# Periodico di Matematica

## PER
## L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

**Anno XXXX - Serie IV – volume VII (2)**
**Ottobre 2025**

A cura di
**Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA**

Edizioni AFSU

MATEMATICA – FISICA - INFORMATICA

# PERIODICO DI MATEMATICA

PER

## L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro – Franco Eugeni – Luca Nicotra

Anno XXXX - Serie IV – Volume VII (2)
Ottobre 2025

ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

## Comitato Direttivo
Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

## Comitato Scientifico
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Severino Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)



## Copertina e progetto grafico
Luca Nicotra



## Direzione e redazione
*Direttore responsabile:*
Luca Nicotra

*Direttori di redazione:*
Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.
Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it
Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

*Segreteria di redazione*:
Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com



## Rivista di proprietà di:
Accademia di Filosofia delle Scienze Umane - Zona Industriale Colleranesco – 65021 Giulianova (TE) C.F. 91053660675

Copyright © 2025 Edizioni AFSU – UniversItalia-Teramo, Roma -
**I**SSN Online: 2612-6745
® Reg. Versione online n.695/2019 del 19 luglio 2019 e Versione cartacea n.695/2021 del 3 giugno 2021 Tribunale di Teramo.
Tutti i diritti riservati.
ISBN 978-88-3293-882-1. Gli scritti apparsi sulla Rivista possono essere pubblicati altrove purché se ne dichiari la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista quadrimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

*https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc*

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

*https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf*

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Alberto Trotta (Salerno), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di ottobre 2025 presso UniversItalia
Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 –
e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

# INDICE

Giovanna Della Vecchia 7
*L'«horror infiniti» nel pensiero greco classico*

Luca Nicotra 35
*Archimede conosceva l'infinito attuale?*

Massimo Fanfoni 71
*Vettori alternativi e vettori rotanti: Campo Magnetico Rotante*

Alessandra Rotunno 89
*Ipazia di Alessandria: una donna di scienza e filosofia tra passato e presente*

Franco Francia 117
*Insiemi completi divisori dello zero*

Emilio Toccafondo 127
*Equazioni lineari diofantee al liceo*

Luigi Campanella 175
*"Husserl e le scienze" di Angela Ales Bello*

*Profili biografici degli autori* 179

Questo numero del *Periodico di Matematica*, per motivi tecnici, esce a ottobre anziché ad agosto.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 7-34

# *L'«horror infiniti» nel pensiero greco classico*

Giovanna Della Vecchia*

* DIARC_Università di Napoli; giovanna.dellavecchia@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.153

**Sunto:** *Il concetto di infinito, pur emergendo continuamente nel discorso matematico, è sempre stato una questione spinosa e controversa ed ha avuto, nel corso della storia, uno sviluppo lungo ed in continua evoluzione sia in campo filosofico-religioso che scientifico. Dal punto di vista matematico, per seguire le tracce di quel lungo percorso che ha condotto allo straordinario sviluppo dell'analisi matematica e alla teoria degli infiniti infiniti di Cantor, bisogna risalire all'Antica Grecia e al concetto di* **ἄπειρον** *di Anassimandro. Già dal suo insorgere tale concetto lasciava intravedere quella valenza negativa con cui la successiva cultura filosofica greca avrebbe connotato l'infinito e dato origine all'«horror infiniti». Il lavoro in questione propone una sintetica ricostruzione di come sia stata trattata, dal punto di vista matematico, la problematica dell'infinito in epoca classica fino ad arrivare alle geniali intuizioni di Archimede che, traendo spunto da Eudosso, considerato tra i più sorprendenti imbrigliatori dell'infinito, riusciva, utilizzando sapientemente il famoso «metodo di esaustione», ad aggirare l'ostacolo dell'infinito in atto.*

**Parole Chiave**: *ἄπειρον, horror infiniti, metodo di esaustione.*

**Abstract:** *The concept of infinity, while continually emerging in mathematical discourse, has always been a thorny and controversial issue and has had,*

*throughout history, a long and constantly evolving development in both the philosophical-religious and scientific fields. To follow the traces of the long journey that led to the extraordinary development of mathematical analysis and Cantor's theory of infinite infinities, one has to go back to Ancient Greece and Anaximander's concept of ἄπειρον. Such a concept had a negative connotation among greek philosophers: that is why they spoke of 'horror infiniti'. This work proposes a concise reconstruction of how the problem of mathematical infinity was dealt with in classical times up to the ingenious insights of Archimedes. Taking a cue from Eudosso, he skilfully used the famous 'exhaustion method' and in this way managed to circumvent the obstacle of actual infinity.*

**Keywords:** *ἄπειρον, horror infiniti, exhaustion method.*

## 1 - La problematica dell'infinito in ambito filosofico e scientifico

Il concetto di infinito, pur emergendo continuamente nel discorso matematico, è sempre stato una questione spinosa e controversa ed ha avuto, nel corso della storia, uno sviluppo lungo e in continua evoluzione sia in campo filosofico-religioso che scientifico.

Per seguire le tracce di questo lungo percorso che ha condotto allo straordinario sviluppo dell'analisi matematica e alla teoria degli infiniti infiniti di Cantor, bisogna risalire all'Antica Grecia e al concetto di ἄπειρον di Anassimandro.

Anassimandro (Mileto, 610 a.C. circa – 546 a.C. circa), discepolo di Talete, individua, come origine di tutte le cose una non-entità della quale è più facile dire ciò che non è piuttosto che ciò che è: l'ἄπειρον.

La traduzione letterale della parola è "senza limiti", ma anche "infinito", "indeterminato", cioè privo di definizione. D'altra parte, sembra che nell'antica Grecia i termini *illimitato*,

*infinito*, *indefinito*, fossero considerati sinonimi e l'ἄπειρον conteneva in sé tutte queste caratteristiche.

La parola stessa non è descrittiva ma risulta coniata per negazione, (ἄ- πέρας = senza limite) e questo dimostra quanto sia stato problematico l'accesso a questo concetto presso i filosofi greci.

Nell'ἄπειρον di Anassimandro si intravedeva già quella valenza negativa con cui la successiva cultura filosofica greca avrebbe connotato l'infinito e dato origine all'*horror infiniti*: tale valenza derivava dalla tendenza a considerare imperfetto tutto quanto non fosse limitato da una qualche forma.

Per i pitagorici è proprio il limite a dare forma e pienezza alle cose, sembra che nel limite risieda il loro aspetto positivo: solo ciò che è finito è perfetto in quanto compiuto, nel senso che non ha bisogno di nulla per la sua completezza.

Invece l'idea dell'illimitato, e dunque imperfetto, conserverà per lungo tempo una connotazione negativa.

Tutto è descrivibile attraverso i numeri naturali e i loro rapporti, la trama stessa del mondo è tessuta di numeri interi e fissata da equazioni matematiche. Gli oggetti reali sono aggregati di monadi disposte secondo un ordine geometrico-aritmetico prestabilito.

I pitagorici sostengono che alla base della spiegazione dell'universo ci sia il numero, quindi la matematica: il numero (ἀριθμός) è sinonimo di misura e armonia, è come un "punto di mediazione tra il limite e l'illimitato".

L'interazione tra ἄπειρον e πέρας permette in qualche modo di *limitare l'illimitato*: sull'opposizione tra questi due princìpi, il limite e l'illimitato, si reggono tutte le cose.

I numeri e le relazioni tra essi rappresentano proprio l'emblema dell'antitesi tra limite e illimitato: in particolare i numeri pari rappresentano l'illimitato mentre i dispari il limitato. Non si sa con certezza il perché di tale curiosa affermazione, forse la motivazione addotta potrebbe essere la seguente: i numeri pari possono sempre essere divisi in due parti uguali e nessun elemento può interrompere il processo; al contrario, se si prova a dividere i numeri dispari in due parti uguali, c'è sempre un'unità che rimane fuori a bloccare la divisione, costituendo un limite.

Ma l'illusione dei pitagorici di potere esprimere tutto l'universo attraverso i numeri naturali e i loro rapporti deve ben presto fare i conti con la scoperta delle grandezze incommensurabili e con quei numeri irrazionali che sembrano aprire l'abisso dell'infinito all'interno dei calcoli aritmetici e geometrici. La teoria delle monadi crolla: se un segmento contenesse un numero finito di monadi, allora anche il lato e la diagonale di un quadrato dovrebbero essere commensurabili.

La presenza dell'infinito incombe spaventosamente anche nella trama matematica ordinata che costituiva per i pitagorici l'essenza della realtà!

Secondo Maria Timpanaro Cardini[1] l'esistenza di segmenti incommensurabili creò un fatto assolutamente nuovo ed imprevisto:

> *Era l'incontro con l'infinito matematico: l'αλογος che si levava a sconvolgere la razionale fiducia nell'αναλογον.*

[1] Filologa italiana (1890 – 1978), si è occupata in particolare di storia della filosofia antica e di storia della scienza.

## 2 – I paradossi di Zenone

Anche Zenone di Elea (V secolo a.C.) contribuisce ad accrescere l'avversione dei greci nei confronti dell'infinito: nelle sue riflessioni egli fa notare quanto un uso poco prudente dell'infinito possa condurre a situazioni paradossali; costringe dunque i matematici greci ad affrontare con maggiore rigore tale problematica.

Con i suoi paradossi Zenone, allievo di Parmenide, raccogliendo l'eredità del maestro, intende confutare la tesi dei pitagorici sulle monadi, già profondamente messa in discussione dalla scoperta delle grandezze incommensurabili.

Il più celebre dei suoi paradossi è quello di Achille e la tartaruga.

La tartaruga, proverbialmente lenta, sfida Achille piè veloce in una gara podistica: lei partirà contemporaneamente ad Achille ma con un piccolo vantaggio di 100 metri: appena Achille riuscirà a superare la tartaruga, si porterà a casa la vittoria.

Ovviamente Achille piè veloce è il favorito in assoluto nella gara, eppure Zenone dimostra che a vincere sarà la tartaruga perché l'eroe non la raggiungerà mai (in un tempo finito).

Il suo ragionamento è il seguente:

Supponiamo che Achille corra 10 volte più veloce della tartaruga: quando avrà raggiunto la posizione di partenza della tartaruga cioè quando avrà coperto i 100 metri, questa avrà comunque percorso ulteriori 10 metri; mentre Achille percorrerà i 10 metri che lo distanziavano dalla tartaruga, questa avrà percorso ancora 1 metro; quando Achille avrà coperto anche questo metro la tartaruga avrà percorso 0,1

metro, e così via. In definitiva Achille non riuscirà mai a raggiungere la tartaruga.

Interpretando il problema con i mezzi della matematica attuale, la somma dei tratti che separano Achille dalla tartaruga è:

S = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + …….., cioè:

$$S = 110 + \sum_{n=0}^{\infty}(0,1)^n = 110 + \frac{1}{1-0,1} = 110 + \frac{1}{0,9} = 111,\overline{1}$$

Ovviamente alla luce della teoria delle serie infinite, appare evidente che Achille avrà superato la tartaruga dopo 111 e prima di 112 metri. Ma tale teoria era allora sconosciuta ai matematici greci secondo i quali la somma di infiniti segmenti, anche se piccolissimi, doveva concettualmente dar luogo ad un segmento infinito, non poteva essere diversamente!!

La convergenza della serie avrebbe implicato il concetto di continuità allora non ancora conosciuto.

Teoria delle serie a parte, si sarebbe pervenuti allo stesso risultato sommando i tratti che dividono Achille dalla tartaruga:

$$100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots\ldots = 111,\overline{1}\text{ m.}$$

In ogni caso, anche Zenone era convinto che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga in breve tempo, ma il suo paradosso voleva essere una vera e propria provocazione per i suoi contemporanei e in particolare confutare la teoria della tesi monadica di Pitagora.

Forse è proprio grazie ai paradossi di Zenone che i matematici greci furono costretti a fare diversamente i conti con l'infinito, non si poteva più evitarlo, pena l'insorgere di paradossi o comunque di situazioni inspiegabili: l'infinito risultava ancora una volta fonte di contraddizioni.

## 3 - Aristotele e la duplice natura dell'infinito

> *Le considerazioni sopra l'infinito hanno però una difficoltà, perché si presentano molte impossibilità, tanto se si immagina che esso esista, quanto se si immagina che esso non esista* (Aristotele).

Aristotele (384-322 a.C.) condivide con i pitagorici la connotazione negativa dell'idea dell'infinito che sembra somigliare piuttosto ad un errore del pensiero, perché vaga e inconsistente: ciò che dà forma e senso alle cose è il limite, l'armonia, la misura.

Critica invece duramente la concezione pitagorica secondo cui l'illimitato, anche se associato al male e all'oscurità, sia riconosciuto come principio materiale, dotato di una propria attualità.

Egli non ammette l'esistenza di un infinito attuale, ma solo di un infinito potenziale, che non può essere comunque rinvenuto in nessun ambito dell'esistenza concreta.

Con l'espressione *infinito attuale* intende un'infinità data, che si presenta nella sua totalità in un momento ben definito, in un atto unico, tutto in una volta, come una realizzazione completa in sé; con l'espressione *infinito potenziale* intende invece la possibilità di aggiungere sempre qualcosa a una quantità determinata senza che ci sia mai un elemento ultimo.

Dunque per Aristotele:

> *L'infinito (ἄπειρον) non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma ciò al di fuori di cui c'è sempre qualcosa.* (Aristotele, *Phisica*).

In Paolo Zellini (1980), si legge:

> *L'illimitato non può dunque in nessun caso essere riguardato come un tutto completo: ciò che è completo ha una fine e la fine è un elemento limitante, mentre l'apeiron indica appunto, per suo significato intrinseco, l'assenza di ogni limite. Secondo Aristotele ciò che non ha limite non è rappresentabile esaurientemente nel nostro pensiero, ed è perciò inconoscibile.*

La connotazione negativa associata all'ἄπειρον è espressione proprio della sua incompletezza e potenzialità non attuata e non attuabile.

È dunque preferibile tradurre il termine "ἄπειρον" con la parola "indefinito" invece che "infinito" per evitare ogni tentativo di dare alla parola il significato di un'attualità che non possiede.

L'idea dell'esistenza di un infinito in atto è davvero inconcepibile per Aristotele: l'infinito è un concetto partorito dalla ragione che la ragione stessa, però, ripudia in quanto non in grado di rappresentare adeguatamente nulla di infinito.

L'unico infinito accessibile alla mente umana è l'infinito potenziale in cui non è l'oggetto ad essere infinito, bensì il processo. L'infinito potenziale è, pertanto, un procedimento del pensiero caratterizzato dalla non esauribilità della propria proceduralità.

Aristotele diffida i matematici dal fare uso dell'infinito attuale, consentendo un uso esclusivo dell'infinito potenziale: «*sicché l'infinito è in potenza, ma non in atto*».

Per lui un segmento non è composto di infinite parti (in atto) ma è divisibile infinite volte (in potenza):

> *(…) Questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici, per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi allo stato presente non sentono il bisogno di infinito, ma di una quantità più grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita (…) Sicché, ai fini delle loro dimostrazioni, a loro non importerà affatto la presenza dell'infinito nelle grandezze reali* (Aristotele Phisica III).

Nella *Phisica* Aristotele mette altresì in evidenza che in Matematica l'infinito potenziale si può ottenere in due modi : per addizione e per divisione.

Per addizione, attraverso un processo sommatorio senza termine in cui, ad esempio, una grandezza si addiziona a se stessa infinite volte, ottenendo una "grandezza infinita".

Per divisione, consistente nel dividere una grandezza in due parti, nel sottrarne una e dividere la rimanente ancora in due parti, sottrarne una e procedere allo stesso modo con un processo che non ha mai fine, ottenendo una "grandezza infinitesima".

Ancora Paolo Zellini (1980) afferma:

> *Se si considera un'unità di lunghezza e la si addiziona a se stessa infinite volte, si ottiene certamente una distanza illimitata non percorribile in un tempo finito. Ma se ci si prefigura l'illimitato secondo un procedimento in qualche*

> *modo opposto, cioè dividendo per dicotomia l'unità di lunghezza in infiniti intervalli, ecco che l'infinità può considerarsi in qualche modo esauribile entro un intervallo limitato di tempo. L'infinità dei sottointervalli in cui è divisibile l'unità di lunghezza ha questa rilevante caratteristica: essa è interamente contenuta in una totalità limitata che può costituire l'oggetto di un'intuizione empirica.*

Il paradosso di Zenone, secondo Aristotele, consiste proprio dall'avere equiparato l'infinito per divisione (l'infinitamente piccolo) all'infinito per addizione (l'infinitamente grande): quest'ultimo è effettivamente impossibile da percorrere in un tempo finito mentre una distanza infinita per divisione (cioè, una qualsiasi distanza finita) è fattivamente percorribile in un tempo finito.

## 4 - Qualche accenno all'idea dell'infinito in atto nel pensiero classico prima di Aristotele

### 4.1 – Antifonte e la quadratura del cerchio

Qualche accenno all'infinito per divisione è rintracciabile nel tentativo di quadratura del cerchio di Antifonte (Atene, 480 a.C. - 410 a.C. circa).

Secondo Antifonte la quadratura del cerchio è una conseguenza del fatto che, inscrivendo in un cerchio un poligono regolare col numero di lati sempre crescente, a un certo punto il lato del poligono risulta indistinguibile dall'arco di circonferenza sotteso e l'area compresa tra il poligono e la

circonferenza si riduce fino ad assumere una grandezza arbitrariamente piccola (figura 1).

Aumentando indefinitamente il numero di lati del poligono, questo si identificherà alla fine con il cerchio: i suoi lati saranno così piccoli da poter essere considerati come archi, se pur minimi, della circonferenza.

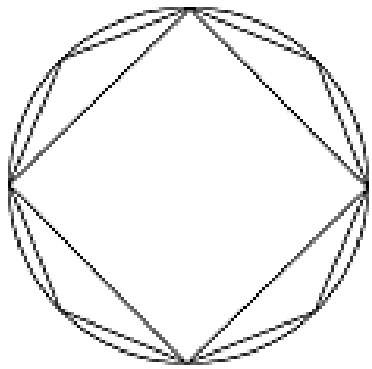


**Fig. 1**

Essendo possibile poi costruire un quadrato di area uguale a quella di un qualsiasi poligono regolare, egli conclude che una quadratura del cerchio è possibile.

Ma Aristotele sostiene fortemente la completa infondatezza della tesi di Antifonte.

Secondo lui non è possibile ammettere che l'insieme dei poligoni possa includere un termine conclusivo che coincida con la circonferenza perché, se ciò avvenisse, si ammetterebbe implicitamente l'esistenza di un infinito attuale, l'insieme attualmente infinito appunto dei poligoni inscritti nella circonferenza.

Piuttosto, dall'esempio fornito da Antifonte, si deduce che, dato un qualsiasi poligono inscritto nella circonferenza, è sempre possibile trovarne un altro con i lati più piccoli, cioè, è

possibile ridurre la differenza tra le aree del cerchio e del poligono a una grandezza arbitrariamente piccola.

### 4.2 – Eudosso e il metodo di esaustione

Eudosso di Cnido (408– 355 a.C.), il rigorizzatore della matematica greca, aveva già contribuito al superamento dello scandalo logico dell'esistenza di grandezze incommensurabili con la sua geniale teoria delle proporzioni riportata nel libro quinto degli *Elementi* di Euclide; successivamente, proprio per evitare il ricorso all'infinito, escogitò il famoso metodo di esaustione, un metodo che in qualche modo anticipa di secoli il calcolo integrale, anzi potrebbe essere considerato l'equivalente greco del calcolo integrale .

Il principio di base del metodo di esaustione risiede nel famoso Lemma noto come "assioma di continuità di Archimede", ma dovuto proprio a Eudosso:

> *Date due grandezze aventi un certo rapporto, è sempre possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra.*

Negli *Elementi* di Euclide il postulato di Eudosso è espresso nella forma seguente:

> *Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente* [Def. IV del V libro degli Elementi].

L'assioma, dunque, negli *Elementi,* diventa una definizione con la quale Euclide ci dice che, date due grandezze (omogenee e non nulle), può esistere oppure no un multiplo della minore che superi la maggiore.

In termini numerici è possibile enunciare l'assioma in maniera molto semplice:

- Dati due numeri naturali $m$ ed $n$, con $m < n$, esiste un multiplo di $m$ che supera $n$

oppure:

- Dato l'inverso $\frac{1}{n}$ di un numero naturale $n$, esiste un numero naturale $m$ tale che: $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

In realtà le due forme riferite ai numeri ci dicono che non esistono numeri infinitamente grandi ovvero non esistono numeri infinitamente piccoli.

Analogamente, se si riferisce l'assioma alla geometria, si deduce che non esistono segmenti infinitamente grandi e non esistono segmenti infinitamente piccoli.

Partendo da tale assioma, Euclide dimostra la seguente proposizione nota come "proprietà di esaustione" che costituisce la base del famoso metodo di esaustione:

> *Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata* (Proposizione I del X libro degli *Elementi*).

In termini moderni tale proprietà di esaustione si può esprimere nel modo seguente:

Date due grandezze M ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ , omogenee, e detto $\boldsymbol{r}$ un rapporto tale che

$$\frac{1}{2} \leq r \leq 1$$

esiste un numero naturale N tale che,

$$\forall n > N, \qquad M(1-r)^n < \varepsilon$$

Cioè, come diciamo oggi:

$$\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0.$$

Premesso ciò, il metodo di esaustione è basato su una doppia riduzione all'assurdo: non è un metodo analitico di ricerca che conduce alla scoperta, ma fornisce solo il mezzo per dimostrare, per assurdo, un risultato che si suppone già intuitivamente noto o ricavato mediante altre tecniche.

La prima dimostrazione per esaustione dovuta molto probabilmente a Eudosso, la troviamo nel libro XII degli *Elementi* di Euclide e riguarda la proposizione seguente:

> *Prop. II: Le aree dei cerchi stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri.*

Si parte dall'osservare che, dato un cerchio, è sempre possibile inscrivere in esso un poligono con un numero sufficientemente grande di lati, in modo tale che la differenza fra il cerchio e il poligono sia minore di un'altra superficie

assegnata, piccola a piacere. Tale proprietà è una conseguenza della proprietà di esaustione, cioè della Proposizione I del X libro degli *Elementi.*

Infatti, considerato un arco qualunque di cerchio sotteso da una corda AB, se per il punto medio C dell'arco si conduce la tangente e dai punti A, B si tracciano le perpendicolari alla tangente stessa, si ottiene un rettangolo ABED maggiore del segmento circolare ACB (figura 2):

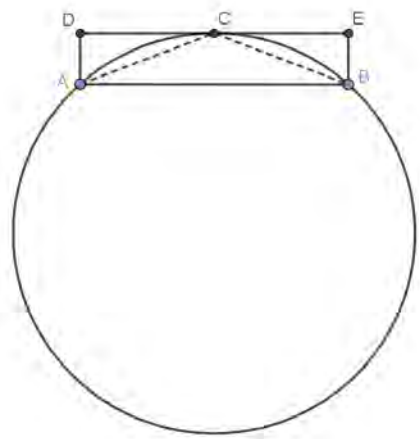



**Fig. 2**

Il triangolo ABC, che è la metà del rettangolo, è dunque maggiore della metà del segmento circolare stesso.

Ciò premesso, proviamo a inscrivere nel cerchio dei poligoni regolari a partire dal quadrato (figura 3)

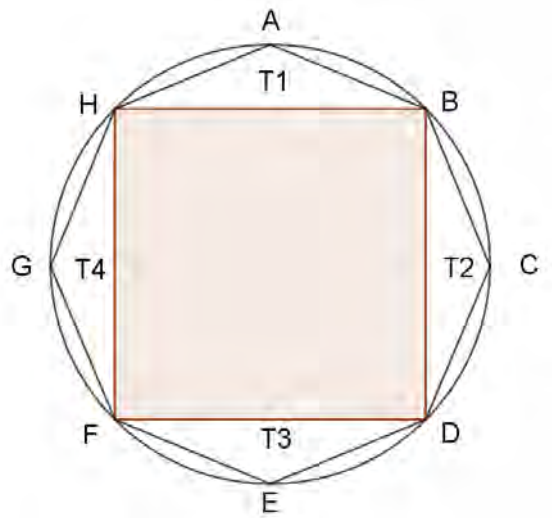



**Fig.3**

Il quadrato inscritto risulta banalmente maggiore della metà del cerchio perché è la metà del quadrato circoscritto che è maggiore del cerchio.

Pertanto, fare la differenza tra cerchio e quadrato equivale a sottrarre dall'area del cerchio più della sua metà e, detta $R_1$ la differenza tra cerchio e quadrato, si ha $R_1 < 1/2\ C$ (dalla figura 3 si evince che $R_1$ è costituita da quattro segmenti circolari).

Dividendo a metà gli archi su cui insistono i lati del quadrato e congiungendo i punti medi con i vertici del quadrato si costruisca l'ottagono. Per quanto osservato in fig 2, la somma dei triangoli T1, T2, T3, T4, formati da due lati dell'ottagono e da un lato del quadrato è maggiore della metà della somma dei segmenti circolari circoscritti ai triangoli stessi. Detta $R_2$ la differenza tra il cerchio e l'ottagono risulta:

$R_2 = R_1$ (4 segmenti circolari) – (T1 + T2 + T3 + T4)

dove T1 + T2 + T3 + T4 > ½ della somma dei quattro segmenti circolari, cioè

T1 + T2 + T3 + T4 > ½ (C-Q)

T1 + T2 + T3 + T4 > ½ $R_1$

Dunque, sottraendo da $\mathbf{R_1}$ una quantità maggiore della sua metà si ottiene una differenza

$R_2 < ½ R_1$

Reiteriamo il procedimento, facciamo cioè ulteriori raddoppiamenti del numero di lati dei poligoni: in merito alla restante area intermedia, raddoppiare ogni volta il numero di lati del poligono, equivale a sottrarre dalla precedente area intermedia, più della sua metà.

Per la Prop. X.1 si troverà un poligono $p_n$ che, sottratto al cerchio, lascerà una differenza minore di qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.

Siamo ora in grado di dimostrare, utilizzando il metodo di esaustione, la Prop. II, L.XII:

> *Le aree dei cerchi stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri.*

Dati i cerchi c e C, denotiamo con d e D i loro diametri e con $a$ e $A$ le aree (figura 4).

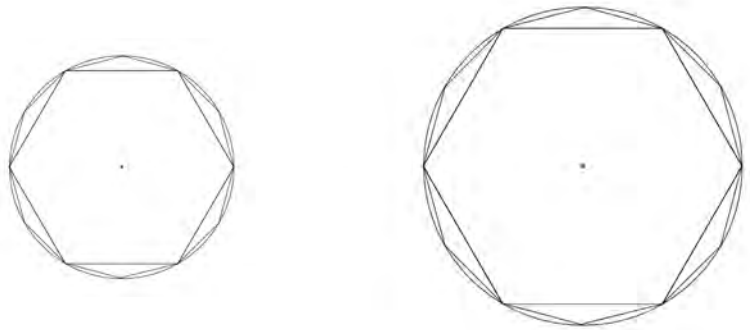


**Fig 4**

Per dimostrare che

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

si esclude che possa essere

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2} \text{ oppure } \frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$$

Se fosse $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$, allora esisterebbe una grandezza $a' < a$ tale che

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

Posto $a$ - $a'$= $\varepsilon > 0$, inscriviamo nei cerchi c e C poligoni regolari di *n* lati e di aree rispettivamente

$p_n$ e $P_n$

In riferimento al cerchio c e al poligono inscritto di area $p_n$ per la proprietà di esaustione, raddoppiando ogni volta il numero dei lati sarà possibile ridurre l'area intermedia $a - p_n$ fino a che risulti $a - p_n < \varepsilon$ ed essendo $\varepsilon = a - a'$, $a - p_n < a - a'$ da cui $p_n > a'$.

In base a teoremi precedenti si sa che è

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$$

ed essendo:

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

si avrà:

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$$

ed essendo $a' < p_n$ deve essere $A < P_n$. Ma non può essere $A < P_n$ in quanto l'area del cerchio non può essere minore di quella di un poligono inscritto.

Dunque, l'ipotesi $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ porta ad un assurdo.

Analogamente si esclude la possibilità che sia $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$.

E allora non può che essere

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

La proprietà dimostrata sembra aver costituito il primo teorema esatto sull'area di figure curvilinee: è per questo che Eudosso è stato considerato da molti il fondatore del calcolo integrale.

## 5 - Euclide e l'influenza dell'impostazione aristotelica negli *Elementi*

Negli *Elementi* di Euclide è possibile riscontrare la forte influenza dell'impostazione aristotelica nella concezione dell'infinito.

Ad es. nel II postulato del libro I, per evitare il ricorso all'infinito, egli afferma:

> *È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.*

Anche nel famoso V postulato, oggi detto "delle parallele", Euclide non parla esplicitamente di "rette parallele" per evitare qualunque allusione a un infinito in atto, ma nella sua formulazione originaria, così si esprime:

> *Se un segmento prolungabile continuamente per diritto, venendo a cadere su due altri segmenti prolungabili continuamente per diritto, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, i due segmenti, eventualmente opportunamente prolungati, si incontrano da quella stessa parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

Nella prop. XX del IX libro, in cui Euclide dimostra di fatto che "esistono infiniti numeri primi", proprio per evitare di nominare in modo attuale il termine "infinito" ricorre all'infinità potenziale affermando che:

> *I numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi*

E lo dimostra per assurdo. La dimostrazione procede più o meno nel modo seguente.

Supponiamo per assurdo che esista solo un numero finito di numeri primi, ad esempio $n$ e scriviamo l'elenco completo di tali numeri:

$p_1, p_2, ..., p_n$.

Denotiamo con P l'insieme di tutti i numeri primi

$P = \{p_1, p_2, ..., pn\}$

Sia ora $M$ quel numero ottenuto sommando 1 al prodotto di tutti i numeri primi:

$M = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot pn + 1$

Il numero $M$ è maggiore di 1 (perché esiste almeno un numero primo) e diverso da tutti i numeri primi $p_i$ (perchè maggiore di ciascun $pi$).

Essendo un numero naturale $M$ può essere primo o composto.

Se $M$ fosse primo avremmo subito una contraddizione: infatti essendo diverso da ciascun $p_i$ non può appartenere all'insieme dei numeri primi.

Se $M$ fosse composto allora sarebbe scomponibile nel prodotto di fattori primi, ciascuno dei quali appartenente all'insieme P: detto $d$ uno di essi, tale $d$ dividerebbe sia $M$ sia il prodotto $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot pn$ (essendo $d$ uno dei numeri primi), e quindi dividerebbe la loro differenza $M - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot pn = 1$, e anche questo è impossibile.

Quindi $M$ non può essere né primo né composto e ciò è assurdo. Pertanto, non può esistere un insieme finito di numeri primi: non resta che concludere che "i numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi", cioè sono infiniti.

Con questa dimostrazione Euclide ha in qualche modo "domato l'infinito" nel senso che in pochi passaggi, senza mai nominare il termine *infinito,* è riuscito a convincere tutti, senza ombra di dubbio, che i numeri primi sono infiniti

In realtà da tutta l'opera di Euclide, per quanto riguarda l'infinito, si evince una scelta filosofica di stampo aristotelico: anche lui rifiuta l'infinito attuale e accetta e fa uso del solo infinito potenziale.

D'altra parte uno degli assiomi di Euclide è quello secondo cui "il tutto è maggiore della parte" e ad alcuni critici moderni sembra che Euclide abbia enunciato questo assioma proprio per eliminare dai suoi *Elementi* gli insiemi infiniti; infatti, la proprietà non vale per gli insiemi infiniti e questo fa pensare alla scelta di evitare la presenza dell'infinito nella sua trattazione.

## 6 – Il metodo di esaustione in Archimede

Non si sa se Archimede (287–212 a.C.) fosse a conoscenza della problematica filosofica dell'infinito, soprattutto nei suoi risvolti più rigorosi. Lui non si preoccupa particolarmente del rigore delle dimostrazioni e, in molte questioni, aggira l'ostacolo dell'infinito in atto utilizzando in maniera ineccepibile, nelle dimostrazioni geometriche, il metodo di esaustione di Eudosso. Tuttavia, da recenti studi condotti nel 2001 dal filologo e studioso di matematica antica Reviel Netz, assieme allo storico giapponese della matematica Ken Saito, risulta che Archimede fosse a conoscenza dell'infinito attuale, avendolo esplicitamente utilizzato nell'opera *Metodo* nei calcoli del volume di un particolare solido: l'unghia cilindrica.

Per i particolari di questa sensazionale scoperta si rimanda all'articolo *Archimede conosceva l'infinito attuale?* contenuto in questo stesso numero del «*Periodico di Matematica*» (Nicotra, 2025).

Con il metodo di esaustione Archimede riesce a verificare l'esattezza delle sue straordinarie intuizioni empiriche.

Tra le numerose produzioni di Archimede che ci sono pervenute, c'è il piccolo trattato *Sulla misurazione del cerchio*, in cui, utilizzando il metodo di esaustione, oltre a calcolare un'ottima approssimazione della lunghezza della circonferenza, dà una interessante dimostrazione del teorema secondo cui l'area di un cerchio è uguale all'area di un triangolo rettangolo che abbia come cateti la circonferenza e il raggio del cerchio stesso (enunciato di Archimede):

> *Ogni cerchio è equivalente al triangolo che ha come altezza il raggio del cerchio e come base la circonferenza.*

Per dimostrare il teorema Archimede sfrutta l'idea che il cerchio è approssimabile con poligoni (secondo il principio di esaustione) senza introdurre il concetto di infinito ed evitando di parlare di infiniti lati o di lati infinitesimi.

Come Eudosso anche lui parte dal principio contenuto nella Prop. 1 del libro X degli *Elementi*:

> *Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata* (Proposizione I del X libro degli *Elementi*).

Ora, dato un cerchio, applicando la proposizione citata, è sempre possibile inscrivere in esso un poligono con un numero sufficientemente grande di lati, in modo tale che la differenza fra il cerchio e il poligono sia minore di un'altra superficie qualunque, piccola a piacere.

Ciò premesso, ricostruiamo la dimostrazione dell'enunciato di Archimede.

Denotiamo con C l'area del cerchio e con T l'area del triangolo, e procediamo per esaustione (Fig 5):

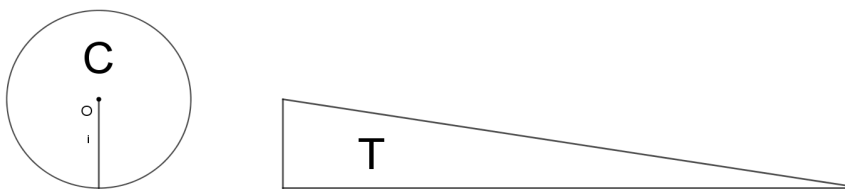



**Fig.5**

Supponiamo per assurdo che sia

$$C > T \qquad (1)$$

cioè $$C - T > 0.$$

Inscriviamo nel cerchio un poligono regolare e consideriamo la differenza tra C e l'area di tale poligono. Raddoppiamo il numero dei lati del poligono inscritto e reiteriamo tale raddoppiamento fino ad ottenere un poligono *Pn* di un certo numero *n* di lati la cui area, sottratta all'area del cerchio dia una differenza minore di C – T (possibile per la citata proprietà di esaustione).

Detta $Q$ l'area di tale poligono, risulta dunque

$$C - Q < C - T \quad \text{da cui} \quad Q > T \qquad (2)$$

Il poligono di area Q risulta equivalente ad un triangolo T' avente come base un segmento di misura uguale al perimetro del poligono di area Q e come altezza l'apotema dello stesso poligono (Fig. 6) .

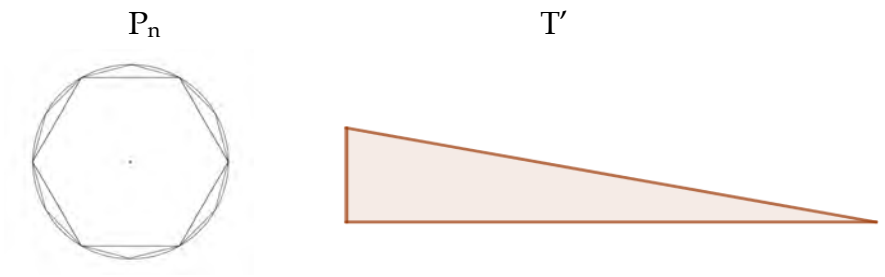



**Fig.6**

Poiché nel triangolo T' sia la base che l'altezza sono minori rispettivamente della base e dell'altezza del triangolo T, si ha :

Area T' < T

cioè : $Q < T$

ma, dalla (2) risulta

$$Q > T$$

e non può essere Q maggiore e anche minore di T.

Pertanto l'ipotesi (1) non è possibile, cioè non può essere

$$C > T.$$

Supponiamo allora che sia

$$C < T \qquad (3)$$

cioè $T - C > 0.$

Circoscriviamo al cerchio un poligono regolare e consideriamo la differenza tra l'area di questo poligono e C.

Raddoppiamo il numero dei lati del poligono circoscritto e reiteriamo tale procedura fino ad ottenere un poligono $P_m$ di un certo numero $m$ di lati tale che la differenza tra l'area di questo poligono e C sia minore della differenza T – C (possibile per la proprietà di esaustione).

Detta P l'area di questo poligono, risulta:

$$P - C < T - C \quad \text{da cui} \quad P < T \tag{4}$$

Il poligono di area P è equivalente al triangolo T'' che ha come base il perimetro di *Pm* (maggiore della circonferenza) e come altezza il raggio (Fig. 7), ed essendo Area T'' > T si ha:

$$P > T$$

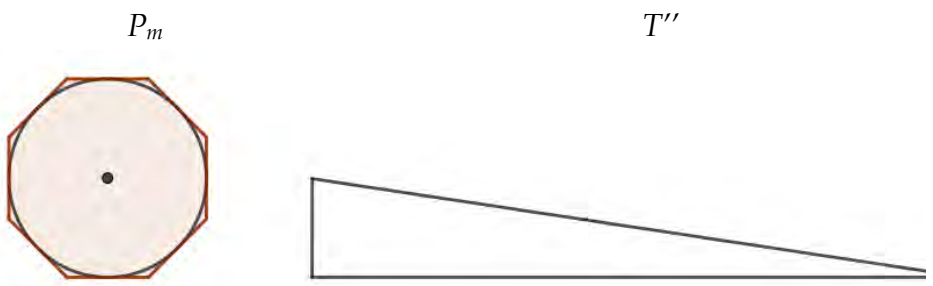



**Fig. 7**

Ma dalla (4):

$$P < T$$

e non può essere P maggiore e minore di T.

Anche l'ipotesi (3) conduce ad un assurdo, pertanto deve necessariamente essere:

$$C = T.$$

Il metodo di esaustione anche in Archimede, come è possibile evincere dal caso proposto, non è un metodo di

ricerca che conduce a una qualche scoperta, ma un metodo che consente di dimostrare, per assurdo, un risultato già noto. Mediante tale metodo Archimede dimostra una tesi che deve avere già supposta mediante procedimenti diversi che non siamo in grado di ricostruire.

In questa trattazione interessa evidenziare il fatto che, grazie al metodo di esaustione egli sia riuscito a calcolare aree e volumi di figure molto più complesse, aggirando sempre l'infinito e confermando ciò che aveva affermato Aristotele e cioè che «*I matematici non hanno bisogno dell'infinito e non lo usano*».

## Bibliografia

ARRIGO G., D'AMORE B., SBARAGLI S. (2010). *Infiniti infiniti.* Trento: Erickson.

BOLZANO B. (1979). *I paradossi dell'infinito* (con un saggio di Enzo Melandri). Bologna: L. Cappelli.

BOYER C. (1990). *Storia della matematica*. Milano: Oscar Mondadori.

MARACCHIA S. (2011). "Infinito potenziale e infinito attuale nella Matematica greca". «*Lettera Matematica Pristem*» 78.

MESCHKOWSKI H. (1973). *Mutamenti nel pensiero matematico*. Torino: Boringhieri.

MORRIS Kline (1999). *Storia del pensiero matematico vol. I.* Torino: Einaudi

NICOTRA Luca (2025). "Archimede conosceva l'infinito attuale?" In: «*Periodico di Matematica*» (IV) Vol. VII (2) pp. 35-70.

RUFINI E. (1926). *Il metodo di Archimede e l'origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Roma: A. Stock.

ZELLINI P. (1980). *Breve storia dell'infinito.* Milano: Adelphi.

https://www.mat.uniroma2.it/~tovena/Numeriprimi17.pdf

https://www.laviadellescienze.org/wp-content/uploads/Bramanti_Infinito_in_matematica.pdf

http://www.syllogismos.it/history/Esaustione.pdf

https://www.mat.uniroma2.it/~ghione/Testi/Storia/esaustione.pdf

https://matematica.unibocconi.eu/articoli/1-l%E2%80%99infinito-e-l%E2%80%99infinito-matematico

https://claudio-giorgi.unibs.it/Altro_Materiale/Sem_Infinito.pdf

https://arete.unimarconi.it/wp-content/uploads/Arete_8_2023_monografico_11_Mattiuzzo.pdf

https://archive.org/details/rufini-metodo-di-archimede/mode/2up

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 35-70

# *Archimede conosceva l'infinito attuale?*

## *Il recupero, con tecniche fotografiche di avanguardia, di alcune parti del palinsesto del codice C, recentemente riscoperto, ha rivelato l'uso dell'infinito attuale in Archimede*

Luca Nicotra*

* Ingegnere meccanico, giornalista pubblicista, Accademico onorario APAV e AFSU, Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", Direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.154

**Sunto:** *Il restauro del codice C delle opere di Archimede, nascosto in un palinsesto, ha rivelato molte importanti scoperte sul metodo di ricerca e sulle conoscenze matematiche dello scienziato siracusano, alcune delle quali, come l'infinito attuale e il calcolo combinatorio, sono risultate in anticipo di 22 secoli rispetto a quelle che si riteneva acquisite soltanto con la matematica moderna del XIX e XX secolo. In particolare, è stato possibile comprendere che Archimede è il primo vero fondatore, e non semplicemente precursore, del calcolo infinitesimale e che tutti i matematici greci pensavano più per immagini che per parole. Ma tutte queste scoperte non sarebbero state possibili se uno dei direttori del progetto di*

*restauro del palinsesto, Reviel Netz, non fosse oltre che un illustre filologo anche un appassionato cultore di matematica antica. Il restauro e la decifrazione del codice C di Archimede sono dunque il frutto di un lavoro interdisciplinare di altissimo valore, che ha collegato fruttuosamente conoscenze filologiche, matematiche, storiche e tecnologiche.*

**Parole Chiave**: *Archimede, Metodo di Archimede, palinsesto, calcolo infinitesimale, Reviel Netz, William Noel, Codice C di Archimede.*

**Abstract:** *The recent restoration of Archimedes C code , tucked into a palimpsest, revealed many important discoveries on the search method and on Archimedes' mathematical knowledge, some of which, such as actual infinity and combinatorics, were in advance of 22 centuries than it was believed captured only with the modern mathematics of the 19th and 20th centuries. In particular, it has been possible to realize that Archimedes is the first true founder of calculus and presumably all Greek mathematicians thought more by images rather than by words. But all these discoveries would not have been possible if one of the directors of the restoration project of the palimpsest, Reviel Netz, was not only a noted philologist but also an avid lover of ancient mathematics. Restoration and deciphering the Archimedes C code are thus the result of interdisciplinary work of great value, which linked fruitfully philological, mathematical, historical and technological knowledge.*

**Keywords:** *Archimedes, Archimedes Method, palimpsest, calculus, Reviel Netz, William Noel, Archimedes C code.*

## 1 - La sopravvivenza delle opere di Archimede

Quando Archimede scriveva le sue opere, non esistevano né il libro né la stampa ma rotoli di papiro vergati a mano. Fino al I secolo d.C. i rotoli rimasero l'unico supporto di trasmissione scritta del sapere. Pur essendo molto utili per seguire lo sviluppo di un ragionamento matematico, che

procedeva di pari passo con lo srotolamento del rotolo, risultavano invece molto scomodi in molte altre situazioni in cui era necessario saltare da un punto all'altro, costringendo a srotolare o riavvolgere di diecine e anche centinaia di metri il rotolo, fino a posizionarsi nel punto cercato (Netz, Noel, [2007] 2014. pp. 80 e segg.). I rotoli erano supporti bidimensionali, sviluppandosi secondo due dimensioni: larghezza e lunghezza. Un rivoluzionario passo in avanti si compì aggiungendo una terza dimensione: lo spessore. Anziché avere un unico foglio lunghissimo (si arrivava anche a diverse centinaia di metri), si capì che era possibile tagliarlo in parti secondo la lunghezza e impilare tali parti (fogli)[1] l'una sopra l'altra cucendole lungo il lato più lungo: nasceva il libro a fogli di pergamena, supporto tridimensionale della scrittura, con una larghezza, un'altezza e uno spessore, normalmente non superiore a 5-6 cm. È stato calcolato che un libro di 400 pagine di pergamena può contenere lo stesso numero di parole di un rotolo di papiro della stessa larghezza ma lungo 600 metri! Per trovare qualcosa che sta verso la fine, nel libro basta sfogliare, mentre nel rotolo occorre srotolare per centinaia di metri, operazione ben più scomoda. Dal I al IV secolo tutti gli antichi rotoli di papiro vennero ricopiati a mano dagli amanuensi sotto forma di libri con fogli di

[1] In realtà si trattava di "quaterne" ovvero quattro bifogli (fogli doppi) inseriti l'uno dentro l'altro in modo da ottenere un quadernetto di otto fogli e quindi sedici pagine. Il codice era formato da queste quaterne impilate e quindi rilegate. Una tecnica ancora in uso nei libri attuali "cuciti".

pergamena,[2] detti codici,[3] e quindi eliminati una volta copiati. Anche le opere di Archimede subirono lo stesso iter.

Il trasferimento del sapere dai vecchi rotoli di papiro ai nuovi codici di pergamena richiedeva un gran lavoro. Non c'è da meravigliarsi quindi che fosse fatto preferibilmente per le opere più diffuse, quelle che a torto o a ragione riscuotevano - diremmo noi oggi - il maggior *share* fra il pubblico, quelle che erano più lette.

Archimede (287, 212 a.C.) scrisse molte opere, che però hanno una caratteristica curiosa: erano create come missive indirizzate ai matematici di Alessandria d'Egitto[4] i quali, a loro volta, le smistavano ai pochi altri matematici del tempo che costituivano l'esiguo numero (forse qualche diecina) dei suoi lettori. Alessandria, con la sua famosa biblioteca del Museo, era a quel tempo, sotto la dinastia dei Tolomei, il maggior centro culturale del mondo, assieme a Siracusa. Non si trattava però di semplici lettere, bensì di veri e propri trattatelli, scritti nello stile ermetico di Archimede, destinati a un pubblico molto selezionato di matematici professionisti.

---

[2] Il papiro ha una buona resistenza alla tensione ma non alla piegatura, per la quale invece risulta più resistente la pergamena. Per tale motivo i rotoli (che sono sottoposti a tensione) erano realizzati con il papiro mentre i codici (che sono sottoposti a piegatura) erano quasi sempre realizzati con fogli di pergamena e raramente di papiro.

[3] Dal latino *caudex* poi divenuto *codex* = tronco d'albero. Con tale termine i romani indicavano il progenitore del moderno libro: un insieme di tavolette di legno cerate su cui scrivevano, legate assieme da anelli metallici o da strisce di cuoio incollate.

[4] Dositeo, Eratostene, Aristarco di Samo e l'astronomo Conone, l'unico che lo capiva, come si lamentò Archimede alla notizia della sua morte.

Erano quindi opere altamente "esoteriche", di difficile comprensione spesso anche per gli stessi matematici, in quanto Archimede sottintendeva molti passaggi, che considerava ovvi per un matematico professionista. Per tali motivi, non avendo un pubblico molto vasto, i rotoli di Archimede non erano presi molto in considerazione dai copisti. A questo si aggiunga che tra il III e il VI secolo gli eventi storici videro la caduta e la distruzione delle più importanti città del mondo antico, che erano anche i più importanti centri culturali del tempo. Ad Alessandria d'Egitto, dove probabilmente aveva soggiornato anche Archimede e dove si trovavano certamente molti suoi rotoli, il famoso Museo fu danneggiato nel 270 durante la guerra dell'imperatore Aureliano contro Zenobia, cui seguì nel 391, per opera dei cristiani, la distruzione del Serapeo, la gemella della famosa Biblioteca Alessandrina. Più tardi furono saccheggiate le più grandi città del mondo antico: nel 412 Roma dai goti, nel 540 Antiochia dai persiani e nel 580 Atene dagli slavi. Una sola grande città rimaneva indenne e sicura: Costantinopoli, la nuova Roma fondata dall'imperatore Costantino nel 330 come capitale dell'Impero Romano d'Oriente. I testi classici che poterono giungere fino a Costantinopoli furono quelli che si salvarono.

Il salvatore delle opere di Archimede fu un certo Eutocio di Ascalona, un palestinese che dedicò la sua vita a raccogliere le opere del grande Siracusano, per farne un'edizione, arricchita dai suoi commenti, secondo la nuova tecnologia della scrittura manoscritta: il codice. Eutocio nacque nel 480 circa. Dunque nel VI secolo esistevano codici delle opere di Archimede. Contemporaneo di Eutocio era Isidoro di Mileto, uno dei due

architetti matematici che fecero i calcoli per la basilica di Santa Sofia a Costantinopoli. Utilizzando i codici di Eutocio, Isidoro curò una propria edizione delle opere di Archimede, cioè un altro codice, conservato a Costantinopoli, al riparo dalle distruzioni che altrove eliminavano per sempre i testi classici. La capitale dell'Impero Romano d'Oriente visse un periodo politicamente felice nel IX e X secolo, godendo di conseguenza anche di un clima ideale per la fioritura della cultura.

Nel IX secolo fu introdotta un'altra innovazione nella tecnologia del libro: dalla scrittura capitale (a lettere maiuscole) dei codici preesistenti si passò alla scrittura minuscola, propria delle missive. Gli eruditi bizantini riscoprirono l'immenso patrimonio dei testi classici conservati nelle loro biblioteche e vollero ricopiare i vecchi codici a lettere maiuscole in nuovi codici a lettere minuscole. Una volta copiati, i vecchi codici potevano essere distrutti, essendo di più difficile lettura. Basti pensare che nei codici scritti con le maiuscole le parole non erano separate, ma erano scritte attaccate l'una dopo l'altra, senza alcuna divisione. La separazione delle parole doveva essere fatta dal lettore stesso secondo il contesto. Nella scrittura minuscola, invece, le parole erano separate fra loro, permettendo in tal modo una lettura più agevole e corretta.

Fu proprio nel IX secolo che da codici probabilmente del VI secolo nacquero i tre *Codici A, B, C* che, in greco originale, raccoglievano tutte le opere di Archimede salvate dalla distruzione dei rotoli di papiro.[5] I *Codici A, B* costituirono gli

[5] I *Codici A* e *B* sono attualmente scomparsi. Il *Codice B* fu visto l'ultima volta nel 1311 nella Biblioteca pontificia di Viterbo; il *Codice A* invece fu visto l'ultima volta nel 1564 nella biblioteca di Rodolfo Pio, che già era

"archetipi" per le copie che furono fatte dagli amanuensi nel Medioevo e per le loro traduzioni in latino.[6]

Nell'Europa del XIII e XV secolo circolavano due principali traduzioni latine di Archimede: una del frate domenicano Guglielmo di Moerbeke, terminata il 10 dicembre 1269, e l'altra dell'umanista e matematico Jacopo da Cremona (o da San Cassiano), eseguita in una data non ben definita del decennio 1440-1450. Recentemente gli studi di Paolo d'Alessandro e Pier Daniele Napolitani (2012) hanno rinvenuto l'autografo della traduzione di Iacopo nel codice *Nouv. Acq. Lat. 1538* della Bibliothèque Nationale de France e hanno dimostrato che la sua traduzione latina delle opere di Archimede, contrariamente a quanto si riteneva prima, non ha utilizzato il *Codice A* ma un testo diverso, che non potendo essere né il *Codice B* (già scomparso nel 1311) né il *Codice C*, induce a ipotizzare un quarto codice "archetipo" che si aggiungerebbe ai tre noti A, B e C. Il quarto codice delle opere di Archimede non è stato ancora trovato.

Le opere di Archimede che ci sono pervenute sono le seguenti: *Sull'equilibrio dei piani* (Libri I e II), *Quadratura della parabola*, *Sulla sfera e il cilindro* (Libri I e II), *Sulle spirali*, *Sui conoidi e gli sferoidi*, *Sui corpi galleggianti* (Libri I e II), *Arenario*, *Metodo*, *Misura del cerchio*, *Stomachion*. Infine il *Libro dei lemmi*

---

appartenuta a Giorgio Valla, a Venezia. Nel 1492 Lorenzo il Magnifico inviò Angelo Poliziano a Venezia nella biblioteca del Valla affinché realizzasse una copia del *Codice A*, non permettendo il Valla che il codice uscisse dalla sua biblioteca. Tale copia è oggi conservata nella Biblioteca Laurenziana di Firenze. Sulle traduzioni (soprattutto in latino) del *Codice A* hanno studiato i più grandi scienziati del Rinascimento, Leonardo, Galileo, Newton e Leibniz.

[6] Vedi Bibliografia.

pervenuto solo attraverso una parafrasi araba, che tratta di particolari figure ottenute come intersezioni di cerchi, e *Il problema dei buoi*, opera in versi su un rompicapo matematico. Inoltre, il matematico Pappo di Alessandria, vissuto nel IV secolo, cita Archimede come autore di un trattato *Sui poliedri semiregolari* (i 13 poliedri di Archimede)[7] e un ignoto autore arabo nel 1150, all'inizio di un suo trattato, afferma di tradurre fedelmente l'opera *Sugli orologi ad acqua* di Archimede. Purtroppo nessuna di tali opere è pervenuta fino a noi. Gli arabi attribuiscono ad Archimede molte altre opere non pervenute: *Sui triangoli rettangoli*, *Sui dati*, *Sulle figure quadrilatere*, *Sui circoli tangenti*, *Sull'ettagono nel circolo* (Heiberg, 1879). Infine anche un'opera *Sulle sezioni coniche*, che Apollonio di Perga avrebbe plagiato.

Oltre i contenuti, anche lo stile degli scritti archimedei è originalissimo. Analogie eleganti e inattese, gusto della sorpresa, dell'arte di stupire (che molti secoli dopo fu tipica del barocco seicentesco), eleganza della prosa, bellezza matematica, sottigliezza dei ragionamenti fecero degli scritti di Archimede il modello ideale di perfezione da seguire nella trattatistica matematica quando, nel Seicento, nacque la scienza moderna. Senza dubbio Archimede ebbe una forte influenza sull'opera di Galilei.

[7] A differenza dei 5 poliedri regolari di Platone che hanno per facce poligoni regolari dello stesso tipo (o triangoli, o quadrati, o pentagoni), i 13 poliedri di Archimede hanno come facce poligoni regolari di due o più tipi, dando luogo a una maggiore varietà di solidi, detti semiregolari.

## 2- Archimede all'asta

Felix de Marez Oyens, direttore internazionale della sezione "Libri e Manoscritti" della famosa casa d'aste Christie's , il 29 ottobre 1998 organizzò a New York la vendita all'asta di ben 501 volumi di scienza e medicina, appartenuti al noto bibliofilo Naskell F. Norman, fra cui pezzi di assoluto valore storico per la scienza: una copia della tesi di dottorato di Marie Curie con dedica a Ernest Rutherford, una prima edizione dell'*Origine delle specie* di Charles Darwin, una copia della dissertazione del 1905 di Albert Einstein sulla *Relatività Speciale*, una copia della prima edizione del *Trattato sull'elettricità e il magnetismo* di James Clerk Maxwell. La vendita era organizzata in due sessioni: una mattutina e l'altra pomeridiana. Fra le due fu inserita una mini-asta dedicata a un solo pezzo: un volume molto spesso, ma di piccole dimensioni, tipiche di un libretto di preghiere, , bruciacchiato, coperto dalla muffa e quasi illeggibile, recante il codice d'asta *Eureka-9058*, di proprietario ignoto. Si trattava di un manoscritto medioevale di preghiere, la cui importanza aveva attirato l'attenzione di istituzioni statali anche straniere e di privati ricchissimi, poiché sotto le preghiere cristiane del secolo XIII si nascondevano le parole cancellate del *Codice C* di Archimede, che per quanto incompleto, danneggiato e pieno di soprascritture era il codice più antico delle opere di Archimede, l'unico che contenesse il suo trattato *Sui corpi galleggianti* in lingua greca originale e l'unico che riportasse una versione del *Metodo* e dello *Stomachion.* Fu venduto all'asta alla straordinaria cifra di due milioni e duentomila dollari a un privato cittadino "in pensione", ma ricchissimo, che ha voluto mantenere rigorosamente l'anonimato. Il nuovo

proprietario del *Codice C* di Archimede ha poi dato in custodia il manoscitto al Walters Art Museum di Baltimora, nel Maryland, finanziando il suo restauro e il progetto di decifrazione del palinsesto.

## 3 - Arte e scienza nell'analisi filologica del *Metodo*

Il restauro del Codice C di Archimede, compiuto nel 2001 da Reviel Netz e William Noel, fornisce un ottimo esempio di sinergia fra tecnologia, conoscenza matematica, storica e linguistica. In particolare, Reviel Netz è la persona che è stata in grado di "decifrare" il testo archimedeo del Codice, essendo oltre che filologo (professore di lettere classiche e filosofia all'Università di Stanford negli USA) un profondo conoscitore della matematica antica, come pochi matematici di professione lo sono.

**Fig. 1 - Il Codice C di Archimede.**

Il *Codice C* di Archimede (figura 1) è stato rinvenuto come scrittura sottostante di un palinsesto, cioè di un libro che ha utilizzato la pergamena di precedenti manoscritti, cancellandone la scrittura per potervi scrivere sopra. Nella fattispecie si tratta di un libro di preghiere del 1229 che utilizzò la pergamena del *Codice C* delle opere di Archimede risalente al secolo X (975 d. C.) e quella di almeno altri quattro codici non ancora identificati.[8] Il testo di preghiere sovrascritto risulta ruotato di 90° rispetto al testo originario sottostante, poiché, come era consuetudine per i palinsesti, l'amanuense riutilizzava ciascun foglio del codice originario ruotandolo di 90° e tagliandolo secondo la dimensione minore in modo da ottenere da esso due fogli (bifoglio del palinsesto). Nelle figure 2 e 3 risultano chiaramente visibili le due scritture sottostante e sovrastante del palinsesto, l'una di traverso all'altra.

Il palinsesto di Archimede è stato scoperto nel 1906 dal filologo danese Johan Ludvig Heiberg nella biblioteca Metochion del Santo Sepolcro di Costantinopoli, poi è nuovamente scomparso e infine è ricomparso il 29 ottobre 1998 all' asta di Christie's a New York.

Heiberg non riuscì a leggere completamente il palinsesto, perché molte pagine erano praticamente illeggibili alla luce

[8] Nel margine inferiore della prima pagina del palinsesto è scritto che il libro era stato consegnato dall'amanuense a una chiesa il 14 aprile 6737 secondo il calendario greco- ortodosso. Poiché questo iniziava a contare il tempo dall'inizio del mondo, che nel nostro calendario cade il 1° settembre 5509 a. C., «per ottenere la data moderna corrispondente al 14 aprile 6737 bisogna dunque sottrarre 5508 anni: il risultato è il 14 aprile 1229» (Netz, Noel, [2007] 2014, p. 187).

normale e non disponeva delle attuali tecniche fotografiche con illuminazione a diverse lunghezze d'onda, in particolare a luce ultravioletta. I fotoni con lunghezze d'onda nell'ultravioletto sono notoriamente invisibili all'occhio e quindi non costituiscono la luce, nel senso ordinario del termine. Ma accade questo: i fotoni ultravioletti che giungono sull'inchiostro della pergamena sono assorbiti, mentre quelli che giungono sulle parti della pergamena prive di inchiostro vengono riemessi con lunghezze d'onda nel blu e quindi nello spettro visibile.

**Fig. 2 - Pagine del palinsesto di Archimede fotografate da J. L. Heiberg.**

Il risultato è una specie di retroilluminazione con luce blu del foglio di pergamena (figura 3) che pone in risalto la scrittura.[9]

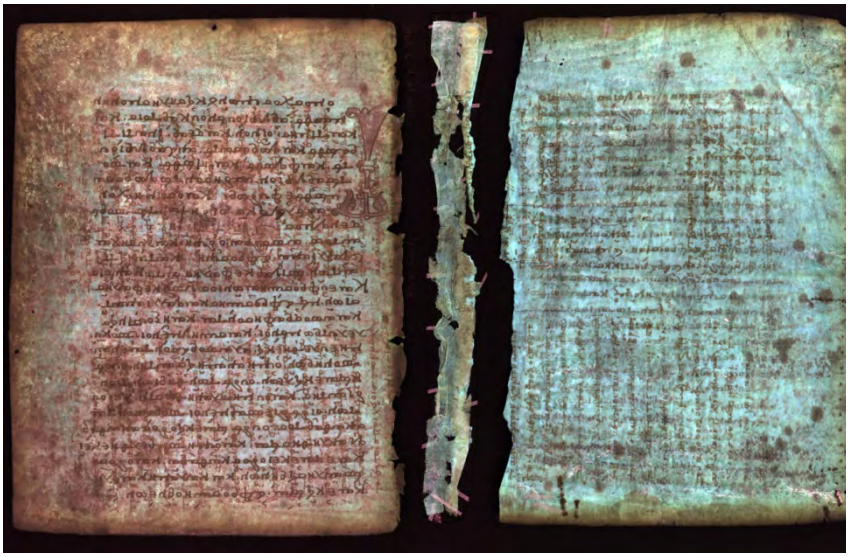


**Fig. 3 - Pagine del palinsesto di Archimede fotografate con luce ultravioletta.**

Heiberg fotografò soltanto 103 delle 354 pagine[10] del *Codice C*: circa i 2/3 del codice non vennero quindi letti da Heiberg, il quale inoltre - essendo un filologo e non un esperto di

[9] La storia completa e dettagliata del palinsesto assieme alla trascrizione completa del testo greco è stata pubblicata recentemente in (Netz, Noel, Wilson, Tchernetska, 2001). Si può accedere anche al sito http://www.archimedespalimpsest.org. In particolare, navigando nel sito è possibile scaricare le immagini delle pagine del palinsesto da: http://www.cis.rit.edu/people/faculty/easton/Archie/index.html.

[10] I bifogli del palinsesto di Archimede sono infatti numerati da 1 a 177, ma tre sono stati persi.

matematica - concentrò tutto il suo lavoro sulla scrittura, trascurando completamente i 250 diagrammi presenti, di cui non comprese l'importanza. Netz, invece, da ottimo cultore della matematica antica, li ha studiati con molta attenzione, mettendo in evidenza che i matematici greci pensavano per diagrammi e non per parole. Un esempio, questo, di efficienza produttiva quando arte e scienza coabitano nella stessa persona.

Il *Codice C* di Archimede contiene nel greco originale le opere *Sull'equilibrio dei piani* (l'ultima parte), *Sui corpi galleggianti*, *Metodo*, *Sulle spirali*, *Sulla sfera e il cilindro*, *Misura del cerchio*, *Stomachion* e oggi costituisce l'unico codice in greco delle opere di Archimede che possediamo. Inoltre, esso è particolarmente importante perché è il solo codice che contiene il *Metodo* e lo *Stomachion* e l'unica copia in greco dell'opera *Sui corpi galleggianti*. Le altre opere sono presenti in parte anche nel codice A e in parte nel codice B, permettendo così il confronto dei testi per le edizioni critiche. Il *Codice C* ci è pervenuto privo della parte iniziale, di molte parti intermedie e della parte finale. È pertanto molto probabile che contenesse altre opere di Archimede. Dalla scrittura minuscola risulta attribuibile a un amanuense del X secolo (975), che molto probabilmente non capiva nulla del suo contenuto matematico, aspetto questo positivo in quanto gli ha impedito di inserire interpretazioni e aggiunte personali, falsando il pensiero di Archimede, a differenza di quanto è avvenuto con i traduttori arabi, che erano invece abili matematici.

Gran parte delle opere pagane dell'antichità è giunta fino a noi attraverso i palinsesti. Il termine palinsesto deriva dal greco *πάλιν* + *ψηστός* ovvero *pálin* + *psestòs* = raschiato di

nuovo, in quanto si raschiava il testo originario di una pergamena per potervi scrivere un nuovo testo. Tuttavia, i testi originari sono potuti riaffiorare nel tempo in quanto, prima del Medioevo, la loro rimozione veniva fatta usando latte e crusca d'avena, che non li cancellava completamente. Il testo originario (*scriptio inferior*, sottoscrittura) debolmente riaffiorato può così essere letto e, più spesso, "decifrato", a causa delle numerose lacune che presenta. I metodi medioevali di recupero della sottoscrittura erano altamente distruttivi, poiché impiegavano polvere di pietra pomice per raschiare il testo sovrascritto. La situazione non migliorò molto nemmeno in tempi più moderni quando, nell'Ottocento, si usarono prodotti chimici altamente distruttivi (tintura di bile e idrosolfuro di ammonio).

Un notevole servizio, invece, al recupero non distruttivo del testo sottoscritto dei palinsesti è offerto dall'attuale tecnologia di trattamento delle immagini, che impiega la luce ultravioletta e la fotografia. Il palinsesto viene smembrato liberandolo dalla rilegatura e le singole pagine sono fotografate con luci di differente lunghezza d'onda. Le diverse fotografie di una stessa pagina così ottenute vengono sovrapposte, in modo da aumentare il contrasto della sottoscrittura, che invece risulterebbe difficilmente leggibile con la luce normale. Inoltre, nei casi più difficili, è possibile anche ricorrere alla digitalizzazione delle immagini che permette di decifrare palinsesti altrimenti illeggibili.

Il libro di Reviel Netz e William Noel, *Il codice perduto di Archimede*, nei capitoli dispari (scritti da Noel) illustra dettagliatamente tutta la storia del recupero e del restauro del palinsesto di Archimede, mentre nei capitoli pari (scritti da

Netz) illustra il paziente lavoro di decifrazione e interpretazione del suo contenuto matematico.

Quest'ultimo lavoro, nei passi straziati dalle mutilazioni del testo originario prodotte dalla cancellazione, assomiglia molto a una complicata indagine poliziesca, dove si procede per indizi e intuizioni.

Il testo viene analizzato parola per parola, anzi spesso lettera per lettera in quanto a volte le parole sono state parzialmente cancellate. Per ricostruire un'intera frase si procede allora per indizi, facendo ricorso ad approfondite conoscenze del greco antico, della storia antica, delle usanze antiche, della matematica antica e delle abitudini dell'autore del testo originario.

## 4 - L'infinito attuale in Archimede: il calcolo del volume dell'unghia cilindrica

Grazie a questo complesso lavoro di "restauro" altamente interdisciplinare, che vede veramente all'opera arte e scienza, Netz e Noel hanno potuto riportare in forma leggibile parti del *Codice C* illeggibili quando Heiberg scoprì per la prima volta il palinsesto di Archimede.

In particolare, l'attenta lettura e decifrazione anche delle parti prima illeggibili del palinsesto restaurato ha permesso una scoperta veramente sensazionale: la conoscenza e l'uso esplicito da parte di Archimede dell'infinito attuale nei calcoli, anticipando così di ben 22 secoli quella definizione di infinito attuale che fu data da Dedekind e Cantor soltanto nel secolo XIX. La scoperta è stata fatta nel marzo 2001 da Reviel Netz, assieme allo storico giapponese della matematica Ken Saito,

con la lettura critica e la decifrazione, per la prima volta, delle parti lacunose della proposizione 14 del *Metodo*, relativa al calcolo del volume di uno strano solido: l'unghia cilindrica (figura 4). Si tratta della parte centrale della proposizione 14, che non poté essere letta da Heiberg, in quanto illeggibile con le tecniche fotografiche allora disponibili, essendosi dovuto pertanto limitare a decifrare soltanto la parte iniziale e finale.

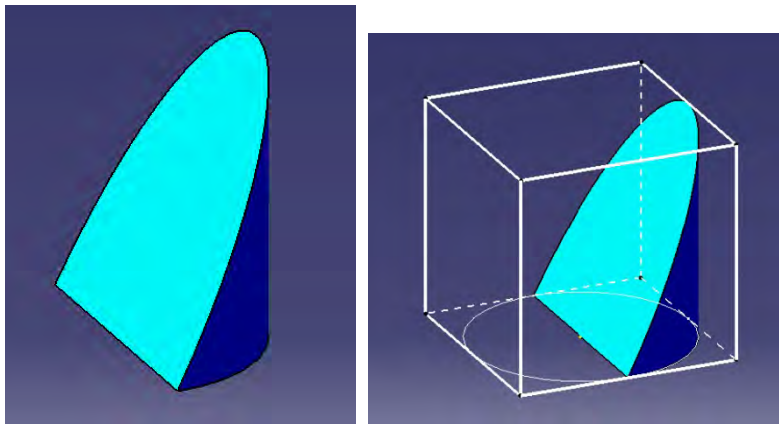


**Fig. 4 - Unghia cilindrica**
**(Modello solido 3D creato dall'Autore con CATIA).**

Per capire come è fatto questo solido, si immagini di inscrivere entro un cubo[11] un cilindro e di tagliare il cilindro e il cubo con un piano inclinato passante per il centro della "base" e uno spigolo del cubo opposto alla base: l'unghia cilindrica è il solido delimitato da tale piano, dalla porzione di

[11] In realtà Archimede considera il caso più generale di un parallelepipedo. Per maggiore semplicità qui consideriamo il caso particolare di un cubo.

superficie del cilindro e dalla base del cubo. Effettivamente tale solido ricorda la forma dell'unghia di un dito.

La sua superficie è composta da una superficie semiellittica, risultato dell'intersezione fra il piano inclinato e il cilindro rotondo, da una porzione di superficie cilindrica e da un semicerchio. A chi sarebbe potuto venire in mente di calcolare il volume di un solido così strano e complesso se non ad Archimede, che era sempre affascinato dalla sfida di misurare l'impossibile? Misurare ciò che è curvo, riducendolo a ciò che invece è delimitato da rette o da piani e quindi facilmente misurabile, ridurre il complesso al semplice: questa la sfida di tutta l'opera scientifica di Archimede.

Nel seguito accompagnerò lo svolgimento del ragionamento di Archimede con immagini dell'unghia cilindrica ricavate dal modello tridimensionale da me realizzato con il CAD CATIA. Questo strano solido e le sezioni considerate da Archimede costituiscono un "oggetto" molto complesso che è necessario osservare da vari punti di vista.

Anzitutto, consideriamo l'oggetto "complesso" creato dal taglio con il piano inclinato che origina l'unghia: esso è costituito da un prisma triangolare e dall'unghia cilindrica in esso inscritta (figura 5). Per semplicità denotiamo con $T_1$ e $T_2$ le due facce triangolari del prisma.

Nella parte iniziale della proposizione 14 Archimede procede con un metodo già altre volte utilizzato. Scompone il solido in sezioni parallele ottenute con un piano Π, scelto a caso, parallelo a una delle facce triangolari del prisma.

Tale piano interseca il prisma triangolare in un triangolo ADE che chiameremo per semplicità $T_P$, e l'unghia cilindrica in un altro triangolo ABC che chiameremo per semplicità $T_U$.

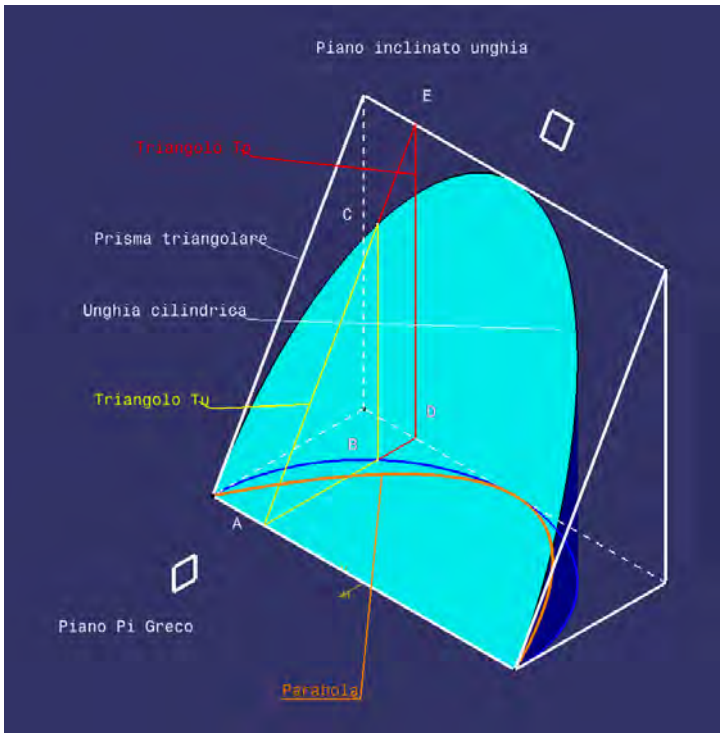



**Fig. 5 – Prisma triangolare contenente l'unghia cilindrica inscritta. (Modello solido 3D creato dall'Autore con CATIA).**

Mentre $T_P$ rimane costante al variare del piano di sezione tra le due facce triangolari del prisma ($T_P \equiv T_1 \equiv T_2$) , $T_U$ invece varia fra la sua degenerazione in un punto (in corrispondenza delle due facce triangolari del prisma) e il valore massimo che raggiunge nella sezione passante per il centro della "base" del

cubo, essendo ivi $T_U \equiv T_1 \equiv T_2$. Gli infiniti triangoli $T_U$ sono importanti perché costituiscono l'intera unghia cilindrica.

Archimede considera poi tre segmenti (al solito ci serviremo di simboli semplificati – figura 6):

1. il segmento $S_C$ in cui il piano sezionante generico Π interseca il semicerchio $C$, proiezione sulla base del cubo dell'unghia cilindrica;
2. il segmento costante $S_R$ in cui il piano sezionante generico Π interseca il rettangolo "orizzontale" del prisma triangolare;
3. il segmento variabile $S_P$, che non ha alcuna derivazione tridimensionale, che interseca la parabola costruita da Archimede, inscritta nel rettangolo "orizzontale" del prisma triangolare.

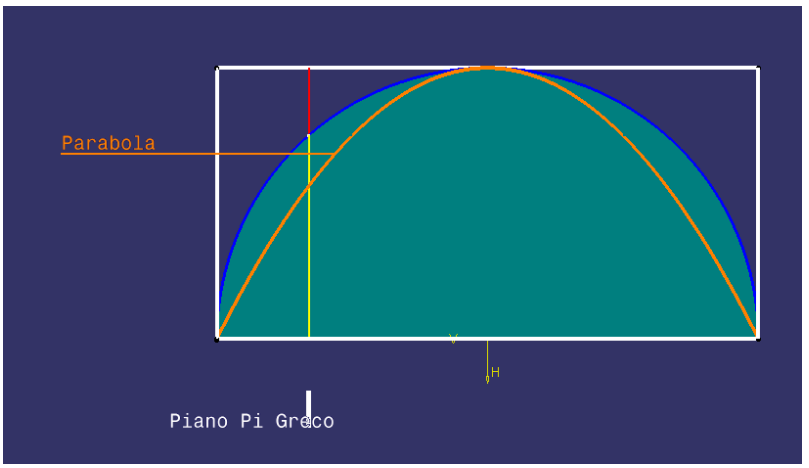



**Fig. 6 – Proiezione del prisma triangolare e dell'unghia cilindrica sul piano della base del cubo.**

**(Modello solido 3D creato dall'Autore con CATIA).**

Delle diverse viste da noi utilizzate Archimede utilizzava soltanto la vista di figura 6. In altri termini, per Archimede era sufficiente considerare soltanto questa vista per comprendere anche la complessità tridimensionale dell'oggetto su cui sviluppava il suo ragionamento. Una capacità unica, degna di quel genio che era Archimede.

Archimede riesce a dimostrare le seguenti proporzioni:

1. $T_P : T_U = S_R : S_P$
2. $P : U = R : P_A$

Dove:
$P$ = prisma triangolare;
$U$ = unghia cilindrica;
$R$ = rettangolo orizzontale del prisma triangolare;
$P_A$ = segmento parabolico costruito da Archimede sul rettangolo orizzontale del prisma triangolare.

Nella proporzione 1 si asserisce (correttamente) l'uguaglianza del rapporto fra entità bidimensionali (triangoli) e il rapporto fra entità unidimensionali (segmenti).

Nella proporzione 2 si asserisce (correttamente) l'uguaglianza del rapporto fra entità tridimensionali (solidi) e il rapporto fra entità bidimensionali (poligoni).

Da quest'ultima proporzione segue la conclusione della proposizione 14.

Archimede dimostra che il volume di mezzo cubo sta al volume dell'unghia cilindrica come l'area del rettangolo orizzontale del prisma triangolare sta all'area del segmento parabolico. Quest'ultima, come dimostrato nella proposizione

1 del *Metodo*, è 4/3 dell'area del triangolo in esso inscritto. Ma l'area di un rettangolo è il doppio dell'area del triangolo in esso inscritto. Il rettangolo $R$ e il segmento parabolico $P_A$ condividono lo stesso triangolo inscritto. Pertanto possiamo scrivere (riferendoci alle aree):

$$T = \frac{R}{2} \qquad\qquad T = \frac{3}{4} P_A$$

Da cui:

$$P_A = \frac{2}{3} R$$

Dalla proporzione 2 si ha infine:

$$U = \frac{2}{3} P$$

Dunque il volume dell'unghia cilindrica è 2/3 del volume del prisma triangolare.

Dopo di che Archimede dimostra che il volume del prisma triangolare $P$ in cui è inscritta l'unghia cilindrica è 1/4 del volume del cubo e dunque *il volume dell'unghia cilindrica è 1/6 del volume del cubo.*

Archimede è riuscito a calcolare il volume di un solido curvilineo partendo dalla considerazione di segmenti, triangoli e proporzioni fra entità unidimensionali bidimensionali e tridimensionali.

Le due proporzioni 1 e 2 sono separate, nel palinsesto, da quella parte illeggibile al tempo di Heiberg, decifrata invece da Netz e Saito grazie alle moderne tecniche di illuminazione con luce a diversa frequenza.

Questa parte lacunosa è importante perché contiene il ragionamento seguito da Archimede per arrivare alla

proporzione 2 e quindi alla conclusione del calcolo del volume dell'unghia.

La proporzione 1 è stabilita da Archimede considerando un piano a caso fra gli infiniti piani sezionanti compresi fra le due facce triangolari del prisma. Il passaggio alla proporzione 2, in assenza della decifrazione della parte lacunosa, sembrerebbe avvalorare un metodo già utilizzato da Archimede: «*il passaggio da un enunciato relativo a sezioni scelte a caso a un enunciato relativo agli oggetti interi da cui erano state prese quelle sezioni*». Un passaggio "implicito", altre volte seguito da Archimede, ben diverso da un passaggio "esplicito" reso possibile dalla considerazione dell'infinito attuale attraverso una sommatoria di infiniti elementi.

Questo il racconto della febbrile e minuziosa ricerca filologica di Netz e Saito che ha consentito, attraverso la decifrazione della parte lacunosa della proposizione 14, la scoperta che Archimede ha utilizzato l'infinito attuale per passare dalla proporzione 1 alla proporzione 2:[12]

> *... Saito ritornava al libro che aveva portato con sé: una copia dell'edizione di Heiberg del Metodo di Archimede. Di lì a poco avremmo letto un brano di quel testo che fino ad allora era rimasto sconosciuto. Per qualche motivo a noi ignoto, nell'edizione a cura di Heiberg c'era una lacuna. Che cosa poteva aver scritto Archimede in quel passo?* (p. 193) [...] *Avremmo esaminato la parte centrale della proposizione 14, quella che Heiberg non aveva letto* (p. 194). [...] *Ci era chiaro perché Heiberg non avesse potuto fare grandi progressi nella ricostruzione della parte mancante del testo:*

[12] I brani di seguito riportati sono tratti tutti da (Netz, Noel, [2007] 2014). Alla fine di ogni citazione è indicata soltanto la pagina da cui è tratta.

*la pagina era in gran parte illeggibile...*(p. 202) [...] *Anche alla luce ultravioletta la lacuna non sembrava lasciare speranze...*(p. 202) [...] *Riesaminammo di nuovo la conclusione della proposizione. Dopo aver dimostrato che il volume di mezzo cubo sta a quello dell'unghia cilindrica come l'area del rettangolo sta a quella del segmento parabolico, Archimede proseguiva eseguendo un veloce calcolo* (p. 202). [...] *Lo stano oggetto a forma d'unghia ha un volume che è esattamente uguale a 1/6 del volume del cubo* (p. 203). [...] *Ecco dunque un altro risultato elegante ottenuto da Archimede, questa volta, si direbbe, senza ricorrere ad applicazioni della fisica. I triangoli e i segmenti di retta non vengono posti su un'immaginaria bilancia. Vengono semplicemente sommati fra loro: un numero infinito di proporzioni che si sommano per dare un'unica proporzione. Come procede Archimede per compiere quest'operazione? Ignora semplicemente i paradossi e gli errori dell'infinito? Non volevamo rinunciare. Ritornammo alla lacuna del testo* (p. 203). [...] *Dopo qualche minuto di frustrazione, feci qualcosa che non avrei dovuto fare. Sfilai il bifoglio dalla busta di plastica che lo conteneva. Senza la protezione della plastica, i riflessi prodotti dalla lampada a ultravioletti sulla pergamena divennero più chiari. Fissai la zona della pagina che aveva costretto Heiberg a lasciare alcune righe vuote nel testo, cercando di individuare qualche traccia di caratteri greci.*

*Credetti di aver visto qualcosa. All'inizio scartai quella possibilità, perché in quel contesto non aveva senso. Archimede non aveva motivo di usare quella parola. Eppure pensavo di aver visto quelle tre lettere in sequenza: epsilon-gamma-epsilon, εγε.*

*«Penso di vedere "ege"» dissi infine a Ken. «Probabilmente qualcosa che ha a che fare con mégethos, la parola greca che significa "grandezza". Non ha molto senso».*

*Perché, vedete, nella proposizione Archimede discuteva di alcuni oggetti geometrici concreti: un cilindro, un triangolo, una parabola. E in tale contesto un matematico greco non*

> *sarebbe passato a parlare di grandezze, in termini generali.* (pp. 203-204)[...]
>
> *«Ne sono sicuro» dissi, guardando di nuovo la pagina. In effetti cominciavo a intravedere le tracce di una theta che seguiva immediatamente l'epsilon-gamma-epsilon. Dunque era epsilon-gamma-epsilon-theta. Senza alcun dubbio Archimede parlava di mégethos. Parlava di grandezze astratte* (p. 204).

Torniamo al problema dell'infinito, ricordando quali sono le sue due forme: potenziale e attuale.

L'*infinito potenziale* è l'iterazione senza limiti di un certo processo mentale. Per esempio, comunque si pensa un numero intero, esiste sempre un numero superiore. L'*infinito attuale o reale*, invece, è un insieme di infiniti elementi, come, per esempio, l'insieme dei numeri naturali (1, 2, 3, … ).

Vediamo ora cosa ha scoperto Netz a proposito dell'infinito nell'opera di Archimede:

> *Quindi entrambi ci mettemmo febbrilmente a ricostruire la possibile argomentazione di Archimede: disegnavamo figure, abbozzavamo proporzioni, provavamo a vedere come si potesse usare quel lemma per colmare la lacuna che divideva le sezioni scelte a caso dagli oggetti interi. Il lemma riguardava una somma di proporzioni. Quadrava. Era dunque possibile che Archimede sommasse proporzioni.* (p. 205) [...]
>
> *«Un momento, c'è un problema». Mi fermai, staccandomi a fatica dalla figura che avevamo disegnato. «Se la nostra ipotesi è giusta, significa che Archimede stava sommando un numero infinito di grandezze. E questo non torna. Si arriva a un risultato infinito; non è più possibile compiere calcoli».*
>
> *Ken Saito era d'accordo. Mancava ancora qualcosa. Il lemma usato da Archimede si basava su una proposizione che egli aveva dimostrato in Conoidi e sferoidi, ed era chiaro*

> *che in quel trattato si poteva dimostrare la proposizione solo nel caso di somme che riguardavano un numero finito di grandezze, perché altrimenti si sarebbe dovuto parlare di un oggetto composto da un numero infinito di grandezze, cosa che non aveva senso. Si sarebbe trattato di infinito reale, e come avrebbe potuto Archimede anche solo metter mano a un discorso sull'infinito reale?*
>
> *«Se c'è una cosa certa, è che i greci non usavano l'infinito reale. Qui c'è qualcosa che non va. Oppure qualcosa di davvero nuovo»* (pp. 205-206).

Il mistero e lo stupore per una scoperta presagita, ma che richiede una certezza scientifica, sono ai massimi livelli. Per far luce fra le parole difficilmente leggibili delle pagine lacunose del palinsesto, occorre ricorrere ai più potenti attuali strumenti tecnologici di recupero del testo:

> *Quella stessa sera Ken e io spiegammo a Will che volevamo assolutamente vedere le immagini digitali di quella pagina: un capitolo completamente nuovo della storia della scienza attendeva di essere scritto sulla base di quelle riproduzioni.* (p. 206) […] *Agli scienziati incaricati di realizzare le immagini digitali del palinsesto ci volle poco più di un mese; all'inizio di marzo* [2001, n.d.A.] *il CD-ROM finalmente arrivò.* (p. 206) [...]
>
> *Dopo quelle prime incursioni nel testo, la lettura si impantanò. Anche in questo caso si trattava di una caratteristica tipica del ciclo di analisi di un manoscritto: dopo aver ottenuto i primi successi, di solito sopravveniva un periodo di stasi.* (p. 207) [...]
>
> *Per un paio d'ore guardai le immagini...* (p. 207) [...] *Qualcosa catturò la mia attenzione: non era una semplice macchiolina ...* (p. 207) [...]
>
> *Era un accento acuto. E grazie alla mia familiarità con l'amanuense, potevo dedurne qualcosa di più: era il tipo di accento acuto che egli poneva di solito sopra a una iota. Era*

> *un po' come leggere il puntino di una i e, in base a quello, identificare la i.*
>
> *Di più: sapevo di che iota si trattava. Era una iota con un accento acuto e come tale poteva appartenere solo alla manciata di parole che contengono una iota accentata in quel modo. Un candidato probabile, in un contesto matematico, poteva essere la parola Ísos, «uguale». Era più che plausibile che Archimede parlasse di una cosa uguale a un'altra, giusto? E in effetti adesso che la stavo cercando riuscivo a vedere una sigma.*
>
> *Ma a cosa si riferiva quell'uguale? [...] Continuando a guardare, vidi un altro termine generale riconducibile alla teoria delle proporzioni: solo questa volta non si trattava di grandezza ma di quantità. Le due parole si combinavano perfettamente: «Eguale in quantità», Ísos pléthei. Era un buon greco matematico* (pp. 207-208).

La scoperta che Reviel Netz e Ken Saito stanno per fare è davvero straordinaria: Archimede anticipò di 21 secoli l'uso corretto nei calcoli dell'infinito attuale, il cui ingresso nella matematica si pensava fosse avvenuto soltanto nel secolo XIX grazie ai grandi matematici tedeschi Julius Wilhelm Richard Dedekind e George Cantor allorché questi, con grande spregiudicatezza, definirono un insieme infinito[13] se e soltanto se contiene parti che hanno altrettanti elementi di esso, ovvero che possono essere posti in corrispondenza biunivoca, sciogliendo così i paradossi cui dava luogo l'infinito attuale.

Ma continuiamo con il racconto di Netz:

---

[13] La prima definizione di numero infinito comparve nell'opera di Dedekind intitolata *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) [*Continuità e numeri irrazionali*].

*Ecco dunque ciò che Archimede stava facendo in quel passaggio del testo: egli affermava che, considerando il numero infinito di sezioni prodotte nel cubo* (p. 208) [...] *i triangoli prodotti in questo modo* (p. 208) [...] *erano uguali in quantità alle linee nel rettangolo. Vedete? Per ogni sezione scelta a caso c'era un triangolo nel cubo che aveva per base una linea nel rettangolo. E Archimede faceva notare che il numero di triangoli di cui si componeva il prisma era uguale al numero di linee di cui si componeva ciascun rettangolo. Senza dubbio Archimede intendeva verificare che alla base di quel fatto c'era l'esistenza di un rapporto uno a uno: ciascun triangolo aveva per base una singola linea, distinta da tutte le alter e, viceversa, ciascuna linea era la base di un singolo triangolo, distinto da tutti gli altri. Archimede ripeteva questo tipo di asserzione tre volte...* (pp. 208-209) [...]

*Solo che, ed è questo il fatto fondamentale, quelle uguaglianze di numeri non assomigliavano a nulla di ciò che già conoscevamo della matematica greca. Gli oggetti che Archimede contava nella proposizione 14 del Metodo - gli insiemi di triangoli e di linee - erano tutti infiniti. Archimede stava compiendo calcoli espliciti con numeri infinitamente grandi.*

*Di più: Archimede compiva questi calcoli basandosi su un principio ben fondato. Sembrava asserire che un insieme infinito era uguale a un altro insieme infinito perché c'era un rapporto uno a uno fra i due insiemi.* (p. 209) [...]

*Ora si dà il caso che lo strumento della corrispondenza uno a uno sia proprio quello con cui fu formalizzato il concetto di infinito alla fine del XIX secolo, nientemeno che il fondamento della moderna teoria degli insiemi. A questo punto possiamo riassumere le lezioni che abbiamo appreso dalle pagine 105-110 del Metodo.*

*Primo, scopriamo che Archimede [...] si basò al contrario su specifici principi di sommatoria. Questo significa che stava già compiendo un passo verso il moderno calcolo infinitesimale e non lo stava semplicemente precorrendo in modo inconsapevole.*

> *Secondo, scopriamo che Archimede faceva calcoli con infiniti reali, in totale contrasto con tutto quanto gli storici della matematica hanno sempre creduto.* (pp. 209-210) [...] *Il concetto di infinito reale era dunque già noto agli antichi greci.*
>
> *Terzo, vediamo che con questo concetto di infinito [...] nel III secolo a.C., a Siracusa, Archimede riuscì a cogliere un barlume della teoria degli insiemi, un prodotto della matematica più avanzata del tardo XIX secolo* (p. 210).

Incredibile: un matematico del secolo III a. C. che pensa come un matematico moderno del secolo XX d.C.!

## 4 - Il più grande scienziato di tutti i tempi

«*La caratteristica generale più certa della tradizione scientifica europea è che essa consiste in una serie di note aggiuntive ad Archimede*» (Netz, Noel, [2007] 2014, p. 35).

Questa affermazione di Reviel Netz può sembrare esagerata, ma non lo è conoscendo la prudenza e lo spirito critico del suo autore. Alcune lapidarie ma incisive riflessioni saranno sufficienti a farci concordare con Netz.

Alla base della moderna scienza si trovano due pilastri che ne costituiscono le fondamenta: l'applicazione della matematica allo studio della realtà fisica e l'utilizzo del calcolo infinitesimale. A questi naturalmente va aggiunto il metodo sperimentale. Tutta la scienza moderna è stata sviluppata da queste due fondamenta metodologiche, che sono state create da Archimede. Nelle sue opere, infatti, si trovano chiaramente utilizzati sia i principi dell'analisi infinitesimale sia la matematica come linguaggio della realtà fisica, anticipando di ben diciotto secoli l'idea del gran libro della Natura così

magnificamente espressa da Galilei nel *Saggiatore* (1624). Archimede ben prima di Galilei ha saputo leggere per primo la lingua matematica nella quale è scritto l'Universo, ovvero la matematica nella fisica, ma ha anche per primo saputo leggere la fisica nella matematica.

Per tutte queste ragioni Reviel Netz afferma che «*Archimede è lo scienziato più importante che sia mai vissuto*» (Netz, Noel, [2007] 2014, p. 37). Espressioni di questo tenore, su Archimede, se ne possono trovare a iosa, come quella del matematico John Wallis:

> *Vir stupendae sagacitatis, qui pria fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur.*
>
> *[Uomo di stupenda sagacia, che pose le fondamenta di quasi tutte le invenzioni, del cui sviluppo si gloria la nostra epoca].*

Sicuramente è stato il più grande scienziato universale dell'Antichità, sintesi altissima di tutto il pensiero scientifico dei suoi tempi. In lui la distinzione fra scienziato puro e applicato non aveva senso e dimostra che l'attuale distinzione è soltanto frutto dei limiti personali, non è ontologica. Il purismo, tanto osannato nei nostri tempi, è soltanto una dichiarazione di sconfitta nel comprendere la complessità della natura attraverso quella sua rappresentazione che chiamiamo cultura e sapere. Il purista illude se stesso credendo di porsi su un piano gnoseologico superiore con il suo isolarsi, in realtà, nella sua ristretta cella di ignoranza delle complesse interconnessioni che la natura presenta in ogni sua manifestazione. Le distinzioni nette non esistono in natura: non esistono fenomeni soltanto fisici o chimici, così come non

esiste nessun essere vivente che sia soltanto e totalmente maschio o femmina. La natura è contraddistinta dalla complessità, e questo Archimede l'aveva capito più e prima di ogni altro.

Il separare in senso divorzista il puro pensiero o astrazione dalla realtà fisica o dal concreto, che è uno dei vanti del purismo matematico, è soltanto un atto di boria intellettualistica, che trova sempre inaspettate smentite. Potremmo, per esempio, ripetere con Bruno de Finetti che l'astratto non è altro che il "multiconcreto". Ma qualcuno potrebbe obiettare che è possibile sviluppare una costruzione matematica come sistema ipotetico-deduttivo, partendo da ipotesi coerenti non validate da alcuna esperienza fisica: una "pura" costruzione del pensiero. Ma la stessa modalità del pensiero non necessariamente corrispondente a una realtà fisica è veramente tale? Le geometrie non euclidee, quando furono scoperte, erano considerate semplici esercizi di logica, non più che curiosità matematiche, perché si pensava che non trovassero una "validazione" nella realtà fisica. Dopo qualche anno, invece, si constatò che erano la geometria di livelli della realtà fisica diversi da quello della nostra esperienza ordinaria. E così chi può veramente dimostrare che in qualche parte dell'immenso Universo quelle astrazioni matematiche che non trovano rispondenza nel nostro Pianeta non siano, invece, la lettura matematica della realtà fisica di altri mondi? Parmenide sarebbe d'accordo: pensare è essere, come è possibile pensare qualcosa che non è? Non è forse un velato riconoscimento del pensiero parmenideo la famosa frase di Einstein sulla matematica pura:

*La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà.*

## Bibliografia


Opere generali

BOSCARINO Giuseppe (n.d.). "I fondamenti della matematica in Archimede". In: https://matematica.unibocconi.eu/articoli/i-fondamenti-della-matematica-archimede.

D'ALESSANDRO Paolo , NAPOLITANI Pier Daniele (2012). *Archimede Latino. Iacopo da San Cassiano e il corpus archimedeo alla metà del Quattrocento*. Paris: Les Belles Lettres.

HEIBERG Johan Ludvig (1879). *Questiones Archimedae*. Hauniae.

LORIA Gino (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. 2a ed. Milano: Hoepli.

MARACCHIA Silvio (2011). "Infinito potenziale e infinito attuale nella matematica greca". «*Lettera Matematica Pristem*» 78 (giugno 2011).

NAPOLITANI P. D. (2001). *Archimede. Alle radici della scienza moderna*. In: «*Le Scienze*», Collana I Grandi della Scienza, ottobre 2001.

NAPOLITANI Pier Daniele, GIORELLO Giulio (2012). "Archimede. Il primo genio universale". In: «*Capire la scienza*», 2. Roma: Gruppo Editoriale l'Espresso.

NAPOLITANI Pier Daniele (2013). "Le vicende di Archimede e della sua opera". In: «*Lettera Matematica Pristem*» 86 (luglio 2013).

NICOTRA Luca (2014). "Arte e scienza in Archimede. Parte Prima". In: «*ArteScienza*», Anno I, N. 2, pp. 33-64.

NICOTRA Luca (2015). "Arte e scienza in Archimede. Parte Seconda". In: «*ArteScienza*», Anno II, N. 3, pp. 5 -38.

ROBERTS C.H., SKEAT T.C. (1983). *The birth of the Codex*. London: Oxford University Press.

RUSSO Lucio (2013). "Archimede tra leggenda e realtà". In: «*Lettera Matematica Pristem*» 86 (luglio 2013).

SAITO Ken (2013). "Archimede e la doppia riduzione all'assurdo". In: «*Lettera Matematica Pristem*» 86 (luglio 2013).

Edizioni critiche

DIJKSTERHUIS E.J. ([1938] 1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press. La prima edizione è del 1938. Considerato il miglior libro generale sull'attività scientifica di Archimede. È disponibile un'edizione aggiornata tradotta in italiano da G. Baroncelli, M. Bucciantini e M. Porta: E. J. Dijksterhuis, *Archimede. Con un saggio bibliografico di Wilbur R. Knorr*, Firenze: Ponte alle Grazie, 1989.

FRAJESE Attilio (1974) *Archimedes*. Torino, UTET. Questa edizione contiene però soltanto la traduzione italiana; inoltre Frajese, essendo un matematico, più che semplicemente tradurre ha parafrasato il testo archimedeo in modo da renderlo comprensibile secondo la notazione matematica moderna.

HEIBERG Johan Ludvig (1880). *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, 3 volumi. Leipzig: Teubner, 1a ed. 1880-81; 2a ed. 1910-15, ristampato a Stuttgart, 1972 (testo greco e latino). La 2a ed. è scaricabile dal sito:

http://www.wilbourhall.org/index.html#archimedes.

MUGLER C. (1972). *Archimède*, 4 voll. (testo greco e francese). Paris: Les Belles Lettres.

VER EECKE P. (1960). *Les oeuvres complètes d'Archimède suivies des Commentaires d'Eutocius d'Ascalon*. Liegi: Vaillant-Carmanne, 2 voll.

Principali edizioni storiche delle opere di Archimede

COMMANDINO Federico (1558). *Archimedis opera non nulla.* Venezia: Paolo Manuzio.

MAUROLICO Francesco (1685). *Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta Omnia Mathematica Quae Exstant.* Palermo: Cillenio Esperio.

RIVAULT David (1615). *Archimedis opera quae extant*, Parigi: Claude Morel. (Firenze, Collezione privata). È l'edizione più importante del Seicento. Rivault era un matematico e umanista, capace di parlare latino, greco, ebraico e arabo. Fu insegnante di matematica di Luigi XIII.

TARTAGLIA Niccolò (1543). *Opera Archimedis Syracusani philosophi et mathematici ingeniosissimi per Nicolaum Tartaleam Brixianum (Mathematicarum Scientiarum cultorem)…* Venezia: Venturino Ruffinelli.

TORELLI Giuseppe (1792). *Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex recensione Josephii Torelli Veronensi cum nova versione latina (accedunt versiones variantes ex codd. Mediceo et Parisiensibus*). Edizione (in greco e in latino) pubblicata postuma nel 1792 dall'Università di Oxford.

Sul palinsesto del *Codice C*

CHRISTENS-BARRY W.A., BERNSTEIN J.R., BLACKBURN M. (2001). "Imaging the Third Dimension of the Archimedes

Palimpsest". In: «*Proceedings of Is&T Conference*». Montreal, pp. 202-205.

EASTON R. L. Jr, NOEL W. (2004). "The Multispectral Imaging of the Archimedes Palimpsest". In: «*Gazette du Livre Médiévale*», 45, pp. 39-49.

KNOX K., DICKINSON C., WEI L., EASTON R.L. Jr., JOHNSON R. (2001). "Multispectral Imaging of the Archimedes Palimpsest". In: «*Proceedings of Is&T Conference*». Montreal, pp. 206-210.

NETZ Reviel, SAITO Ken, TCHERNETSKA Natalie (2001). "A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest" (Part 1). In: «*Sciamus*» 2, pp. 9-29.

NETZ Reviel, SAITO Ken, TCHERNETSKA Natalie (2002). "A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest" (Part 2). In: «*Sciamus*» 3, pp. 109-125.

NETZ Reviel, NOEL William, WILSON Nigel, TCHERNETSKA Natalie (2001). *The Archimedes Palimpsest*, Cambridge: Cambridge University Press, 2 voll.

NETZ Reviel , NOEL William ([2007] 2014). *Il codice perduto di Archimede. La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici.* Milano, Rizzoli, 2007. Ripubblicato per il Corriere della Sera da RCS MediaGroup S.p.A. Divisione Quotidiani, 2014).

NOEL William (2001). "The Archimedes Palimpsest. Old Science Meets New Science". In: «*Proceedings of Is&T Conference*». Montreal, pp. 199-201.

WILSON N. (1999). "Archimedes: the Palimpsest and the Tradition". In: «*Byzantinische Zeitschrift*» 92, pp. 89-101.

WILSON N. (2005). "The Secrets of Palimpsest ". In: «*L'Erasmo*» 25, pp. 70-75., pp. 89-101.

´REVIEL NETZ WILLIAM NOEL
IL CODICE PERDUTO DI ARCHIMEDE
La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici
CORRIERE DELLA SERA
LA MATEMATICA COME UN ROMANZO

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 71-88

# *Vettori alternativi e vettori rotanti: CampoMagnetico Rotante*

Massimo Fanfoni*

*Università degli Studi di Roma Tor Vergata
Via della Ricerca Scientifica 1
fanfoni@roma2.infn.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.155

**Sunto***: Questo articolo è rivolto, in particolare, agli studenti degli istituti tecnici con specializzazione in elettrotecnica ed elettronica. Lo scopo è quello di approfondire la corrispondenza tra gli aspetti matematici e quelli fisici che sono alla base del funzionamento della macchina asincrona. Si rivolge, tuttavia, anche agli studenti del liceo scientifico affinché costoro apprezzino come un elegante modello matematico possa avere ricadute pratiche nella vita di tutti i giorni. Verrà descritta la teoria che lega i vettori alternativi ai vettori rotanti. Per quanto riguarda il campo magnetico rotante si farà un solo brevissimo cenno ai casi bifase e trifase senza entrare nei dettagli delle tecniche costruttive per realizzare la macchina asincrona che lo studente potrà trovare nei testi presenti in bibliografia.*

**Parole Chiave***: Galileo Ferraris, fasore, matrice di rotazione, funzioni trigonometriche.*

**Abstract***: This article is dedicated to high school students specializing in electrical and electronic engineering but also to students interested in pure science. The goal, in particular, is to show how an elegant mathematical model can have important repercussions in everyday life. The correlation between alternating and*

*rotating quantities will be described. At the end of the article there will be a mention of the rotating magnetic field for two- and three-phase cases. The rotating magnetic field is the basis of the operation of the asynchronous motor; however, technical details relating to the construction of the asynchronous motor, which can be found in the texts cited in the bibliography, will not be discussed.*

**Keywords:***Galileo Ferraris, phasor, rotation matrix, trigonometric function*

## 1 - Introduzione

Nel 1894 l'ingegnere Galileo Ferraris pubblica sulla rivista Il «*Nuovo Cimento*» (Ferraris, 1894) la memoria intitolata: *Un metodo per la trattazione dei vettori rotanti od alternativi ed una applicazione di esso ai motori elettrici a correnti alternate*. Noi qui ripercorreremo, utilizzando un diverso approccio matematico ed una notazione vettoriale più agile, una parte della sua memoria ed infine, limitatamente al caso bifasico, a partire dal modello matematico mostreremo come realizzare in pratica un campo magnetico rotante, il quale è alla base del funzionamento della macchina asincrona (Olivieri, Ravelli, 1959 ; Rizzoni, 2018).

## 2 - Definizioni dei vettori rotante e alternativo

Un vettore rotante è una grandezza vettoriale di modulo costante la cui «*direzione ruota attorno ad una asse con velocità uniforme*» (Ferraris, 1894). I vettori ruotano su un piano e per definirli «*ci bastano i seguenti elementi: la grandezza* [modulo]*, il verso, la frequenza, ossia il numero di giri fatti in una unità di*

*tempo, e la fase, ossia la frazione di giro compiuta all'origine del tempo*» (Ferraris, 1894).

Siano rispettivamente $\hat{e}_1$ ed $\hat{e}_2$ i versori dell'asse delle ascisse e delle ordinate; allora $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ è la base ortogonale sulla quale proiettare un qualsiasi vettore bidimensionale. In seguito faremo uso, a seconda dei casi, delle seguenti notazioni per indicare un vettore bidimensionale:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (v_x, v_y)^T = v_x \hat{\mathrm{e}}_1 + v_y \hat{\mathrm{e}}_2$$

dove T sta per "trasposto". La forma di un tipico vettore rotante ed un tipico vettore alternativo ambedue di modulo $v$ è, in generale, per il vettore rotante con velocità angolare $\omega$: $\mathbf{v} = v\ (sin(\omega t),\ cos(\omega t))^T$, mentre per il vettore alternativo con frequenza d'oscillazione $\omega$: $\mathbf{v} = v\ (sin(\omega t), 0)^T = v\ sin(\omega t)\hat{e}_1$. La scelta del seno o del coseno o dell'asse d'oscillazione è del tutto arbitraria. Per esempio il vettore rotante appena definito è destrorso ed il vettore alternativo oscilla lungo le ascisse ed ha fase nulla.

## 3 - Composizione di due vettori di uguale frequenza rotanti nel medesimo piano in senso opposto

Nel prosieguo, a meno che non venga esplicitamente dichiarato, i vettori saranno sempre di modulo unitario.

### 3.1 – 1° caso

Consideriamo due vettori rotanti in senso inverso, il destrorso

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

e il sinistrorso

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La loro somma dà luogo ad un vettore oscillante, in questo caso sull'asse delle ordinate, di modulo pari alla somma dei moduli dei due vettori di partenza, infatti:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

### 3.2 – 2° caso

I due vettori rotanti hanno modulo diverso. Il risultato è leggermente più complesso, ma interessante. Il vettore rotante destrorso è di modulo a:

$$a\mathbf{v}_1 = a\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

il sinistrorso è di modulo b:

$$b\mathbf{v}_2 = b\begin{pmatrix} -sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

sia $a>b$ e quindi $\delta=a-b>0$. La loro somma diviene

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \delta\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix} + 2b\begin{pmatrix} 0 \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ovvero un vettore rotante il cui modulo è pari alla differenza dei moduli dei vettori iniziali ed un vettore alternativo il cui modulo è il doppio del modulo del vettore più piccolo.

## 4 - Somma di due vettori alternativi generici

Prima di sviluppare questo paragrafo è necessario imparare come scrivere il vettore alternativo nella direzione generica individuata dall'angolo θ> 0 rispetto, per esempio, all'asse delle ascisse. Per far questo, introduciamo la matrice 2×2 rappresentante l'operatore di rotazione attiva sinistrorsa (avremmo potuto scegliere indifferentemente la destrorsa); essa è: (vedi Appendice A)

$$\boldsymbol{A}_\theta(\circlearrowleft) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Una volta noto l'operatore che ruota un vettore dell'angolo $\theta$, se $\mathbf{v} = (sin(\omega t), 0)$ è il vettore oscillante nella direzione $\theta = 0$, quello nella direzione generica $\theta$ sarà

$$\boldsymbol{A}_\theta(\circlearrowleft)\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix} sin(\omega t). \tag{8}$$

Consideriamo due vettori alternativi con diverso modulo, diversa direzione nello spazio e diversa fase:

Il primo:

$$\mathbf{v}_3 = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} sin(\omega t), \tag{9}$$

Il secondo:

$$\mathbf{v}_4 = b\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix} sin(\omega t + \phi), \qquad 10)$$

Come nel paragrafo precedente a = b + δ, per cui (11) :

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = (b+\delta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} sin(\omega t) + b\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix} sin(\omega t + \phi) =$$
$$= \delta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} sin(\omega t) + b\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} sin(\omega t) + b\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix} sin(\omega t + \phi)\right].$$

## 4.1 – Tre casi particolari

### 4.1.1 - I campi alternativi sono nella stessa direzione

In questo caso scegliamo, ad esempio, la direzione θ = 0. Quindi la (11) assume la forma:

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(asin(\omega t) + bsin(\omega t + \phi)) \tag{12}$$

Il risultato è semplice ed aspettato:si ottiene un vettore alternativo (figura 1).

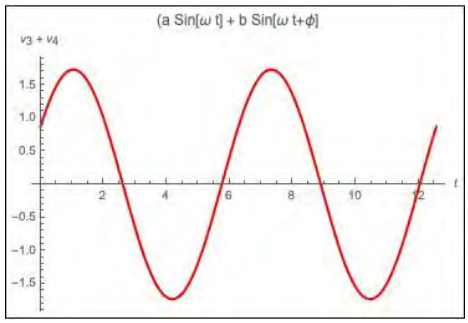



**Fig.1 - Andamento della funzione (12) del testo, per $a = 2$, $b = 1$, $\omega = 1$e $\phi = 2\pi/3$**

### 4.1.2 - I campi alternativi hanno lo stesso modulo, stessa fase e direzioni diverse

In questo caso le condizioni sono:$\delta$=0, $\phi$=0. La(11) assume la forma:

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = b\begin{pmatrix}1 + cos\theta \\ sin\theta\end{pmatrix} sin(\omega t) =$$
$$= 2bcos\,(\theta/2)\begin{pmatrix}cos\,(\theta/2) \\ sin\,(\theta/2)\end{pmatrix} sin(\omega t). \qquad (13)$$

Si ottiene un campo alternativo nella direzione θ/2,quella che divide in due il parallelogramma generato dalla somma dei vettori $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$.

I vettori hanno lo stesso modulo e sono sfasati di $\pi/2$ radianti

Le condizioni sono: $\delta = 0$, $\phi = \pi/2$ e la (11) diviene

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = b\left[\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} sin(\omega t) + \begin{pmatrix}cos\theta \\ sin\theta\end{pmatrix} cos(\omega t)\right], \qquad (14)$$

ma attenzione, se $\theta = \pi/2$, si trova un risultato molto interessante e importante:

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = b\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

un *vettore rotante* (in questo caso, destrogiro).

In sintesi, la somma di due vettori alternativi sfasati di $\pi/2$ radianti e disposti nello spazio a formare un angolo $\theta = \pi/2$ radianti dà luogo ad un vettore rotante.

### 4.1.3 – Somma di tre vettori sfasati di 2π/3, sia nel tempo che nello spazio

Se si sommano i seguenti tre vettori alternativi:

$$\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}_{2\pi/3}(\circlearrowleft)\begin{pmatrix} sin(\omega t + 2\pi/3) \\ 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}_{4\pi/3}(\circlearrowleft)\begin{pmatrix} sin(\omega t + 4\pi/3) \\ 0 \end{pmatrix},$$

sebbene con una procedura lunga e tediosa, si può dimostrare che si ottiene il seguente vettore rotante

$$\mathbf{v}_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Questo risultato è generalizzabile: La somma di n vettori alternativi, sfasati nello spazio e nel tempo dell'angolo 2π/n radianti, restituisce il vettore rotante

$$\mathbf{v}_{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{2}\begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Per lo scopo che ci siamo prefissi è sufficiente fermarci a questo punto, sebbene, per quanto concerne la parte matematica, Ferraris nella sua memoria continui analizzando casi più complessi.

## 5 – Il campo magnetico rotante

Come collegare quanto discusso finora alla realizzazione pratica di un campo magnetico rotante?

Quando una bobina è attraversata dalla corrente $I$, viene generato un campo magnetico ad essa perpendicolare il cui verso è determinato dalla regola della mano destra e di intensità $B(t) = \mu_0 nI(t)$, dove $n$ è il numero di spire per unità di lunghezza e $\mu_0$ è la permeabilità magnetica del vuoto (Olivieri, Ravelli , 1959; Amaldi, 2012). Ovviamente se $I(t)$ è una corrente alternata sarà alternato anche il campo magnetico.

Stando al §4.1 caso 3, per quanto concerne un sistema bifase, per ottenere un campo magnetico rotante, è necessario combinare due campi alternativi il cui sfasamento elettrico sia pari a $\pi/2$ radianti, in modo che i due formino nello spazio l'angolo $\pi/2$ radianti (sfasamento spaziale). In altre parole sono necessarie due bobine disposte perpendicolarmente percorse da correnti alternate sfasate di $\pi/2$ radianti, la figura 2 è uno schema di quanto detto.

I motori asincroni trifase (quelli più diffusi) generano il campo rotante grazie a 3 avvolgimenti (bobine) disposti nello spazio ogni $2\pi/3$ radianti e percorsi da tre correnti alternate sfasate tra loro di $2\pi/3$ radianti (vedi §4.2).

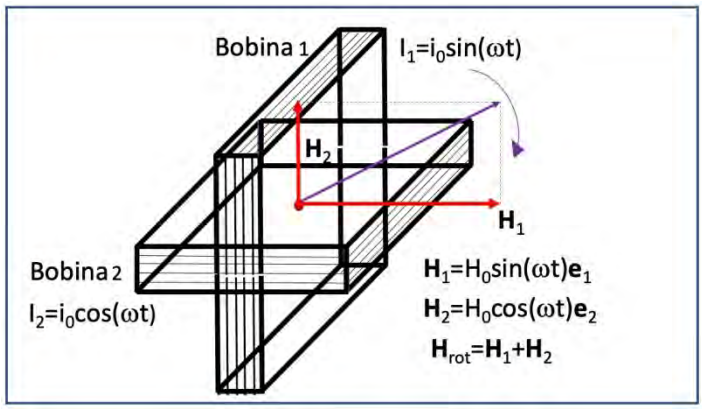



**Fig. 2 - Campo magnetico rotante bifase, esso è generato grazie a due bobine poste a $\pi/2$ radianti tra loro ed attraversate dalle correnti $I_1$ ed $I_2$ sfasate di $\pi/2$ radianti.**

Prima di chiudere, segnalo due siti interessanti per gli studenti più curiosi: il primo è dedicato a Galileo Ferraris[1] dove si possono trovare molte informazioni su questo interessante e forse non sufficientemente apprezzato scienziato; il secondo è a cura del politecnico di Torino e ci si può trovare il primo volume dell'opera omnia di G. Ferraris.[2]

[1] http://www.museoferraris.it/index.php/gferraris/.

[2] https://digit.biblio.polito.it/4136/.

## 6 – Conclusioni

Si è mostrata la forte interconnessione tra i vettori alternativi ed i vettori rotanti che si riassume con i seguenti punti:

1. La somma di due vettori rotanti in verso opposto con la stessa frequenza e lo stesso modulo produce un vettore alternativo il cui modulo è pari al doppio del modulo del singolo vettore rotante;
2. La somma di due vettori alternativi di uguale frequenza e modulo e sfasati nello spazio e nel tempo di $\pi/2$, è pari ad un vettore rotante il cui modulo è uguale a quello del singolo vettore alternativo;
3. La somma di n vettori alternativi di pari frequenza e modulo, sfasati nello spazio e nel tempo di $2\pi/n$ è pari a un vettore rotante il cui modulo è $n/2$ volte quello del singolo vettore alternativo.

## 7 – La matrice di rotazione

Esistono due modi per descrivere la rotazione di un vettore,

<u>Primo</u>

Si può introdurre un operatore, che agendo sul vettore, lo ruota dell'angolo $\theta$. Questo tipo di rotazione è detta attiva e l'operatore lo indicheremo con il simbolo $\mathbf{A}_\theta$.

<u>Secondo</u>

L'operatore agisce sulla base ruotandola dell'angolo $\theta$, mentre il vettore resta immobile. Questo tipo di rotazione è detta passiva e l'operatore lo indicheremo con il simbolo $\mathbf{P}_\theta$.

Va da sé che ambedue le rotazioni possono essere sia destrorse che sinistrorse.

Valgono le seguenti relazioni che il lettore può facilmente verificare da solo.

$$\boldsymbol{P}_\theta(\circlearrowleft) = \boldsymbol{A}_\theta(\circlearrowright) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}_\theta(\circlearrowright) = \boldsymbol{A}_\theta(\circlearrowleft) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \tag{19}$$

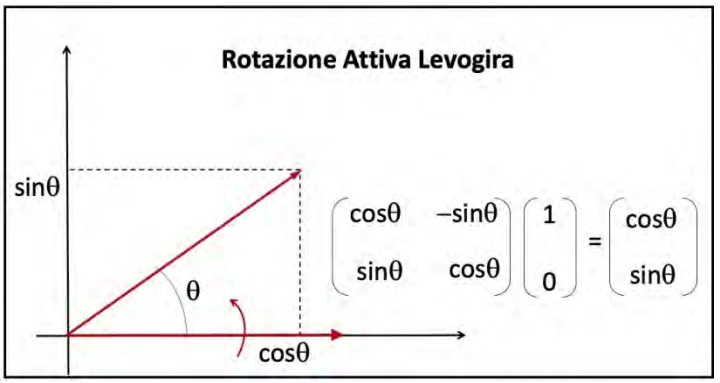



**Figura 3: Il vettore $(1, 0)^T$ viene ruotato dell'angolo $\theta$ verso sinistra e trasformato nel vettore $(cos\theta, sin\theta)^T$ . La rotazione attiva levogira è equivalente alla rotazione destrogira passiva. Vedi Fig.4.**

Facciamo vedere, ad esempio, l'equivalenza (19) applicando, per esempio, l'operatore $\mathbf{A}_\theta$ sinistrorso al vettore $(1, 0)^T$ e l'operatore $\mathbf{P}_\theta$ destrorso alla base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$ per poi determinare le coordinate del vettore $(1, 0)^T$ nella nuova base $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\}$.

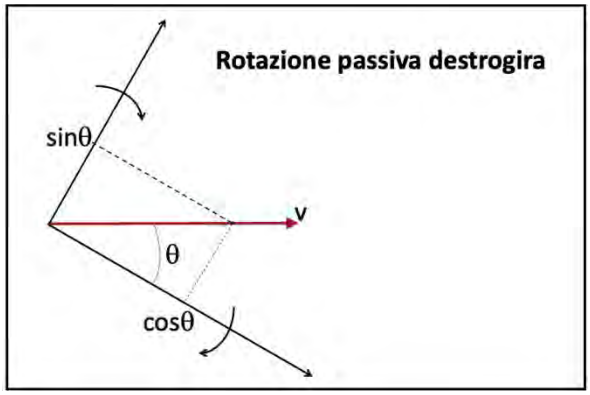



**Fig. 4- La base viene ruotata dell'angolo θ verso destra e le coordinate del vettore (1, 0)$^T$ , che rimane immobile, divengono nella base ruotata (*cosθ*, *sinθ*)$^T$ . La rotazione passiva destrogira è equivalente alla rotazione levogira attiva. Vedi Fig.3**

Il calcolo per la rotazione attiva levogira è semplice, vedi la fig.2; per quanto concerne la rotazione passiva destrogira, (in modo compatto $\mathbf{P}_\theta(\circlearrowright)$ $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$ ={ $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$} scriviamo:

$$\boldsymbol{P}_\theta(\circlearrowright)\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{e}_1\\ \hat{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta\ \hat{e}_1 - \ sin\theta\ \hat{e}_2 \\ sin\theta\ \hat{e}_1 + cos\theta\ \hat{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\end{pmatrix}; (20)$$

dove $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\}$ è la nuova base (il nuovo spazio).
Cerchiamo quali sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ = (1, 0)$^T$ nella nuova base.
Poiché $\mathbf{v} \equiv \hat{\mathbf{e}}_1$, dalla (20) si ha $\hat{\mathbf{u}}_1 = cos\theta\mathbf{v} - sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2$ ed $\hat{\mathbf{u}}_2 = sin\theta\mathbf{v} + cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2$.
Se ora si moltiplica $\hat{\mathbf{u}}_1$ per $cos\theta$ ed $\hat{\mathbf{u}}_2$ per $sin\theta$ e si sommano i risultati si ottiene $v$ nella nuova base: $v = cos\theta\hat{\mathbf{u}}_1 + sin\theta\hat{\mathbf{u}}_2$, ovvero:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix},$$

esattamente la forma del vettore **v**= $(1, 0)^T$ nella vecchia base dopo la rotazione attiva levogira (figura 2).

## 8 – La base polare

In questa appendice analizzeremo la somma di due campi alternativi sfasati nel tempo e nello spazio di $\pi/2$ radianti già trattata nel §4.1 caso 3, ma con una notazione diversa di cui lo studente interessato beneficerà quando affronterà lo studio della polarizzazione del campo elettromagnetico. Il campo rotante espresso come somma di due campi oscillanti opportunamente sfasati è:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{t}) = \hat{e}_1 cos(\omega t) + \hat{e}_2 sin(\omega t). \tag{21}$$

L'equazione(21),facendousodellaformaesponenzialedellefu nzionitrigonometriche, diviene

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \hat{e}_1 \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + \hat{e}_2 \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) = \frac{e^{i\omega t}}{2} (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) + \frac{e^{-i\omega t}}{2} (\hat{e}_1 + i\, \hat{e}_2) \tag{22}$$

A questo punto introduciamo la nuova base, detta polare,

$$\hat{e}_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2); \quad \hat{e}_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2), \tag{23}$$

dove S e D stanno rispettivamente per destra e sinistra. Valgono le seguenti relazioni:

$$|\hat{e}_D| = |\hat{e}_S| = 1; \quad \hat{e}_D \cdot \hat{e}_S = 0$$

Grazie alla nuova base, il vettore E(t) si può scrivere

$$\mathbf{E(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}\,\hat{e}_D + e^{-i\omega t}\,\hat{e}_S\right). \tag{24}$$

La (24) descrive un vettore rotante nella base polare. Usiamo una notazione più compatta con ovvio significato dei simboli:

$$|\circlearrowright\rangle = \begin{pmatrix} sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$|\circlearrowleft\rangle = \begin{pmatrix} -sin(\omega t) \\ cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Le (25) e (26) sono vettori, rispettivamente, destrogiro e levogiroespressinella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$. Inoltre come già visto

$|\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle = |\updownarrow\rangle$.

$$|\circlearrowright) = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$|\circlearrowleft) = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Le (27) e (28) sono vettori, rispettivamente, destrogiro e levogiro espressi nella base polare $\{\hat{\mathbf{e}}_D, \hat{\mathbf{e}}_S\}$. Anche in questo caso

$|\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle = |\updownarrow\rangle$; dimostriamo quest'ultima relazione,

$$|\circlearrowright\rangle + |\circlearrowleft\rangle = i\sqrt{2}\begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ -cos(\omega t) \end{pmatrix} = i\sqrt{2}\, cos(\omega t)(\hat{e}_D - \hat{e}_S), \quad (29)$$

da cui, esprimendo la base sferica nella base ortogonale (23), si riottiene un vettore alternativo lungo l'asse delle ordinate.

## 9 – La priorità dell'invenzione della macchina asincrona: Tesla o Ferraris?

In relazione alla interminabile discussione su chi sia il padre del motore asincrono (Galileo Ferraris o Nikola Tesla), riporto qui il brano tratto dall'articolo di Piero Bianucci apparso su "La Stampa" il 28 Maggio 2020:

> *Galileo Ferraris in via Cernaia*
>
> *La vicenda del motore elettrico è la più discussa. Carlo Emilio Gadda, ingegnere prima che scrittore grandissimo, racconta in un testo scritto per il Terzo Programma della Rai che Galileo Ferraris ebbe l'intuizione del motore asincrono a corrente alternata camminando a Torino sotto i portici di via Cernaia in un giorno di sole: il passaggio dalla luce all'ombra proiettata dalle colonne dei portici gli avrebbe suggerito come imprimere la spinta elettromagnetica al rotore che si trova nel campo elettromagnetico.*

## 9.1 -Brevettare o non brevettare?

Quello che è certo è che Galileo Ferraris, pur essendo il responsabile dell'Ufficio brevetti, all'epoca rilasciati dalla Regia Accademia delle Scienze di Torino, di cui era membro, non volle mai brevettare il suo motore, ritenendo che le invenzioni devono essere a disposizione di tutti per il bene dell'umanità. Filosofia "*open source*" *ante litteram*. Altrettanto certo è che nel 1881 Ferraris con i suoi trasformatori perfezionati dal francese Lucien Gaulard realizzò tra Torino e Lanzo (40 chilometri) la prima linea elettrica in corrente alternata, e che sperimentò il suo motore a campo magnetico rotante nel 1885 ma pubblicò i risultati negli «*Atti dell'Accademia delle Scienze*» di Torino solo nel 1888, e che nel maggio 1888 Westinghouse, amico e socio in affari di Nikola Tesla, era a conoscenza dell'articolo di Ferraris. La tecnica per sfasare le correnti del circuito con una resistenza è la stessa di Tesla, che la applicò nel 1887. D'altra parte Ferraris non aveva fiducia nella sua invenzione, scrive esplicitamente che "un apparecchio fondato sul principio del campo magnetico rotante […] non potrebbe avere alcuna importanza industriale come motore", mentre Tesla ne percepì subito le potenzialità.

## 9.2 - Il motore elettrico

Ecco come [lo storico della tecnologia W. Bernard] Carlson (2019), che possiamo ritenere *super partes*, risolve il dilemma della priorità:

> *Galileo Ferraris dovrebbe essere accreditato come il primo a indagare l'utilizzo della corrente alternata per produrre*

*campi magnetici rotanti. Ancora di più, Ferraris ha il pieno merito di aver introdotto la nozione di fase nella discussione dei fenomeni a corrente alternata. Grazie alla sua impostazione matematica, gli ingegneri elettrici furono in grado di cogliere rapidamente i principi del motore a corrente alternata e delle correnti polifase. Tuttavia fu Tesla a costruire il primo concreto motore a corrente alternata a induzione.*

**Ringraziamenti**

*Desidero ringraziare la dott.ssa Laura Fazi e la prof.ssa Stefania Fanfoni per avermi aiutato a districarmi nella giungla dei testi scolastici della casa editrice Zanichelli. Infine ringrazio mio figlio Giulio per avere riportato l'articolo, originariamente scritto in LaTeX, in Word avendo a disposizione la sola copia pdf.*

## Bibliografia

FERRARIS G. (1894). «*Il Nuovo Cimento*» 35, 99-126

RUSSO L. (2021). *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Milano: Feltrinelli .

OLIVIERI L, RAVELLI E. (1959). *Elettrotecnica Generale. Vol.I.* Padova: CEDAM.

OLIVIERI L, RAVELLI E. (1959). *Macchine elettriche. Vol.II* . Padova: CEDAM.

RIZZONI G. (2018). *Elettrotecnica principi e applicazioni.* Milano: *Mc Graw Hill*.

BERGAMINI M., BAROZZI G., TRIFONE A. (2022). *3 Matematica.blu 2.03*, Zanichelli, Bologna.

AMALDI U. (2012). *L'Amaldi per i licei scientifici. blu Volume 2, Onde, campo elettrico e magnetico*. Bologna: Zanichelli

CARLSON W. Bernard (2019). *Tesla, L'inventore dell'era elettrica.* Milano*:* Hoepli.

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 89-116

# *Ipazia di Alessandria: una donna di scienza e filosofia tra passato e presente*

## *Antesignana dello STEM al femminile*

Alessandra Rotunno*

* L.S. Labriola, Napoli; alessandra.rotunno@unina.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.156

**Sunto:** *Ipazia d'Alessandria, filosofa e scienziata del IV secolo d.C., emerge come una figura rivoluzionaria nella storia. Considerata la prima donna scienziata, Ipazia si distinse per la sua brillante carriera di insegnante ad Alessandria, attirando studenti da tutto il Mediterraneo. La sua tragica morte, per mano di fanatici ostili alle sue idee, la rese un simbolo immortale di libertà di pensiero e uguaglianza di genere. Ancora oggi, Ipazia continua a ispirarci con la sua dedizione incrollabile alla conoscenza e all'istruzione, rappresentando un faro luminoso nel cammino verso un mondo più giusto e illuminato.*

**Parole Chiave**: *Ipazia; uguaglianza di genere; conoscenza, istruzione.*

**Abstract***: Hypatia of Alexandria, a philosopher and scientist from the 4th century AD, stands out as a revolutionary figure in history. Regarded as the first female scientist, Hypatia distinguished herself for her brilliant teaching career in Alexandria, attracting students from all over the Mediterranean. Her tragic death at the hands of fanatics hostile to her ideas made her an immortal symbol of*

*freedom of thought and gender equality. Even today, Hypatia continues to inspire us with her unwavering dedication to knowledge and education, representing a beacon of light on the path towards a more just and enlightened world.*

**Keywords***: Hypatia; gender equality; knowledge; education.*

## 1 - Ipazia

Ipazia di Alessandria, vissuta tra il 370 e il 415 d.C., è una delle figure più luminose e, al tempo stesso, tragiche della storia della scienza e della filosofia. Figlia del matematico Teone, ultimo direttore del celebre Museo di Alessandria, crebbe in un ambiente intellettualmente privilegiato, immersa nei saperi matematici, astronomici e filosofici. La sua formazione, straordinaria per una donna dell'epoca, si basava su un rigoroso metodo scientifico, sull'osservazione e sul dialogo filosofico. Fin da giovane, Ipazia si distinse per la capacità di unire la precisione matematica all'ampiezza della riflessione metafisica, incarnando l'ideale neoplatonico di armonia tra pensiero e vita.

In un mondo dominato dagli uomini, fu una delle prime donne a insegnare pubblicamente, richiamando studenti da ogni parte del Mediterraneo. Le sue lezioni, aperte e libere, attraevano aristocratici, funzionari imperiali e semplici cittadini, tutti affascinati dalla chiarezza delle sue esposizioni e dalla forza morale che traspariva dalle sue parole. Non era soltanto una scienziata o una filosofa, ma una vera maestra di vita: il suo insegnamento, come ricorda il discepolo Sinesio di Cirene, mirava a formare non solo la mente, ma anche il

carattere, ponendo al centro la ricerca della verità, l'esercizio del dubbio e la pratica delle virtù.

La sua notorietà e il suo prestigio, tuttavia, la posero al centro di tensioni politiche e religiose che segnavano il suo tempo. Pagana in un'epoca in cui il cristianesimo era ormai religione di Stato, amica e consigliera del prefetto romano Oreste, si trovò in rotta di collisione con le frange più radicali della Chiesa alessandrina. La sua morte violenta, nel marzo del 415 d.C., per mano di fanatici cristiani, non cancellò la sua memoria: al contrario, la trasformò in un'icona della libertà di pensiero, della laicità e dell'emancipazione femminile.

## 2 - Contesto storico

Il IV secolo d.C. fu un'epoca di profonde trasformazioni politiche e religiose. Nel 313, l'editto di Milano garantì libertà di culto ai cristiani; meno di settant'anni dopo, con l'editto di Tessalonica (380) di Teodosio I, il cristianesimo divenne religione ufficiale dell'Impero. Seguirono provvedimenti sempre più restrittivi verso i culti pagani, fino al divieto del 392 e alla chiusura o distruzione di molti templi.

Alessandria, città cosmopolita e uno dei centri culturali più prestigiosi dell'Impero Romano d'Oriente, era un crocevia di etnie e religioni: greci, egiziani, romani, ebrei e cristiani convivevano in un equilibrio precario. La vivacità intellettuale ereditata dall'ellenismo si intrecciava con conflitti di potere sempre più aspri. Due autorità si fronteggiavano: quella imperiale, rappresentata dal prefetto Oreste, e quella ecclesiastica, incarnata dal potente patriarca Cirillo. In questo clima, Ipazia rappresentava un terzo polo, quello dell'autorità

culturale, rispettata sia dai pagani sia da cristiani moderati. La sua influenza, però, era percepita come una minaccia dalle frange più intransigenti, che vedevano nella filosofia ellenistica un ostacolo al consolidamento del potere religioso.

## 3 - Alessandria d'Egitto nel IV secolo d.C.

Fondata da Alessandro Magno nel 331 a.C., Alessandria era, nel IV secolo, il fulcro commerciale e culturale del Mediterraneo orientale. La città conservava l'impianto urbanistico razionale della sua fondazione, i grandi edifici pubblici, il celebre faro di Pharos — una delle Sette meraviglie del mondo antico — e un'energia intellettuale pari, se non superiore, a quella di Atene.

Qui convivevano tradizioni culturali e religiose diverse, e proprio questa ricchezza era la fonte della sua instabilità. Le comunità vivevano in quartieri distinti, e le differenze di culto e di potere politico alimentavano frequenti disordini. Nel IV secolo, con la crescente influenza della Chiesa, gli spazi di autonomia delle antiche scuole filosofiche e scientifiche si riducevano progressivamente. In tale contesto, l'attività pubblica di una donna pagana, capace di parlare a un pubblico trasversale, appariva non solo straordinaria ma anche provocatoria agli occhi dei settori più radicali.

## 4 - La Biblioteca

La Biblioteca di Alessandria, creata sotto Tolomeo II Filadelfo nel III secolo a.C., era stata concepita come un

archivio universale del sapere, destinato a raccogliere ogni testo esistente. Nel IV secolo, gran parte della collezione originaria era andata perduta a causa di incendi e saccheggi, ma l'eredità intellettuale sopravviveva nella "Biblioteca figlia" ospitata nel Serapeo.

Teone, padre di Ipazia, fu tra gli ultimi a lavorare per la conservazione di testi fondamentali della matematica e dell'astronomia: l'Almagesto di Tolomeo, le Coniche di Apollonio, gli Elementi di Euclide. Ipazia collaborò a queste edizioni, correggendo e commentando i testi, e integrandoli con osservazioni e calcoli. A lei si attribuisce anche il perfezionamento dell'astrolabio e la costruzione di un idrometro. Sebbene i suoi scritti siano andati perduti o si siano fusi con quelli paterni, il suo lavoro fu cruciale per la trasmissione del sapere antico alle generazioni successive.

## 5 - Il Museo

Il Museo di Alessandria, o Mouseion, era un'istituzione accademica unica nel mondo antico: un centro di ricerca, insegnamento e conservazione del sapere, dotato di sale di studio, osservatori astronomici e spazi per la sperimentazione scientifica. Qui le Muse — divinità protettrici delle arti e delle scienze — erano onorate non con riti religiosi, ma con l'attività intellettuale.

Teone ne fu direttore, e Ipazia crebbe in questo ambiente, assorbendo la tradizione scientifica alessandrina. È probabile che qui abbia tenuto le sue prime lezioni pubbliche, trasmettendo agli studenti non solo conoscenze tecniche, ma anche un metodo basato sul ragionamento e sulla

dimostrazione. Dopo la distruzione del Serapeo, il Museo perse gran parte della sua funzione pubblica, ma Ipazia continuò a insegnare nella sua casa, trasformandola in un nuovo centro di dibattito filosofico e scientifico.

## 6 - Il Serapeo

Il Serapeo, grandioso tempio dedicato al dio sincretico Serapide, univa elementi della religione greca e di quella egizia, ed era uno dei simboli più potenti dell'identità culturale alessandrina. Accanto alla funzione religiosa, il complesso ospitava la Biblioteca "figlia" e fungeva da spazio di incontro per studiosi e sacerdoti.

Nel 391 d.C., per ordine del patriarca Teofilo e con il sostegno dell'imperatore Teodosio, il Serapeo fu assalito e distrutto, in un'operazione che sancì la fine ufficiale del paganesimo nella città. Con esso scomparve un luogo che incarnava secoli di dialogo tra culture, e gli intellettuali dovettero cercare rifugio in ambiti privati. Ipazia, che aveva frequentato il Serapeo, ne ereditò lo spirito: nella sua filosofia neoplatonica vedeva il mondo materiale come riflesso imperfetto di un ordine ideale, e si impegnava a preservare quel patrimonio di pensiero. La sua morte, poco più di vent'anni dopo, fu percepita come l'ultimo colpo a una tradizione millenaria, ma la forza del suo insegnamento sopravvisse come testimonianza della conoscenza intesa come via di libertà.

## 7 - La vita di Ipazia nel contesto storico

La biografia di Ipazia si intreccia indissolubilmente con la storia turbolenta di Alessandria nel IV e V secolo d.C., un periodo di transizione in cui l'ellenismo, pur ancora vivo nei circoli intellettuali, stava cedendo il passo alla cultura cristiana. Figlia di Teone, ultimo direttore noto del Museo, Ipazia fu educata secondo un modello che, in un'epoca dominata dal predominio maschile nelle scienze e nella filosofia, appare eccezionale.

Teone non solo le trasmise conoscenze avanzate di matematica, geometria e astronomia, ma le insegnò il metodo della critica filologica e della dimostrazione logica, elementi fondamentali della scienza antica. Secondo il biografo Damascio, Ipazia non si limitò a ereditare l'erudizione paterna: sviluppò una propria autorità intellettuale, capace di attrarre studenti provenienti da ogni angolo del Mediterraneo, inclusi membri delle élite politiche e religiose.

Ipazia visse in una città che, pur mantenendo il prestigio culturale ereditato dal periodo tolemaico, era attraversata da conflitti violenti. Alessandria era governata formalmente da un prefetto romano, ma il patriarca cristiano deteneva un potere crescente, sostenuto da una rete di monaci e milizie cittadine. Le tensioni tra pagani, ebrei e cristiani erano frequenti e spesso degeneravano in scontri di piazza. In questo scenario, la figura di Ipazia emergeva come punto di equilibrio, in quanto rispettata sia da intellettuali pagani sia da cristiani moderati, ma anche come bersaglio per coloro che vedevano in lei un ostacolo al consolidamento dell'autorità ecclesiastica.

## 8 - La morte di Ipazia (415 d.C.): un delitto politico e simbolico

La fine di Ipazia, avvenuta nel marzo del 415 d.C., resta una delle pagine più cupe della storia tardoantica, non soltanto per la brutalità dell'esecuzione, ma anche per il significato che assunse agli occhi dei contemporanei e della posterità. Alessandria, in quegli anni, era una città tesa come una corda di arco. Da un lato il prefetto romano Oreste, rappresentante dell'autorità imperiale, cercava di mantenere un difficile equilibrio fra le diverse comunità cittadine; dall'altro, il patriarca Cirillo, guida di una Chiesa sempre più potente e determinata ad affermare la propria supremazia non solo spirituale ma anche politica. A rendere più fragili questi equilibri vi era la presenza di una nutrita comunità ebraica e di un piccolo ma influente gruppo di intellettuali pagani, custodi della tradizione filosofica ellenistica.

In questo quadro complesso, Ipazia rappresentava molto più di una semplice maestra di filosofia: era un'autorità morale e intellettuale, stimata da studenti provenienti da ogni angolo del Mediterraneo e ascoltata da personalità di spicco come lo stesso Oreste. La sua amicizia con il prefetto e la sua reputazione di consigliera fidata la resero però invisa ai sostenitori di Cirillo, che la accusavano, senza prove, di essere l'artefice del mancato riavvicinamento tra i due leader. Alle insinuazioni politiche si sommavano quelle religiose: filosofa pagana in un'epoca in cui il cristianesimo era ormai religione di Stato, Ipazia divenne bersaglio di una campagna diffamatoria che la dipingeva come maga e strega, colpevole di usare arti occulte per influenzare il governatore romano. La sua competenza in matematica e astronomia, discipline che

all'epoca si confondevano facilmente con l'astrologia, non fece che alimentare i sospetti di chi vedeva in lei un simbolo pericoloso di sapere "eretico".

La tensione esplose durante la Quaresima del 415. Un gruppo di parabalani — confraternita laica al servizio del patriarca, formalmente dedita all'assistenza dei malati ma spesso impiegata come forza paramilitare — le tese un'imboscata mentre percorreva le strade di Alessandria sul suo carro. Trascinata nella chiesa del Cesareo, fu spogliata delle vesti e sottoposta a un supplizio tanto atroce quanto emblematico: secondo Socrate Scolastico, venne colpita e lacerata con cocci di terracotta (ostraka), strumenti che le squarciarono la pelle fino a scorticarla viva. Il corpo, ridotto a brandelli, fu infine smembrato e bruciato in un luogo chiamato Cinaron, quasi a voler cancellare ogni traccia fisica della sua esistenza.

L'assassinio di Ipazia non fu dunque il gesto incontrollato di una folla in preda all'ira, ma un atto deliberato di eliminazione politica e simbolica. Colpendo lei, si colpiva l'intera tradizione filosofica ellenica ancora viva ad Alessandria, si spezzava il legame tra il prefetto e il mondo colto della città, e si lanciava un messaggio inequivocabile: nessuna autorità culturale poteva rivaleggiare con quella religiosa. In più, l'omicidio aveva un significato profondamente simbolico anche sul piano del genere: Ipazia era una donna che, infrangendo le convenzioni del tempo, aveva conquistato una visibilità pubblica pari a quella dei maestri maschi. La sua morte fu anche la riaffermazione violenta di un ordine patriarcale che mal tollerava una figura femminile al vertice della cultura e dell'insegnamento.

Paradossalmente, il patriarca Cirillo, mai ufficialmente incriminato per il delitto ma ritenuto da molti il beneficiario politico di quella morte, sarebbe stato proclamato santo e dottore della Chiesa. La figura di Ipazia, invece, sopravvisse alle fiamme e alla propaganda: per i suoi contemporanei pagani fu un martire della filosofia; per molti cristiani moderati, un esempio tragico dei pericoli dell'estremismo; per la posterità, l'icona di un sapere libero e di un pensiero critico soffocati dalla violenza. E così, proprio l'atto che intendeva cancellarne la memoria contribuì a renderla immortale.

## 9 - La filosofia neoplatonica e Ipazia

Il pensiero di Ipazia si colloca nella tradizione del neoplatonismo alessandrino, una corrente filosofica che, sulla scia di Plotino e Giamblico, cercava di armonizzare l'eredità di Platone con elementi aristotelici e pitagorici.

Per i neoplatonici, la realtà sensibile era un riflesso imperfetto di un mondo intelligibile, eterno e immutabile. La filosofia aveva dunque il compito di guidare l'anima a riconoscere la propria origine divina, attraverso un percorso di purificazione morale e contemplazione. Ipazia abbracciò questa visione, ma la declinò in modo originale, unendo alla speculazione metafisica un forte interesse per la matematica e l'astronomia, considerate vie privilegiate per cogliere l'ordine razionale dell'universo.

Il suo insegnamento, secondo le lettere di Sinesio di Cirene, combinava lezioni pubbliche e incontri privati con un cenacolo di allievi scelti. In queste occasioni, Ipazia non solo discuteva di geometria euclidea, meccanica celeste e filosofia

platonica, ma trasmetteva anche un'etica della responsabilità civica: la filosofia, diceva, non è mera contemplazione, ma anche azione giusta nella polis.

Il neoplatonismo di Ipazia non era settario: accoglieva studenti cristiani ed ebrei, promuovendo un dialogo interculturale che strideva con l'atmosfera sempre più intollerante della città. È probabile che la sua apertura abbia contribuito sia alla sua fama internazionale, sia alle ostilità che condussero alla sua morte.

Come scrisse Damascio, "Ipazia era giunta al culmine delle scienze matematiche e filosofiche, e per questo superava di gran lunga tutti i filosofi contemporanei". La sua figura rimane dunque un ponte tra la tradizione classica e l'epoca tardoantica, e tra il pensiero libero e le sfide della convivenza religiosa.

## 10 - Ricerca della verità e amore per la conoscenza: Ipazia, amante del dubbio

Alla base dell'insegnamento di Ipazia vi era una concezione della filosofia non come un corpus di verità rivelate, ma come un cammino, un esercizio continuo di ricerca. Damascio, nella Vita Isidori, la descrive come una donna "dedita alla vera filosofia", paragonandola a Socrate per la capacità di interrogare e mettere in discussione ogni certezza.

Per Ipazia, la conoscenza non si riduceva all'accumulo di nozioni: era soprattutto un metodo per affinare il pensiero, separare ciò che è dimostrabile da ciò che è opinione, e riconoscere i limiti delle proprie convinzioni. La sua era una filosofia del dubbio, ma non un dubbio sterile — piuttosto, un

dubbio "generativo", che stimolava la curiosità e apriva nuove prospettive. Come avrebbe detto secoli dopo Cartesio, il dubbio era il punto di partenza per ogni indagine seria, non il suo punto d'arrivo.

Questa apertura alla discussione, unita a un'integrità morale che impressionava tanto i suoi amici quanto i suoi avversari, le permetteva di insegnare a studenti di ogni credo. Il suo approccio si inseriva perfettamente nel solco del neoplatonismo alessandrino: la filosofia come ascesa verso la verità, attraverso la purificazione morale, la logica, e lo studio dell'armonia dell'universo.

## 11 - Le opere di Ipazia

Ipazia, come molti studiosi dell'antichità, non scrisse trattati sistematici originali nel senso moderno del termine. Gran parte della sua attività letteraria fu dedicata alla revisione, al commento e alla trasmissione critica di testi fondamentali della matematica e dell'astronomia greco-alessandrina. Questo lavoro, pur apparentemente "secondario", era cruciale in un'epoca in cui la trascrizione manuale era l'unico mezzo di conservazione del sapere e le varianti testuali potevano compromettere la comprensione di interi teoremi.

Secondo le fonti, le sue opere principali riguardavano quattro grandi ambiti:

Astronomia – in particolare l'analisi e il commento dell'Almagesto di Tolomeo e di un Canone astronomico oggi perduto.

Matematica pura – con commenti all'Aritmetica di Diofanto di Alessandria.

Geometria e matematica applicata – attraverso il commento alle Coniche di Apollonio di Pergamo.

Meccanica e tecnologia – con lo sviluppo di strumenti scientifici, tra cui l'astrolabio e un idrometro.

Il valore del suo lavoro non fu soltanto filologico: i suoi commenti integravano osservazioni originali, chiarimenti, esempi e, talvolta, correzioni, rendendo i testi più accessibili sia agli studiosi esperti sia agli studenti.

## 12 - Commento dell'Almagesto di Tolomeo

L'Almagesto, il cui titolo originale in greco era He Megalè Sýntaxis ("La grande composizione"), rappresentava il vertice dell'astronomia matematica dell'antichità. Scritto nel II secolo da Claudio Tolomeo, era un'opera monumentale in tredici libri, che esponeva la teoria geocentrica dell'universo, spiegando il moto apparente degli astri attraverso un complesso sistema di epicicli e deferenti.

Teone, padre di Ipazia, ne curò una famosa edizione commentata. Le fonti suggeriscono che Ipazia partecipò direttamente a questa impresa, aggiungendo spiegazioni matematiche e osservazioni sui calcoli delle orbite planetarie. L'obiettivo non era soltanto conservare il testo, ma anche renderlo comprensibile a una nuova generazione di astronomi. È probabile che le sue osservazioni includessero aggiornamenti sulle tavole astronomiche, affinando i dati di Tolomeo alla luce di osservazioni più recenti.

Questo lavoro fu di tale importanza che l'Almagesto, attraverso la mediazione araba e poi latina, giunse fino al Rinascimento in gran parte nella versione che portava l'impronta della scuola di Alessandria e, quindi, anche di Ipazia.

## 13 - Commenti all'Aritmetica di Diofanto di Alessandria

L'Aritmetica di Diofanto, scritta probabilmente nel III secolo d.C., è una raccolta di problemi e soluzioni che rappresenta una delle prime forme sistematiche di algebra. Nei suoi commenti, Ipazia avrebbe fornito chiarimenti sui procedimenti di calcolo e sull'uso delle abbreviazioni simboliche impiegate da Diofanto, contribuendo a preservare la comprensibilità del testo.

L'opera di Diofanto, che si concentra su problemi diofantini (equazioni con soluzioni intere o razionali), richiedeva un alto grado di astrazione. L'intervento di Ipazia doveva mirare a rendere più chiara la formulazione dei problemi e a spiegare le tecniche di soluzione, probabilmente con esempi aggiuntivi e note metodologiche. Questo lavoro di chiarificazione fu fondamentale per la trasmissione dell'algebra antica fino al mondo islamico e, da lì, all'Europa medievale.

## 14 - Commenti alle Coniche di Apollonio di Pergamo

Le Coniche di Apollonio, redatte nel III secolo a.C., rappresentano il testo classico sulla geometria delle sezioni coniche: ellissi, parabole e iperboli. Questi studi non erano solo un esercizio di geometria pura, ma avevano applicazioni pratiche nella meccanica, nell'ottica e persino nell'astronomia (le orbite planetarie, per esempio, si descrivono attraverso sezioni coniche).

Ipazia, nei suoi commenti, doveva occuparsi sia della dimostrazione dei teoremi sia della chiarificazione della terminologia tecnica. È plausibile che abbia aggiunto diagrammi esplicativi e adattato il testo al pubblico del suo tempo, abituato a una didattica più interattiva e discorsiva. In tal modo, contribuì a mantenere viva una tradizione geometrica che sarebbe stata ripresa secoli dopo da Keplero e Newton.

## 15 - Canone astronomico – Raccolta di tavole stellari

Le fonti menzionano anche un Canone astronomico attribuito a Ipazia, probabilmente una raccolta di tavole stellari per calcolare le posizioni dei pianeti, le eclissi e altri fenomeni celesti. Questo tipo di strumento era essenziale per gli astronomi e per chi si occupava di navigazione o di calendario.

Sebbene il testo sia perduto, è probabile che il canone fosse basato su aggiornamenti delle tavole tolemaiche, integrati con

osservazioni più recenti. La compilazione di tali tavole richiedeva un'accuratezza estrema nei calcoli e un'abilità notevole nell'uso degli strumenti astronomici, abilità che Ipazia possedeva in virtù della formazione ricevuta al Museo.

## 16 - Ipazia e la meccanica: tecnologia applicata

Oltre alla teoria, Ipazia si interessò anche alla costruzione e al perfezionamento di strumenti scientifici. Le fonti le attribuiscono lo sviluppo o il miglioramento di dispositivi come l'astrolabio, strumento fondamentale per determinare la posizione degli astri, e l'idrometro, usato per misurare la densità dei liquidi.

L'astrolabio, in particolare, era un condensato di astronomia e geometria applicata: richiedeva la proiezione della sfera celeste su un piano e la capacità di leggere coordinate astronomiche da una mappa metallica incisa con precisione. Questo strumento, perfezionato e diffuso grazie a Ipazia e ai suoi contemporanei, avrebbe avuto un ruolo fondamentale nella scienza islamica e nella navigazione europea fino all'età moderna.

La competenza di Ipazia nella meccanica dimostra che, contrariamente allo stereotipo del filosofo dedito solo alla speculazione, ella vedeva la scienza come un insieme organico di teoria e pratica. La sua figura, in questo senso, anticipa l'ideale rinascimentale dello studioso-ingegnere, capace di unire contemplazione e invenzione.

## 17 - Istruzione e insegnamento: il tribon

L'immagine di Ipazia che ci è giunta attraverso le fonti antiche è quella di una donna che aveva fatto dell'insegnamento una missione di vita. In un'epoca in cui la filosofia tendeva a chiudersi in circoli ristretti, destinati a un'élite di iniziati, Ipazia apriva le sue lezioni a un pubblico variegato, composto non solo da aristocratici e studiosi, ma anche da chiunque fosse animato dal desiderio di apprendere. Era una maestra di piazza e di salotto, di scuola e di strada, capace di trasmettere con uguale passione un teorema di geometria, una riflessione sull'ordine cosmico o un richiamo alla virtù civile.

Il segno esteriore di questa scelta di vita era il tribon, il mantello semplice dei filosofi, che ella indossava con naturalezza. In una città cosmopolita e raffinata come Alessandria, dove la moda e l'ostentazione erano parte integrante della vita pubblica, quel mantello sobrio era una dichiarazione di intenti: un rifiuto delle vanità e delle ricchezze esteriori, e insieme l'affermazione che la vera ricchezza era la conoscenza. Nel tribon di Ipazia si leggeva il messaggio di una donna che non insegnava per guadagno o prestigio, ma per vocazione, e che concepiva il sapere come un bene comune, non come un privilegio di pochi.

Attorno a lei si formò un gruppo di allievi fedeli, provenienti dalle province più lontane dell'Impero. Alcuni, come Sinesio di Cirene, portarono in altri luoghi le idee e il metodo appresi da lei, unendo il rigore della matematica alla profondità della filosofia. Nelle sue lettere, Sinesio ricorda le giornate passate a discutere con la maestra di astronomia, metafisica e politica, in un clima in cui il sapere non era mai

disgiunto dalla vita pratica e dalla responsabilità verso la comunità.

## 18 - Il ruolo delle donne nella scienza e nella società dell'epoca

Per capire l'eccezionalità di Ipazia, bisogna immergersi nella mentalità del suo tempo. Nel mondo romano tardoantico, le donne avevano accesso limitato all'istruzione: l'alfabetizzazione femminile era diffusa solo nelle classi più agiate, e raramente andava oltre la lettura e la scrittura di base. L'universo delle scienze esatte, della filosofia e della tecnologia era quasi interamente maschile, e poche donne riuscivano a varcare le soglie di una formazione superiore.

Ipazia non solo le aveva varcate, ma vi aveva messo piede come protagonista, guadagnandosi la stima di colleghi e discepoli maschi in un campo dove la sua presenza era un'eccezione quasi scandalosa. Non era la "figlia del filosofo" che semplicemente seguiva le orme paterne: era una pensatrice indipendente, un'insegnante con autorità, capace di attrarre studenti non per curiosità verso la sua condizione femminile, ma per la solidità del suo sapere e la chiarezza del suo insegnamento.

Il fatto che tenesse lezioni pubbliche, in un contesto in cui la maggior parte delle donne istruite era confinata alla sfera privata, rompeva schemi profondamente radicati. E lo faceva non in maniera provocatoria o militante, ma con la naturalezza di chi sapeva di avere un diritto — quello di pensare, insegnare e ricercare — che non aveva bisogno di essere giustificato.

## 19 - Curiosità e tratti singolari di Ipazia

La figura di Ipazia non colpiva soltanto per l'ampiezza del sapere, ma anche per la straordinaria fusione di qualità intellettuali e carisma personale. Le fonti, sebbene filtrate attraverso secoli di trasmissione e talvolta contaminate da leggende, concordano nel descriverla come una donna di bellezza matura e magnetica, dotata di una presenza capace di attrarre e incutere rispetto allo stesso tempo. La sua fama non si limitava all'ambiente accademico: era conosciuta e stimata anche al di fuori della cerchia dei suoi studenti, tanto che le cronache la menzionano come una delle personalità più influenti di Alessandria.

Nonostante le consuetudini dell'epoca, Ipazia non si sposò mai. Scelse invece un'esistenza interamente dedicata allo studio e all'insegnamento, e già all'età di trentun anni assunse la direzione della Scuola neoplatonica di Alessandria, un compito che svolse con autorevolezza e apertura. Non era soltanto una guida intellettuale, ma anche morale, e difendeva con forza il diritto di ogni persona a pensare con la propria testa. A lei vengono attribuite frasi che, pur se forse apocrife, esprimono con chiarezza lo spirito che la animava: «*Preserva il tuo diritto di pensare; meglio correre il rischio di sbagliarti piuttosto che commettere il peccato di non pensare*» e «*Terribile cosa è l'insegnare superstizioni come se fossero verità*».

Attorno alla sua figura si intrecciarono anche manipolazioni storiche e appropriazioni ideologiche. Per contrastare l'impatto della sua memoria nel mondo cristiano, venne creata la figura di Santa Caterina d'Alessandria, un personaggio leggendario a cui furono attribuite, in forma capovolta, le vicende di Ipazia. Nella versione agiografica, la

martire Caterina subiva le violenze di presunti "eretici" estranei al cristianesimo, ribaltando così la realtà storica. Il racconto, intriso di elementi fantastici e contraddizioni, era così inverosimile che, secoli più tardi, la Chiesa decise di rimuoverla ufficialmente dal calendario liturgico, ammettendo implicitamente la natura leggendaria della sua vicenda.

Tra coloro che più beneficiarono dell'insegnamento di Ipazia vi fu Sinesio di Cirene, nato intorno al 370 d.C., filosofo neoplatonico, poeta e oratore. Allievo e ammiratore devoto, Sinesio non esitava a descriverla nelle sue lettere con parole di profonda gratitudine e reverenza, chiamandola «*madre, sorella e maestra, mia benefattrice in tutto e per tutto, essere e nome quant'altri mai onorato*» (Epist. 16, p. 109). In un'altra occasione, testimoniava: «*Abbiamo potuto vedere con i nostri occhi e ascoltare con le nostre orecchie la donna che a buon diritto presiede ai misteri della filosofia*». La loro amicizia sopravvisse anche alla conversione di Sinesio al cristianesimo e alla sua nomina a vescovo di Tolemaide in Libia, scelta che forse contraddiceva parte degli insegnamenti della maestra, ma che Ipazia rispettò senza mai rompere il legame.

Di lei circola anche un episodio tanto singolare quanto rivelatore della sua indipendenza di spirito. Secondo una tradizione riportata da alcune fonti, un giovane allievo si era invaghito di lei e le aveva dichiarato il proprio amore. Ipazia, per chiarire la distinzione tra attrazione fisica e legame intellettuale, gli avrebbe mostrato un panno macchiato di sangue mestruale, dicendo parole che sottolineavano l'inconciliabilità tra desiderio carnale e ricerca filosofica. Il gesto, volutamente scioccante, infrangeva uno dei più radicati

tabù sulla femminilità nell'antichità e ribadiva la sua volontà di preservare la purezza del rapporto maestro-discepolo.

Attraverso queste vicende, reali o leggendarie, emerge una figura che seppe mantenere intatta la propria indipendenza, sfidando con naturalezza i confini imposti alle donne del suo tempo. Ipazia non fu solo un'intellettuale, ma anche un personaggio capace di incidere profondamente nell'immaginario collettivo, al punto che ancora oggi il suo nome evoca bellezza, intelligenza e coraggio.

## 20 - Ipazia come antesignana dello STEM al femminile

Se applicassimo al mondo antico il linguaggio della contemporaneità, potremmo dire che Ipazia fu una delle prime e più compiute incarnazioni dello STEM al femminile — quell'insieme di discipline scientifiche, tecnologiche, ingegneristiche e matematiche che, ancora oggi, vedono una presenza femminile troppo spesso minoritaria. La sua vicenda, pur radicata nel contesto del IV-V secolo, suona sorprendentemente moderna: una donna che padroneggia con sicurezza saperi tecnici e teorici, che non teme di innovare, di costruire strumenti, di calcolare traiettorie celesti, di interpretare e commentare testi scientifici, e che soprattutto insegna pubblicamente a un'aula senza confini di genere o provenienza.

La preparazione scientifica di Ipazia era eccezionale anche per gli standard più alti dell'epoca. Matematica, astronoma e filosofa neoplatonica, aveva approfondito con eguale maestria geometria, algebra, meccanica, astronomia e persino la teoria

musicale. Lavorò su testi fondamentali della scienza antica, lasciando commenti e rielaborazioni dell'Almagesto di Tolomeo, dell'Aritmetica di Diofanto e delle Coniche di Apollonio, opere che richiedevano non solo competenza tecnica, ma anche la capacità di chiarire e trasmettere concetti complessi. Operò a lungo all'interno del Museo di Alessandria, centro culturale di prim'ordine, dove integrava l'insegnamento della matematica con quello della filosofia, convinta che le due discipline si illuminassero a vicenda.

Una delle caratteristiche più rivoluzionarie del suo magistero fu l'apertura verso le donne. In un'epoca in cui l'istruzione superiore era quasi esclusivamente maschile, Ipazia accoglieva nelle sue lezioni uomini e donne di ogni classe sociale. Questa scelta non era un atto di provocazione, ma la naturale conseguenza della sua concezione della conoscenza come bene universale, accessibile a chiunque avesse la passione di coltivarla. Le sue lezioni, frequentate da studenti provenienti da tutto il Mediterraneo, non erano solo momenti di trasmissione di nozioni, ma veri laboratori di pensiero critico, in cui l'argomentazione razionale era posta al di sopra di ogni dogma.

Ipazia non si limitava all'insegnamento: la sua attività aveva anche una forte vocazione divulgativa. Scriveva trattati e commenti destinati a circolare tra gli studiosi, contribuendo alla preservazione e alla diffusione del sapere scientifico. Era una delle figure di spicco della Scuola neoplatonica di Alessandria, in cui la filosofia non era fine a sé stessa, ma si univa alle scienze matematiche e naturali in un unico percorso di ricerca della verità.

La sua autorevolezza non derivava soltanto dal sapere accumulato, ma dalla capacità di fungere da ponte tra mondi apparentemente separati: tra teoria e pratica, tra scienza e filosofia, tra il pensiero greco e la società in trasformazione del tardo Impero Romano. In questo senso, Ipazia anticipa di quindici secoli il modello della scienziata moderna, impegnata non solo nella ricerca, ma anche nella formazione di nuove generazioni e nella costruzione di comunità di conoscenza.

Oggi il suo nome è spesso evocato come simbolo nelle iniziative che promuovono la partecipazione femminile alle carriere scientifiche. Ma fermarsi al simbolo sarebbe riduttivo: Ipazia non fu soltanto "la prima" o "l'unica", bensì un esempio concreto di come l'amore per il sapere, la dedizione all'insegnamento e il coraggio di vivere secondo i propri principi possano superare i limiti imposti dal tempo e dalla società. E per questo, la sua voce continua a risuonare nei secoli, parlando a donne e uomini che vedono nella scienza non un privilegio, ma una via di libertà e di emancipazione.

## 21 - Conclusione: Ipazia, eredità di luce nel tramonto del mondo antico

La vita e la morte di Ipazia di Alessandria si collocano in un momento di svolta epocale: il lento tramonto della civiltà classica e l'ascesa di un nuovo ordine culturale, politico e religioso. In mezzo a queste correnti contrastanti, la sua figura si staglia come un faro, non soltanto per la straordinaria ampiezza delle sue conoscenze, ma per il modo in cui seppe viverle e trasmetterle. Filosofa e scienziata, insegnante e costruttrice di strumenti, Ipazia incarnava la convinzione che

il sapere fosse un bene comune, destinato a illuminare la mente e ad affinare lo spirito di chi lo accoglie.

Nella sua scuola di Alessandria, il dialogo tra matematica e filosofia non era un esercizio astratto, ma un cammino verso la comprensione dell'armonia dell'universo e dell'ordine della vita civile. La geometria delle orbite e la logica delle dimostrazioni diventavano specchio e misura di un mondo in cui ogni individuo, a prescindere dal sesso o dall'origine, poteva partecipare alla costruzione della verità. In un'epoca segnata da fratture religiose e politiche, questo ideale di apertura intellettuale era di per sé rivoluzionario.

La sua morte violenta, tanto atroce da essere ricordata per secoli, segnò simbolicamente la sconfitta della filosofia antica di fronte alla marea montante del fanatismo e dell'intolleranza. Ma come spesso accade nella storia, il tentativo di cancellare una voce ne amplificò l'eco. Ipazia sopravvisse nei racconti dei suoi allievi, nelle opere che aveva commentato, nella memoria della sua scuola, fino a trasformarsi in un mito: il mito della donna libera che insegna e pensa, che guida senza imporsi, che crede nel dubbio come strumento di conoscenza.

Oggi, a distanza di sedici secoli, il suo nome è pronunciato nelle università, nelle conferenze scientifiche, nei movimenti che lottano per la parità di genere nella ricerca. È diventata un simbolo dello STEM al femminile, ma anche, più universalmente, della resistenza del pensiero libero contro ogni forma di oscurantismo. La sua storia ci ricorda che la scienza e la filosofia non sono tesori chiusi nei libri, ma ponti che collegano le generazioni, e che il loro valore più alto risiede nella capacità di essere condivisi.

*Quando ti vedo mi prostro, davanti a te e alle tue parole,*
*vedendo la casa astrale della Vergine,*
*infatti verso il cielo è rivolto ogni tuo atto*
*Ipazia sacra, bellezza delle parole,*
*astro incontaminato della sapiente cultura"*

*"ὅταν βλέπω σε, προσκυνῶ, καὶ τους λόγους.*
*τῆς παρθένου τὸν οἶκον ἀστρῷον βλέπων*
*εἰς οὐρανὸν γάρ ἐστι σοῦ τὰ πράγματα,*
*Ὑπατία σεμνή, τῶν λόγων εὐμορφία,*
*ἄχραντον ἄστρον τῆς σοφῆς παιδεύσεως"*

Pallada, Antologia Palatina, IX, 400.

## Bibliografia

Fonti antiche e testi di riferimento:

GARZYA A. (1979). *Synesii Cyrenensis Epistolae*. Roma: Typis Officinae Polygraphicae.

GARZYA A. (1989). *Opere di Sinesio di Cirene. Epistole, operette, inni*. Torino: Unione Tipografico-Editrice Torinese.

CIL VI, 33898 = Reali M. (1994). La collezione epigrafica di Carlo Alberto Pisani Dossi: le iscrizioni della Villa Pisani Dossi a Corbetta, in *Epigraphica, LVI, pp. 116–117.*

Studi storici e critici su Sinesio e il contesto tardoantico

GRÜTZMACHER G. (1913). *Synesios von Kyrene. ein Charakterbild aus dem Untergang des Hellenentums.* Leipzig: A. Deichert.

VOLKMANN R. (1869). *Synesius von Cyrene, eine biographische Charakteristik aus den letzten Zeiten des untergehenden Hellenismus.* Berlino: Ebeling & Plahn.

FRITZ W. (1898). *Die Briefe des Bischofs Synesios von Kyrene, Teubner. Leipzig,* rist. Scientia-Verlag, Aalen, 1982.

WILAMOWITZ-MÖLLENDORF U. von (1907). *Die Hymnen des Proklos und Synesios.* Berlino: Akademie der Wissenschaften.

GARDNER A. (1886). *Synesius of Cyrene, Philosopher and Bishop*. Londra: SPCK.

NICOL J. C. (1887). *Synesius of Cyrene: His Life and Writings*. Cambridge: E. Johnson.

CRAWFORD W. S. (1901). *Synesius the Hellene*. Londra: Rivingtons.

PANDO J. C. (1940). *The Life and Times of Synesius of Cyrene as Revealed in his Works*. Washington: Catholic University of America Press.

Studi moderni su Ipazia

RONCHEY S. (2010). *Ipazia. La vera storia. Vita della scandalosa filosofa greca, vittima dell'intolleranza cristiana*. Milano: Rizzoli.

CANFORA L. (2000). *Un mestiere pericoloso. La vita quotidiana dei filosofi greci*. Palermo: Sellerio.

CANFORA L. (2010). "Cirillo e la storiografia cattolica". In: «*Anabases*», 12 (2010), pp. 93–102.

VALLEYO I. (2021). *Papyrus. L'infinito in un giunco.* Milano: Bompiani.

RUSSO L. (2017). *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Milano: Feltrinelli, (10ª ed.).

Opere letterarie e narrative su Ipazia

LUZI M. (1978). *Il libro di Ipazia*. Milano: Rizzoli.

MONETI CODIGNOLA M. (2010). *Ipazia muore.* Milano: La Tartaruga Editore.

PETTA A., COLAVITO A. (2009). *Ipazia. Vita e sogni di una scienziata del IV secolo*. Roma: La Lepre Edizioni.

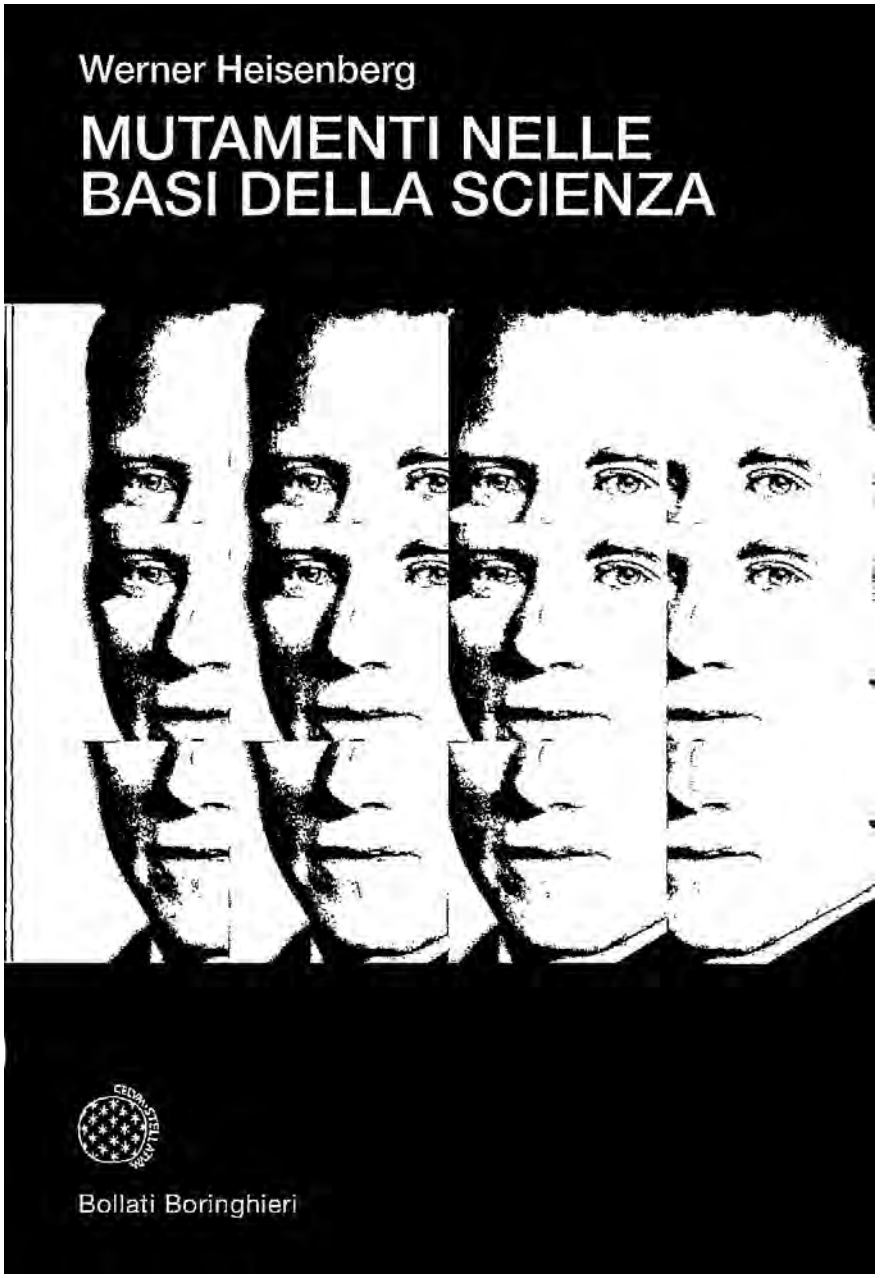
POZZI R. (2014). "Dalla storia alla scena: il Libro di Ipazia di Mario Luzi", in *AAVV, La letteratura degli italiani 4. I letterati e la scena, Roma: Adi Editore, pp. 1–17.*

Fonti complementari

DOSSI C. (1988). *Note azzurre, a cura di D. Isella*. Milano: Adelphi, p. 903.

BERTEZZOLO P. (2004). *Il tempo della danza. Storie per chi vuole sperare*. Verona: Gabrielli Editori.

KINGSLEY Ch. (1853). *Hypatia, or the New Foes with an Old Face*. Londra: John W. Parker and Son.


Werner Heisenberg
MUTAMENTI NELLE BASI DELLA SCIENZA
Bollati Boringhieri

Periodico di Matematica Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 117-126

# *Insiemi completi divisori dello zero*

Franco Francia*

*Docente attualmente in pensione; franco.francia40@virgilio.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.157

**Sunto***: Nella seconda parte dell'articolo "Proprietà degli insiemi completi del IV ordine" sono stati trattati insiemi di punti materiali completi del IV ordine posizionati sulla circonferenza. L'argomento che segue è analogo a quello contenuto nell'articolo citato: sono esaminati insiemi di punti materiali completi, posizionati sulla sfera. Le proprietà degli insiemi completi, in entrambi i casi, discendono da analoghi schemi logici.*

**Parole Chiave***: Insiemi di punti materiali completi. Quadrato di un insieme di punti materiali.*

**Abstract***: In the second part of the article "Properties of complete sets of the fourth order", sets of complete material points of the fourth order positioned on the circumference were discussed. The following topic is analogous to that contained in the cited article: sets of complete material points, positioned on the sphere, are examined. The properties of complete sets, in both cases, descend from analogous logical schemes.*

**Keywords***: Complete sets of material points. Square of a set of material points.*

TH. 1. Sia $J = (P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)$ un insieme di punti dello spazio, non contenente quaterne di punti complanari.

Sia $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$, con $m_1,m_2,m_3,m_4,m_5 \in R$, un insieme completo del V ordine. Si ha: $I^2 = 0.$ *(1)*

Svolgendo il quadrato si ha:

$I^2 = m_1 P_1 \cdot I + m_2 P_2 \cdot I + m_3 P_3 \cdot I + m_4 P_4 \cdot I + m_5 P_5 \cdot I$

La completezza di $I$ implica che sia: $P_i \cdot I = K$, con $K \in R$, per qualsiasi $P_i$, pertanto la (1) diviene:

$I^2 = (m_1 K + m_2 K + m_3 K + m_4 K + m_4 K + m_5 K) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) K.$

Essendo $I$ completo, si ha: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 0$ da cui: $I^2 = 0.$

TH. 2. Sia $J = (P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)$ un insieme di punti del V ordine appartenenti alla superficie della sfera $S$ di raggi $R$ e centro $C$. L'insieme completo $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5)$ avente sostegno $J$, è un divisore dello zero essendo:

$Q \cdot I = 0,$

qualunque sia il punto $Q$ dello spazio.

Essendo $I$ completo si ha:

$Q \cdot I = C \cdot I = m_1[d(CP_1)]^2 + m_2[d(CP_2)]^2 + m_3[d(CP_3)]^2 + m_4[d(CP_4)]^2 + m_5[d(CP_5)]^2$.

Indicando con $R$ il raggio della circonferenza si ha:

$d(CP_1) = d(CP_2) = \cdots = d(CP_5) = R$; la precedente diviene:

$Q \cdot I = C \cdot I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + m_4 R^2 + m_5 R^2 =$
$= R^2 (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = R^2 \cdot 0 = 0$

I punti di ciascuna coppia $(A,C)$ e $(B,D)$ siano simmetrici rispetto a $M$. L'insieme completo, con sostegno $J = (A,B,C,D)$, è $I = (A,-B,C,-D)$.

TH. 3. Sia $J = (P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)$ un insieme di punti della sfera $S$ con raggio $R$ e centro $C$. Sia I = ($m_1$ $P_1$,$m_2$ $P_2$,$m_3$ $P_3$,$m_4$ $P_4$,$m_5$ $P_5$) l'insieme completo avente sostegno $J$.

Posto $I_i = (I - m_i P_i)$,

per $i = 1,2,3,4,5$, si ha:

$P_1 \cdot I_1 = 0,\ (I_1)^2 = 0$

$P_2 \cdot I_2 = 0,\ (I_2)^2 = 0$

$P_3 \cdot I_3 = 0,\ (I_3)^2 = 0$

$P_4 \cdot I_4 = 0,\ (I_4)^2 = 0$

$P_5 \cdot I_5 = 0,$ (4) $(I_5)^2 = 0$ (5)

Dal TH.2 si ha: $Q \cdot I = 0$, essendo $Q$ un qualsiasi punto dello spazio. Sostituendo $Q$ con $P_1$, tenendo conto della (3), si ha: $P_1 \cdot I = \{m_1 [d(P_1,P_1)]^2 + m_2[d(P_1,P_2)]^2 + m_3[d(P_1,P_3)]^2 + m_4 [d(P_1,P_4)]^2 + m_5[d(P_1,P_5)]^2 \} =$

$= \{m_2[d(P_1,P_2)]^2 + m_3[d(P_1,P_3)]^2 + m_4[d(P_1,P_4)]^2 + m_5 [d(P_1,P_5)]^2\}$ =

$= P_1 \cdot (m_2 P_2, m_3 P_3, m_4 P_4, m_5 P_5) = P_1 \cdot (I - m_1 P_1) = P_1 \cdot I_1 = 0$

da cui segue la prima delle (4).

Dal TH.1 si ha: $I^2 = [m_1P_1 + I_1]^2 = [(m_1P_1)^2 + 2m_1(P_1 \cdot I_1) + (I_1)^2] = 0$.

Poiché $(m_1P_1)^2 = (m_1)^2 \cdot [d(P_1,P_1]^2 = 0$, essendo per le (4): $m_1 (P_1 \cdot I_1) = 0$, la precedente diviene: $(I_1)^2 = 0$. Ripetendo il procedimento per ciascun punto di J si ottengono le (5).

Applicazione 1 L'insieme $J' = (A,B,C,H)$, contenente punti appartenenti al piano $\pi$, è di sostegno all'insieme completo

$I' = (16\ A, 5\ B, 3\ C, -24\ H)$ e si ha:

$d(A,H) = \sqrt{10}$, $d(B,H) = \sqrt{82}$, $d(C,H) = 5\sqrt{2}$.

Fra i punti allineati di $J'' = (P,H,Q)$, con H interno a J'', intercorre la seguente relazione: $\frac{d(P,H)}{d(H,Q)} = \frac{3}{5}$. Trovare le distanze

*d(P,H)* e *d(H,Q)* subordinatamente alla condizione che i punti *A,B,C,P,Q* appartengano ad una stessa superficie *F* di una sfera.

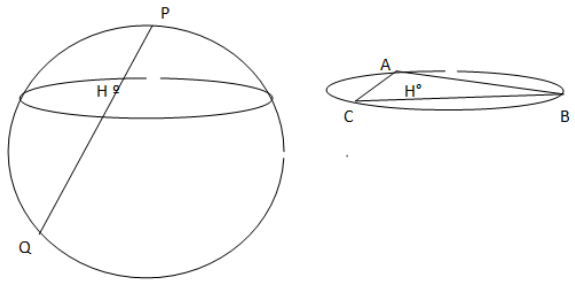



**Fig. 1**

Essendo $\frac{d(P,H)}{d(H,Q)} = \frac{3}{5}$, l'insieme *J''* è di sostegno all'insieme completo *I'' = (5 P, –8 H, 3 Q)*. Dall'unione di *I'* e *(–3 · I'')* si ha:

*I' ∪ (–3 · I'') = (16 · A, 5 · B, 3 · C, –24 · H, –15 · P, 24 · H, –9 · Q)*.

Riducendo si ha: *I = (16 · A, 5 · B, 3 · C, –15 · P, –9 · Q)*.

Essendo *A,B,C,P,Q* punti della sfera, *I* è un divisore dello zero. Pertanto si ha:

$H \cdot I = 16 \cdot [d(A,H)]^2 + 5 \cdot [d(B,H)]^2 + 3 \cdot [d(C,H)]^2 - 15 \cdot [d(P,H)]^2 - 9 \cdot [d(Q,H)]^2 = 0$ (6)

Essendo $\frac{d(P,H)}{d(H,Q)} = \frac{3}{5} = \frac{3x}{5x}$ con $x \neq 0$, si ha: $d(P,H) = 3x$ e $d(Q,H) = 5x$ (7).

Sostituendo le (7) nella (6) si ha:

$H \cdot I = 16 \cdot 10 + 5 \cdot 82 + 3 \cdot 50 - 15 \cdot (3x)^2 - 9 \cdot (5x)^2 = 0$ da cui $x^2 = 2$.

Sostituendo nelle (7) si ha: $d(P,H) = 3\sqrt{2}$ e $d(Q,H) = 5\sqrt{2}$.

Applicazione 2 Al piano π appartengano i punti A,B,C,H e risulti: d(A,B) = 8, d(B,C) = $2\sqrt{10}$, d(A,C) = $6\sqrt{2}$ ; il punto H

risulti così individuato: appartenga al segmento *[C,T]* e risulti $\frac{d(C,H)}{d(H,T)}$ = 2 essendo *T* un punto che divide *[A,B]* secondo il rapporto $\frac{d(A,T)}{d(T,B)}$ = 3.

Siano $S^+$ e $S^-$ i semispazi con origine $\pi$. Sia *P* un punto di $S^-$ e risulti: *d(P,A) = d(P,B) = d(P,C) = 6*. A $S^+$ appartenga *Q*, il punto di intersezione della retta passante per *P* e *H* con la superficie sferica contenente *A,B,P C*. Trovare *d(P,Q)*.

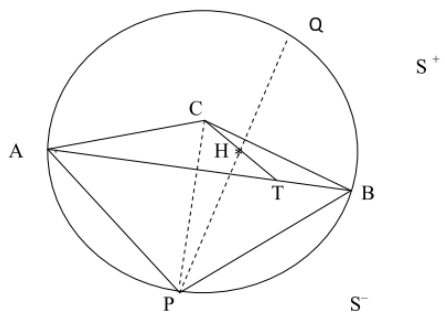



**Fig. 2**

Essendo $\frac{d(C,H)}{d(H,T)}$ = 2 risulta completo l'insieme: I' = (C,–3H,2T).

Essendo $\frac{d(A,T)}{d(T,B)}$ = 3 risulta completo l'insieme: I''=(A,–4T,3B).

Effettuando l'unione dei due insiemi completi I'' ∪ (2 $I'$) = I''' e riducendo si ha:

I'''= (A, 3B, 2C, –6H)

Un insieme completo IIV , avente sostegno (P,H,Q), è

IIV = [s P, –6H, (6–s)Q].

Effettuando l'unione I''' ∪ (– IIV) = I e riducendo si ottiene:

I = [A, 3B, 2C, –s P, –(6–s)Q].

Poiché i punti (A,B,C,P,Q) appartengono ad una superficie sferica, per il TH.3, deve risultare: [A, 3B, 2C, –sP]2 = 0. Svolgendo si ha :

3 ·[d(A,B)]2 + 2 ·[d(A,C)]2 – s ·[d(A,P)]2 +6 ·[d(B,C)]2 – 3 s ·[d(B,P)]2 –2 s ·[d(C,P)]2 = 0

3 · 64 + 2 ·72 - s ·36 + 6 · 40 – 3 s · 36 – 2 s · 36 = 0 da cui $s = \frac{8}{3}$.

Sostituendo nell'insieme completo I e moltiplicando per 3 si ottiene l'insieme equivalente: I = (3A, 9B, 6C , –8P, –10Q).

Per calcolare d(P,Q) utilizziamo il TH.12:

[I + (– 10P, 10Q)]2 = (– 10P, 10Q)]2

(3A, 9B, 6C ,–18P)2 = (–10P, 10Q)]2 da cui $d(P,Q) = \frac{18\sqrt{5}}{5}$.

<u>Applicazione 3</u> Sia (A,B,C,Q) la quaterna di punti non complanari appartenenti alla superficie della sfera $\mathcal{F}$, soddisfacenti le seguenti condizioni: $d(A,B) = 8\sqrt{2}$ , $d(A,C) = 4\sqrt{5}$ , $d(C,B) = 12$ , $d(A,Q) = \sqrt{26}$ , $d(B,Q) = \sqrt{106}$ , $d(C,Q) = \sqrt{34}$ . Sia $T$ il punto di intersezione del segmento $[B,Q]$ con il piano $\pi$ individuato dai punti $A,C,H$, essendo $H$ un punto di $\mathcal{F}$ equidistante da $A,B,C$. Calcolare:

a) $d(Q,H)$; b) $x = d(H,A) = d(H,B) = d(H,C)$; c) il raggio $r$ di $\mathcal{F}$.

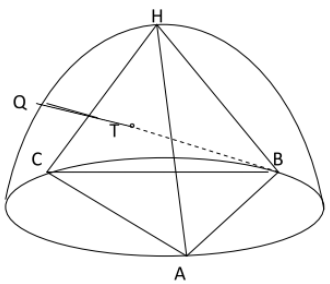



**Fig. 3**

Formalmente, gli insiemi completi con sostegno J* = (B,T,Q) e J** = *(A,C,H,T)* sono: *I** = *[s B, (1–s) Q, –T]* e *I*** = *[m A, n C , (– m – n + 1) H, – T ]* con *m,n,s* ∈ *R* . Sottraendo *I** a *I*** si ottiene l'insieme completo

*I = [m A, –s B, n C, (s – 1) Q, (–m– n+1)H]*

Per le proprietà (3) e (4) degli insiemi completi appartenenti ad una superficie sferica , elencate nel TH.3, si ha:

$A \cdot I = 0,\ B \cdot I = 0,\ C \cdot I = 0,\ [I - (-m-n+1)\ H]^2 = 0;$ sviluppando:

$$\begin{cases} A \cdot I = -s[d(A,B)]^2 + n[d(A,C)]^2 + (s-1)[d(A,Q)]^2 + (-m-n+1)[d(A,H)]^2 = 0 \\ B \cdot I = m[d(B,A)]^2 + n[d(B,C)]^2 + (s-1)[d(B,Q)]^2 + (-m-n+1)[d(B,H)]^2 = 0 \\ C \cdot I = m[d(C,A)]^2 - s[d(C,B)]^2 + (s-1)[d(C,Q)]^2 + (-m-n+1)[d(C,H)]^2 = 0 \\ [I - (-m-n+1)H]^2 = [m\,A, -s\,B, n\,C, (s-1)Q]^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le prime tre relazioni, si ha:

$$\begin{cases} A \cdot I - B \cdot I = 0 \\ B \cdot I - C \cdot I = 0 \\ [I - (-m-n+1)H]^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(s+m)[d(A,B)]^2 + n\{[d(A,C)]^2 - [d(B,C)]^2\} + (s-1)\{[d(A,Q)]^2 - [d(B,Q)]^2\} = 0 \\ m\{[d(A,B)]^2 - [d(A,C)]^2\} + (n+s)[d(B,C)]^2 + (s-1)\{[d(B,Q)]^2 - [d(C,Q)]^2\} = 0 \\ -ms[d(A,B)]^2 - ns[d(B,C)]^2 + mn[d(A,C)]^2 + m(s-1)[d(A,Q)]^2 - s(s-1)[d(B,Q)]^2 + n(s-1)[d(C,Q)]^2 = 0 \end{cases}$$

Sviluppando si ottiene

$$\begin{cases} n = \dfrac{1}{20}(7 - 23s) \\ m = \dfrac{1}{20}(9 - 21s) \\ -s[53s + 51m + 55n - 53] + m(40n - 13) - 17n = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

da cui :

$-s\,[53s + \frac{51}{20}(9-21s) + \frac{55}{20}(7-23\,s) - 53\,] + \frac{1}{20}(9-21\,s)\,[2\,(7-23\,s) - 13\,] +$

$-\frac{17}{20}(7-23\,s) = 0$

da cui $-s[-1276\,s - 216] + (1-46s)(9-21s) - 119 + 391\,s = 0$

$1121\,s^2 - 86\,s - 55 = 0$

Risolvendo si hanno due soluzioni: s1 = $\frac{11}{59}$ e s2 = $-\frac{5}{51}$

che sostituite nel sistema (6) permettono di ricavare le due seguenti terne di parametri: s1 = $\frac{11}{59}$ , n1 = $\frac{11}{59}$ , m1 = $\frac{11}{59}$

e s2 = $-\frac{5}{19} = -\frac{25}{95}$, n2 = $\frac{62}{95}$ , m2 = $\frac{1169}{95}$

Le due terne , sostituite nell'equazione (5), permettono di ricavare i due seguenti insiemi completi:

I′ = (15 A, –11 B, 8 C, – 48 Q, 36 H′) e I′′= (69 A, –25 B, 62 C, –120 Q, –36 H′′).

Ciascuno dei punti H′ e H′′ è equidistante da A, B, C pertanto [H′ ,H′′] è il diametro di $\mathcal{F}$ .

Per risolvere il punto a), svolgiamo l'equazione Q · I′ = 0:

$Q \cdot I' = 15[d(A,Q)]2 - 11[d(B,Q)]^2 + 8[d(C,Q)]^2 + 36[d(H',Q)]^2 = 0$

$15 \cdot 26 - 11 \cdot 106 + 8 \cdot 34 + 36 \cdot [d(H',Q)]2 = 0$ da cui d(H′,Q) = $\sqrt{14}$ .

Procedendo in modo analogo si calcola d(H′′,Q).

Per risolvere il punto b), svolgiamo l'equazione H′ · I′ = 0:

H′ · I′= 15[d(A,H′)]2 –11[d(B,H′)]2 +8[d(C,H′)]2– 48[d(H′,Q)]2 =0.

Posto d(A,H′) = d(B,H′) = D(C,H′) = x, si ha: 15 x2 – 11 x2+ 8 x2 = 48 · 14 da cui X = $2\sqrt{14}$ = d(A,H′) = d(B,H′) = D(C,H′).

Procedendo in modo analogo si calcola d(A,H'') = d(B,H'') = D(C,H'').

Per risolvere il punto c) ricaviamo l'insieme completo I ottenuto eliminando il punto materiale posizionato in Q, sottraendo 5 I' a 2 I'':

I = 2 I'' – 5 I' = (21 A, 35 B, 28 C, – 24 H'', – 60 H')

Poiché H' · I = 0, si ha:

$H' \cdot I = 21[d(A,H')]^2 + 35[d(B,H')]^2 + 28[d(C,H')]^2 - 24[d(H'',H')]^2 = 0$

$24[d(H'',H')]^2 = 21 \cdot 56 + 35 \cdot 56 + 28 \cdot 56$ da cui d(H'',H') = 14.

Essendo [H',H''] il diametro della sfera, il raggio è: r = 7.

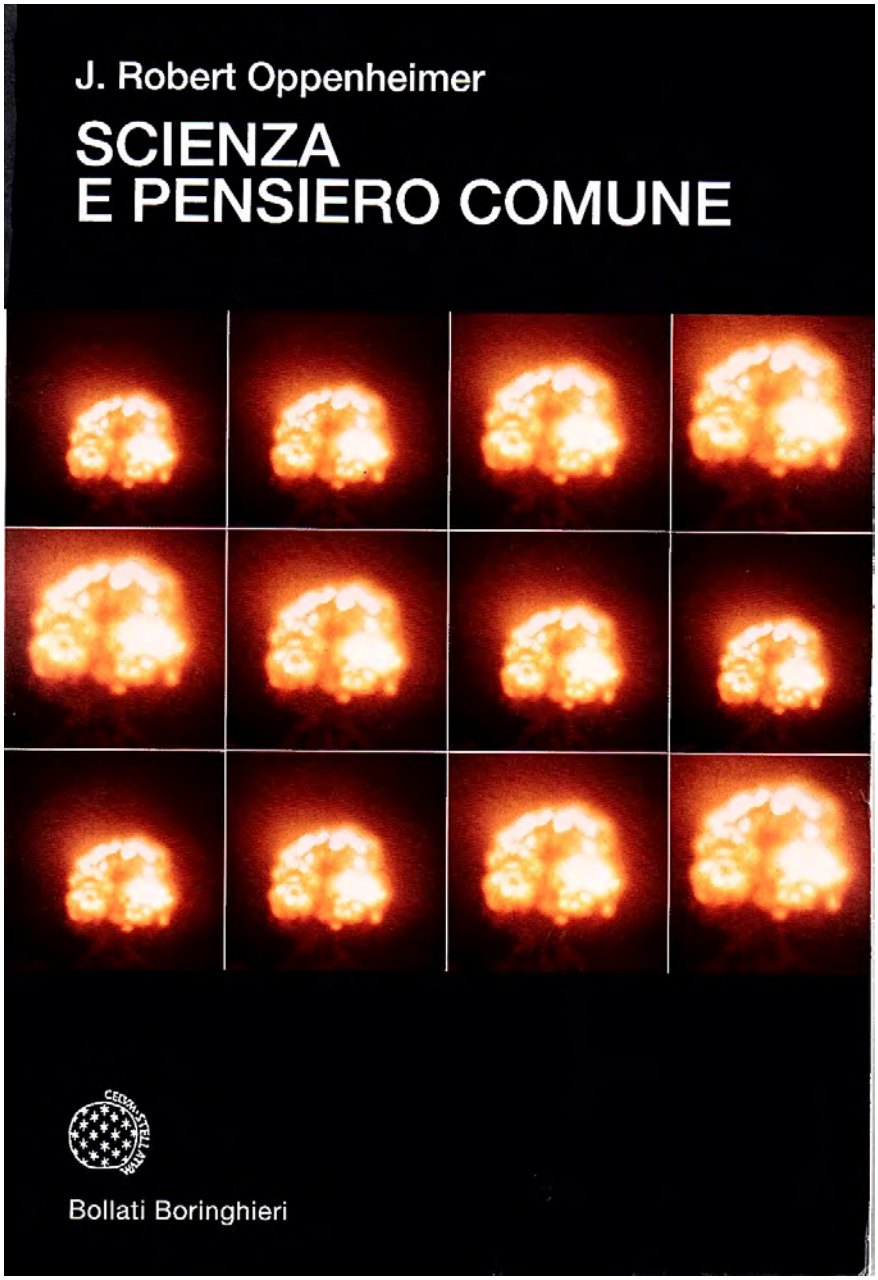
## Bibliografia

Francia Franco (1985). Insiemi di punti materiali, Archimede.

Francia Franco (2019). Insiemi completi del terzo ordine, Periodico di Matematica, Edizioni AFSU.

Francia Franco (2020), Insiemi completi del quarto ordine, Periodico di Matematica, Edizioni AFSU.

Francia Franco (2023), Insiemi del V ordine contenenti punti nello spazio, Periodico di Matematica, Edizioni AFSU.


J. Robert Oppenheimer
SCIENZA
E PENSIERO COMUNE
Bollati Boringhieri

Periodico di Matematica (IV) Vol. VII (2) ottobre 2025, pp. 127-174

# *Equazioni lineari diofantee al liceo*

## *Un metodo elementare per risolvere equazioni in n variabili*

Emilio Toccafondo*

*Già docente di matematica e fisica nelle Scuole Europee;
e_toc@yahoo.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.158

**Sunto:** *In questo lavoro presento un metodo elementare e innovativo, da me denominato dei parametri ausiliari, che consente di risolvere facilmente equazioni lineari diofantee in n variabili. Il metodo è accessibile a studenti di scuola superiore, non richiede strumenti avanzati come frazioni continue o algebra lineare e si rivela notevolmente più semplice del procedimento di Eulero-Bézout. Attraverso esempi, esercizi e applicazioni concrete (affrancature, problemi classici), mostro come l'algebra possa diventare occasione di riflessione, creatività e stimolo logico.*

**Parole Chiave**: *Equazioni diofantee; Algebra elementare; Metodo dei parametri ausiliari; Didattica della matematica.*

**Abstract:** *This paper presents an elementary and innovative approach, named the auxiliary parameters method, for solving linear Diophantine equations in n variables. The method is simple enough to be understood by high school students, avoiding advanced tools such as continued fractions or linear algebra, and proves to be considerably easier than Euler–Bézout's procedure. Through examples,*

*exercises, and real-world applications (e.g., postage problems, classical number theory questions), the paper illustrates how algebra can be transformed from a repetitive exercise into a stimulating activity fostering reasoning, creativity, and curiosity.*

**Keywords:** *Diophantine equations; Elementary algebra; Auxiliary parameters method; Mathematics education.*

## 1 – Introduzione. Il problema di Eulero

> *Nella sua autobiografia, Stendhal parla dei ricordi dei suoi anni di studio:*
>
> *"Trovai a casa sua (M.Chabert, professore di matematica) un libro di Eulero riguardo il numero di uova che una contadina aveva portato al mercato… Questo mi aprì la mente, intuii a cosa serviva lo strumento chiamato algebra. Accidenti…, perché nessuno me lo aveva detto…"*(Perelman, 1994, p. 331).

Stendhal poi si appassionò alla matematica e si preparò per entrare al politecnico a Parigi, ma successivamente non si presentò all'esame di ammissione e coltivò altri interessi.

Ancora oggi, come ai tempi di Stendhal, l'algebra viene spesso considerata argomento noioso e del quale non si capisce l'utilità. Mi riferisco in particolare a esercizi ripetitivi con lunghe espressioni. Quando insegnavo nei licei, in terza, nella prima lezione, proponevo esercizi facilmente risolubili per chi ragionava e laboriosi per chi procedeva meccanicamente.

Ad esempio, data l'equazione $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)=0$ solo pochissimi si rendevano conto della soluzione evidente

$x=\sqrt{2}, x=\sqrt{3}, x=\sqrt{6}$. Anche il calcolo immediato del Massimo Comun Divisore di due numeri come 13001 e 13003 creava problemi. Due numeri che differiscono di 2 possono avere come divisore comune solo 2, in questo caso sono primi tra loro.

Le equazioni diofantee (equazioni delle quali interessano le soluzioni intere) permettono di far esercitare gli studenti nell'algebra, con esercizi stimolanti.

> *Some diophantine equations.*
> *A Diophantine equation, or indeterminate equation, is one which is to be solved with integral values for the unknowns"."There is probably no branch of the theory of numbers which presents greater difficulties than the theory (if it can be called a theory) of Diophantine equations.* (Davenport, 2008, p.137).

Il giudizio di Davenport parrebbe non incoraggiare una introduzione delle equazioni diofantee a livello liceale ma è, evidentemente, riferito ai metodi noti.

Queste equazioni prendono il nome da Diofanto di Alessandria, matematico greco del III secolo spesso considerato il padre dell'algebra.

Il suo libro *Arithmetica*, tradotto da Claude Bachet de Méziriac fu quello sul quale studiò Pierre de Fermat.

L'opera di Diofanto fu studiata anche da Leonardo Fibonacci che pubblicò *Liber quadratorum*, ove approfondì lo studio delle equazioni di secondo grado con risultati sorprendenti, tipo: determinare tre numeri $a,b,c$ in modo che:

$$a+b+c+a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

sia un quadrato perfetto, e che lo siano anche:

$$a+b+c \tag{2}$$

$$a+b+c+a^2 \tag{3}$$

$$a+b+c+a^2+b^2 \tag{4}$$

Bachet de Meriziac, secondo Eulero fu il primo a risolvere una equazione diofantea tramite le frazioni continue.

Eulero ampliò e approfondì lo studio delle equazioni diofantee. Dopo aver ripreso la soluzione di una equazione risolta da Bachet de Meriziac si rese conto dell'analogia tra lo sviluppo in frazioni continue e il calcolo del Massimo Comun Divisore con l'algoritmo di Euclide e ideò il metodo che oggi è probabilmente il più popolare per risolvere equazioni lineari diofantee in due variabili. Studiò anche equazioni di grado superiore ma fu Lagrange che sviluppò metodi per risolvere equazioni diofantee di secondo grado comprese quelle impropriamente denominate di Pell (Eulero, sbagliando, gli aveva attribuito un metodo per risolvere alcune equazioni diofantee di secondo grado).

Con questo lavoro presento un metodo, quasi certamente inedito, che permette a studenti liceali di risolvere facilmente equazioni lineari diofantee in più variabili. L'algebra, in questo modo, non sarà più una ripetizione di passaggi algebrici, spesso tediosa e senza interesse per gli alunni ma occasione di riflessione e ricerca. Attraverso esempi pratici, esercizi e problemi si mostra come l'algebra non sia solo un insieme di regole e procedure ma un mezzo per risolvere

problemi concreti ed esplorare proprietà dei numeri e loro relazioni (divisibilità ad esempio). Il metodo che presento è con molta probabilità l'unico metodo elementare che permette di risolvere facilmente equazioni lineari in n variabili e per $n \geq 3$ è notevolmente più semplice del metodo di Eulero-Bezout indicato da Ore come il miglior metodo disponibile. Utilizzerò una equazione in quattro variabili per il confronto. Il metodo di Eulero-Bezout è molto interessante ma pare dimenticato, probabilmente a causa delle difficoltà che crescono col numero delle variabili.

## 2 - Metodo dei parametri ausiliari.

Ricordo che si definiscono equazioni lineari diofantee le equazioni lineari delle quali cerchiamo soluzioni intere.

Le equazioni lineari diofantee in due variabili si possono risolvere agevolmente tenendo conto dell'identità di Bezout e dell'algoritmo di Euclide o magari con l'uso delle congruenze. L'uso delle frazioni continue e dell'algebra lineare credo non sia alla portata di studenti liceali. Se le variabili sono più di due la soluzione diviene più complicata. Pensando a un metodo alternativo, dopo numerosi tentativi infruttuosi, ho avuto un'idea semplicissima ma che si è rivelata vincente.

Ho chiamato questo metodo (che non sono riuscito a vedere da altre parti nonostante lunghe ricerche e domande ad esperti) il metodo dei parametri ausiliari.

Il metodo consiste nel sostituire alle incognite opportune combinazioni lineari tra altre incognite e parametri arbitrari.

Nell'equazione $mx+ny=k, \quad m<n$ pongo $x=-\left[\frac{n}{m}\right]y+a$ e sostituisco. In questo modo ho una incognita in meno. Il procedimento è valido anche per equazioni con n incognite. Il procedimento, si ripete e al termine si avrà una sola incognita in funzione di (n-1) parametri e procedendo a ritroso otterrò le altre (n-1) soluzioni. Alcuni esempi chiariranno il procedimento. Quando le variabili sono due talvolta i calcoli sono più lunghi, altre volte più semplici rispetto ai metodi noti. A partire da 3 variabili il metodo risulta notevolmente più semplice.

<u>Esempio 1.</u>

Risolvere l'equazione diofantea:

$$2x+3y+7z=n \tag{5}$$

Pongo

$$x=-3z+a \tag{6}$$

sostituendo nella 5 abbiamo $-6z+2a+3y+7z=n$

$$z+3y=n-2a \tag{7}$$

Ponendo

$$z=-2y+b \tag{8}$$

e sostituendo nella 7, abbiamo $-2y+b+3y=n-2a$

$$y=n-2a-b \tag{9}$$

Nella 8 sostituisco y :

$$z=-2n+4a+3b \tag{10}$$

Sostituendo z nella 6 otteniamo:

$x = -3(-2n + 4a + 3b) + a$ da cui:

$$x = 6n - 11a - 9b \tag{11}$$

Riassumendo, l'equazione ha soluzioni:

$$\begin{cases} x = 6n - 11a - 9b \\ y = n - 2a - b \\ z = -2n + 4a + 3b \end{cases} \tag{12}$$

Verifica : $n = 1, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad x = -14, \quad y = -2, \quad z = 5$

$$2 \cdot -14 - 3 \cdot 2 + 7 \cdot 5 = 1$$

$n = 100, \quad a = 40, \quad b = 17, \quad x = 7, \quad y = 3, \quad z = 11$

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 11 = 10 \tag{13}$$

Mostrando queste soluzioni a qualcuno e facendo osservare che qualunque siano i valori che diamo ai parametri l'equazione è sempre verificata è molto probabile che la persona si stupisca.

Non c'è alcun mistero: sostituendo nell'equazione di partenza i valori trovati abbiamo l'uguaglianza n=n.

$$2(6n - 11a - 9b) + 3(n - 2a - b) + 7(-2n + 4a + 3b) = n$$

$$12n - 22a - 18b + 3n - 6a - 3b - 14n + 28a + 21b = n$$

Condizioni di risolubilità

Equazioni come $7x + 14y = 51$ non hanno soluzioni.

$$7x + 14y = 51 \Leftrightarrow 7(x + 2y) = 51$$

Qualunque siano i valori di x e y al primo membro abbiamo un multiplo di 7, al secondo membro no: l'equazione diofantea non ha soluzioni.

Identità di Bezout

Dati due interi a e b non entrambi nulli e detto d il loro massimo comun divisore, esistono $h, k \in Z$ tali che

$$d = h \cdot a + k \cdot b \qquad (14)$$

La scrittura del massimo comun divisore di due interi a e b nella forma $ha + kb$ è nota come *identità di Bezout*.

In altri termini:

L'equazione diofantea $ax + by = c$ ammette soluzioni solo se il massimo comun divisore di a, b è un divisore di c.

Se a e b sono primi tra loro l'equazione diofantea $ax + by = c$ ha sempre soluzioni.

Esempi

Il metodo dei parametri ausiliari non è un metodo meccanico e ripetitivo. Ogni equazione può risolversi in diversi modi.

Risolvere l'equazione:

$$13x + 41y = 1 \qquad (15)$$

Poniamo

$$x = -3y + a \qquad (16)$$

e sostituiamo nella 15:

$$-39y + 13a + 41y = 1 \qquad (17)$$

$$2y + 13a = 1 \qquad (18)$$

Poniamo

$$y = -6a + b \qquad (19)$$

Dalla (18) abbiamo:

$$-12a + 2b + 13a = 1 \qquad (20)$$

$$a = 1 - 2b \qquad (21)$$

$$y = -6 + 13b \qquad (22)$$

Dalla 16:

$$x = 18 - 39b + 1 - 2 \qquad (23)$$

$$x = 19 - 41b \qquad (24)$$

Soluzioni:

$$\begin{cases} x = 19 - 41b \\ y = -6 + 13b \end{cases} \qquad (25)$$

Per $b = 1 \Rightarrow x = -22, \quad y = 7, \quad -22 \cdot 13 + 7 \cdot 41 = 1$

Il metodo dei parametri ausiliari permette varie scelte:

con un po′ di pratica sarà possibile trovarne alcune che permetteranno di arrivare più rapidamente alla soluzione.
Risolviamo nuovamente l′equazione $13x+41y=1$

Poniamo:

$$x=-4y+a \tag{26}$$

sostituendo abbiamo:

$$-52y+13a+41y=1 \Rightarrow -11y+13a= \tag{27}$$

Poniamo:

$$y=a+b \tag{28}$$

e sostituiamo nella 27

$$-11a -11b +13a =1 \tag{29}$$

$$2a-11b=1 \tag{30}$$

Poniamo:

$$a=6b+c \tag{31}$$

Dalla 30 abbiamo:

$$12b+2c-11b=1$$

$$b=1-2c \tag{32}$$

Dalla 31: $a=6(1-2c)+c$

$$a=6-11c \tag{33}$$

Dalla 28 abbiamo

$$y = a + b \Rightarrow y = 6 - 11c + 1 - 2c$$

$$y = 7 - 13c \qquad (34)$$

Sostituendo nella 26

$$x = -28l + 52c + 6 - 11c$$

$$x = -22 + 41c \qquad (35)$$

I due sistemi appaiono diversi ma in effetti le soluzioni sono uguali:

$$1. \quad \begin{cases} x = 19 - 41b \\ y = -6 + 13b \end{cases} \qquad 2. \quad \begin{cases} x = -22 + 41 \\ y = 7 - 13c \end{cases} \qquad (36)$$

Dal sistema 1 abbiamo: $b = 1 \Rightarrow x = -22, y = 7$. Gli stessi valori li otteniamo dal sistema 2 per c=0.
Due procedimenti diversi conducono alle stesse soluzioni.

## 3 - Teorema di Frobenius. Le soluzioni positive

In molte situazioni risolvendo una equazione diofantea siamo interessati a soluzioni positive.

Teorema di Frobenius:
Siano $a$ e $b$ interi positivi primi tra loro, il più grande numero non esprimibile nella forma $ax + by$, con $x, y \geq 0$ interi, è $ab - a - b$.
L'equazione $ax + by = n$ ha quindi soluzioni positive se $n > ab - a - b$.

Esempio

L'equazione $11x+23y=n$ ha certamente soluzioni positive per $n>11\cdot 23-11-23=219$.

Un caso classico è quello delle affrancature. Se ho francobolli da lire 7, 12 e 41 e voglio affrancare una raccomandata con tariffa di 141 lire, le soluzioni negative dell'equazione $7x+12y+41z=141$ non hanno significato.

Supponiamo di usare solo due tipi di francobollo, ad esempio quelli da 7 lire e 11 lire.

Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$7x+11y=141 \tag{37}$$

Pongo:

$$x=-y+a \tag{38}$$

e sostituisco nella 37:

$$-7y+7a+11y=141$$

$$4y+7a=141 \tag{39}$$

Pongo:

$$y=-2a+b \tag{40}$$

Dalla 39:

$$-8a+4b+7a=141$$
$$a=-141+4b \tag{41}$$

Sostituendo nella 40

$$y = -2(-141 + 4b) + b$$

$$y = 282 - 7b \qquad (42)$$

$$x = -y + a \Rightarrow x = -282 + 7b - 141 + 4b$$

$$x = -423 + 11b \qquad (43)$$

Ci interessano le soluzioni positive x>0, y> 0

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -423 + 8b > \\ 282 - 7b > ( \end{cases} \qquad (44)$$

$$-423 + 11b > 0 \Rightarrow b > \frac{423}{11}$$

$$b \geq 39 \qquad (45)$$

$$282 - 7b > 0 \Rightarrow b < \frac{282}{7}$$

$$b \leq 40 \qquad (46)$$

$b = 39$: $\quad x = -423 + 11b \Rightarrow \quad x = 6, \qquad y = 282 - 7b \Rightarrow y = 9$

$$6 \cdot 7 + 9 \cdot 11 = 141 \qquad (47)$$

$b = 40$: $\quad x = -423 + 11b \Rightarrow x = 17,$

$b = 40$: $\quad x = 17$: $\quad x = -423 + 11b \Rightarrow \quad x = 17, \qquad y = 282 - 7b \Rightarrow y = 2$

Possiamo quindi affrancare con 6 francobolli da 7 lire e 9 francobolli da 11 lire, oppure con 17 francobolli da 7 lire e 2 da 11 lire.

Volendo utilizzare anche il francobollo da 41 lire abbiamo l'equazione:

$$7x+11y+41z=14 \tag{49}$$

Poniamo

$$y=-4z+a \tag{50}$$

Sostituendo nella 49 abbiamo

$$7x-44z+11a+41z=141$$

$$7x-3z=141-11a \tag{51}$$

Poniamo

$$z=2x+b \tag{52}$$

Sostituendo nella 51

$$7x-6x-3b=141-11a$$

$$x=141-11a+3b \tag{53}$$

$$z=282-22a+7b \tag{54}$$

$$y=-1128+89a-28 \tag{55}$$

Per $a = 13, \quad b = 1$ abbiamo

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = \tag{56}$$

La busta si può correttamente affrancare con un francobollo da sette lire, uno da undici lire e tre da quarantuno lire.

Osservazione: il metodo dei parametri ausiliari permette di calcolare facilmente i valori x, y e z, operando una sola sostituzione, come mostriamo.

Ho assegnato valori arbitrari $a = 13 \quad e \quad b = 1$ in modo da ottenere $x = 1$.

Ricordandole relazioni trovate $z = 2x + b \quad e \quad y = -4z + a$ otteniamo facilmente $y = 1 \quad e \quad z = 3$.

Metodo alternativo che prevede solo la risoluzione dell'equazione in due variabili.

Considero l'equazione:

$$7x + 11y = k \tag{57}$$

Abbiamo già studiato il caso k=141

Esaminiamo ora il caso k=141-41 (abbiamo un francobollo da 41 lire e dobbiamo completare l'affrancatura con francobolli da lire 7 e 11).

$$7x + 11y = 100 \tag{58}$$

Con procedimento analogo a quello seguito per $k = 141$ abbiamo

$$\begin{cases} x = -300 + 11b \\ y = 200 - 7b \end{cases} \tag{59}$$

Possiamo semplificare i calcoli ponendo $b = -t$

$$x > 0 \Rightarrow -300 + 11t > 0 \Rightarrow t > \frac{300}{11} \Rightarrow t > 27,27...$$
$$y > 0 \Rightarrow 200 - 7t > 0 \Rightarrow t < \frac{200}{7} \Rightarrow t < 28,57...$$

x e y sono positivi per $t = 28$.
Abbiamo: $x = 8, \quad y = 4$.
L'equazione $7x + 11y + 41z = 141$ ha per soluzione

$$x = 8, \quad y = 4, \quad z = 1.$$

## 4 - Equazioni lineari diofantee in 4 variabili, soluzioni positive, metodo suddivisione

Si consideri l'equazione:

$$41x + 33y + 70z + 77t = n \tag{60}$$

Vogliamo trovare una soluzione positiva. Dato che per due variabili il procedimento è semplice possiamo suddividere le 4 variabili in due gruppi e calcolare le soluzioni.

Dovremo escludere le coppie (33, 77), e (70, 77) perché potrebbero non avere soluzioni generali e considereremo le coppie (41, 77) e (33, 70).

<u>Nota.</u> Ad esempio l'equazione $33y + 77t = 200$ non ha soluzioni… (200 non è multiplo di 11).

Caso $n = 4000, \quad k = 2000$

Soluzioni positive dell'equazione:

$$41x + 77t = k \tag{61}$$

$$x = -2t + a \tag{62}$$

$$-82t + 41a + 77t = k \tag{63}$$

$$-5t + 41a = k \tag{64}$$

Poniamo

$$t = 8a + b \tag{65}$$

$$-40a - 5b + 41a = k \tag{66}$$

$$a = k + 5b \tag{67}$$

$$t = 8(k + 5b) + b \tag{68}$$

$$t = 8k + 41b \tag{69}$$

Sostituendo nella 62

$$x = -2(8k + 41b) + k + 5 \tag{70}$$

$$x = -15k - 77b \tag{71}$$

Ponendo $b = -d$ (per semplificare i calcoli lavorando con numeri positivi)abbiamo

$$\begin{cases} x = -15k + 77d \\ t = 8k - 41d \end{cases} \tag{72}$$

$$x > 0 \Rightarrow -15k + 77d > 0 \Rightarrow d > \frac{15}{77}k$$

$$t > 0 \Rightarrow 8k - 41d > 0 \Rightarrow d < \frac{8}{41}k$$

Considero il caso $k = 2000$.

$$x > 0 \Rightarrow d > \frac{30000}{77} \Rightarrow d \geq 390, \qquad t > 0 \Rightarrow d < \frac{30000}{77} \Rightarrow d \leq 390$$

$$d = 390 \Rightarrow x = -30000 + 77 \cdot 390 \Rightarrow x = 30,$$

$$t = 16000 - 41 \cdot 390 \Rightarrow t = 10$$

$$x = 30, \qquad t = 10 \tag{73}$$

$$41 \cdot 30 + 77 \cdot 10 = 2000$$

$$33y + 70z = m \tag{74}$$

$$y = -2z + a \tag{75}$$

$$-66z + 33a + 70z = m \tag{76}$$

$$4z + 33a = m \tag{77}$$

Poniamo:

$$z = -8a + b \tag{78}$$

$$-32a + 4b + 33a = n \tag{79}$$

$$a + 4b = m \tag{80}$$

$a = m - 4b$

Dalla 78

$$z = -8(m - 4b) + b \qquad (81)$$

$$z = -8m + 33b \qquad (82)$$

Sostituendo nella 75

$$y = -2(-8m + 33b) + m - 4 \qquad (83)$$

$$y = 17m - 70b \qquad (84)$$

$$y > 0 \Rightarrow 17m - 70b > 0 \Rightarrow b < \frac{17m}{70},$$

$$z > 0 \Rightarrow -8m + 33b > 0 \Rightarrow b > \frac{8m}{33}$$

Consideriamo il caso $m = 2000$

$$y > 0 \Rightarrow b < \frac{34000}{70} \Rightarrow b \leq 485 \;\; z > 0 \Rightarrow b > \frac{16000}{33} \Rightarrow b \geq 485$$

$b = 485 \Rightarrow \; m = 2000, b = 485 \Rightarrow y = 17 \cdot 2000 - 70 \cdot 485 = 50$,
$z = -8 \cdot 2000 + 33 \cdot 485 = 5$

$$y = 50, \qquad z = 5 \qquad (85)$$

$$33 \cdot 50 + 70 \cdot 5 = 2000$$

Riassumendo, l'equazione $41x+33y+70z+77t=n$ ha una soluzione data da:

$$x=30, y=50, z=5, t=10 \ ,$$

$$41\cdot 30+33\cdot 50+70\cdot 5+77\cdot 10=4000$$

## 5 - Le soluzioni e la catena di relazioni

È possibile che in alcuni casi la sostituzione dell'incognita col parametro ausiliario, richieda altre sostituzioni.

Consideriamo l'equazione:

$$12x+115y=1 \qquad (86)$$

Poniamo:

$$x=-10y+a \qquad (87)$$

Dalla 0.86 abbiamo

$$-120y+12a+115y=1$$

$$-5y+12a=1 \qquad (88)$$

Poniamo

$$y=2a+b \qquad (89)$$

Sostituendo nella 0.88:

$$-10a-5b+12a=1$$

$$2a-5b=1 \qquad (90)$$

Poniamo:

$$a=3b+c \qquad (91)$$

Dalla 0.90 abbiamo: $6b+2c-5b=1$

$$b=1-2c \tag{92}$$

$$a=3(1-2c)+c$$

$$a=3-5c \tag{93}$$

Dalla 0.89 abbiamo $y=6-10c+1-2c$

$$y=7-12c \tag{94}$$

Dalla 0.87 $x=-70+120c+13-5c$

$$x=-67+115c\,. \tag{95}$$

Verifica: $c=1 \Rightarrow x=115-67=48, \qquad y=7-12=-5$

$$12\cdot 48-115\cdot 7=1$$

## 6 - Equazione lineare diofantea in 4 variabili

<u>Metodo dei parametri ausiliari</u>

$$17x+29y+31z+43t=1 \tag{96}$$

Poniamo:

$$x=-2t+a \tag{97}$$

Sostituendo nella 0.96 abbiamo:

$$-34t+17a+29y+31z+43t=1$$

$$9t + 29y + 31z = 1 - 17 \tag{98}$$

Poniamo:

$$y = -z + b \tag{99}$$

Sostituendo nella 0.98

$$9t - 29z + 29b + 31z = 1 - 17a$$

$$9t + 2z = 1 - 17a - 29 \tag{100}$$

Poniamo $z = -4t + c$

Sostituendo nella 0.100

$$9t - 8t + 2c = 1 - 17a - 29b$$

$$t = 1 - 17a - 29b - 2 \tag{101}$$

$$z = -4t + c, \qquad y = -z + b, \qquad x = -2t + \tag{102}$$

Esempio: $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 6$

$$t = 1 \quad z = 2 \quad y = -3 \quad x = -1$$

$$-1 \cdot 17 - 3 \cdot 29 + 2 \cdot 31 + 1 \cdot 43 = 1$$

Naturalmente volendo ottenere il sistema di soluzioni basta procedere a ritroso partendo dalla soluzione trovata (in questo caso $t = 1 - 17a - 29b - 2c$).

$$z = -4t + c \Rightarrow z = -4(1 - 17a - 29b - 2c) + c$$

$$z = -4 + 68a + 116b + 9 \qquad (103)$$

$$y = -z + b \Rightarrow y = 4 - 68a - 115b - 9c$$

$$y = 4 - 68a - 115b - 9 \qquad (104)$$

$$x = -2t + a \Rightarrow x = -2(1 - 17a - 29b - 2c) + a$$

$$x = -2 + 35a + 58b + 4 \qquad (105)$$

I calcoli sono notevolmente più semplici utilizzando le relazioni 102.

Penso che la matematica sia principalmente idee, ragionamento, fantasia, immaginazione e anche svago, divertimento e non puro calcolo.

Risolvere un problema o un'equazione mostrando vari procedimenti credo sia stimolante e induca a riflettere e ragionare. Ogni qual volta è possibile una scelta si privilegia il ragionamento rispetto al pericoloso adagiarsi in procedimenti meccanici che talvolta sono inutilmente prolissi (con probabilità di errori).

## 7 - Metodo Eulero- Bezout

Cercando on line ho trovato poche soluzioni per equazioni del tipo $mx + ny + hz = t$ e pochissime per equazioni con 4 o più variabili.

In *Number Theory and Its History* (Dover publications 2015, pp. 156, 157) Oystein Ore, a proposito di equazioni diofantee lineari , scrive:

*When there were only two unknowwns, it was fairly simple to derive the general solution as soon as one knew a particular set of values satisfying the equations, For several unknowns, the situation is more complicated, as have already seen il the examples in Chap. 6 [...]*

*We indicated there how one could find the general solution by a series of reductions, and this method is probably the best available. Let us illustrated it once more by deriving the general solutions of* $50x+36y+45z=3$.

*We begin writing*

$$y=\frac{3-50x-45z}{36}=-x-z+\frac{3-14x-9z}{36}$$

*Therefore*

$$t=\frac{3-14x-9z}{36} \qquad (106)$$

*is an integer. When this expression is solved for z, it follows that*

$$z=-4t-2x+\frac{3+4x}{9} \qquad (107)$$

*Consequently*

$$u=\frac{3+4x}{9} \qquad (108)$$

*Is integral and*

$$x=2u+\frac{u-3}{4} \qquad (109)$$

*This gives finally that*

$$v = \frac{u-3}{4} \qquad (110)$$

*Is integral and u = 4v+3. When is substituted, one finds as general solution*

$$\begin{cases} x = 9v + 6 \\ y = 5t + 5v + 3 \\ z = -4t - 14v - 9 \end{cases} \qquad (111)$$

*where v and t are arbitrary integers."*

Questo metodo è certamente interessante ma a me pare notevolmente più semplice il metodo dei parametri ausiliari (in particolare se le variabili sono più di 3) come è facile constatare confrontando il procedimento seguito per risolvere l'equazione $17x + 29y + 31z + 43t = 1$ col metodo dei parametri ausiliari e quello di Eulero-Bezout che segue.

Risolvere l'equazione:

$$17x + 29y + 31z + 43t = \qquad (112)$$

Ricavo la $x$:

$$17x = 1 - 29y - 31z - 43t \Rightarrow x = \frac{1 - 29y - 31z - 43t}{17}$$

$$x = -y - z - 2t + \frac{1 - 12y - 14z - 9}{17} \qquad (113)$$

Poniamo:

$$a = \frac{1-12y-14z-9}{17} \qquad (114)$$

Dalla 113:

$$x = -y - z - 2t + a \qquad (115)$$

Dalla 114

$$17a = 1-12y-14z-9t$$

Ricavo t:

$$9t = 1-12y-14z-17a \Rightarrow t = \frac{1-12y-14z-17a}{9}$$

$$t = -y - z - a + \frac{1-3y-5z-8}{9} \qquad (116)$$

Pongo:

$$b = \frac{1-3y-5z-8a}{9} \qquad (117)$$

$$t = -y - z - a + b \qquad (118)$$

Dalla 117

$$9b = 1-3y-5z-8a \Rightarrow 3y = 1-5z-8a-9b$$

$$y = \frac{1-5z-8a-9b}{3}$$

$$y = -3b - z - 2a + \frac{1-2z-2}{3} \qquad (119)$$

Pongo:

$$c = \frac{1-2z-2a}{3} \qquad (120)$$

$$y = -3b - z - 2a + \qquad (121)$$

Dalla 120

$$1-2z-2a = 3c \Rightarrow 2z = 1-3c-2a \Rightarrow z = \frac{1-3c-2a}{2}$$

$$z = -a - c + \frac{1-c}{2} \qquad (122)$$

Pongo:

$$d = \frac{1-c}{2} \Rightarrow 2d = 1-c$$

$$c = 1-2d \qquad (123)$$

$$z = -a - 1 + 3d \qquad (124)$$

Sostituisco nella 121:

$$y = -3b + 1 + a - 3d - 2a + 1 - 2d$$

$$y == 2 - a - 3b - 5 \qquad (125)$$

Dalla 118 abbiamo:

$$t = -2 + a + 3b + 5d + 1 + a - 3d + b$$

$$t = -1 + a + 4b + 2c \qquad (126)$$

$$x = -2 + a + 3b + 5d + 1 + a - 3d + 2 - 4a + 4b - 4d + a$$

$$x = 1 + a - 5b - 2d \qquad (127)$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} x = 1 + a - 5b - 2c \\ y = 2 - a - 3b - 5c \\ z = -a - 1 + 3d \\ t = -1 + a + 4b + 2 \end{cases} \qquad (128)$$

Verifica:

$a = 10, \quad b = 5, \quad d = 2 \Rightarrow x = 18, \quad y = -33, \quad z = -5, \quad t = 33$

$$17 \cdot 18 - 29 \cdot 33 - 31 \cdot 5 + 43 \cdot 33 = 1$$

Facile constatare la complessità di questo procedimento in confronto a quello con l'uso dei parametri ausiliari(come dimostrato in paragrafo 6).

<u>Casi particolari notevoli</u>

Quando risolviamo una equazione lineare diofantea si possono presentare casi particolari facilmente risolubili.

Consideriamo l'equazione

$$13x + 17y = 30 \qquad (129)$$

Una soluzione particolare è $x = 1, \quad y = 1$.

<u>Osservazione</u>

Nel caso di equazioni lineari diofantee in due variabili la conoscenza di una soluzione particolare permette di scrivere facilmente la soluzione generale.

Se l'equazione $mx+ny=k$ ha soluzioni $x=p$, $y=q$, la soluzione generale è:

$x=p+nb$, $y=-q+mb$ o anche $x=p-na$, $y=q+ma$

<u>Verifica</u>

$$m(p+nb)+n(q-mb)=k \Rightarrow mp+nq=k$$

Nel caso della equazione 0.129 dalla soluzione particolare $x=1$, $y=1$ abbiamo:

$x=1-17a$, $y=1+13a$ oppure $x=1+17b$, $y=1-13b$ come si può facilmente verificare:

$$13(1+17b)+17(1-13b)=30 \Rightarrow 13+13\cdot 17b+17-17\cdot 13=30$$

L'equazione 5x+7y=41 ammette la soluzione particolare $x=4$, $y=3$, le soluzioni sono:

$$x=4-7a, \quad y=3+5a$$

Si ottengono facilmente soluzioni se nell'equazione $mx+ny=k$ il numero $n-mt$ è divisore di $k$.

Esempi:

$$13x+43y=80 \tag{130}$$

$43-3\cdot 13=4$, divisore di 80.

$$13\cdot(-3)+43\cdot 1=4 \tag{131}$$

moltiplico ambo i membri per 20

$$13\cdot(-60)+43\cdot 20=8 \tag{132}$$

Una soluzione particolare è $x=-60, \quad y=20$

<u>Soluzione</u>

$$\left(x=-60+43a, \quad y=20-13a\right)$$

Risolvere l'equazione:

$$17x+39y=100 \tag{133}$$

$$17\cdot(-2)+39\cdot 1=5 \tag{134}$$

Moltiplico ambo i membri per $20$

$$17\cdot(-40)+39\cdot 20=10 \tag{135}$$

$$\left(x=-40+39a, \quad y=20-17a\right. \tag{136}$$

Risolvere l'equazione:

$$13x+20y=70 \tag{137}$$

$$13\cdot(-1)+20\cdot 1=7 \tag{138}$$

$$13\cdot(-10)+20\cdot 10=7 \tag{139}$$

$$\left(x=-10+20a,\quad y=10-13a\right. \tag{140}$$

Risolvere l'equazione:

$$11x+49y=100 \tag{141}$$

$$11\cdot(-4)+49\cdot 1=5 \tag{142}$$

$$11\cdot(-80)+49\cdot 20=10 \tag{143}$$

Soluzioni:

$$\left(x=-80+49a,\quad y=20-11a\right. \tag{144}$$

<u>Nota</u>

Nel sito

https://tp.nexgate.ch/equations_diophantiennes_lineaires

si risolvono le equazioni diofantee lineari in due variabili. Il sito presenta lo svolgimento completo non solo le soluzioni.

Troviamo le soluzioni dell'equazione $12x+41y=200$:

$12\cdot(-3)+41\cdot 1=5$

$12\cdot(-120)+41\cdot 40=200$

$\left(x=-120+41a,\quad y=40-12a\right)$

La risposta del sito online è:

$$\left(x=3+41ky=,\quad 4-12k\right)$$

$$3=-120+3\cdot 41,\quad 4=40-3\cdot 12$$

## 8 - Formula risolutiva

Il metodo dei parametri ausiliari permette di trovare una formula risolutiva, valida in casi particolari.

La formula che segue è valida se detto $t$ il resto della divisione $n:m$, abbiamo:

$$m-t\left[\frac{m}{t}\right]=1 \tag{145}$$

Esempio: $13x+17y=1, \quad t=4, \quad 13-4\left[\frac{13}{4}\right]=13-4\cdot 3=1$

Consideriamo l'equazione:

$$mx+ny=k \tag{146}$$

poniamo:

$$x=-\left[\frac{n}{m}\right]y+a \tag{147}$$

Dalla 147 abbiamo:

$$m\left(-\left[\frac{n}{m}\right]y+a\right)+ny=k$$

$$\left(n-m\left[\frac{n}{m}\right]\right)y+ma= \tag{148}$$

Poniamo $t=\left(n-m\left[\frac{n}{m}\right]\right)$

$$ty + ma = k \tag{149}$$

Poniamo:

$$y = -\left[\frac{m}{t}\right]a + b \tag{150}$$

Sostituendo:

$$t\left(-\left[\frac{m}{t}\right]a + b\right) + ma = k \tag{151}$$

$$\left(m - t\left[\frac{m}{t}\right]\right)a + bt = k \tag{152}$$

Ricordando la 145

$$a = k - bt \tag{153}$$

Sostituendo nella 150

$$y = -\left[\frac{m}{t}\right](k - bt) + b$$

$$y = -\left[\frac{m}{t}\right]k + \left(t\left[\frac{m}{t} + 1\right]\right) \tag{154}$$

Sostituendo nella 150 abbiamo

$$x = -\left[\frac{n}{m}\right]\left\{-\left[\frac{m}{t}\right]k + \left(t\left[\frac{m}{t}\right] + 1\right)b\right\} + k - bt$$

$$x=\left(\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{t}\right]+1\right)k-\left(t\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{t}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]+t\right) \tag{155}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} x=\left(\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{t}\right]+1\right)k-\left(t\left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{m}{t}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]+t\right) \\ y=-\left[\frac{m}{t}\right]k+\left(t\left[\frac{m}{t}\right]+1\right)b \end{cases} \tag{156}$$

Ricordo:

$$t=n-m\left[\frac{n}{m}\right] \tag{157}$$

Le formule sono valide per $m$ dispari e

$$t=2 \qquad oppure\, se \qquad m-t\left[\frac{m}{t}\right]=1.$$

Nota: $t=2 \qquad e \qquad m=2n+1 \Rightarrow m-t\left[\frac{m}{t}\right]=1$

$$m=2w+1, \qquad t=2 \Rightarrow 2w+1-2\left[\frac{2w+1}{2}\right]=2w+1-2\cdot w=1.$$

<u>Esempi</u>
Risolvere l'equazione

$$11x+38y=1, \qquad m=11, \qquad n=38, \qquad t=5$$

$$x=7-38a, \qquad y=-2+11a$$

Alcune equazioni risolte con le formule 156:

$a)\quad 17x+38y=1 \qquad x=9-38a, \qquad y=-4+17a$

$b)\quad 19x+47y=1 \; x=5-47a, \qquad y=-2+19a$

$c)\quad 31x+247y=1 \; x=8-247a, \qquad y=-1+31a$

Lo scopo non è tanto quello di avere una formula risolutiva ma di mostrare come si può ottenere questa formula utilizzando i parametri ausiliari. Queste formule, che possono sembrare complicate si possono facilmente semplificare.

## 9 - Formule ridotte

Abbiamo visto come, conoscendo una soluzione particolare si possa scrivere la soluzione generale come nell'esempio che segue.

L'equazione 5x+7y=41 ammette la soluzione particolare $x=4, \qquad y=3$

le soluzioni sono: $x=4-7a, \qquad y=3+5a$

Analogamente si possono semplificare le formule risolutive trovate.

Le formule trovate per la soluzione dell'equazione $mx+ny=k$:

$$\begin{cases} x=\left(\left[\dfrac{n}{m}\right]\left[\dfrac{m}{t}\right]+1\right)k-\left(t\left[\dfrac{n}{m}\right]\left[\dfrac{m}{t}\right]+\left[\dfrac{n}{m}\right]+t\right)b \\ y=-\left[\dfrac{m}{t}\right]k+\left(t\left[\dfrac{m}{t}\right]+1\right)b \end{cases}$$

si possono quindi semplificare:

$$\begin{cases} x = \left( \left[ \frac{n}{m} \right] \left[ \frac{m}{t} \right] + 1 \right) k - n \\ y = -\left[ \frac{m}{t} \right] k + mb \end{cases} \tag{158}$$

Risolvere l'equazione:

$$25x + 58y = 1 \tag{159}$$

$$m = 25, \quad n = 58, \quad t = 8, \quad x = 7 - 58a, \quad y = -3 + 25a$$

$$19x + 47y = 1 \tag{160}$$

$$m = 19, \quad n = 47, \quad t = 9, \quad x = 5 - 47a, \quad y = -2 + 19a$$

## 10 - Applicazione alla divisibilità

Stabilire per quali valori di a e b il numero $11 + 13a + 16b$ è divisibile per 7.

$$11 + 13a + 16b = 7k \tag{161}$$

$$7k - 13a - 16b = 11$$

Poniamo

$$k = 2a + b \tag{162}$$

$$14a + 7b - 13a - 16b = 11$$

$$a - 9b = 11 \tag{163}$$

$$a = 9b + 11 \tag{164}$$

$$b = 1 \Rightarrow a = 20$$

Il numero $11 + 13a + 16b$ è divisibile per 7 se $a = 20, \quad b = 1$

$$11 + 13 \cdot 20 + 16 = 287 = 41 \cdot \tag{165}$$

## 11. Esercizi, alcuni da Eulero

1. Nella repubblica di Abbiccì esistono solo banconote da 7 soldi e 5 soldi. Marco acquista una maglia da 31 soldi. In che modo può pagare?

Marco ha solo banconote da 5 soldi. Il commerciante fa resto con banconote da 7 soldi.

$$5x - 7y = 31 \tag{166}$$

Poniamo:

$$x = y + a \tag{167}$$

Sostituiamo nella 166:

$$5y + 5a - 7y = 31$$

$$-2y + 5a = 31 \tag{168}$$

Poniamo:

$$y = 2a + b \tag{169}$$

Sostituiamo nella 168:

$$-4a-2b+5a=31$$

$$a=31+2b \tag{170}$$

$$y=4b+62+b$$

$$y=62+5b \tag{171}$$

Dalla 167:

$$x=5b+62+2b+31$$

$$x=93+7b \tag{172}$$

Ponendo $b=-k$

$$\begin{cases} x=93-7k \\ y=62-5k \end{cases} \tag{173}$$

$$k=12 \Rightarrow x=9, \qquad y=2 \; k=12 \Rightarrow x=9, \qquad y=2$$

Pagando con 9 biglietti da 5 soldi si riceve un resto di 2 biglietti da 7 soldi.

2. Mario vuole travasare 7 litri di acqua da una vasca quasi piena ad una vuota e dispone di un recipiente da 3 litri e uno da 5: è possibile?

Indicando con 3x il numero di litri versati e con 5y il numero di litri tolti per ottenere 7 litri x+3y=25abbiamo:

$$3x+5y=7 \tag{174}$$

Poniamo:

$$x=-2y+a \tag{175}$$

$$-6y+3a+5y=7$$

$$\begin{cases} y=-7+3a \\ x=14-5a \end{cases} \qquad (176)$$

$$a=2 \Rightarrow x=4, \qquad y=-1$$

Versando 4 volte 3 litri e togliendo 5 litri abbiamo travasato 7 litri.

Alcuni esercizi tratti dal testo di algebra di Eulero.

<u>Questione prima</u>

Dividere 25 in 2 parti in modo che una sia divisibile per 2 e l'altra per 3.

Siano 2x e 3y le due parti. Abbiamo:

$$2x+3y=25 \qquad (177)$$

Poniamo $x=-y+a$, dalla 1.40:

$$-2y+2a+3y=25$$

$$y=25-2a \qquad (178)$$

$$x=-25+2a+a$$

$$x=-25+3a \qquad (179)$$

Limitandoci al caso 2x e 3y positivi, sostituendo a $9<a<13$ otteniamo :

$$22+3=25, \qquad 16+9=25, \qquad 10+15=25, \qquad 4+21=25$$

Questione seconda

Suddividere 100 in due parti in modo che una sia divisibile per 7 e l'altra per 11.

Siano 7x e 11 y le 2 parti. Abbiamo:

$$7x+11y=100 \tag{180}$$

Poniamo $x=-y+a$ , dalla 0.180:

$$-7y+7a+11y=100$$

$$4y+7a=100 \tag{181}$$

Poniamo:

$$y=-2a+b \tag{182}$$

$$-8a+4b+7a=100$$

$$a=-100+4b \tag{183}$$

$$y=200-7b \tag{184}$$

$$x=-300+11b \tag{185}$$

$$-300+11b>0 \Rightarrow b>\frac{300}{11} \Rightarrow b \geq 28$$

$$200-7b>0 \Rightarrow b<\frac{200}{7} \Rightarrow b \leq 28$$

Dalle 184 e 185 per b=28 otteniamo $x=8, \quad y=4$

I numeri richiesti sono 56, 44

$$7 \cdot 8 + 11 \cdot 4 = 100 \qquad (186)$$

Questione terza

Dividere 100 in due parti in modo che la prima divisa per 5 dia resto 2 e la seconda divisa per 7 dia resto 4.

Indichiamo le due parti

$$5x + 2, \qquad 7y + 4 \qquad (187)$$

Abbiamo l'equazione:

$$5x + 2 + 7y + 4 = 100$$

$$5x + 7y = 94 \qquad (188)$$

Procedendo analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente avremo:

$$\begin{cases} x = 282 - 7b \\ y = -188 + 5b \end{cases} \qquad (189)$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow 38 \le b \le 40$$

$$b = 38 \Rightarrow x = 16, \quad y = 2 \Rightarrow \quad 82 + 18 = 100$$
$$b = 39 \Rightarrow x = 9, \quad y = 7 \Rightarrow \quad 47 + 53 = 100$$
$$b = 40 \Rightarrow x = 2, \quad y = 12 \quad 12 + 88 = 100$$

Le soluzioni di una equazione lineare diofantea determinano una progressione aritmetica.

Questione quarta

Due contadine hanno insieme 100 uova. Una dice all'altra "se divido le mie uova in gruppi di 8 me ne restano 7, la

seconda risponde anche a me ne restano 7 se le conto per decine. Quante uova hanno le due contadine?

Indichiamo con $8x+7$, $10y+4$ rispettivamente le uova della prima contadina e della seconda, abbiamo:

$$8x+7+10y+7=100 \Rightarrow 8x+10y=86$$

$$4x+5y=43 \tag{190}$$

Poniamo:

$$x=-y+a \tag{191}$$

Dalla 190:

$$-4y+4a+5y=43 \Rightarrow y+4a=43$$

$$y=43-4a \tag{192}$$

$$x=-43+4a+a$$
$$x=-43+5a \tag{193}$$

$$a=9 \Rightarrow x=2, \qquad y=7 \Rightarrow 8\cdot 2+7+10\cdot 7+7=100$$

Una contadina aveva 23 uova, l'altra 77.

$$a=10 \Rightarrow x=7, \qquad y=3 \Rightarrow 8\cdot 7+7+10\cdot 3+7=100$$

Una contadina aveva 63 uova, l'altra 37.

Prima della questione ottava, Eulero avverte: la questione che segue, fornisce un esempio di soluzione più lunga e difficoltosa ("*penible*" scrive).

Questione ottava

Trovare un numero N che, essendo diviso per 39, dà resto 16, e che diviso per 56 dà resto 27.

Siano:

$$39x+16 \tag{194}$$

e

$$56y+27 \tag{195}$$

i due numeri richiesti, abbiamo:

$$39x+16=56y+27$$

$$39x-56y=11 \tag{196}$$

Poniamo:

$$x=y+a \tag{197}$$

$$39y+39a-56y=11$$

$$-17y+39a=11 \tag{198}$$

Poniamo:

$$y=2a+b \tag{199}$$

$$-34a-17b+39a=11$$

$$5a-17b=11 \tag{200}$$

Poniamo:

$$a=3b+c \tag{201}$$

$$15b+5c-17b=11$$

$$-2b+5c=11 \tag{202}$$

Poniamo:

$$-4c-2d+5c=11 \tag{203}$$

$$c=11+2d \tag{204}$$

Dalla 201

$$b=22+5d \tag{205}$$

Dalla 203:

$$a=3(22+5d)+11+2d$$

$$a=77+17d \tag{206}$$

Dalla 199:

$$y=2a+b=2(77+17d)+22+5d$$

$$y=176+39d \tag{207}$$

Dalla 197:

$$x=176+39d+77+17d$$

$$x=253+56d \tag{208}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} x=253+56t \\ y=176+39t \end{cases} \tag{209}$$

Sostituendo nella 207 e 208 abbiamo la soluzione:

$$n=39(253+56d)+16$$

$$n=9883+2184d \tag{210}$$

$$n=56(176+39d)+27$$

$$n=9883+2184d \tag{211}$$

$$d=4 \Rightarrow n=9883-(4\cdot 2184)=1147$$

$$d=3 \Rightarrow n=9883-3\cdot 2184=3331$$

Questi numeri divisi per 39 danno resto 16 e divisi per 56 danno resto 27.

$$(39 \cdot 85) + 16 = 3331$$

## 12 - Conclusioni

Da tempo conoscevo l'esistenza delle equazioni diofantee lineari ma non avevo mai approfondito l'argomento. Una volta che casualmente ho incontrato una equazione tipo $16x + 31y = 200$ ho cercato di risolverla, senza riuscirci. Invece di documentarmi mi sono posto una sfida: trovare una soluzione senza consultare i metodi noti.

A distanza di un paio di mesi e dopo vari tentativi infruttuosi, ho ideato un metodo che mi è parso sorprendentemente semplice ed efficace. Non pensavo di aver inventato qualcosa di nuovo, sembrava impossibile nessuno avesse già avuto quella idea, ma successive ricerche e confronti con documenti disponibili (compresi vari video su Youtube) mi hanno convinto che il mio metodo ha caratteristiche originali. In particolare, non ho trovato risoluzioni elementari di equazioni diofantee lineari con tre o più variabili trattate in metodo elementare.

Il metodo proposto, basato su una strategia che ho chiamato dei parametri ausiliari, si rivela facilmente comprensibile anche a studenti liceali e cultori della matematica. A differenza di altri strumenti come le congruenze,le frazioni continue il metodo di Eulero con algoritmo d'Euclide o l'algebra lineare, che richiedono competenze più avanzate, questo approccio punta sulla chiarezza e sulla semplicità operativa anche con equazioni con

più di due incognite (basta saper fare combinazioni lineari di polinomi di primo grado).

Per testare il mio metodo, nell'impossibilità materiale di proporlo a uno studente liceale, dato che sono in pensione, l'ho proposto a una insegnante di lettere, a suo tempo molto brava in matematica. Nonostante i decenni trascorsi senza più aver fatto un solo esercizio di algebra,la collega, dopo che le ho ricordato il concetto di polinomio e le operazioni elementari, ha subito capito il metodo e dopo poco era in grado di risolvere equazioni tipo $7x+19y=100$. Non ancora convinta la collega mi ha proposto un'equazione con numeri ben più grandi, come 31x+871y=12000: ha seguito con curiosità la soluzione rimanendo stupita della semplicità del procedimento.

Penso che introdurre le equazioni diofantee lineari nella scuola superiore, se presentate in modo accessibile, possa rendere lo studio dell'algebra più coinvolgente, stimolando la curiosità e rafforzando le competenze logiche. Come osserva Nicolina A. Malara in *Riflessioni sull'insegnamento dell'algebra*, una delle difficoltà maggiori per gli studenti è la "caduta di significato" percepita nell'uso dell'algebra. Offrire contesti concreti, sfide risolvibili e metodi elementari può contribuire a colmare questa distanza e restituire all'algebra parte del suo fascino originario.

## Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia gratitudine al prof. Claudio Oton della Scuola Superiore Sant'Anna di Pisa per i preziosi suggerimenti, e in modo particolare al prof. Umberto Zannier

della Scuola Normale Superiore di Pisa per l'attenzione e l'incoraggiamento ricevuti.

## Bibliografia

BACHET C.-G. (1874). *Problèmes plaisants & délectables qui se font par les nombres** (3ª *ed. riveduta e aumentata*). Paris.

BALL W.W.R. (1906). *A Short Account of the History of Mathematics, 4ª ed*. London: Macmillan.

DAVENPORT H. (2008). *The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers, 8ª ed*. Cambridge: Cambridge University Press.

EULER L. (1807). *Éléments d'algèbre, Tome II. Nouvelle éd. revue et augmentée de notes, par J.-G. Garnier e J.-L. Lagrange*, Paris.

MALARA N.A. (2000). *Riflessioni sull'insegnamento dell'algebra.* Bologna: Pitagora Editrice.

ORE Ø. (1948). *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill. [Rist. Dover, 2015].

PERELMAN Y. (1994). *Mathematics Can Be Fu.,* Moscow: Mir Publishers. [Ed. orig. 1913].

WEIL A. (1993).*Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre.* Torino: Einaudi.

GUIDO TONELLI
Tempo
Il sogno di uccidere *Chrónos*
UNIVERSALE
ECONOMICA
FELTRINELLI / SAGGI

Periodico di Matematica (IV) Vol. VI (2) ottobre 2025, pp. 175-178

# *"Husserl e le scienze" di Angela Ales Bello*

*Recensione*

Luigi Campanella*

* Professore emerito di Chimica dell'Ambiente e dei Beni Culturali, di Chimica del Restauro, di Chimica degli Alimenti all'Università "Sapienza" di Roma e Presidente del MUSIS; luigi.campanella@uniroma1.it

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v7n2.159

**Sunto:** *Recensione del libro "Husserl e le scienze" di Angela Ales Bello.*

**Parole Chiave**: *Fenomenologia, soggetto e oggetto, conoscenza induttiva, conoscenza deduttiva.*

**Abstract:** *Review of the book "Husserl and the Sciences" by Angela Ales Bello.*

**Keywords:** *Phenomenology, subject and object, inductive knowledge, deductive knowledge.*

Di certo sarà capitato a molti di visitare personali di artisti, specialmente moderni, e restare affascinati, ma chiedersi poi cosa l'artista volesse esprimere. Poi si ha la fortuna di parlare

con un esperto che spiega il processo emotivo che è dietro l'opera e tutto risulta chiaro. Con molta franchezza questa esperienza l'ho vissuta in ben altro contesto con Husserl, una figura che sempre mi ha appassionato, ma che - lo confesso - faticavo a sintonizzare con la mia mente e la mia formazione di chimico. Poi mi è capitato di leggere il libro *Husserl e le scienze* di Angela Ales Bello, professoressa emerita di Storia della Filosofia Contemporanea presso la Pontificia Università Lateranense a Roma, e tutto ha assunto contorni e contenuti più chiari. Dare importanza primaria alle scienze dello spirito e poi trovare nella matematica il principale linguaggio espressivo può sembrare un non senso, ma è proprio quello che nella mente e negli scritti di Husserl consente di vedere la via verso la conoscenza non intesa come informazione, ma come base della cultura e della crescita spirituale e umana di una persona, a partire dai fenomeni che continuamente la arricchiscono.

Una conoscenza così connotata, aiutata peraltro dalle tecnologie, sempre più disponibili e complesse, ci consente di approfondire anche un processo introspettivo prezioso per ognuno di noi. Husserl individua nella fenomenologia il metodo per chiarire i concetti e accedere alle "essenze" delle cose, superando le limitazioni delle scienze naturali e del soggettivismo. Nel processo di conoscenza, soggetto e oggetto sono connessi: questo è il principio fondante della fenomenologia. È possibile conoscere l'oggetto attraverso i modi con cui esso si manifesta alla coscienza, superando preconcetti e pregiudizi. Gli occhi vedono i fenomeni, la mente li studia, la coscienza li elabora e li fa divenire

conoscenza. Vorrei aggiungere che l'integrale di questi processi è cultura.

Che poi i fenomeni riferiti alle scienze, quelle della vita in particolare, ci mettano a contatto con il mondo che ci circonda e che ci indirizzino verso una visione etica del rapporto fra singoli, comunità, ecosistema è un opportunità che sta a noi cogliere secondo le nostre coscienze, ma anche secondo le risorse intellettuali di cui disponiamo. La differenza fra conoscenza induttiva, propria ad esempio della chimica e della biologia, e conoscenza deduttiva, più vicina alla fisica e alla matematica, con il valore dell'esperienza prevalente nella prima e della elaborazione nella seconda, non può non riflettersi nel nostro approccio alla realtà.

***Angela Ales Bello*** *è Professoressa Emerita di Storia della Filosofia Contemporanea presso la P. Università Lateranense di Roma, è Visiting Professor presso la P. Università Antonianum di Roma e l'Università Statale di San Paolo, Brasile. È Presidente del Centro Italiano di Ricerche Fenomenologiche con sede in Roma, affiliato a The World Phenomenology Institute (U.S.A), e Presidente della Società Internazionale di Fenomenologia della Religione. Fra le sue recenti pubblicazioni con Castelvecchi, "Roma: Il senso delle cose. Per un realismo fenomenologico" (2013); "Il senso del sacro. Dall'arcaicità alla desacralizzazione" (2014); "Il senso dell'umano – Tra fenomenologia, psicologia e psicopatologia" (2016); "Tutta colpa di Eva. Antropologia e Religione dal Femminismo alla Gender Theory" (2017). Nel 2021 è stato pubblicato da Mimesis il suo colloquio intellettuale e spirituale con Edith Stein: "Assonanze e dissonanze. Dal Diario di Edith Stein" e nel 2022 ha curato per Studium un'antologia di testi husserliani da lei tradotti: "E. Husserl, La preghiera e il divino. Scritti etico-religiosi". Nel 2023 con Anna Maria Sciacca ha pubblicato "Ti racconto l'aldilà. Fenomenologia della via umana ante mortem e post mortem", Castelvecchi, Roma. Molte sue opere sono tradotte in lingua inglese e pubblicate da Springer ("The Divine in Husserl and Other Explorations" (2008); "The Sense of Things. Toward a Phenomenological Realism" (2015) e in lingua portoghese in Brasile ("Introdução á Fenomenologia, EDUSC, Bauru/ SP., 2006;Pessoa e Comunidade, Artesã, Belo Horizonte/MG,*

*Brasile 2015). Il suo più recente libro è: "Edith Stein and Edmund Husserl. Philosophical Exchanges, Lexington-Bloomsbury", Londra 2025. In qualità di presidente del Centro Italiano di Ricerche Fenomenologiche ha ricevuto numerosi premi e riconoscimenti fra i quali quelli del Presidente della Repubblica Italiana nel 2010 e nel 2012.*

# *Profili biografici degli autori*

**Luigi Campanella (Roma) -** luigi.campanella38@gmail.com

Professore ordinario di Chimica Analitica e di Chimica dell'Ambiente e dei Beni Culturali.Titolare di Chimica Agraria e poi di Chimica del Suolo, di Chimica del Restauro e di Chimica degli Alimenti presso l'Università degli Studi di Roma "Sapienza".

È autore di oltre 500 lavori nei settori della Chimica Analitica, dell'Elettrochimica, della Chimica Ambientale, delle Biotecnologie Analitiche,della Chimica dei Beni Culturali. In particolare ha preparato, caratterizzato e applicato numerosi biosensori, basati su enzimi immobilizzati o su tessuti vegetali, per la determinazione di sostanze di interesse clinico, farmaceutico ed ambientale e per la datazione di reperti archeologici cellulosici. Con queste ricerche è entrato a far parte del Gruppo di Ricerca CEE su "Biosensori".

Ha anche studiato l'applicazione di metodi chimici e biologici alla degradazione e alla rimozione di inquinanti. È autore di 6 libri nei campi della Analisi Industriale e Applicata, della Chimica Analitica,della Chimica degli Alimenti,della Filosofia della Chimica,della Museologia Scientifica e della Chimica per l'Arte. Presidente della Divisione di Chimica Analitica della Società Chimica Italiana negli anni 1989-1990 e di quella di Chimica dell'Ambiente e dei Beni Culturali nel triennio 2004-2006. Vice presidente della Società Chimica Italiana dal 1990 al 1992. Presidente eletto della Società Chimica Italiana per il triennio 2008-2011. Presidente del MUSIS (Museo Multipolare della Scienza e dell'Informazione Scientifica) dal 1991 ad oggi.

**Giovanna Della Vecchia** - giovanna.dellavecchia@unina.it

È stata docente di Matematica presso l'IIS "G. Minzoni" di Giugliano in Campania dal 1985 al 2020. Attualmente è docente a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli. Durante la sua carriera di docente della scuola secondaria di secondo grado ha sempre mostrato un particolare interesse per la ricerca didattica e ha ricoperto negli anni il ruolo di funzione strumentale sia nell'area "servizi e supporto agli studenti" che nell'area "formazione docenti". Presso l'istituto Minzoni ha svolto svariati ruoli e ha fatto parte dello staff dirigenziale impegnato nell'attività di progettazione, supporto organizzativo e didattico all'Istituzione scolastica. Ha svolto per diversi anni attività di formazione nell'ambito della didattica e della valutazione, nonché nei corsi di specializzazione per le attività di sostegno agli alunni in situazione di handicap per la provincia di Caserta ( area logico – matematica). Ha preso parte a numerosi convegni/seminari in qualità di relatore ed è autore di numerose pubblicazioni inerenti alla Matematica e ai suoi possibili ambiti di applicazione.

**Massimo Fanfoni (Roma) -** fanfoni@roma2.infn.it

Laureato *cum laude* in fisica nel 1982, con una tesi sulla misura della conducibilità elettrica della superficie del Si (111)2x1. È specializzato nel campo della fisica della materia, in particolare nella fisica delle superfici solide. Ha esperienza sulle spettroscopie elettroniche e fotoelettroniche e negli ultimi dieci anni si è dedicato alla microscopia a scansione di sonda (STM e AFM). Si èinteressato anche alla teoria della cinetica della crescita di film sottili (Modello di Kolmogorov e Avrami) e ad alcuni aspetti della morfologia matematica. Dopo tre anni presso l'Istituto di Struttura della Materia del CNR è diventato ricercatore presso l'Università di Roma Tor Vergata. Attualmente è professore associato presso la stessa

Università, dove insegna Fisica Atomica e Molecolare e Fisica dei Solidi.

**Franco Francia (La Spezia) –** franco.francia40@virgilio.it

Iscritto prima a fisica presso l'università di Pisa, ha conseguto la laurea presso l'università di Ferrara e insegnato matematica presso l'istituto tecnico di Fivizzano e successivamente presso il liceo ''G.Mazzini'' di La Spezia. Il prof. Dionisio Gallarati, avendo conosciuto le questioni di matematica trattate dal Francia, gli offrì la propria collaborazione finalizzata alla realizzazione di un articolo che fu pubblicato successivamente su «Archimede»: *Insiemi di punti materiali'* – «Archimede», N.1 anno 1985 casa editrice Le Monnier. *Reti di rette e circonferenze* è un ulteriore articolo, prodotto con la collaborazione del prof. Dionisio Gallarati, pubblicato sul «Periodico di matematiche»', Organo della Matesis, del luglio- settembre 1996.

**Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com**

Laureato in Ingegneria Meccanica a pieni voti all'Università "Sapienza" di Roma. Giornalista iscritto all'Ordine Nazionale dei Giornalisti albo pubblicisti dal 2008. Autore di circa 450 articoli, culturali, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui: *Bruno de Finetti: un matematico scomodo* (coautore Fulvia de Finetti) Livorno: Belforte, 2008, la prima biografia mondiale del grande scienziato; *Ingegneria Assistita dal Computer, vol. 1.*(coautore F. Campana) Roma: UniversItalia, 1ed. 2012 e 2ed. 2014; *Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza* (coautore Rosalma Salina Borello) Roma: Universitalia, 2011; *Quasicristalli. Intrecci segreti fra natura, arte e scienza* (coautori C. Francou e U. Locatelli) Roma, UniversItalia, 2017. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore presso l'Istituto di Fisica Tecnica dell'Università "Sapienza" di Roma e nel settore dei sistemi di guerra elettronica nell'industria della difesa (Elettronica S.p.A. –

Roma). È esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica e ha svolto una intensa attività di formatore di progettisti meccanici presso molte importanti industrie nazionali. Dal 2014 tiene annualmente il "Corso Mechanical Design con CATIA V5" al Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale dell'Università "Sapienza" di Roma. È Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia di Roma, per la quale cura la collana *Scienza e Cultura*. Dirige anche le collane *Ingegneria Industriale Assistita dal computer* e *Il filo della conoscenza* per la casa editrice Inriga di Bologna, con la quale ha pubblicato i libri *La progettazione meccanica con CATIA V5* (2023), *Le fasi del ciclo di vita del prodotto. Il ruolo dell'informatica* (2023), *La verità in matematica. Da Gödel a Euclide* (2024), *CAM-CAPP. La produzione assistita dal computer* (coautore Sandro Turchetta) (2025), *Dai robot alla fabbrica automatizzata* (coautore Donato Orlandi) (2025), *La gestione dello sviluppo di un prodotto industriale. PDM-PLM* (coautore Riccardo Salvatore) (2025). Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

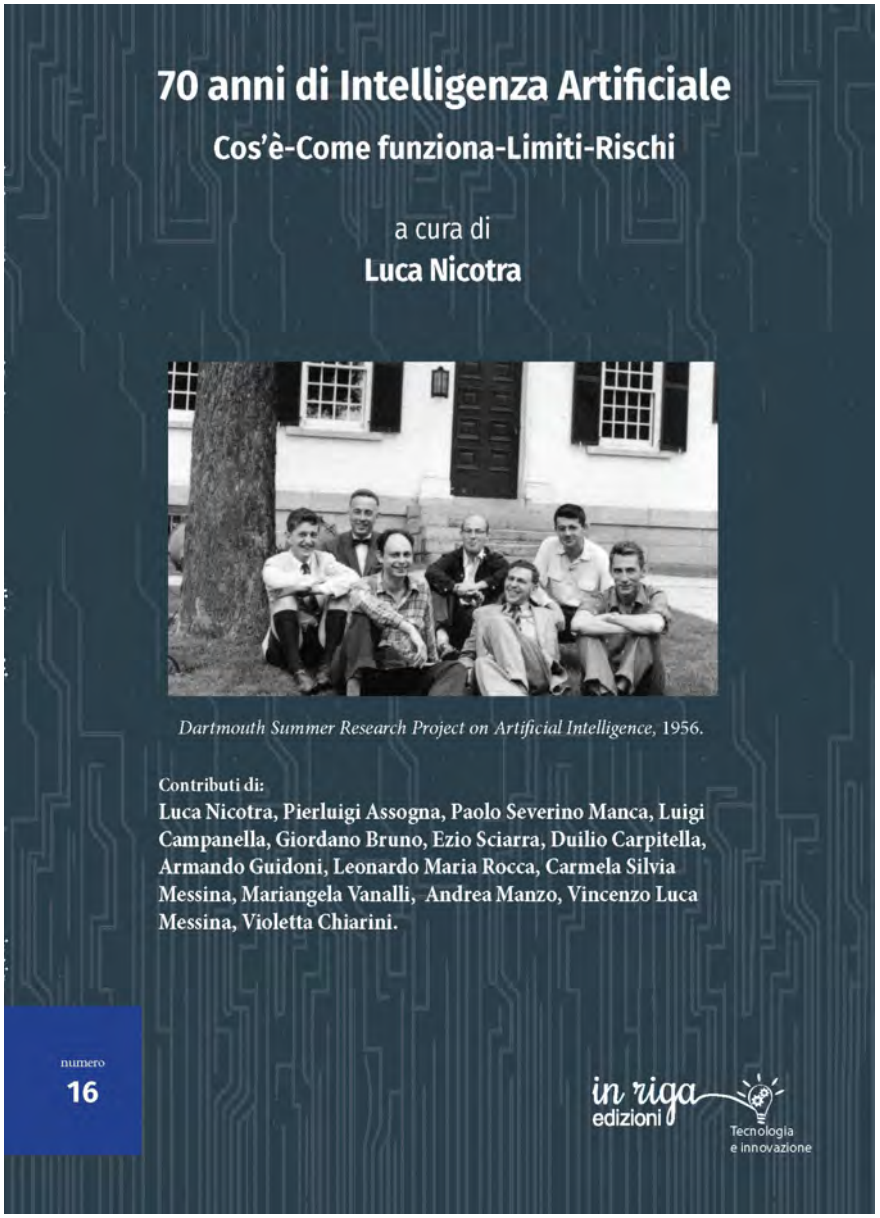
**Alessandra Rotunno - alessandra.rotunno@unina.it**

Laureata in Matematica è docente di ruolo di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico Statale "A. Labriola" di Napoli. Collabora da numerosi anni con l'Università degli Studi "Federico II" di Napoli, ricoprendo incarichi di insegnamento a contratto di Geometria presso il Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura. Al Dipartimento di matematica dello stesso ateneo, è stata docente alla SSIS del Corso di Storia della Matematica nell'anno accademico

2007-2008 e dal 1994 al 2005 ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica presieduto dal Prof Aldo Morelli. Dall'anno 2003-2004 al 2018-2019 è stata cultrice e commissaria d'esame nei corsi di Metodi Matematici per Economia e Finanza al Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio tenuto dal prof. Ferdinando Casolaro. Le sue attività di ricerca e le pubblicazioni vertono prevalentemente sulla didattica della matematica e della geometria, con attenzione alle interconnessioni interdisciplinari. Relatrice a vari convegni in didattica della matematica, è autrice di dodici pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali principalmente inerenti al settore Geometria e ai suoi possibili ambiti di applicazione. Dal 1993 è socia Mathesis, di cui è stata vicepresidente e attualmente consigliere della sezione di Napoli "Morelli-Rao". È inoltre fondatrice e referente provinciale del Premio Aldo Morelli dal 2006.

**Emilio Toccafondo (Pisa) -** e_toc@yahoo.it

Ha insegnato nei licei dal 1967 al 1977 e successivamente nelle Scuole Europee in Belgio e Germania fino al 2000. Nel 1973 per tipi della casa editrice Bulgarini ha pubblicato il libro per i Licei: *Insiemi, funzioni, vettori, trigonometria* (in collaborazione con Egidio Piazza) e nel 2022 ha pubblicato su Amazon *Didattica della matematica.*


70 anni di Intelligenza Artificiale
Cos'è-Come funziona-Limiti-Rischi
a cura di
Luca Nicotra
Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, 1956.
Contributi di:
Luca Nicotra, Pierluigi Assogna, Paolo Severino Manca, Luigi Campanella, Giordano Bruno, Ezio Sciarra, Duilio Carpitella, Armando Guidoni, Leonardo Maria Rocca, Carmela Silvia Messina, Mariangela Vanalli, Andrea Manzo, Vincenzo Luca Messina, Violetta Chiarini.
numero
16
in riga edizioni
Tecnologia e innovazione