). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. New York: Routledge.

Torre, M., Leone, M. (2024). Misconoscenze di fisica nella scuola del I ciclo: un questionario didattico. *Periodico di Matematica (IV), Vol. VI (3) Supplemento, ISSN: 2612-6745.*

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 225-242

Il docente-ricercatore: una questione aperta e da 'chiudere'

Tullio Aebischer*

*Dip. di Matematica, Università di Roma Tor Vergata, Italia;
aebischer@mat.uniroma2.it

Sunto: *Sempre di più viene richiesta al docente la competenza professionale e la volontà del ricercare e riflettere sulla sua attività. Ciò si legge in molti documenti ufficiali, ma in concreto non si definisce in che cosa consista questa ricerca e su che cosa la debba svolgere. Da quanto si legge ci si dovrebbe interessare sulla parte pedagogica nel silenzio della disciplina. Inoltre, tale competenza non viene formalizzata con una figura professionale, che per noi dovrebbe essere il docente-ricercatore, dato che sempre più docenti acquisiscono il titolo di dottore di ricerca.*

Parole Chiave*: docente-ricercatore, formazione docenti, didattica.*

Abstract: *Teachers are increasingly required to possess professional competence and a willingness to research and reflect on their work. This is evident in many official documents, but in practice, there is no definition of what this research consists of or what it should address. From what we read, we should focus on the pedagogical aspect of the discipline, while remaining silent. Furthermore, this competence is not formalized with a professional role, which we believe should be the teacher-researcher, given that more and more teachers are earning doctoral degrees.*

Keywords: *teacher-researcher, teachers formation, education.*

1 - Premessa

Nel panorama scolastico contemporaneo, l'immagine del docente non può essere quella di un semplice esecutore, ma deve trasformarsi in un intellettuale riflessivo che interagisce con la complessità della società e della scuola stessa (Michelini, 2022). Il docente si deve interrogare sul senso del proprio ruolo osservando criticamente la realtà scolastica. È una figura che si nutre di studio e di ascolto, che riconosce la scuola come uno spazio relazionale nel quale il sapere è intrecciato a valori, prospettive, visioni del mondo.

La questione di una figura che unisca docenza e ricerca può sembrare quasi pleonastica, ma in realtà permette di individuare una platea di docenti[1] che frequentano i convegni presentando attività svolte con gli studenti, docenti che pubblicano articoli su tali attività, altri che collaborano con ricercatori e docenti del mondo universitario (Cusi, Robutti, 2017), altri che affrontano percorsi di dottorato o assegni di ricerca.

La condivisione dell'esperienza può avere la sua naturale estensione sulle piattaforme educative nazionali e internazionali dove il sapere di ciascun docente può trovare ascolto e confronto. In Italia, INDIRE offre la piattaforma *Avanguardie Educative* e il portale *Innovazione Didattica*, che ospitano centinaia di progetti multidisciplinari e riflessioni metodologiche. In ambito europeo e globale, si hanno altre piattaforme che individuano ambienti digitali e dinamici in cui il docente può sentirsi parte di una comunità educativa planetaria. Condividere ciò che si vive in aula, scrivere per

[1] Per non appesantire la lettura e il testo, l'Autore userà il proprio genere intendendo, però, sempre entrambi. La specificazione del genere sarà esplicitata dove la si riterrà necessaria.

riviste specialistiche significa partecipare attivamente al dibattito pedagogico contemporaneo, dare voce alla pratica, trasformare l'esperienza individuale in sapere collettivo. In questo modo, ogni docente contribuisce alla costruzione di una cultura dell'educazione condivisa e in continua evoluzione.

Tale varietà di situazioni configura un'attività che va oltre la professione tradizionalmente concepita e, pertanto, sollecita la richiesta posta dal titolo del presente contributo. A maggior ragione tutto ciò deve essere preso in considerazione specie in questo momento storico nel quale si propongono nuove figure di *staff* all'interno dell'organizzazione della scuola Secondaria di I Grado (*middle-staff*, orientatori, *tutor* e più in generale referenti di specifiche aree tematiche) che possono avere a disposizione delle ore che non trascorrono nello svolgere didattica in classe e attività correlate: il cosiddetto esonero.

In letteratura la questione non è molto dibattuta forse perché solleva non solo la necessità di una definizione, ma anche il prendere atto e delineare un mondo intellettuale sommerso, ossia nel senso di non considerato, già presente. Un mondo nato e sviluppatosi spontaneamente praticamente per esigenze personali di comprensione del proprio lavoro e/o di passione per migliorare ciò che si dà agli studenti. Un mondo, nota dolente, le cui attività prendono buona parte del tempo 'invisibile' di un docente al di là delle sue 'visibili' 18 ore (Bertani, 2003).

La questione, bisogna subito dire, è delicata perché non deve sollevare il timore di una classificazione dei docenti, ma sicuramente vuole provare a identificare un ruolo che il singolo docente può assumere ai fini del miglioramento della

scuola e della sua professione, come anche nei confronti degli studenti e dei colleghi. Un miglioramento che sia diverso dal semplice seguire corsi di aggiornamento nei quali apprendere protocolli da svolgere in classe e non acquisire la competenza di essere l'ideatore di questi protocolli.

La volontà di affrontare la questione della figura del docente-ricercatore si è imposta ancora di più con la riflessione sull'esperienza di dottorato in didattica della matematica svolta dall'Autore, a sua volta docente, e dall'osservare chi frequenta i convegni o i corsi di aggiornamento. Pertanto, quanto si dirà dovrà essere considerato un *brainstorming* dell'Autore per iniziare a 'chiudere' la questione, ossia a tendere a caratterizzare la figura del docente-ricercatore per un suo riconoscimento formale.

2 - La domanda del corso di abilitazione

Per iniziare a orientarsi nella presente questione, si ritiene utile riportare sinteticamente l'idea che hanno del docente-ricercatore coloro che frequentano i corsi abilitanti, ossia i futuri docenti. Un'indagine preliminare con una specifica domanda è stata svolta dall'Autore durante i due moduli tenuti per l'abilitazione alla Classe di Concorso A28 (Matematica e Scienze nella Secondaria di I Grado) *ex* DPCM del 4 agosto 2023. I moduli di cinque ore ciascuno, si sono tenuti a settembre 2024 e giugno 2025 presso l'Università di Roma Tor Vergata. In totale sono state coinvolte 19 persone che dovevano acquisire i 60 CFU. Alcuni dati aggregati di chi è stato coinvolto sono riportati in Tabella 1.

Partecipanti	19	
Anni di insegnamento (media) (supplenze o altra Classe di Concorso)	1.6 aa	
Possesso titolo dottorato	5 (1 matematica)	
Formazione universitaria	biologia	7
	chimica	2
	scienze nutrizione	2
	fisica	2
	informatica	2
	geologia	1
	ingegneria	1
	scienze naturali	1
	conservazione dei beni	1
	matematica	0

Tabella 1

Pur nel silenzio di statistiche ufficiali e risposte a *email* ancora non pervenute dal Ministero e dall'USR del Lazio, l'esperienza dell'Autore ritrova nella distribuzione delle diverse tipologie di formazione universitaria riportata in Tabella 1 la situazione reale.

Alcune risposte alla domanda posta sono vaghe (*Penso il "docente ricercatore" come una persona curiosa, un osservatore attento, studioso per tutta la vita, ricco di creatività; Trasmissione del sapere e produzione del nuovo sapere*) sovrapponendosi a ciò che già svolge il docente nella sua attività. In altre si identifica il collegamento con il mondo accademico (*Un docente che ha interessi e collaborazioni col mondo accademico*) o, addirittura, lo svolgimento della docenza solo all'Università. In generale, però, l'attenzione è focalizzata sulla didattica (*Il docente che approfondisce e esplora in maniera continuativa come migliorare e*

sviluppare le sue "tecniche" di insegnamento, il modo di fare didattica) e sulla disciplina (*Passa il suo tempo in laboratorio e riesce a spiegare un argomento a 360°, riuscendo anche a svolgere collegamenti interdisciplinari*), palesando l'auto-formazione (*Docente che continua a formarsi facendo ricerche per aggiornarsi e insegnare usando metodi innovativi*).

In una precedente ricerca con la somministrazione di un questionario ai docenti, si venne a delineare il seguente profilo del docente-ricercatore che in alcuni punti si sovrappone a quanto riportato prima:

- *insegnante consapevole: consapevole, innanzitutto, che la propria professionalità è poliedrica e unica, specifica ed esclusiva;*
- *insegnante mediatore tra le proprie e le altrui competenze (disciplinari, metodologiche e didattiche) e abilità (relazionali e valutative);*
- *insegnante che vede il confronto, l'aggiornamento e la formazione non come un obbligo connesso con l'attività lavorativa, ma come un investimento; di più, come un valore personale e professionale;*
- *insegnante, infine, che riconosce e valorizza il dinamismo del proprio ruolo e lo declina attraverso un costante atteggiamento di ricerca* (Gubellini, 2003, p. 60).

Sempre in una ricerca del 2003, i docenti indicavano come elementi che maggiormente contraddistinguono un docente-ricercatore la creatività, l'utilizzo delle nuove tecnologie, la capacità di leadership e la capacità di documentazione, l'innovazione delle strutture metodologico-disciplinari e la capacità di generalizzare la ricerca (Rosso, 2003).

3 - Il docente-ricercatore

Per iniziare ad analizzare la questione per confrontarla con lo stato delle cose evidenziando differenze e concordanze, è necessario abbozzare una definizione di docente-ricercatore dalla quale partire. Si propone la seguente:

> *Un docente-ricercatore è un docente del primo o secondo ciclo d'istruzione che, a seguito di una specifica formazione, progetta autonomamente la sua auto-formazione e l'attività didattica in classe misurando quantitativamente e/o qualitativamente le risposte ai quesìti.*

Si ritiene che l'aspetto importante che caratterizza la figura del docente-ricercatore è la consapevolezza di un percorso metodologico con la documentazione sia delle varie fasi che degli esiti per una comunicazione agli studiosi e per una sua replica e/o miglioramento (Babkie, Provost, 2004). Quindi, non solo l'esecuzione di un protocollo di attività, ma esserne consapevole dei profondi significati per adattarlo agli studenti che si ha davanti. L'ulteriore salto di qualità è l'ideazione del protocollo senza che questo sia dato da altri, ossia la competenza di un'ideazione originaria. Tra le varie proposte di protocollo di ricerca proposti ai docenti si può ricordare il classico modello di Mohr e MacLean (1987) che si compone delle seguenti fasi: Identificazione di un problema; Formulazione di una domanda di ricerca; Identificazione preliminare della letteratura sull'argomento (per verificare a che punto l'argomento è stato analizzato in ambito scientifico); Raccolta, analisi e presentazione dati; Divulgazione dei risultati.

Per poter valutare la suddetta bozza di definizione mettiamola a confronto con quanto dice la dottrina giuridica su chi sia il docente. chi, avendo superato un apposito esame di Stato, è abilitato all'esercizio della professione in una o più discipline (art. 33 §5 *Cost.*) (Mura, 1998). Una definizione che sembrerebbe avvicinarsi a quella delle tradizionali professioni liberali (medici, avvocati, architetti, …) dove, a seguito di un esame di Stato, si consegue un'abilitazione per lo svolgimento della libera professione. In realtà, da un punto di vista formale, l'assunzione della qualifica di docente statale implica l'inclusione in una categoria di impiegati statali facenti parte del comparto 'scuola'. Oggi, coerentemente con l'effettiva attuazione dell'autonomia scolastica, le analogie tra i docenti della scuola secondaria e le libere professioni propriamente dette si rintracciano innanzitutto nella natura prevalentemente intellettuale dell'attività professionale, caratterizzata da *un sapere avanzato, acquisito mediante istruzione teorica e formale; e l'affermazione di un monopolio nell'uso di questo sapere* (Brambilla, 2002), certificato da titoli di studio e da abilitazioni con valore legale. Allo stesso tempo, però, permangono importanti differenze: i docenti non appartengono ad alcun ordine professionale, né tanto meno sono iscritti a un albo. Un'altra differenza è che automaticamente il docente in una scuola pubblica è sia un dipendente statale che un pubblico ufficiale. Rispetto al mondo universitario, al docente dei primi due cicli si applica il principio dell'*unicità* della funzione poiché tra i docenti non vi una distinzione collegata alla valutazione (merito) come, invece, si ha all'Università con le figure del ricercatore, associato, ordinario. L'unica distinzione

è di natura economica basandosi sull'anzianità di servizio (Falanga, 2014).

Inoltre, si consideri che il legislatore italiano definisce, in un atto datato, la funzione docente come

> *esplicazione essenziale dell'attività di trasmissione della cultura, di contributo alla elaborazione di essa e d'impulso alla partecipazione dei giovani a tale processo e alla formazione umana e critica della loro personalità e I docenti delle scuole di ogni ordine e grado, oltre a svolgere il loro normale orario di insegnamento, espletano le altre attività connesse con la funzione docente tenuto conto dei rapporti inerenti alla natura dell'attività didattica e della partecipazione al governo della comunità scolastica (art. 2, DPR n. 417/1974 (Decreti Delegati) Norme sullo stato giuridico del personale docente, direttivo e ispettivo della scuola materna, elementare, secondaria e artistica dello Stato).*

Quindi, la didattica è considerata una trasmissione di nozioni disciplinari con l'obiettivo di formare gli studenti.

Nell'attuale CCNL del comparto *Istruzione e Ricerca* del periodo 2019-2021 firmato nel gennaio 2024, all'art. 40 si riporta la descrizione della funzione del docente:

> *1. La funzione docente realizza – nel rispetto della Costituzione Italiana – il processo di insegnamento/apprendimento volto a promuovere lo sviluppo umano, culturale, civile e professionale degli alunni, sulla base delle finalità e degli obiettivi previsti dagli ordinamenti scolastici definiti per i vari ordini e gradi dell'istruzione.*
> *2. La funzione docente si fonda sull'autonomia culturale e professionale dei docenti; essa si esplica nelle attività individuali e collegiali e nella partecipazione alle attività di aggiornamento e formazione in servizio.* [...]

dove si evidenzia l'autonomia culturale e professionale dei docenti e la partecipazione alle attività di aggiornamento e formazione in servizio. All'art. 42, invece, viene riportato il profilo professionale del docente:

> *1. Il profilo professionale dei docenti è costituito da competenze disciplinari, informatiche, linguistiche, psicopedagogiche, metodologico-didattiche, organizzativo-relazionali, di orientamento e di ricerca, documentazione e valutazione tra loro correlate ed interagenti, che si sviluppano col maturare dell'esperienza didattica, l'attività di studio e di sistematizzazione della pratica didattica. I contenuti della prestazione professionale del personale docente si definiscono nel quadro degli obiettivi generali perseguiti dal sistema nazionale di istruzione e nel rispetto degli indirizzi delineati nel piano dell'offerta formativa della scuola.*

dove si evidenzia una non ben definita competenza di *ricerca* e di *attività di studio e di sistematizzazione della pratica didattica*. In un altro articolo, il 43 §12, si utilizza ancora il termine *ricerca* senza esplicitarne il senso e ponendolo, però, in relazione a quanto previsto dal *Piano Triennale dell'Offerta Formativa* (PTOF). Indicazioni un po' più chiare si ritrovano nell'art. 46 §1 il quale si riferisce alla ricerca e innovazione:

> *1. In sede di contrattazione collettiva integrativa nazionale di cui all'art. 30, comma 2, lett. a) (Livelli, soggetti e materie di relazioni sindacali) saranno definite modalità e criteri di utilizzazione di tutti gli eventuali finanziamenti aggiuntivi destinati al personale impegnato nelle attività di tutor, orientamento, coordinamento e nel sostegno della ricerca educativo-didattica e valutativa funzionali allo*

> *sviluppo dei processi d'innovazione e finalizzati alla valorizzazione del lavoro d'aula e al miglioramento dei livelli di apprendimento.*

In questo articolo vi è la dicitura *nel sostegno della ricerca educativo-didattica* che in assenza di maggiori specifiche potrebbe adombrare una presa in considerazione a livello di ore e in base ai finanziamenti, di una collaborazione alla ricerca, ma senza specificare chi debba svolgere questa ricerca: il docente? enti esterni? entrambi? e tanto meno chi la progetti dal punto di vista delle tematiche.

In tale contesto la formalizzazione di una figura che pur rimanendo a scuola svolga un'attività di ricerca istituzionalizzata come quella del personale docente delle Università non è considerata risultando la ricerca stessa appannaggio solo dell'Università. Infatti, prima del 2020, a fronte di alcune divisioni e riunificazioni, vi era un ministero che contemplava tutti e tre i gradi di istruzione, il MIUR, successivamente lo stesso è stato nuovamente diviso: uno per i primi due gradi d'istruzione (il Ministero dell'Istruzione e del Merito (MIM)) e uno per l'Università (il Ministero dell'Università e della Ricerca (MUR)). Ciò pone un solco invalicabile tra i due mondi burocratici dell'istruzione pur nella sollecitazione della continuità.

Nonostante questo *status* formale, la realtà della ricerca sulla didattica della matematica vede docenti che svolgono attività con istituzioni universitarie divenendo collaboratori dei ricercatori / docenti universitari. In questo caso adombrando un possibile ruolo subalterno del docente-ricercatore a scuola rispetto al docente che svolge ricerca in ambito accademico (Sugliano, Chiappini, 2019). In altri casi,

come in quello dell'Autore, si decide, grazie alla possibilità offerta dalla normativa scolastica, di usufruire di un congedo straordinario triennale per lo svolgimento di un dottorato. In altri casi ancora, si può usufruire di un distacco o comando (Leggi 448/1998 e 107/2015). Quindi, si dovrebbe distinguere tra un docente che collabora e un docente che ha un dottorato. Dal punto di vista burocratico ciò evidenzia il fatto che al conseguimento del titolo di dottorato il docente rimane docente situandosi in una situazione ibrida poiché come docente ha una professionalità certificata dall'abilitazione e come dottore di ricerca ha un'altra professionalità certificata dal titolo. In questa condizione il docente conosce entrambi i mondi e ne è un esperto, ma non ha una qualifica ufficiale che unisca le due figure professionali. Un primo passo in questa direzione potrebbe essere un titolo simile a quello di cultore della materia, disciplinato dal Regio Decreto 4 giugno 1938 n. 1269, in didattica della matematica (SSD MATH 01/B), ossia colui che, avendo acquisìto adeguate competenze in uno specifico settore scientifico-disciplinare, è abilitato a svolgere, senza appartenere ai ruoli del personale universitario, diverse attività didattiche: membro di Commissioni degli esami di profitto, coadiuvare i docenti nell'assistenza agli studenti per la preparazione delle tesi di laurea. Da considerare che l'assegnazione del titolo è a discrezione dell'Università alla quale si fa richiesta. Questo, però, identificherebbe una figura nell'Università, ma non nella scuola e senza un monte ore da dedicarvici. La distinzione tra il docente-ricercatore e il docente universitario che si dà è espressa come segue:

> *Un conto è la ricerca quotidiana che ciascun insegnante compie nella propria classe per adeguare il discorso formativo alle esigenze specifiche di questa: e sotto tale profilo ogni insegnante è davvero*

> *sempre un ricercatore. Un conto è la ricerca di nuovi metodi, la cui provata (sui propri studenti) particolare efficacia merita che vengano proposti ad altri studenti, in altri contesti*(Piazzi, 2003, p. 21).

Quindi, si poneva in essere una specie di ricerca 'locale' (sulla didattica di quella classe) e una ricerca 'globale' (didattica in generale), ma così intendendo si ripropone la subalternità del docente di scuola non considerando che attraverso l'esperienza di un dottorato il docente stesso ha acquisìto una competenza di ricerca accademica. Tale competenza non sarà ufficiale, istituzionalizzata, ma sicuramente di livello accademico che permette di andare oltre l'orizzonte della scuola.

Nell'ambito della scuola, si ritiene, è necessario un netto cambio di mentalità poiché, se non vi fosse una ricaduta 'visibile', difficilmente i dirigenti esonerebbero i docenti dalla didattica con il conseguente effetto domino di sopperirvi con altre figure, ossia i supplenti. Un'altra proposta è quella di istituire un anno sabbatico remunerato dopo un certo numero di anni di insegnamento per approfondire alcune tematiche e con l'obbligo di tenere un corso ai colleghi della scuola al rientro. Tale anno sabbatico sarebbe, in via incidentale, utile anche come prevenzione del *burn-out*. Questioni non secondarie sono il dove svolgere tale anno (convenzione con le Università?), con quali titoli, come anche il numero di docenti che contemporaneamente può accedervi.

4 - Conclusioni

Dal punto di vista volontaristico la situazione del docente-ricercatore è semplice essendo sufficiente che non vi siano oneri per l'istituzione scolastica e sovrapposizioni di orario. Se, invece, si volesse intraprendere una strada ufficiale le suddette proposte necessitano un ripensamento del ruolo del docente non tanto in relazione alla didattica, che comunque deve sempre esserci come momento esperienziale, ma nel come pensare il corpo docente: *non c'è una cultura dello svolgere attività di ricerca didattica all'interno delle organizzazioni scolastiche, attività che fino a qualche tempo fa erano svolte da organismi quali l'IRRE* [(Istituto Regionale Ricerca Educativa)] *e oggi da INDIRE o dall'Università o da organismi indipendenti che coinvolgono i docenti quali attori di ricerche proposte da altri* (Sugliano, Chiappini, 2019). Tutto ciò anche considerando che lo Stato permette il congedo per dottorato, ma poi non si struttura perché questo diventi una risorsa nella scuola.

In particolare, l'attenzione portata alla Classe di Concorso A28 solleva altre questioni collegate con la formazione universitaria che pur essendo la disciplina matematica sempre la stessa (Israel, 2012), viene esposta per fini differenti sollevando le difficoltà che si possono avere nel gestire il confronto tra diverse sensibilità che si hanno sugli argomenti matematici. Non meno importante dovrebbe essere l'analisi delle metodologie per veicolare questi argomenti visto che diventa sempre più importante l'approccio storico (Aebischer, 2025). Tutto ciò, però, necessità di una formazione personale del docente che possa farli comprendere il dover ampliare l'orizzonte di studio (Bolondi, 2013).

Purtroppo, nel prossimo futuro si ritiene che il 'docente-ricercatore' sarà ancora più un modo di rapportarsi alla disciplina e alla sua didattica in maniera personale basandosi sull'*autonomia culturale e professionale*, che una figura istituzionalizzata o per lo meno ufficiosamente considerata. Ciò evidenzia il concreto rischio che il percorso personale rimanga tale senza la possibilità di 'contagiare' il lavoro di tutti i giorni come anche quello dei colleghi in un sano confronto formativo. Da questo punto di vista ci sembra di dover ancora, dal lontano 2003, avallare la seguente constatazione:

> *La ricerca* [...] *continua ad appartenere al singolo (docente o gruppo di docenti, in questo caso non è rilevante), ma non viene pienamente assunta dall'istituzione-scuola: quando non ostacola (con rigide "scadenze") è almeno inadeguata, per le croniche carenze di risorse umane e materiali. Di più. Il contesto scolastico non ha ancora assunto i connotati di quella "comunità professionale in apprendimento" – cui molti insegnanti aspirano – in cui l'universo dei discorsi e delle conoscenze possa essere condiviso e il "fare ricerca" possa diventare comune pratica riflessiva del proprio essere e del proprio agire* (Gubellini, 2003, p. 60).

Ringraziamenti

L'Autore ringrazia il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata per il supporto del grantMatMod@TOV (2023-27) del Dipartimento di Eccellenza.

Bibliografia

Aebischer T. (2025). La Storia della Matematica nel Quadro di Riferimento della Mathematical Knowledge for Teaching (MKT): Una Proposta Teorica, *La Matematica e la sua Didattica*, *33*(1), *pp* 27-41. https://doi.org/10.6092/issn.3035-2940/21830.

Babkie A.M., Provost M. (2004). Teachers as Researchers, *Intervention inSchool and Clinic*, *39*(5), *pp* 260-268.

Bertani M.T. (2003). La ricerca delle scuole: un regalo miliardario. In Bertani M.T., Orlandoni A., Piazzi F. (Eds.) (2003). *Il ricercatore metodologico disciplinare. I tratti distintivi di una figura professionale*, Bologna: editcomp (*pp* 45-53).

Bolondi G. (2013). Alcuni snodi della formazione dell'insegnante di Matematica. In Catastini L., Ghione F., Rogora E. (Eds.). *Atti del Convegno "La formazione degli insegnanti di Matematica. L'esperienza italiana a confronto con alcune esperienze europee"* (Università di Roma Tor Vergata, 8 giugno 2012), *Pristem*, *36-37*, *pp* 35-43.

Brambilla E. (2002). Dalle arti liberali alle professioni. In Malatesta M. (Ed.), *Corpi professionali tra passato e futuro*, Milano: Giuffré.

Cusi A., Robutti O. (2017). La collaborazione per rendere i docenti protagonisti della propria formazione: esempi dall'Italia e dal mondo. In Pastore F. (Ed.). *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2016-2017*, (*pp* 231-248).

Falanga M. (2014). La valutazione del personale docente, delle Istituzioni scolastiche e l´autovalutazione: considerazioni di carattere giuridico. In *PROGRAMMA EDUCATION FGA WORKING PAPER*, Fondazione Giovanni Agnelli, *53*, *pp* 1-14.

Gubellini M.C. (2003). Scheda di documentazione delle ricerche prodotte dagli insegnanti dell'Emilia Romagna: una prima analisi di alcuni elementi qualitativi. In Bertani M.T., Orlandoni A., Piazzi F. (Eds.). *Il ricercatore metodologico disciplinare. I tratti distintivi di una figura professionale*, Bologna: editcomp, (*pp* 55-80).

Israel G. (2013). Quale matematica insegnare?. In Catastini L., Ghione F., Rogora E. (Eds.). *Atti del Convegno "La formazione degli insegnanti di Matematica. L'esperienza italiana a confronto con alcune esperienze europee"* (Università di Roma Tor Vergata, 8 giugno 2012), *Pristem*, 36-37, *pp* 147-157.

Michelini M.C. (2022). Formare insegnanti riflessivi e critici, *Pedagogia oggi*, *20*(1), *pp* 154-160. https://doi10.7346/PO-012022-20.

Mohr M.M., MacLean M.S.(1987). *Working Together: A Guide for Teacher-Researchers*, Urbana (USA): National Council of Teachers of English.

Mosa E., Panzavolta S., Storai F. (2017). Il docente ricercatore: una proposta per riflettere sull'agire didattico, *European Journal of Education Studies*, *3*(3), 222–240. DOI: 10.5281/zenodo.291989.

Mura A. (1998). Scuola (personale insegnante della). In *Enciclopedia giuridica*, XXVIII, *ad vocem*, Treccani.

Piazzi F. (2003). L'esperienza in classe, prima specificità del ricercatore RMD. In Bertani M.T., Orlandoni A., Piazzi F. (Eds.). *Il ricercatore metodologico disciplinare. I tratti distintivi di una figura professionale*, Bologna: editcomp, (*pp* 7-27).

Rosso E. (2003). L'insegnante ricercatore, ovvero il decatleta innovativo. In Bertani M.T., Orlandoni A., Piazzi F. (Eds.). *Il*

ricercatore metodologico disciplinare. I tratti distintivi di una figura professionale, Bologna: editcomp, (*pp* 37-44).

Sugliano A.M., Chiappini M. (2019). "Aumentare" la figura professionale del docente: il docente-ricercatore, *Didamatica*, *pp* 1-9.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (2) Supplemento sett. 2025, pp. 243-252

Consapevolezza e gestione del rischio da frana: un approccio ludico per studenti delle scuole superiori

"Safe Haven – Landslides" un gioco per pensare il rischio

Michele Calvello*, Maria Vittoria Gargiulo**, Guido Rianna***

*Università degli Studi di Salerno, Italia; mcalvello@unisa.it
** Università degli Studi di Salerno, Italia; mgargiulo@unisa.it
*** CMCC Foundation - Euro-Mediterranean Center on Climate Change, Italia; guido.rianna@cmcc.it

Sunto: *Il contributo analizza il ruolo dei serious games nella didattica interdisciplinare con focus sul gioco "Safe Haven – Landslides". L'uso della narrazione e della gamification consente un apprendimento attivo dei concetti legati al rischio associato a fenomeni naturali. È discusso in particolare l'aspetto probabilistico e modellistico degli scenari di gioco, utile per la formazione matematica e decisionale.*

Parole Chiave: *Serious games, gamification, rischio*

Abstract: *This paper explores the educational potential of serious games through the case of "Safe Haven – Landslides", a game designed to raise awareness of landslide risk. The game uses storytelling and gamification to engage players in*

active learning. Special attention is given to the probabilistic modeling of game scenarios, which offers opportunities to teach mathematical thinking and decision-making under uncertainty.

Keywords: *Serious games, gamification, risk*

1 - I *serious games* come strumenti educativi e formativi

I giochi possono rappresentare un potente strumento per avvicinare le persone a concetti scientifici, rendendoli accessibili e coinvolgenti (Bateson & Martin, 2013). Negli ultimi anni, i *serious games*—giochi progettati con finalità educative, sociali o formative—hanno conosciuto una crescente diffusione nei contesti scolastici e accademici. In opposizione ai giochi di puro intrattenimento, essi sono pensati per generare apprendimento significativo, promuovere la consapevolezza critica e sviluppare abilità complesse attraverso l'esperienza immersiva (Pacheco-Velázquez et al. 2023; Kara, 2021; Kalogiannakis et al., 2021). Nel campo dell'educazione alla gestione del rischio, i *serious games* permettono di sperimentare scenari dinamici e multidimensionali, offrendo ai partecipanti la possibilità di assumere ruoli decisionali e affrontare problemi aperti, sotto vincoli di risorse e in condizioni di incertezza (Shuja Ud Din et al., 2023; Karimol et al., 2024). L'apprendimento avviene, in questo contesto, attraverso la simulazione, la riflessione e l'errore, in un ambiente controllato ma verosimile.

Nell'ambito di progetto di ricerca europeo che si occupa di rischi legati a fenomeni meteorologici estremi (https://thehut-

nexus.eu/), è stato ideato "Safe Haven – Landslides", un gioco da tavolo che tratta, attraverso il gioco, i principali fattori che concorrono alla definizione del rischio da frana ed alla sua gestione (Cascini, 2014). Il gioco è utilizzabile sia come un classico gioco da tavolo, senza bisogno di alcuna guida esperta, sia nell'ambito di un modulo formativo sul rischio da frana per studenti delle scuole superiori. "Safe Haven – Landslides" si inserisce pienamente nel filone dei giochi educativi, proponendosi come uno strumento didattico interattivo che fonde contenuti scientifici rigorosi con una narrazione coinvolgente e modulabile, adattabile a pubblici diversi, dalle scuole superiori agli adulti interessati.

1.1 – Storytelling e gamification per l'educazione al concetto di rischio

Uno degli elementi distintivi di "Safe Haven – Landslides" è la sua struttura narrativa. I partecipanti sono invitati a immaginarsi nel ruolo di amministratori locali chiamati a proteggere il proprio territorio da rischi naturali, in particolare da frane. Ogni turno rappresenta un arco temporale (simbolicamente un mandato amministrativo quinquennale), durante il quale si devono prendere decisioni strategiche, valutare le priorità, gestire risorse scarse, e rispondere a imprevisti.

Gestire adeguatamente un rischio significa prendere decisioni in condizioni di incertezza, con consapevolezza. Le regole del gioco consentono di approcciare, a vari livelli, una numerosa serie di elementi che influenzano questa consapevolezza, per il rischio da frana: 1) rischio come prodotto pericolosità, esposizione e vulnerabilità; 2) calcolo di

probabilità su variabili singole e multiple; 3) criteri di accettabilità e tollerabilità del rischio; 4) misure di riduzione di pericolosità, esposizione e vulnerabilità; 5) analisi costi-benefici; 6) gestione delle risorse finanziarie nel breve e lungo periodo; 7) valutazione di imprevisti "prevedibili"; 8) scelte di governo del territorio.

La gamification si esprime nell'alternanza di momenti decisionali, imprevisti, carte evento e progressione nel tempo. L'intero impianto narrativo è costruito per favorire l'empatia, l'identificazione e la riflessione critica. Le scelte effettuate influenzano lo sviluppo futuro della partita, innescando una dinamica di feedback che riproduce, in forma semplificata ma realistica, la complessità della pianificazione territoriale e della gestione del rischio (Schrader, 2023; Nebel et al., 2021).

L'efficacia didattica del gioco risiede proprio in questa commistione tra coinvolgimento emotivo (veicolato dal narratore) e rigore concettuale: l'esperienza ludica diventa veicolo per l'introduzione di temi complessi, come la relazione fra rischio, incertezza e decisione, o l'interdipendenza fra politiche pubbliche e sostenibilità ambientale.

2 - La struttura matematica del rischio

Il cuore concettuale del gioco è dato dalla formula:

$$\mathbf{R = H \times E \times V}$$

dove: **H** è la pericolosità, ovvero la probabilità che l'evento si verifichi (modellata con dadi a 12 facce con distribuzioni variabili); **E** è l'esposizione, ossia la presenza di persone o beni in aree a rischio; **V** è la vulnerabilità, cioè la fragilità degli elementi esposti.

Tutte e tre sono modellate con dadi a 12 facce con distribuzioni variabili.

La natura moltiplicativa dell'equazione sottolinea che la presenza di un solo fattore elevato può innalzare significativamente il rischio complessivo. Ne derivano implicazioni pedagogiche rilevanti per l'insegnamento delle funzioni multivariate, delle distribuzioni discrete, delle medie, dei percentili e dell'incertezza.

L'uso di tre tipi di dadi a 12 facce con distribuzioni di valori diverse (distribuzione base, alta, estrema) consente di esplorare vari scenari di probabilità composta e di introdurre, con gradualità, variazioni di livelli di rischio corrispondenti a cambiamenti nel tempo di una o più delle sue tre componenti (H, E, V), come ad esempio l'aumento della frequenza delle frane, la crescente urbanizzazione e vulnerabilità di strutture e infrastrutture.

2.1 - La meccanica del gioco: decisione, alea e strategia

A ogni turno (corrispondente a un mandato amministrativo di cinque anni), i giocatori ricevono un budget da allocare in misure strutturali e non strutturali, attraverso: i) carte per ridurre la pericolosità (es. opere di sostegno, drenaggi); ii) carte per ridurre l'esposizione (es. piani regolatori, sistemi di allerta); iii) carte per ridurre la vulnerabilità (es. barriere di protezione, assicurazioni).

Oltre a ciò, carte "chance" simulano imprevisti esterni, positivi o negativi, che alterano i valori di H, E o V, aggiungendo una componente di aleatorietà controllata. I giocatori devono dunque prendere decisioni in condizioni di incertezza, ponderare il mantenimento degli investimenti già

effettuati, valutare l'efficacia attesa delle misure (che può variare) e gestire i fondi a disposizione.

La possibilità di calcolare, ex ante, la distribuzione delle probabilità di superamento soglia permette l'introduzione di esercizi di stima probabilistica e decision making quantitativo.

3 - Gli scenari come modelli: il ruolo della probabilità nella progettazione del gioco

Dal punto di vista matematico, uno degli aspetti più interessanti di "*Safe Haven – Landslides*" è il modo in cui sono stati progettati diversi scenari di gioco, che modulano i livelli di difficoltà nei vari turni, da *Take it easy* a *Tough to survive*, passando per la modalità *Standard*. Ciascuno scenario, infatti, non è solo una sequenza narrativa, ma una vera e propria modellizzazione probabilistica del rischio. Gli scenari sono realistici e specificano, per ogni turno di gioco: il set di dadi da utilizzare; la soglia accettabile di rischio; le risorse economiche disponibili.

I livelli di difficoltà sono regolati attraverso l'uso di dadi a dodici facce con tre distribuzioni differenti (base, alta, estrema) di valori da 1 a 5 applicati alle tre componenti del rischio: pericolosità (H), esposizione (E), vulnerabilità (V). Si tratta, in sostanza, di una modellizzazione probabilistica del rischio a eventi discreti e distribuzione controllata, che consente una gestione didattica sofisticata dei concetti di distribuzione, varianza e valore atteso.

Passando dalla distribuzione base (simmetrica rispetto al valore 3) a quella estrema, aumenta gradualmente la probabilità di ottenere valori più elevati (valori 4 e 5) rispetto a quelli più bassi (valori 1 e 2). A ciò si aggiunge la

definizione, per ogni turno, di una soglia di rischio accettabile e di una dotazione economica, variabili in base allo scenario selezionato. In questo modo, la probabilità di "sopravvivere" a un turno non è uniforme, ma modulata in funzione della combinazione di input dati e budget.

Per esempio, nello scenario Standard, i primi turni usano dadi "base" e una soglia di rischio accettabile pari a 23, corrispondente ad una probabilità di non superamento intorno al 50%. Nei turni finali, i dadi diventano "estremi" e la soglia può scendere a 18, corrispondente ad una probabilità di non superamento di circa il 20%, riducendo drasticamente le possibilità di superare indenni il turno senza il possesso di adeguate misure di riduzione del rischio. Questa costruzione, semplice nella forma ma raffinata nella logica, consente un'analisi probabilistica delle situazioni e stimola nei giocatori una riflessione metacognitiva sul concetto stesso di rischio.

In contesti educativi strutturati o moderati, è possibile esplicitare questa componente, guidando i partecipanti nell'analisi delle distribuzioni di probabilità, nel calcolo dei valori attesi, nella valutazione delle strategie ottimali sotto vincoli. Ciò offre un terreno particolarmente fertile per l'insegnamento della matematica applicata, della statistica e dei processi decisionali in condizioni di incertezza. Nel gioco, infatti, i partecipanti sono indotti a prevedere e pianificare sulla base di scenari probabilistici, e possono comprendere (o dedurre empiricamente) come l'aumento della varianza renda il sistema più instabile e difficile da controllare.

In contesti educativi moderati o avanzati, questo schema può essere esplicitato con attività laboratoriali, quali: calcolo della probabilità di sopravvivenza per ogni turno tramite

simulazione (es. con foglio Excel o script Python); costruzione di istogrammi empirici del rischio totale in diversi scenari (base, alto, estremo); analisi della distribuzione condizionata al mantenimento o meno di misure di mitigazione (applicazione iterata di carte di riduzione). Tali attività aprono la strada all'introduzione di concetti avanzati, quali la composizione di distribuzioni discrete, il concetto di soglia accettabile come quantile, o il principio di precauzione visto come valutazione della coda superiore della distribuzione.

In sintesi, la progettazione probabilistica degli scenari non è solo un elemento di calibrazione del gioco, ma diventa un pretesto didattico potente per esplorare la matematica del rischio e dei sistemi complessi. Il gioco, in tal senso, si trasforma in un modello operativo che può essere reso trasparente, discusso, smontato e rielaborato come parte integrante dell'apprendimento.

4 - Conclusioni: un gioco per pensare (matematicamente) il rischio

Il gioco "Safe Haven – Landslides" si presta a un utilizzo versatile nell'ambito della didattica scolastica, stimolando: il pensiero critico e la riflessione sistemica; la comprensione del rischio legato a fenomeni naturali (tramite l'esempio delle frane); l'uso della matematica per modellare e prevedere scenari; l'uso dell'informatica (es. Python o fogli di calcolo) per simulazioni e visualizzazioni delle distribuzioni di rischio; la discussione etica e politica su priorità, gestione delle risorse economiche e pianificazione urbana.

"Safe Haven – Landslides" non è soltanto un gioco educativo sulla consapevolezza e sulla gestione del rischio da

frana, è anche un laboratorio di modellazione, un esempio di matematica vissuta e un invito a riflettere sulle sfide che la società contemporanea pone alla conoscenza scientifica. La sua struttura consente percorsi di apprendimento differenziati, capaci di valorizzare tanto le competenze logico-matematiche quanto la capacità di leggere fenomeni complessi, di narrare, di decidere, di pianificare. L'interazione fra dimensione narrativa, azione ludica e contenuto scientifico costituisce un potente strumento di *gamification* e didattica trasformativa.

La sua efficacia è stata testata in eventi pubblici (FuturoRemoto 2024 a Napoli e Salerno) e contesti scientifici (European Geosciences Union Assembly 2024 e 2025), ottenendo riscontri positivi per robustezza scientifica, giocabilità e valore formativo.

Bibliografia

Bateson, P., & Martin, P. (2013), Play, Playfulness, Creativity and Innovations. Cambridge UniversityPress, ISBN:9781139057691.

Bellotti, F., Berta, R., & De Gloria, A. (2014). Springer. Serious Games for education and training. International Journal of Serious Games, 1(1). https://doi.org/10.17083/ijsg.v1i1.11

Cascini, L. (2014). Criteri di analisi e gestione del rischio da frana: dal Governo centrale alle comunità locali. Atti del XXV Convegno Nazionale di Geotecnica "La geotecnica nella difesa del territorio e delle infrastrutture dalle calamità naturali", Vol.1, pp. 103-150.

Kalogiannakis, M., Papadakis, S., & Zourmpakis, A.-I. (2021). Gamification in Science Education. A Systematic Review of the

Literature. Education Sciences, 11(1), 22. https://doi.org/10.3390/educsci11010022

Kara, N. (2021). A systematic review of the use of serious games in science education. Contemporary Educational Technology, 13(2), ep295. https://doi.org/10.30935/cedtech/9608

Karimov, Ayaz & Saarela, Mirka & Kärkkäinen, Tommi. (2024). Serious games in Science and Mathematics Education: a scoping umbrella review. International Journal of Serious Games. 11. 3-20. 10.17083/ijsg.v11i3.765.

Nebel, S., Schneider, S., & Rey, G. D. (2021). Revealing the theoretical basis of gamification. Computers in Human Behavior, 125, 106963. https://doi.org/10.1016/j.chb.2021.106963

Shuja Ud Din, R., Daud, A., & Aslam, M. (2023). Serious games: An updated systematic literature review. arXiv preprint arXiv:2306.03098.

Schrader, Claudia. (2023). Serious Games and Game-Based Learning. 10.1007/978-981-19-2080-6_74.

Pacheco-Velázquez, E., López-Morteo, G., & López-González, A. (2023). Serious Games and Experiential Learning. International Journal of Serious Games, 10(3), 1–17. https://doi.org/10.17083/ijsg.v10i3.593

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 253-270

InsAId

Un progetto pluridisciplinare tra matematica, IA e divulgazione scientifica per docenti e studenti

Matteo Torre*

*Liceo Scientifico "G. Peano", Tortona (AL), matteo.torre1984@gmail.com

Sunto: *Il progetto InsAId è stato messo in atto per la prima volta nell'a.s. 2024-25 dapprima con un gruppo di 10 docenti e poi in due classi di V Liceo Scientifico e in una V Liceo delle Scienze Umane, per un totale di 73 alunni coinvolti. Tutti gli attori coinvolti hanno potuto conoscere la storia dell'AI, la nascita del concetto di rete neurale, ma soprattutto i metodi di addestramento delle reti neurali attraverso la tecnica del rinforzo positivo e i "big data".*

Parole Chiave: *IA, didattica, machine learning, apprendimento per rinforzo*

Abstract: *The InsAId project is being implemented for the first time in the 2024–25 school year, initially with a group of 10 teachers and then in two final-year classes of the Scientific High School and one final-year class of the Human Sciences High School, involving a total of 73 students. All participants had the opportunity to learn about the history of AI, the emergence of the concept of neural networks, and, most importantly, the methods used to train neural networks through positive reinforcement techniques and the use of big data.*

Keywords: *AI, math education, machine learning, reinforcement learning*

1 - Introduzione

Si sente spesso parlare di IA, di reti neurali, ma molti percorsi formativi non riescono a spiegare (e in maniera semplice) i principi di funzionamento delle reti neurali e dell'IA generativa. *InsAId* (dentro l'IA) è un progetto didattico che vuole fornire a docenti e studenti una comprensione generale e puntuale dell'Intelligenza Artificiale (IA), con un focus specifico sui principi che governano le reti neurali e l'IA generativa. Partendo dai concetti base, il corso è servito per far comprendere appieno come le reti neurali, ispirate al cervello umano, siano in grado di "apprendere" dai dati per riconoscere pattern, fare previsioni o classificare informazioni e, al tempo stesso, fornire le conoscenze necessarie per comprenderne le potenzialità e i limiti del IA, stimolando al tempo stesso anche una riflessione critica sul suo impatto.

2 – Il progetto *InsAId*

L'IA non è più un concetto relegato alla fantascienza, ma una forza pervasiva che modella la nostra società, economia, cultura e, sempre di più, la nostra vita quotidiana. Dagli algoritmi che personalizzano i nostri *feed* social alle diagnosi mediche assistite, fino ai potenti modelli di linguaggio generativo che scrivono testi e creano immagini, l'IA è il nuovo paradigma tecnologico del XXI secolo. Tuttavia, per la maggior parte delle persone, e in particolare per le giovani generazioni che ne sono i principali fruitori, essa rimane una "scatola nera": uno strumento potente di cui si utilizzano gli

output senza comprenderne i meccanismi interni, le potenzialità reali e, soprattutto, i limiti e i rischi intrinseci.

Il progetto *InsAId* nasce dalla necessità urgente di colmare questo divario di conoscenza e si rivolge agli studenti e ai docenti della scuola secondaria di secondo grado con un duplice obiettivo:

- Per gli studenti: trasformarli da utenti passivi a cittadini digitali consapevoli e critici, in grado non solo di "usare" gli strumenti legati all'IA, ma di capire come funzionano, valutandone l'affidabilità.
- Per i docenti: fornire loro le competenze e gli strumenti didattici necessari per integrare l'IA nelle proprie discipline, demistificandola e rendendola un oggetto di studio accessibile e affascinante, cosicché essi possano guidare gli studenti in un percorso di apprendimento critico.

Il cuore del progetto sta proprio nell'aiutare i partecipanti ad aiutarli ad "aprire la scatola".

Il progetto *InsAId* è messo in atto per la prima volta nell'a.s. 2024-25 dapprima con un gruppo di 10 docenti (sia di discipline scientifiche che umanistiche), poi in tre classi di V Liceo (due di Liceo Scientifico e una di Liceo delle Scienze Umane) per un totale di 73 alunni coinvolti e una durata complessiva di 14 ore (4 per i docenti e 10 con gli alunni). Partendo dalle basi storiche e concettuali, il percorso si è focalizzato sui principi cardine delle reti neurali, la tecnologia che, ispirandosi al funzionamento del cervello umano, ha permesso i più grandi balzi in avanti nel campo del Machine Learning. In particolare, sono stati esplorati i metodi di addestramento e apprendimento delle reti neurali attraverso

la tecnica del rinforzo positivo e i "big data". L'obiettivo finale non era formare programmatori, ma menti critiche: persone in grado di interrogarsi sulla provenienza dei dati, sulla natura probabilistica delle risposte di un'IA e sul suo impatto sociale.

Le tematiche affrontate sono state le stesse sia con i docenti che con gli studenti, con la sostanziale differenza che per i docenti la teoria ha occupato gran parte del tempo della sperimentazione, mentre agli studenti è stata riservata una parte sperimentale molto più corposa.

Nei paragrafi che seguono seguiremo il percorso didattico previsto dal progetto, descrivendo i vari argomenti affrontati secondo l'ordine proposto in classe. Nella presentazione degli argomenti, il lettore troverà la parte teorica e la parte didattico-sperimentale con la segnalazione delle eventuali differenziazioni previste dal progetto, per docenti e studenti.

3 – Le reti neurali: nascita ed evoluzione

L'idea di creare una macchina capace di emulare l'intelligenza umana affonda le sue radici nel mito e nella filosofia antica, ma è solo nel XX secolo che questa aspirazione assume contorni scientifici. Negli anni '40 del XIX secolo, con l'avvento dei primi computer, matematici come Alan Turing iniziarono a interrogarsi sulla possibilità di codificare il pensiero in algoritmi[1].

[1] In questo periodo desta particolare interesse un articolo, ormai celebre, dello stesso Alan Turing del 1950 intitolato *Computing Machinery and Intelligence*.

Parallelamente, un'altra corrente di pensiero iniziò a esplorare un modello alternativo: le reti neurali artificiali (ANN), ispirate alla biologia del cervello. Il matematico statunitense Walter Harry Pitts (1923-1969) e il neurofisiologo statunitense Warren Sturgis McCulloch (1898-1969) proposero in un articolo rivoluzionario del 1943, un sistema computazionale ispirato ai processi biologici del cervello umano. Essi immaginarono un modello matematico del neurone biologico in cui l'unità di calcolo era costituita dal *neurone di McCulloch-Pitts*, che resta tuttora lo standard di riferimento per tutte le reti neurali (Fig. 1). Questo modello matematico permetteva di descrivere il funzionamento di molti neuroni tra loro interconnessi e dimostrava che reti di questi "neuroni" potessero, in teoria, eseguire qualsiasi operazione logica.

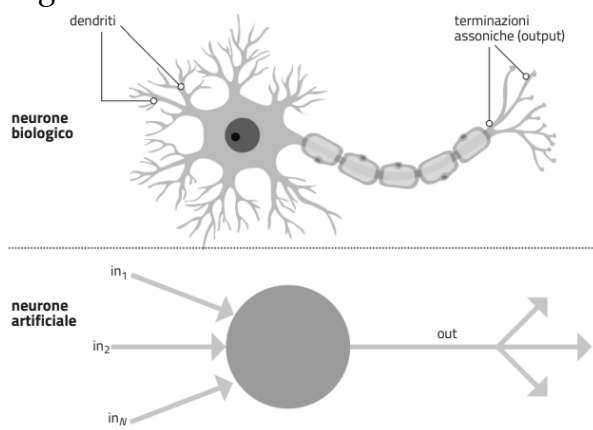


Figura 1: l'idea del modello del *neurone di McCulloch-Pitts*

Come il neurone biologico, il neurone di McCulloch-Pitts riceve dei segnali in ingresso e può trasmettere o meno una risposta in uscita in base a parametri interni che devono essere impostati. I valori di input e di output sono binari (0 o 1).

Una rete formata da questi neuroni poteva simulare qualsiasi funzione logica e, di conseguenza, implementare funzioni arbitrariamente complesse, ma non era in grado di imparare da sola perché non esisteva ancora un algoritmo per poter aggiustare i parametri in modo automatico. Per comprendere appieno le sue potenzialità, basti pensare che i computer moderni eseguono le loro complicate elaborazioni digitali attraverso schede elettroniche che ne regolano il funzionamento. In queste schede sono realizzati circuiti che implementano opportune combinazioni di funzioni logiche. Con delle reti di neuroni di McCulloch-Pitts si potrebbero quindi implementare sistemi che funzionerebbero come i nostri computer. L'intuizione fu proprio questa.

Il vero salto avvenne, infatti, 1957 con Frank Rosenblatt (1928-1971) che sviluppò il *percettrone* (in inglese, *perceptron*), il primo algoritmo di apprendimento supervisionato. Rosenblatt partì dall'idea del neurone di McCulloch–Pitts per andare oltre: il percettrone, a differenza del predecessore, è in grado di fornire i risultati desiderati aggiustando da solo i propri parametri grazie a un algoritmo di apprendimento proposto dallo stesso scienziato. Una rete formata da uno strato di questi percettroni è quindi in grado di imparare da sola il comportamento corretto: era nato l'apprendimento automatico che verrà chiamato *Machine Learning* da Arthur Samuel (1901-1990) nel 1959. Samuel utilizzò questo termine per la prima volta nel suo articolo *Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers*, dove lo definisce: "*una branca dell'informatica che permette a una macchina di imparare a eseguire un compito senza essere stata esplicitamente programmata per farlo*" (Samuel, 1959).

La parte teorica, sia ed i docenti che per gli studenti, si esaurisce con l'introduzione del concetto di Machine Learning e continua con l'applicazione pratica di tale aspetto correlato all'IA attraverso l'app online a Teachable Machine (https://teachablemachine.withgoogle.com/).

Questa app di Google consente all'utente di familiarizzare sull'apprendimento tramite Big Data delle reti neurali e sul legame tra IA e riconoscimento delle immagini. Grazie alla sua semplicità e all'uso intuitivo, permette a chiunque di creare dei modelli che permettono ad un algoritmo di apprendere automaticamente, sulla scorta di una sufficiente quantità di dati Studenti (e docenti) hanno capito il significato di apprendimento supervisionato e il suo uso in problemi di classificazione binaria, ovvero problemi in cui bisogna stabilire se un dato input (ad esempio, un'immagine) appartenga o meno ad una categoria (ad esempio, un essere umano o un segnale stradale). Con i docenti si è insistito molto sulla parte teorica della categorizzazione binaria e sul fatto che se si vuol addestrare la rete neurale a riconoscere un determinato oggetto non è sufficiente fornirle una certa e variegata quantità di immagini di esso, ma è necessario fornirle anche immagini di altri oggetti: la rete neurale può quindi solo distinguere, ad esempio, i cani dai non cani. Questo aspetto è risultato centrale per far capire agli studenti l'apprendimento supervisionato di una rete neurale e alcune sue applicazioni come lo sblocco degli *smartphone* attraverso il riconoscimento facciale e il riconoscimento di patologie mediche in radiografie grazie all'IA.

4 – Apprendimento per rinforzo positivo

L'apprendimento per rinforzo positivo si è affermato come una tecnica cruciale per migliorare e allineare i modelli di intelligenza artificiale generativa con le aspettative umane.

Questo approccio unisce la potenza dell'apprendimento per rinforzo, in cui un agente impara a prendere decisioni per massimizzare una ricompensa, con la complessità e le sfumature del giudizio umano. Integrando direttamente il *feedback* (umano, nel nostro caso) nel ciclo di addestramento, questa tecnica si prefigge di rendere i modelli di IA più abili nel generare output che non siano solo tecnicamente corretti, ma anche utili e in linea con le aspettative degli utenti.

A differenza dell'addestramento classico di Machine Learning descritto nel paragrafo precedente, che si concentra sull'apprendimento e la creazione di "etichette", questa tecnica addestrativa è utile per trasformare giudizi qualitativi in segnali numerici utilizzabili per l'ottimizzazione successiva della rete neurale artificiale. Lo scopo fondamentale è, infatti, quello di far sì che la rete neurale agisca come un "rappresentante" del giudizio umano: data una coppia situazione-esito, essa assegna un punteggio (la "ricompensa") in base a quanto quella risposta sia preferibile. Questo punteggio diventerà il cosiddetto feedback, tipico dell'apprendimento per rinforzo.

Queste considerazioni teoriche sono state proposte ai docenti e solo molto sinteticamente agli studenti, i quali invece hanno costruito artefatti relativi all'apprendimento per rinforzo. L'approccio basato sul "laboratorio matematico povero" costituisce indubbiamente un'innovazione tra i tanti

progetti didattici sull'IA presenti nel panorama italiano: la costruzione e manipolazione di modelli materiali facilitano la scoperta di leggi e proprietà a cui si aggiunge, nel caso specifico di *InsAId*, l'ambizione di entrare dentro (*inside*) il "ragionamento" delle reti neurali.

Per ciò che riguarda questi artefatti, ai docenti sono state presentate le basi teoriche, il loro uso didattico e le loro potenzialità; ai ragazzi (suddivisi in gruppi classe), invece, è stato chiesto di costruire tre automi "intelligenti": l'esapedone di M. Gardner, il computer a scatole MENACE (Matchbox Educable Noughts and Crosses Engine) di Michie e la Macchina a Bicchierini "intelligenti" (MAB). Qui nel seguito descriveremo brevemente le caratteristiche e nel dettaglio le fasi costruttive di questi artefatti, in modo da rendere replicabile il percorso al lettore interessato.

4.1 – L'esapedone

L'esapedone (o Hexapawn) è un gioco ideato dal matematico Martin Gardner nel 1962. Le sue regole sono apparse nella rubrica *Mathematical Games* di Scientific American (Gardner, 1962) e poi ristampate nel libro di Gardner del 1969 (Gardner, 1969).

L'esapedone si gioca su una classica scacchiera 3x3 dove sono disposti 3 pedoni bianchi e 3 pedoni neri. Un pedone può essere mosso in due modi diversi: verticalmente in avanti di una casella, oppure può catturare un pedone avversario in diagonale una casella più avanti. Un pedone non può essere mosso in avanti se c'è un pedone nella casella successiva. Un giocatore perde se non ha mosse legali o se uno dei pedoni dell'avversario raggiunge la fine della

scacchiera. Come negli scacchi, la prima mossa spetta al bianco e nel caso di una partita tra giocatori umani (che giochino in modo "perfetto"), il bianco perderebbe sempre in tre mosse. Gardner ha, però, ideato questo gioco pensando che il giocatore nero sia gestito da un automa basato su un computer meccanico (Gardner, 1962).

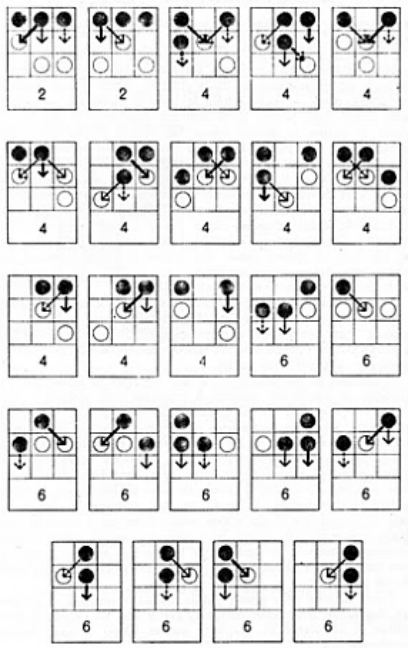


Figura 2: le 24 possibili mosse del nero in una partita di Hexapawn

Ecco quindi l'utilità di questo gioco nell'ambito del progetto *InsAId*: da un'attenta lettura dell'articolo originale di Gardner (1962), i ragazzi hanno compreso che lo stesso autore dichiara di essersi ispirato a un altro gioco astratto, MENACE di Donald Michie (par. 4.2) e quindi, prendendo spunto dal funzionamento di MENACE, hanno costruito un esapedone automatico. Considerando tutte le possibili mosse, i ragazzi hanno disegnato i 24 schemi con le posizioni

per ogni mossa del giocatore nero eliminando, per praticità, tutte le posizioni simmetriche (Fig. 2): questi schemi coincidono con tutte le possibili partite di Hexapawn.

A questo punto i ragazzi hanno costruito l'*esapedone IA* (così chiamato da loro) usando 24 scatole di fiammiferi svedesi (vuote), delle perline colorate e dei pezzettini di cartone. Su ciascuna delle 24 scatole di fiammiferi è stato incollato uno dei 24 schemi (Fig. 2) in cui delle frecce colorate stavano ad indicare le possibili mosse del nero. Dentro le scatole erano inizialmente presenti delle perline dello stesso colore delle frecce, una per ogni colore delle frecce (Fig. 3).

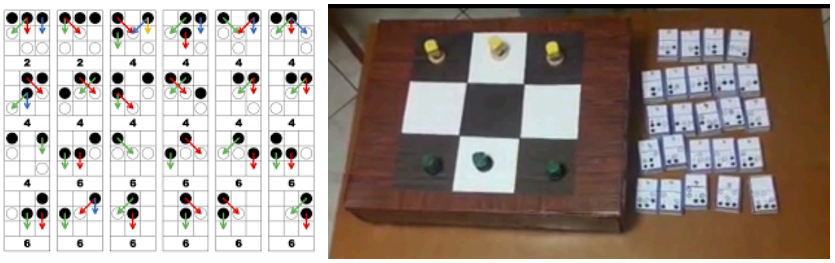


Figura 3: gli schemi incollati sulle scatole (*sinistra*) e l'*esapedone IA* (*destra*)

L'*esapedone IA* è ora costruito e può essere addestrato. Il giocatore bianco (umano) fa la prima mossa, chi addestra l'IA (giocatore nero) prende la scatolina che rappresenta la posizione raggiunta sulla scacchiera, la agita e poi la apre inclinandola: la pallina rotolata nell'apposito divisorio interno di cartone (a forma di "V") determina la mossa del nero. Il giocatore nero procederà analogamente per la quarta e la sesta mossa e ogni scatolina coinvolta resterà aperta fino alla conclusione della partita. Se il nero vince la partita, tutte le scatoline vengono richiuse per la partita successiva senza conseguenze; in caso contrario il sistema verrà "addestrato" togliendo dalla relativa scatolina solo la pallina che ha

effettuato l'ultima mossa perdente. Nel caso la scatolina fosse vuota (il che avviene raramente) significa che l'*esapedone IA* non ha mosse che a quel punto non siano per lui fatali e perde per "abbandono": in questo caso viene tolta la pallina della penultima mossa. L'addestramento continua così, partita dopo partita, finchè l'*esapedone IA* diventa imbattibile. Gli studenti, attraverso questo artefatto matematico, hanno potuto toccare con mano il funzionamento effettivo (seppur semplificato) dell'apprendimento per rinforzo positivo.

4.2 – MENACE

Come detto in precedenza, Gardner per il suo Hexapawn si era ispirato a un'altra macchina automatica costituita da 304 scatoline e che veniva "addestrata" a giocare a filetto[2]: MENACE, acronimo di *Matchbox Educable Naught and Cross Engine* (cioè, *macchina educabile a scatoline per il gioco di pallini e crocette*) inventato da Donald Michie nel 1961 (Michie, 1961).

Michie, che non a caso era biologo all'Università di Edinburgo, aveva usato il classico meccanismo dell'apprendimento nel mondo biologico, "premiando" il suo gioco quando compiva azioni vantaggiose.

Un altro gruppo di ragazzi ha, quindi, costruito le 304 scatoline di MENACE: ogni scatolina è associata ad una delle possibili situazioni del gioco del filetto, disegnata sul dorso della scatolina stessa (Fig. 4). Siccome l'automa muoveva sempre per primo, le scatoline rappresentavano le sole posizioni corrispondenti alle mosse dispari. Ogni scatolina al

[2] Il gioco filetto, conosciuto anche come tris, è un popolare gioco di carta e matita noto sin dall'antica Roma (dove era chiamato *terni lapilli*).

suo interno conteneva alcune perline colorate e all'interno il solito divisorio di cartone a forma di "V" per facilitare la selezione casuale (esattamente come abbiamo già descritto per l'esapedone)[3]. I ragazzi sono quindi passati alla fase di addestramento dell'automa.

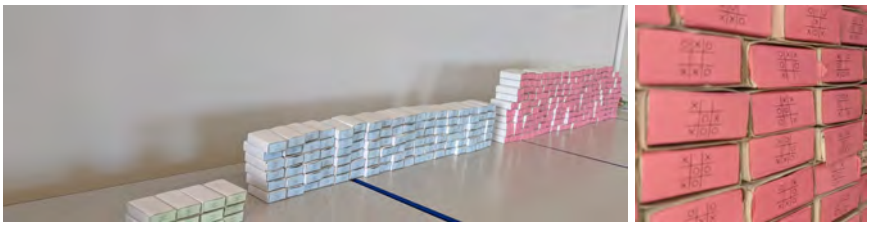


Figura 4: MENACE (*sinistra*) e una di esse nel dettaglio (*destra*)

Il gioco si sviluppa esattamente come per l'*esapedone IA*, con l'addestratore che lasciava aperta ogni scatolina che avesse contribuito al gioco. L'addestramento vero e proprio avveniva al termine della partita: se MENACE aveva vinto veniva "premiato" aggiungendo a ciascuna scatolina aperta tre biglie del medesimo colore di quella posta nel divisorio a forma "V"; se invece aveva perso veniva eliminata la biglia nel divisorio a forma "V" da ciascuna scatolina aperta.

Gli studenti hanno provato a replicare l'addestramento di MENACE secondo i suggerimenti dati da Michie nel suo articolo (Michie, 1963), allenandolo per ben 220 partite: le prime partite vedevano la macchina quasi sempre perdere per l'ovvia mancanza di "conoscenze" sul gioco; dopo diciassette partite MENACE usava solo l'apertura d'angolo e dalla ventesima partita in poi cominciò a pareggiare sempre

[3] I ragazzi hanno costruito MENACE non in completa autonomia, ma seguendo le istruzioni e i prestampati delle 304 mosse reperibili al link: https://www.mscroggs.co.uk/blog/94.

più frequentemente. Intorno alle 200 partite MENACE vinceva mediamente otto volte su dieci, con evidente grande sorpresa dei ragazzi. L'addestramento è stato replicato, in tempi più rapidi, anche utilizzando un applicativo online[4], ottenendo risultati pressoché simili.

Anche questo artefatto è stato utile agli studenti per apprendere i principi fondamentali dell'apprendimento per rinforzo, facendo compiere loro un ulteriore passo verso la comprensione del funzionamento interno dell'IA e verso il concetto di "peso" che, nelle moderne reti neurali artificiali, ha portato alla nascita del *percettrone* (cfr. Par. 1).

4.3 – MAB

L'ultimo gruppo di studenti ha costruito un automa chiamato MAB (Macchina a Bicchierini "intelligenti") che funziona con 21 configurazioni e altrettanti bicchierini con lo scopo di sviluppare tre giochi molto semplici (chiamati Gioco 1, Gioco 2 e Gioco 3) in cui due giocatori posizionano alternativamente le loro pedine sui vertici A, B, C, D, E, F di una plancia esagonale (Fig. 5)[5].

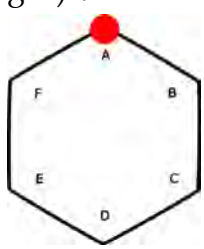


Figura 5: la plancia di gioco di MAB nella configurazione iniziale

[4] https://www.mscroggs.co.uk/menace/.

[5] La plancia di gioco, le pedine, le istruzioni dei tre giochi e tutti i materiali necessari, sono scaricabili (e pronti all'uso) in formato pdf al link: https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/ai-bicchierini/.

Anche per questo automa si prevede che un giocatore sia umano (per MAB è il giocatore 1 che usa le pedine rosse), mentre l'altro giocatore è l'automa, MAB (che usa pedine blu), che va "allenato". Le regole del gioco sono molto semplici: si sceglie uno dei tre giochi e il giocatore umano inizia sempre mettendo una pedina rossa su A. In ognuno dei tre i giochi il giocatore umano deve mettere tre pedine rosse in una certa configurazione; MAB vuole impedirglielo senza però sapere quale sia l'obiettivo del giocatore umano. Il giocatore umano vince la partita se riesce a comporre la configurazione del gioco, MAB vince se glielo impedisce.

Gli studenti hanno costruito MAB, stampato le 21 etichette e attaccato ognuna di esse a uno dei 21 bicchieri. Ogni bicchierino corrisponde, infatti, a una configurazione presente nel gioco, nel momento in cui tocca a MAB. Hanno quindi inserito in ogni bicchiere un esemplare di ogni lettera indicata nell'etichetta, che corrisponde alle possibili mosse di MAB. Quando tocca a MAB, sull'esagono è rappresentata una delle 21 configurazioni disegnate sulle etichette (Fig. 6); si sceglie il bicchiere corrispondente e si sorteggia una delle lettere in esso contenute e si mette la pedina blu sul vertice corrispondente alla lettera sorteggiata.

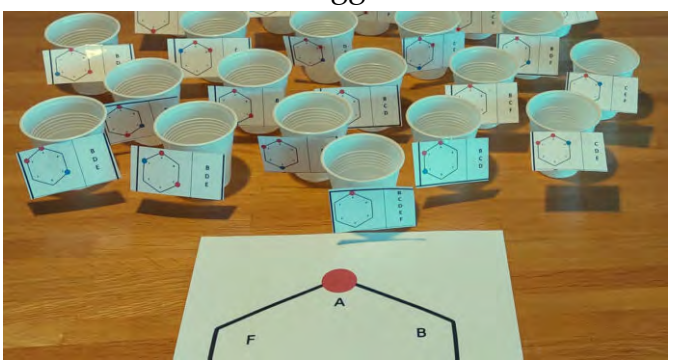


Figura 6: i 21 bicchierini del MAB

Il principio di addestramento della MAB è quello classico dell'apprendimento per rinforzo: alla fine di ogni partita, se ha vinto il giocatore umano i ragazzi non rimettevano le lettere usate nella partita da MAB nei bicchieri; se invece aveva vinto MAB, le rimettevano raddoppiate.

MAB impiega circa 15 partite, ma poi comincia a vincere e non smette più. Uno studente ha affermato: "*Per forza, Prof, abbiamo tolto le mosse perdenti!*". È proprio così: i 21 bicchierini non creano un modello, non cercano regole o strategie, non sanno di vincere o perdere, non "sanno" neanche di giocare! Alla fine, però, vincono perché glielo abbiamo insegnato noi: ecco il vero spirito del progetto *InsAId*! Capire che l'IA non può (almeno per ora) imparare senza l'aiuto dell'uomo.

5 – Conclusioni e prospettive future

Il progetto didattico *InsAId* ha raccolto un indubbio successo sia tra i docenti che tra gli alunni: i primi hanno dichiarato di aver finalmente compreso, in maniera pratica e accattivante, i principi di funzionamento dell'IA; i secondi si sono detti soddisfatti di aver compiuto, seppur parzialmente, la transizione da semplici utenti a "*ingegneri*" dell'IA. Un aspetto vincente è stata la condivisione del percorso tra i partecipanti: gli studenti hanno apprezzato il ruolo di mentoring che docenti svolgevano, percependo le critiche e le domande dei docenti come uno stimolo per condividere idee, congetture e valorizzare didatticamente eventuali errori.

Un altro aspetto didatticamente importante è stata la condivisione tra i vari gruppi classe: dopo aver costruito i vari

autonomi, ciascun gruppo di studenti ha spiegato agli altri il funzionamento dei loro automi e lo ha fatto loro provare. La *peer education* ha avuto un'ottima efficacia didattica e si è rivelata un'eccellente risorsa per far parlare gli studenti di matematica, anche in vista dell'orale dell'Esame di Stato.

L'inedito processo di accelerazione che caratterizza la nostra società post-industriale ci pone di fronte all'esigenza, come attori della scuola, di affrontare le tematiche legate all'IA. A mio parere, il modo migliore con cui un educatore può affrontare questa sfida è quello di far sì che le nuove generazioni usino algoritmi e IA come strumenti di emancipazione, così da poter guadagnare lo spazio e il tempo necessari per esprimere liberamente l'irrinunciabile singolarità che costituisce l'essere umano. La speranza è che, grazie al progetto *InsAId*, gli studenti abbiamo compreso che le nuove tecnologie non costituiscono una minaccia esterna perché esse sono parte della nostra storia e derivano dal nostro pensiero e dalle nostre conquiste intellettuali. Demonizzare l'IA, come avviene con le recenti derive tecnocratiche (presenti anche nel mondo della scuola), equivale a sottrarsi alla responsabilità di comprenderla e governarla, abdicando alla possibilità di farne un uso responsabile. L'IA costituisce un'occasione per ripensare i processi cognitivi, educativi e culturali su cui investire per far sì che i nostri studenti possano trasformarsi da semplici utenti a creatori e progettisti, in grado di essere padroni del loro futuro da cittadini digitali del mondo.

InsAId non è stato un progetto isolato, ma è stato la naturale prosecuzione di un progetto sull'IA iniziato nell'a.s. 2023-24 (Torre, 2024) e che, spero, possa rappresentare il punto di riferimento anche gli studenti futuri. L'obiettivo non è solo

quello di riproporlo, ma di arricchirlo almeno con la costruzione di un ulteriore automa per il gioco del Nim (Gardner, 1962), in grado anch'esso di essere "allenato" e, magari, di un automa interamente ideato dagli studenti.

Bibliografia

Gardner, M. (1962). *Mathematical Games*. Scientific American, Marzo 1962, pp. 138-144, https://people.csail.mit.edu/brooks/idocs/GardnerHexapawn.pdf.

Gardner, M. (1969). *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. Univ. of Chicago Press, Chicago.

Yam, J.Y.F.; Chow, T.W.S. (2000). *A weight initialization method for improving training speed in feedforward neural network*. Neurocomputing, 30 (1), pp. 219–232.

Michie, D. (1961). Trial and Error. Science Survey, Harmondsworth, Penguin, Part 2, pp. 129-145.

Michie, D. (1963). *Experiments on the mechanization of Game Learning Part 1. Characterization of the model and its parameters*, https://www.gwern.net/docs/rl/1963-michie.pdf.

Samuel A.L. (1959). *Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers*. IBM Journal of Research and Development (3), pp. 210–229.

Torre, M. (2024). *Didattica della matematica e della fisica ai tempi di ChatGPT: l'arte di fare domande*. Periodico di Matematica (IV), Vol. VI (3) Supplemento, ISSN: 2612-6745.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) Supplemento sett. 2025, pp. 271-284

Tecnologie innovative di misura della dose di radiazione in radioterapia

Pierluigi Casolaro*,**

*Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini," Università degli Studi di Napoli Federico II, Complesso Univ. Monte S. Angelo, Napoli I-80126;
** Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Napoli, Complesso Univ. Monte S. Angelo, Napoli I-80126
pierluigi.casolaro@unina.it

Sunto:*La radioterapia è uno dei pilastri del trattamento oncologico e comprende tecniche che spaziano dalla radioterapia convenzionale con fotoni ed elettroni, all'adroterapia con protoni e ioni di carbonio. Recenti studi hanno evidenziato che l'erogazione di ratei di dose ultra-elevati in frazioni di secondo può ridurre significativamente il danno ai tessuti sani, mantenendo invariata l'efficacia sulle cellule tumorali. La caratterizzazione dei fasci FLASH pone tuttavia nuove sfide alla dosimetria, poiché gli strumenti tradizionali non sono adatti a operare in tali condizioni. In questo lavoro viene fornita una panoramica della radioterapia e dell'adroterapia, con particolare attenzione alla tecnica FLASH, e viene descritto un sistema di misura della dose basato su scintillatori miniaturizzati e fibre ottiche, progettato per operare in questo regime. Lo studio, di natura multidisciplinare, integra competenze di fisica, chimica, biologia e ingegneria, e apre prospettive di sviluppo sia in ambito clinico sia per applicazioni spaziali.*

Parole Chiave*: Radioterpia, FLASH, dosimetria, scintillatori*

Abstract: *Radiotherapyis one of the pillars of cancer treatment and includes techniques ranging from conventionalradiotherapy with photons and electrons to*

hadron therapy with protons and carbon ions. Recent studies haveshownthatdelivering ultra-high dose rates in fractions of a second can significantly reduce damage to healthytissueswhilemaintaining the sameeffectivenessagainsttumorcells. However, the characterization of FLASH beamsposes new challenges for dosimetry, astraditionalinstruments are notsuitable for operating under suchconditions. This work provides an overview of radiotherapy and hadron therapy, with a particular focus on the FLASH technique, and describes a dose measurement system based on miniaturizedscintillators and optical fibers, designed to operate in this regime. The study, multidisciplinary in nature, integrates expertise in physics,chemistry, biology, and engineering, and opensdevelopmentprospectsboth in clinical applications and in space missions.

Keywords:*Radiotherapy, FLASH, dosimetry, scintillators*

1 -Introduzione

La radioterapia convenzionale impiega fasci di radiazione ionizzante, come raggi X, raggi gamma ed elettroni, per distruggere le cellule tumorali. Negli ultimi anni, l'uso di particelle cariche, come protoni e ioni di carbonio (adroterapia), ha acquisito sempre maggiore rilevanza [1]. Parallelamente, la ricerca in questo settore sta vivendo un rinnovato interesse. Recentemente, diversi studi preclinici e clinici hanno evidenziato che la somministrazione di rapidi impulsi di radiazione (FLASH) in frazioni di secondo permette di ottenere un maggiore risparmio dei tessuti sani mantenendo la stessa efficacia antitumorale della radioterapia convenzionale [2]. Se confermato, questoapproccio potrebbe rappresentare una vera e propria svolta nel trattamento del cancro con radiazioni.

Per valutare l'efficacia della FLASH, così come di ogni altra tecnica radioterapica, è fondamentale caratterizzare

accuratamente i fasci di radiazione utilizzando strumenti adeguati per la misurazione della dose. Tuttavia, gli strumenti tradizionali, progettati per fasci di radiazione convenzionali, presentano notevoli limitazioni quando impiegati per i fasci ad alta intensità caratteristici della FLASH. Di conseguenza, numerosi gruppi di ricerca in tutto il mondo stanno sviluppando tecnologie innovative e specifiche per affrontare questa sfida scientifica [3,4,5,6].

In questo contesto, il presente lavoro propone un sistema innovativo per la misurazione della dose di radiazione in fasci di particelle ad altissimo rateo di dose. Il sistema si basa su materiali scintillanti miniaturizzati, accoppiati a fibre ottiche, che permettono di ottenere un'alta risoluzione sia spaziale che temporale, superando le limitazioni degli strumenti convenzionali. Inoltre, grazie alla flessibilità delle fibre ottiche, è possibile effettuare misure anche in spazi angusti. Un prototipo di questo sistema è stato sviluppato nell'ambito di un progetto di ricerca presso l'Università di Berna, come prova di principio [7].

Successivamente, verranno presentate le principali tecniche di radioterapia e adroterapia, con particolare attenzione alla radioterapia FLASH. Sarà inoltre descritto il sistema dosimetrico oggetto di questo lavoro, i risultati sperimentali finora ottenuti, e le future direzioni di ricerca per il perfezionamento della tecnologia. Questo studio rappresenta un esempio emblematico di trasferimento di conoscenze e tecnologie dalla fisica nucleare e delle particelle alla medicina, sottolineando l'importanza crescente dell'interdisciplinarità nella ricerca scientifica contemporanea.

2 –Tecniche radioterapiche

Le principali tecniche di cura del cancro sono la chemioterapia, chirurgia e radioterapia. La radioterapia sfrutta la capacità della radiazione ionizzante di danneggiare il patrimonio genetico delle cellule, agendo a livello delDNA,e quindi limitando la loro proliferazione.

2.1 – Fasci di fotoni X o elettroni

I fotoni X sono il tipo di radiazione maggiormente utilizzato nella pratica clinica per il trattamento oncologico. Vengono prodotti accelerando un fascio di elettroni mediante acceleratori lineari (linear accelerators, o LINAC), come illustrato nella Figura 1.

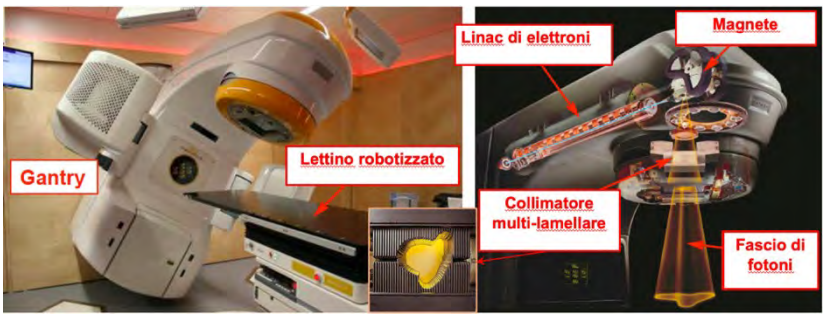


Figura 1: Linacospedaliero (sinistra) e il suo schema di funzionamento (destra).

Il LINAC è dotato di una struttura rotante (*gantry*) che può ruotare di 360 gradi attorno al paziente, posto su un lettino robotizzato. Questo design consente di irradiare il tumore da diverse angolazioni, minimizzando il danno ai tessuti sani circostanti. Dal punto di vista fisico, il fascio di elettroni viene

accelerato attraverso campi elettrici oscillanti. Successivamente, il fascio, con energie dell'ordine dei 10 MeV, viene deflesso da un magnete a 270° e colpisce una targhetta di materiale ad alto numero atomico, tipicamente tungsteno. L'interazione tra il fascio di elettroni e la targhetta di tungsteno genera il fascio di fotoni X. In alternativa, è possibile rimuovere la targhetta e dirigere il fascio di elettroni ad alta energia direttamente sul paziente.

2.2 – Fasci di protoni e ioni di carbonio

L'idea di utilizzare fasci di protoni ad alta energia per la cura dei tumori risale agli anni '40 del secolo scorso [8]. La specificità della radiazione protonica risulta evidente dal grafico in Figura 2, che mostra la distribuzione della dose di radiazione, normalizzata al suo valore massimo, in funzione della profondità di attraversamento del tessuto biologico, sia per raggi X che protoni. La radiazione protonica si distingue per un modesto deposito di dose superficiale, seguito da un graduale aumento della dose in profondità, che raggiunge il picco di Bragg alla fine del percorso. La posizione di questo picco dipende dall'energia del fascio incidente. In contrasto, la curva dose-profondità dei raggi X presenta una crescita iniziale significativa seguita da un decadimento esponenziale. La grandezza fisica di riferimento è il trasferimento lineare di energia (LET), espresso in kiloelettronvolt per micron (keV/μm). Per i raggi X, il LET è tipicamente dell'ordine di frazioni o pochi keV/μm, mentre per i protoni, in prossimità del picco di Bragg, raggiunge valori dell'ordine di decine di keV/μm.

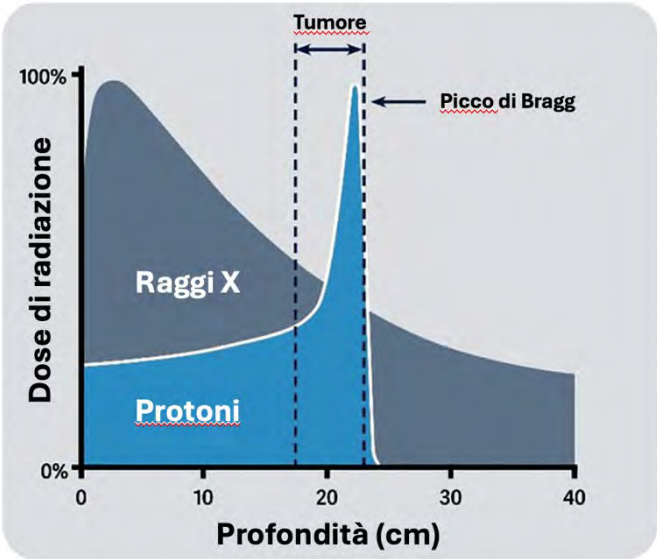


Figure 2: Curva di distribuzione della dose nella profondità di attraversamento del tessuto per raggi X (grigio) e protoni (blu).

Il picco di Bragg è tipico non solo dei protoni, ma anche di altre particelle cariche. Nel caso degli ioni di carbonio, il picco di Bragg è ancor più pronunciato e stretto rispetto a quello dei protoni. Gli ioni di carbonio sono caratterizzati da valori di LET molto elevati fino a oltre 100 keV/µm, vicino al picco di Bragg. Tuttavia, gli ioni di carbonio presentano una coda oltre il picco di Bragg, dovuta alla multi-frammentazione degli ioni durante il loro percorso [9].

La ricerca nella terapia adronica, o adroterapia, è proseguita per diversi anni, con una particolare collaborazione tra l'Harvard CyclotronLaboratory e il Massachusetts General Hospital (MGH) [10]. A partire dalla fine degli anni '80, sono stati attivati numerosi centri di protonterapia in tutto il mondo, tra cui il Paul Scherrer Institute (PSI) in Svizzera [11] e

il Loma Linda University Medical Center in California [12], che è stato il primo centro di protonterapia ad essere integrato in una struttura ospedaliera. Attualmente, sono circa 150 i centri di adroterapia nel mondo, e diversi altri sono in fase di costruzione. In Italia, esistono quattro centri di protonterapia oncologica: il CNAO di Pavia, attivo dal 2011; il Centro di Protonterapia di Trento, operativo dal 2014; il Centro di AdroTerapia e Applicazioni Nucleari Avanzate (CATANA) presso i Laboratori Nazionali del Sud (LNS) dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) a Catania, attivo dal 2002 e specializzato nel trattamento dei tumori oculari; e l'IEO Proton Center presso l'Istituto Europeo di Oncologia di Milano, inaugurato nel 2023 [13].

2.3 – Radioterapia FLASH

I risultati di esperimenti condotti nel 2014 da una collaborazione franco-svizzera [14] hanno rivelato che somministrando fasci di radiazione a tassi di dose significativamente superiori a quelli della radioterapia convenzionale, cioè >40 Gy/s (FLASH) rispetto a ~0.01 Gy/s (CONV), si ottiene una maggiore protezione dei tessuti sani. La definizione di dose e la sua unità di misura, Gy, è rimandata al prossimo paragrafo. L'effetto di protezione dei tessuti sani è noto come effetto FLASH. Attualmente, la radioterapia FLASH è oggetto di uno studio multidisciplinare che coinvolge diversi gruppi di ricerca e abbraccia campi come la biologia, la chimica, la fisica e la medicina [15]. A causa delle condizioni di irradiazione uniche, la dosimetria per la terapia FLASH è particolarmente complessa, ma rappresenta un aspetto fondamentale per la sua applicazione

clinica. Tuttavia, al momento non esistono standard definitivi o raccomandazioni per la dosimetria inradioterapia FLASH.

3 – Dosimetria

In radioterapia, la misurazione della dose di radiazione è cruciale per garantire l'accuratezza del trattamento e la sicurezza del paziente. La grandezza fisica di riferimento è la dose assorbita, espressa in Gray (Gy), che nel Sistema Internazionale è definita come l'energia impartita dalla radiazione per unità di massa del materiale irradiato (1 Gy≡ 1 J/1 kg). La misura della dose assorbita avviene seguendo protocolli standardizzati, come quelli raccomandati dall'International Atomic Energy Agency (IAEA) o *dall'American Association of Physicists in Medicine* (AAPM). Tali protocolli prevedono l'uso di camere a ionizzazione calibrate in termini di dose assorbita in acqua, che è considerata il riferimento standard per la radioterapia. Nel contesto della radioterapia FLASH, la misura della dose è resa complessadall'elevata intensità di dose (>40 Gy/s) e dalla durata estremamente ridotta dell'irraggiamento, dell'ordine di frazioni di secondo. In queste condizioni, le camere a ionizzazione presentano fenomeni di saturazione e limitazioni nella risposta temporale.

3.1 – Rivelatori a scintillazione

I materiali scintillanti (o scintillatori) rappresentano un'alternativa promettente grazie alla loro risposta rapida, che può arrivare anche all'ordine dei nanosecondi, a seconda del

materiale. Gli scintillatori sono materiali in grado di convertire l'energia depositata dalla radiazione ionizzante in fotoni di luce visibile o nel vicino ultravioletto. Quando particelle cariche (ad esempio elettroni o protoni) o fotoni ad alta energia attraversano il materiale, esse trasferiscono parte della loro energia agli atomi del reticolo, eccitandoli. Il successivo ritorno allo stato fondamentale provoca l'emissione di fotoni, che possono essere raccolti e rivelati mediante opportuni foto-rivelatori, come fotomoltiplicatori (PMT), fotomoltiplicatori al silicio (SiPM) o fotodiodi a valanga (APD). Esistono due principali categorie di scintillatori: organici (plastici o cristalli a base di idrocarburi aromatici), caratterizzati da tempi di risposta estremamente rapidi e adatti a misure con alta risoluzione temporale, e inorganici (cristalli come NaI:Tl, CsI:Tl, BaF_2 o GAGG). La scelta del materiale scintillante dipende dall'applicazione specifica, tenendo conto di fattori quali densità, tempo di decadimento, spettro di emissione e resistenza alla radiazione. Grazie alla loro versatilità, gli scintillatori trovano impiego in campi che vanno dalla fisica delle particelle alla diagnostica medica, fino alle misure dosimetriche in regimi convenzionali e ad alto rateo di dose come nella radioterapia FLASH.

4 –Rivelatore basato su fibre ottiche e scintillatori

Tra i sistemi dosimetrici proposti per la radioterapia FLASH, si discute un rivelatore basato su scintillatori miniaturizzati accoppiati a fibre ottiche. Lo schema concettuale di questo dispositivo è illustrato in Figura 3.

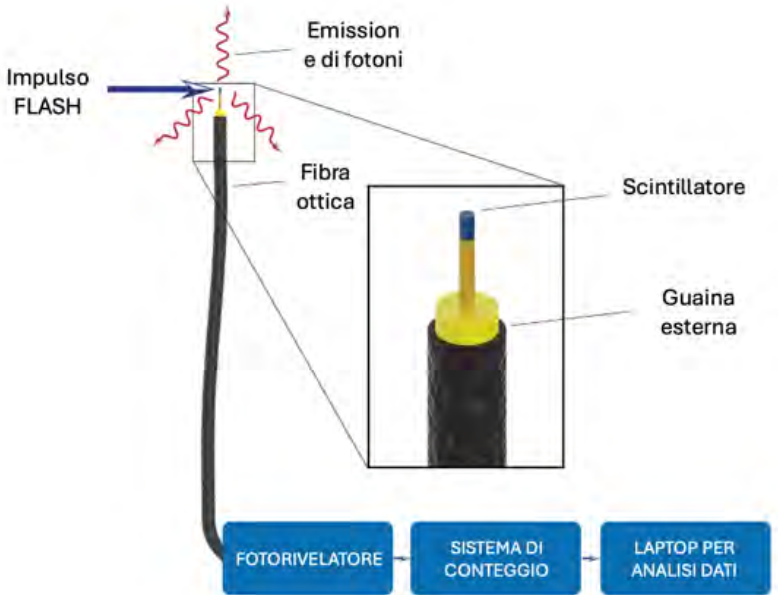


Figure 3: Schema di principio di un rivelatore per radioterapia FLASH.

L'elemento sensibile è costituito da uno scintillatore di dimensioni sub-millimetriche. La luce prodotta dall'interazione del fascio di radiazione con lo scintillatore viene raccolta da una fibra ottica e trasmessa a un fotorivelatore, collegato a un sistema di conteggio dei fotoni e successivamente a un laptop per l'analisi dei dati. L'impiego di scintillatori veloci (tempo di decadimento dell'ordine di decine di nanosecondi) consente una risposta quasi in tempo reale, garantendo un'elevata risoluzione temporale. La risposta di questo rivelatore si è dimostrata lineare fino a diverse centinaia di Gy/s con fasci di protoni ad alto rateo di dose (FLASH) impiegati in protonterapia [16-17]. Inoltre, le dimensioni ridotte dello scintillatore conferiscono al sistema un'elevata risoluzione spaziale. Queste caratteristiche risultano in linea con i requisiti richiesti dalla dosimetria per la

radioterapia FLASH. In prospettiva, tale sistema richiede ulteriori studi per caratterizzare la risposta energetica, ottimizzare i materiali impiegati, effettuare una calibrazione in dose assoluta. È interessante notare che l'evoluzione e l'ottimizzazione di questo sistema per applicazioni spaziali è attualmente oggetto di un progetto di ricerca dell'Università di Napoli Federico II, in collaborazione con il Centro di Ricerche TRIUMF di Vancouver (British Columbia, Canada), finalizzato alla dosimetria per la misura delle radiazioni in missioni spaziali.

5 –Conclusioni

Questo lavoro ha presentato una panoramica delle principalitecniche radioterapiche, dalla radioterapia convenzionaleall'adroterapia, fino alla più recente radioterapia FLASH,ancora in fase di studio, evidenziandone i principi fisici, ivantaggi clinici e le sfide scientifiche. È stato descritto unsistema per la misura della dose basato su scintillatoriminiaturizzati e fibre ottiche, in grado di operare a tassi di doseultra-elevati con elevata risoluzione temporale e spaziale. Talestudio rappresenta un esempio di approcciomultidisciplinare,sempre più rilevante, che integra competenzedi fisica, chimica, biologia e ingegneria.

Bibliografia

[1] Amaldi U., (2024). Evolution of hadron therapy from 1935 to 2005: a personal view, *Health and Technology, vol. 14, n. 5, pp 823-832.*

[2] Vozenin M-C., Bourhis J, Durante M., (2022). Towards clinical translation of FLASH radiotherapy, *Nature Reviews Clinical Oncology, vol. 19, n. 12, pp 791-803*

[3] Di Martino F. et al. (2022). A new solution for UHDP and UHDR (Flash) measurements: Theory and conceptual design of ALLS chamber, *Physica Medica, vol. 102, pp 9-18*

[4] Subiel A. and Romano F. (2023). Recentdevelopments in absolutedosimetry for FLASH radiotherapy, *The British Journal of Radiology, vol. 96, pp 20220560*

[5]Belanger-Champagne C. et al. (2023). Delivery of proton FLASH at the TRIUMF proton therapy research centre, *NIM-A, vol. 1052 pp 168243*

[6] Nesteruk K. P. et al. (2021). Flash irradiation with protonbeams: beamcharacteristics and theirimplications for beamdiagnostics, *Applied Sciences, vol. 11, n.5, pp 2170*

[7] Casolaro P. et al. (2022). Time-resolvedprotonbeamdosimetry for ultra-high dose-rate cancer therapy (FLASH), *Proceedings of IBIC2022, Krakow, Poland.*

[8] Wilson R. (1946). Radiological use of fast protons, *Radiology, vol. 47, n. 5, pp 487-491.*

[9] De Lellis G. et al. (2011). Measurement of the fragmentation of Carbon nuclei used in hadron-therapy, *NuclearPhysics A, vol. 854, pp 124 – 134*

[10]Wilson R. (2004). A Brief History of the Harvard University Cyclotrons, *Harvard University Press, p 9.*

[11] Pedroni E. et al. (1995). The 200-MeV proton therapy project at the Paul Scherrer Institute: Conceptual design and practicalrealization, *Medicalphysics, vol. 22, n. 1, pp 27-53*

[12] Slater J. M. et al. (1988). Development of a hospital-basedprotonbeam treatment center, *International Journal of RadiationOncology* Biology* Physics, vol. 14, n. 4, pp 761-775*

[13] Particle Therapy Co-Operative Group (PTCOG). (2025). *Facilities under Construction*. Retrieved from https://www.ptcog.site/index.php/facilities-under-construction

[14] Favaudon V. (2014), Ultrahigh dose-rate FLASH irradiationincreases the differentialresponsebetweennormal and tumortissue in mice, *Science translational medicine, vol. 6, n. 245, pp 245ra93--245ra93*

[15] Vozenin M-C. et al. FLASH: New intersection of physics, chemistry, biology, and cancer medicine (2024), *Reviews of ModernPhysic, vol. 96, n. 3, pp 035002*

[16] Casolaro, P. et al. (2023). Fiber-coupled GAGG scintillators for real-time small-field dosimetry in FLASH proton therapy, 2023 *IEEE Nuclear Science Symposium, Medical Imaging Conference and International Symposium onRoom-Temperature Semiconductor Detectors (NSS MIC RTSD), pp 1-2*

[17] Casolaro, P. et al. (2023). A Novel Detector Based on a Fiber-CoupledScintillator for Ultra-High Dose Rate Dosimetry (FLASH), *MEDICAL PHYSICS, vol. 60, n. 6.*