

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXX - Serie IV – volume VII (3)
Supplemento dicembre 2025**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

**Atti V Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana - Agerola
4-7 settembre 2025**

curati da
**Aniello Buonocore, Ferdinando Casolaro,
Giovanna Della Vecchia, Giovanni Vincenzi**

PARTE II



MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

PERIODICO DI MATEMATICA

PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO SUPERIORE

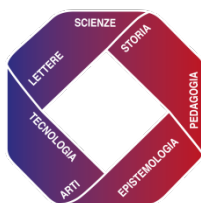
Fondato da Davide Besso nel 1886,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

Anno XXXX - Serie IV - Volume VII (3)
Supplemento Dicembre 2025

Atti V Convegno Matematica, Natura e Scienze
dell'Alta Costiera Amalfitana
Agerola 4-7 settembre 2025

PARTE II



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLE SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Giovanna Della Vecchia
Antonio Lungo
Antonio Maturo
Luca Nicotra
Renata Santarossa

Comitato Scientifico

Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Franco Francia (La Spezia)
Giangiacomo Gerla (Napoli)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Paolo Manca (Pisa)
Raffaele Mascella (Teramo)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Mario Mandrone (Napoli)
Pietro Nastasi (Palermo)
Canio Noce (Salerno)
Nicla Palladino (Perugia)
Salvatore Rao (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Salvatore Sessa (Napoli)
Massimo Squillante (Benevento)
Luca Tallini (Teramo)
Ugo Vaccaro (Salerno)
Giovanni Vincenzi (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305
eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693
ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Segreteria di redazione:

Giovanna Della Vecchia (Napoli)
giovanna.dellavecchia@gmail.com

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Zona Industriale
Colleranese - 65021 Giulianova
(TE) C.F. 91053660675
Copyright © 2025 Edizioni AFSU -
UniversItalia-Teramo, Roma -
ISSN Online: 2612-6745

® Reg. Versione online n.695/2019
del 19 luglio 2019 e Versione
cartacea n.695/2021 del 3 giugno
2021 Tribunale di Teramo.

Tutti i diritti riservati.

ISBN 978-88-3293-901-9

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiarino la fonte.

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, alla prof.ssa Giovanna Della Vecchia (Napoli) giovanna.dellavecchia@gmail.com. Tutti i lavori vanno inviati al prof. Franco Eugeni, (eugenif3@gmail.com) secondo il template word e le norme editoriali della Rivista scaricabili dal sito dell'A.F.S.U. (www.afsu.it/istruzioni-per-gli-autori/).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it.

«Periodico di Matematica» è una rivista trimestrale distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale:



PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Roberto Giannarelli attuata sin dai primi numeri di «Archimede» (1949) e di «La scienza per i Giovani» (1952), poi ripresa da Bruno de Finetti per il «Periodico di Matematiche», sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti nella forma *camera ready*, con MS Word utilizzando il *template* scaricabile dal sito dell'AFSU:

https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Template_Periodico-di-Matematica-18-02-2020.doc

rispettando le norme editoriali pubblicate nello stesso sito:

<https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/03/Principali-Norme-Editoriali-per-la-scrittura-degli-articoli-18-02-2020.pdf>

Le figure utilizzate devono essere in alta risoluzione (300 dpi).

SOSTENITORI AFSU

Ferdinando Casolaro (Napoli), Silvana D'Andrea (Roseto), Franco Francia (Pisa), Gianni Di Paolo (Teramo), Diana Le Quesne (Roseto), Franco Eugeni (Roseto), Antonio Maturo (Pescara), Antonio Napoletano (Ancona), Luca Nicotra (Roma), Marisa Quartiglia (Roseto), Renata Santarossa (Napoli), Ezio Sciarra (Pescara), Salvatore Sessa (Napoli).

AMICI AFSU

Ivano Casolaro (Napoli) Gianluca Eugeni (L'Aquila), Andrea Manente (Teramo), Enrico Massetti (Ascoli Piceno), Giovanni Grelli (S.Benedetto del Tronto), Francesco Pezzoli (Ascoli Piceno), Federico Verrigni (Pineto), Alessandro Vicerè (Roseto), Orfeo Zaffi (Penne - PE).

Finito di stampare nel mese di dicembre 2025 presso UniversItalia

Via di Passolombardo 421, 00133 Roma Tel. 06/2026342 -

e_mail: info@universitaliasrl.it-www.unipass.it.

INDICE

Redazione Periodico di Matematica	1-6
Editoriale	7-10
Antonio Caserta	11-30
Loredana Biacino	31-54
Sofia La Franca	55-64
Ulderico Dardano	65-90
M. Santella_R. Ramacciato_N. Iannaccio	91-134
Vittorio Bovolin	135-170

V Convegno “Matematica Natura e Scienze dell’Alta Costiera Amalfitana”

Agerola, Campus Principe di Napoli, 4-7 settembre 2025



Il presente volume raccoglie i lavori presentati alla quinta edizione del Convegno “Matematica Natura e Scienze della Alta Costiera Amalfitana” che si tiene annualmente nella città di Agerola.

La pubblicazione è a cura dell’Associazione Napoletana Filosofia e Scienze Umane “R. Caccioppoli” nell’ambito del Progetto “*Elsa Morante: il contributo del neo-realismo alla letteratura ed al cinema nel XX secolo*”, finanziato con la L.R. n. 7/2003, contributi per la promozione culturale anno 2025”.

Il convegno è stato articolato come segue: il 4 settembre dedicato alla sessione letteraria con la “Giornata del libro e della lettura in Costiera”, inserita dall’amministrazione comunale di Agerola nel Programma ufficiale della XIV edizione del Festival dell’Alta Costiera Amalfitana 2025, mentre dal 5 al 7 settembre si sono susseguite le sessioni relative agli “Itinerari interdisciplinari sui Sentieri della Matematica”.

Per il Comitato Scientifico, i curatori

A. Buonocore, F. Casolaro, G. Della Vecchia, G. Vincenzi

Editoriale

Aniello Buonocore*, Ferdinando Casolaro**,
Giovanna Della Vecchia***, Giovanni Vincenzi****

*Presidente Mathesis Napoli "Morelli-Rao"; anibuono58@gmail.com

** Presidente ANFSU "R. Caccioppoli"; presidente.anfsu@gmail.com

***DIARC "Federico II"; giovanna.dellavecchia@gmail.com

****Dip. Matematica Università di Salerno; vincenzi@unisa.it



Il presente volume raccoglie alcuni contributi proposti per il V Convegno "Matematica Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana, Itinerari interdisciplinari sui sentieri della Matematica: Premio Ager Scientiarum 2025", che si è svolto nel periodo 4-7 settembre 2025 nella cittadina di Agerola.

Tenuto conto dell'elevato numero di proposte pervenute, si è concordato di raccogliere i lavori in due fascicoli di cui il presente completa la raccolta già pubblicata nella "Parte I".

La scelta della cittadina di Agerola è dovuta alla grande disponibilità che l'amministrazione, oggi presieduta dal sindaco Tommaso Naclerio, ha dato da sempre alla realizzazione delle nostre attività.

Non è secondaria, inoltre, la sua posizione geografica, in quanto la cittadina fa da "ponte" tra la città metropolitana di

Napoli e la città di Salerno (oltre all'attrazione turistica che esercita favorendo la presenza di visitatori da ogni parte d'Italia), ed è facilmente raggiungibile da docenti e dirigenti delle Scuole e delle Università delle due prestigiose città

Il Convegno è stato organizzato - in collaborazione - dalle associazioni Mathesis "A. Morelli e S. Rao" di Napoli, Math&Phys di Salerno, Mathemare di Castellammare di Stabia e dall'Associazione Napoletana di Filosofia e Scienze Umane "R. Caccioppoli" (ANFSU).

Hanno contribuito all'organizzazione l'Accademia AFSU (Accademia di Filosofia e Scienze Umane in Teramo) e l'Accademia APAV (Accademia Piceno Aprutina) che perseguono gli stessi obiettivi di promozione e diffusione del dialogo interculturale e, nello specifico, di innovazione e potenziamento delle pratiche didattiche nel processo di insegnamento, nonché di miglioramento della qualità della formazione in generale.

L'evento ha ricevuto il sostegno e il Patrocinio del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno e del Comune di Agerola. Gli organizzatori ringraziano altresì l'Azienda "Fior d'Agerola" che ha sponsorizzato l'iniziativa.

Il convegno è rivolto a tutti i docenti, ai Dirigenti Scolastici della Scuola Secondaria di Primo e Secondo Grado e in particolare, a tutti gli appassionati delle Scienze Matematiche Fisiche e Naturali. L'evento si propone di evidenziare non solo gli aspetti contenutistici e innovativi della Matematica Pura e delle sue applicazioni alle Scienze ma anche di condividere alcune esperienze didattiche di carattere interdisciplinare.

Giunto alla sua quinta edizione, è stato articolato come segue.

- 4 settembre: sessione dedicata alla “Giornata del libro e della lettura in Costiera”, iniziativa inserita dall’amministrazione comunale di Agerola nel Programma ufficiale della XIV edizione del Festival dell’Alta Costiera Amalfitana 2025.

Le attività programmate si svolgeranno presso l’Osservatorio Astronomico, adiacente al Campus Principe di Napoli.

La giornata sarà dedicata alla presentazione dei libri dei seguenti autori:

Marina Billwiller, Filomena Carrella, Renato Casolaro e Giuseppe Ferraro, Caterina Della Vecchia, Gea Finelli, Francesca Gerla, Angela Gionti e Maria Rotunno, Giovanni Liccardo, Antonio Martone, Mauro Pepe.

Saranno allestiti stand dedicati all’editoria, accessibili a chiunque ne abbia fatto richiesta.

- 5-7 settembre: seguendo la linea tradizionale delle precedenti edizioni, verranno presentate proposte relative alle discipline scientifiche (Matematica, Fisica, Chimica, Scienze della Terra, etc ...).

Le relazioni si terranno nella sede centrale del Campus.

Per stilare il Programma del convegno è stato necessario operare una selezione tra le numerose proposte pervenute da ogni parte d’Italia, selezione effettuata considerando, in particolare, le date di presentazione dei lavori, così da garantire una valutazione equa e coerente con i tempi stabiliti dal programma.

L'integrazione della Manifestazione con una giornata di Cultura "oltre la Matematica e le Scienze" è stata una scelta delle associazioni organizzatrici che, per rendere esaustiva una proposta didattica che tenga conto delle esigenze di oggi, ritengono:

- *la Promozione della lettura nell'insegnamento un aspetto fondamentale da valorizzare in quanto, causa il veloce avanzamento tecnologico e le problematiche scaturite da un eccessivo utilizzo dell'Intelligenza Artificiale, è sotto gli occhi di tutti un abbassamento del livello di competenze linguistiche negli studenti.*

- *la divulgazione di tematiche relative alle interrelazioni tra le varie discipline scientifiche (dalle scienze naturali, biologiche e geologiche alla fisica, alla matematica ed alla filosofia), in un momento in cui le nuove generazioni dovranno affrontare la difficile sfida ambientale, trarrà sicuramente una maggiore spinta dall'approfondimento della comunicazione linguistica.*

Anche in questa edizione, i partecipanti avranno l'opportunità di presentare dei Poster da esporre all'interno della sala convegni: il lavoro che susciterà il maggiore interesse e riceverà più apprezzamento da parte del pubblico, si aggiudicherà il "Premio Ager Scientiarum 2025".

Segmentare per comprendere: il funzionale di Mumford- Shah tra matematica e visione artificiale

Antonio Caserta*

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Firenze;

*I.I.S. Leonardo da Vinci, Firenze;

antonio.caserta@edu.unifi.it



Sunto: *La segmentazione di immagini rappresenta un passaggio fondamentale nella visione artificiale e nell'imaging medico. In questo articolo si analizza il modello di Mumford-Shah, un approccio variazionale per la segmentazione, e si discute la sua approssimazione proposta da Ambrosio e Tortorelli. Vengono presentate le formulazioni matematiche, la derivazione delle equazioni di Eulero-Lagrange e l'implementazione numerica in Matlab, con applicazioni su immagini mediche.*

Parole Chiave: *segmentazione, funzionale, Eulero-Lagrange, modello.*

Abstract: *Image segmentation represents a fundamental step in computer vision and medical imaging. This article analyzes the Mumford-Shah model, a variational approach to segmentation, and discusses the approximation proposed by Ambrosio and Tortorelli. The mathematical formulations, the derivation of the Euler-Lagrange equations, and the numerical implementation in Matlab are presented, with applications to medical images.*

Keywords: *segmentation, functional, Euler-Lagrange, model.*

1 - Introduzione

La segmentazione di immagini è una delle sfide fondamentali nella loro elaborazione, con applicazioni che spaziano dalla diagnostica medica alla visione artificiale. L'obiettivo è quello di suddividere un'immagine in regioni distinte e coerenti, tali che i pixel appartenenti alla stessa regione condividano proprietà simili, come l'intensità, il colore, la texture o altri attributi visivi. Questa operazione è un prerequisito per una vasta gamma di applicazioni, tra cui il riconoscimento di oggetti, l'analisi di scene, la diagnostica medica, la sorveglianza e la robotica.

1.1 Contesto applicativo

In ambito industriale, la segmentazione viene impiegata ad esempio per l'ispezione automatica di componenti, la rilevazione di difetti di produzione o il conteggio di oggetti su nastri trasportatori. In medicina, essa è cruciale per individuare e delimitare strutture anatomiche o patologie: tumori, lesioni cutanee, calcificazioni, vasi sanguigni. In meteorologia e telerilevamento, la segmentazione di immagini satellitari permette di distinguere tipologie di terreno, corpi idrici o aree urbane.

1.2 - Sfide della segmentazione

Sebbene concettualmente semplice, la segmentazione è resa complessa da una serie di fattori:

- Rumore: disturbi nell'immagine, sia di natura strumentale che ambientale, che rendono meno netti i contorni.

- Bordi sfumati: transizioni graduali tra regioni, dove non esiste un confine netto.
- Illuminazione variabile: cambiamenti di luce che possono alterare i valori di intensità, mascherando o falsando i confini reali.
- Complessità della scena: sovrapposizioni, ombre, occlusioni e forme irregolari che richiedono metodi robusti e adattivi.

1.3 - Evoluzione storica

I primi approcci di segmentazione si sono basati su metodi locali e semplici:

1. *Soglia globale* (Otsu, 1979), in cui un singolo valore di intensità viene scelto per separare oggetti e sfondo.
2. *Edge detection* tramite operatori differenziali come Sobel, Prewitt o Canny.
3. *Region growing*, in cui a partire da un punto seme si aggregano pixel simili.

Tuttavia, questi metodi risultano sensibili al rumore e spesso incapaci di trattare strutture complesse o bordi sfumati.

1.4 - L'approccio variazionale

Negli anni '80 e '90, si è diffusa una nuova filosofia: formulare la segmentazione come un problema di ottimizzazione di un *funzionale di energia*, derivato dal *calcolo delle variazioni*. L'idea è definire un'energia che sia bassa per segmentazioni "buone" e alta per segmentazioni "scarse". Questa energia tipicamente combina:

- un termine di fedeltà ai dati, che misura quanto la segmentazione riproduce l'immagine originale;
- un termine di regolarizzazione, che penalizza regioni con bordi eccessivamente frastagliati o rumore.

Il modello di Mumford–Shah (1989) rappresenta una delle più eleganti e potenti formulazioni in questa direzione, permettendo una descrizione matematica rigorosa del problema di segmentazione a frontiera libera.

1.5 - Obiettivi di questo lavoro

In questo articolo ci proponiamo di:

1. Introdurre il modello di Mumford–Shah e le sue proprietà fondamentali.
2. Descrivere l'approssimazione di Ambrosio–Tortorelli e il suo ruolo nella risoluzione numerica.
3. Derivare le equazioni di Eulero–Lagrange associate.
4. Mostrare esempi numerici su immagini mediche.

Inoltre, discuteremo vantaggi e limiti del metodo, confrontandolo con approcci alternativi presenti in letteratura; ripercorreremo un percorso didattico interdisciplinare svolto in una quinta di un Liceo Matematico incentrato sul modello variazionale di Mumford–Shah.

2 - Il Modello di Mumford–Shah

Il modello di Mumford–Shah, introdotto nel 1989 da David Mumford e Jayant Shah (1989), costituisce uno dei più importanti approcci variazionali per la segmentazione di

immagini. L'idea centrale è formulare il problema come la ricerca di una funzione u che approssimi l'immagine originale f e di un insieme di curve K che rappresentano i contorni delle regioni. La funzione u deve essere regolare (Lipschitziana o C^1) al di fuori di K , mentre lungo K può presentare discontinuità.

2.1 - Formulazione matematica

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il dominio dell'immagine (tipicamente un rettangolo) e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ l'immagine osservata, eventualmente rumorosa. Il funzionale di energia proposto da Mumford e Shah è

$$E_{MS}(u, K) = \lambda \int_{\Omega \setminus K} (u - f)^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \nu \mathcal{H}^1(K),$$

dove:

- $\lambda > 0$ è un parametro di *fedeltà ai dati*;
- $\nu > 0$ è un parametro di *regolarizzazione della frontiera*;
- $\mathcal{H}^1(K)$ è la misura di Hausdorff unidimensionale, che rappresenta la lunghezza totale dei contorni.

2.2 - Interpretazione dei termini

Il primo termine penalizza la differenza tra l'immagine ricostruita u e quella osservata f , imponendo che il risultato sia vicino ai dati originali.

Il secondo termine controlla la regolarità di u all'interno delle regioni, impedendo oscillazioni spurie e riducendo il rumore.

Il terzo termine penalizza la complessità geometrica del bordo K , favorendo contorni più corti e regolari.

2.3 - Caratteristiche del modello

Il modello di Mumford-Shah ha alcune proprietà distintive:

1. separazione esplicita dei contorni: i bordi K sono entità geometriche separate dalla funzione u ;
2. preservazione dei dettagli significativi: grazie al termine di fedeltà, le strutture importanti dell'immagine vengono mantenute;
3. riduzione del rumore: la regolarizzazione interna elimina variazioni ad alta frequenza non strutturali.

2.4 - Problemi di ottimizzazione

La minimizzazione di E_{MS} è un *free discontinuity problem*, in cui sia la funzione u che il set K sono incogniti. La ricerca del minimo globale è estremamente complessa:

1. lo spazio delle possibili curve K è infinito dimensionale;
2. il problema è non convesso e può avere più minimi locali;
3. richiede la gestione di cambiamenti topologici dei contorni (fusione, divisione, omparsa/scomparsa).

Questi aspetti rendono difficile un approccio diretto, soprattutto in contesti numerici.

2.5 - Relazione con altri modelli

Il modello di Mumford-Shah è strettamente legato ad altre formulazioni della segmentazione, come i modelli attivi (*snake* e *level set*) e i metodi basati su *total variation* (TV). Rispetto a questi, esso offre una rappresentazione più naturale della discontinuità, trattandola come un'entità geometrica vera e propria e non solo come una variazione brusca della funzione.

2.6 - Limitazioni

Nonostante la sua eleganza, il modello originale presenta due limiti pratici principali:

1. L'elevata complessità computazionale della minimizzazione diretta.
2. La difficoltà di implementazione dovuta alla necessità di rappresentare e aggiornare K durante l'ottimizzazione.

Queste difficoltà hanno motivato lo sviluppo di approssimazioni più semplici da trattare numericamente, tra cui la formulazione di Ambrosio-Tortorelli che verrà discussa nella sezione successiva.

3 - Sfide computazionali

Il termine $H^1(K)$ rende difficile un'ottimizzazione diretta. Infatti:

1. K è ignoto e deve essere trovato assieme a u .

2. È necessario ottimizzare in uno spazio misto funzione-insieme.
3. La frontiera è libera, ossia fa parte della soluzione e non è nota a priori.
4. Problemi simili compaiono in fluidodinamica (frontiere di fase), frattura nei solidi e modelli di crescita.

4 - Approssimazione di Ambrosio - Tortorelli

La minimizzazione diretta del funzionale di Mumford-Shah è estremamente complessa a causa della natura discontinua della soluzione e della presenza del set K come incognita geometrica. Nel 1990, Luigi Ambrosio e Vincenzo Maria Tortorelli [2] proposero un'approssimazione regolare del problema, che ha reso possibile affrontare la segmentazione con strumenti numerici più semplici e robusti.

4.1 - Idea fondamentale

L'idea chiave è sostituire l'insieme dei contorni K con una funzione di fase $v : \Omega \rightarrow [0, 1]$, che agisca come indicatore dei bordi:

- $v \approx 1$ all'interno delle regioni omogenee;
- $v \approx 0$ in corrispondenza dei bordi.

In questo modo, il bordo K non è più una curva esplicita, ma emerge naturalmente come la zona in cui v assume valori bassi.

4.2 - Formulazione del funzionale

Il funzionale di Ambrosio - Tortorelli è definito come:

$$E_\varepsilon(u, v) = \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \alpha \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{\alpha}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - v)^2 dx,$$

dove $\varepsilon > 0$ è un parametro che controlla la *larghezza della transizione* tra $v=1$ e $v=0$.

4.3 - Significato dei termini

- Termine di fedeltà ai dati: identico a quello di Mumford-Shah, forza u ad essere vicino all'immagine originale f .
- Regolarizzazione interna ponderata da v^2 : la derivata di u è penalizzata meno nelle zone in cui $v \approx 0$, cioè vicino ai bordi.
- Regolarizzazione di v : il termine

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

controlla la regolarità della funzione di fase evitando transizioni troppo brusche .

- Potenziale doppio pozzetto: il termine $(1/4\varepsilon) (1 - v)^2$ forza v a stare vicino a 1 (regioni) o 0 (bordi), con una transizione graduale di ampiezza proporzionale a ε .

4.4 - Vantaggi rispetto a Mumford - Shah

L'approssimazione di Ambrosio-Tortorelli presenta diversi vantaggi pratici:

1. Il problema diventa *differenziabile* e adatto a metodi numerici classici, come la discesa del gradiente.

2. Non è necessario rappresentare esplicitamente il set K : i contorni emergono come sottolivelli di v .
3. È possibile sfruttare schemi di discretizzazione standard (finite differenze, elementi finiti) senza trattamenti geometrici speciali.

4.5 - Limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

Ambrosio e Tortorelli hanno dimostrato, nel senso della Γ -convergenza, che:

$$E_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\Gamma} E_{MS},$$

cioè la famiglia di funzionali E_ε converge a quello di Mumford-Shah quando ε tende a zero. Questo garantisce che le soluzioni dell'approssimazione convergono a quelle del problema originale.

4.6 - Implicazioni pratiche

La scelta di ε è cruciale:

- ε piccolo \Rightarrow bordi più netti, ma possibile instabilità numerica.
- ε grande \Rightarrow bordi sfumati, ma migliore stabilità e convergenza numerica.

Tipicamente si sceglie ε in funzione della risoluzione dell'immagine e della scala dei dettagli che si vogliono rilevare.

4.7 - Verso l'implementazione numerica

La formulazione regolare di Ambrosio-Tortorelli consente di derivare facilmente le equazioni di Eulero-Lagrange per u e v , aprendo la strada a una soluzione iterativa che verrà illustrata nella sezione successiva.

5 - Derivazione delle Equazioni di Eulero - Lagrange

Per risolvere il problema di minimizzazione associato al funzionale di Ambrosio-Tortorelli, si ricorre al calcolo delle variazioni per ottenere le condizioni necessarie di ottimalità. Dato il funzionale:

$$E_\varepsilon(u, v) = \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \alpha \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{\beta}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - v)^2 dx,$$

cerchiamo le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto a u e v .

5.1- Variazione rispetto a u

Consideriamo una variazione $u \rightarrow u + t \varphi$, con φ funzione liscia a supporto compatto in Ω . La derivata prima di E_ε rispetto a t vale:

$$\left. \frac{d}{dt} E_\varepsilon(u + t\varphi, v) \right|_{t=0} = 2\lambda \int_{\Omega} (u - f)\varphi dx + 2 \int_{\Omega} v^2 \nabla u \cdot \nabla \varphi dx.$$

Integrando per parti il secondo termine e assumendo condizioni di Neumann omogenee ($\nabla u \cdot n = 0$ su $\partial\Omega$), otteniamo:

$$\int_{\Omega} v^2 \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2 \nabla u) \varphi \, dx.$$

Pertanto, la condizione di stazionarietà rispetto a u è:

$$-\nabla \cdot (v^2 \nabla u) + \lambda(u - f) = 0 \text{ in } \Omega. \quad (1)$$

5.2- Variazione rispetto a v

Ora consideriamo una variazione $v \rightarrow v + t \psi$, con ψ liscia a supporto compatto. Calcoliamo la derivata:

$$\left. \frac{d}{dt} E_{\varepsilon}(u, v + t\psi) \right|_{t=0} = 2 \int_{\Omega} v |\nabla u|^2 \psi \, dx + 2\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi \, dx - \frac{\alpha}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - v) \psi \, dx.$$

Integrando per parti il secondo termine (con condizioni di Neumann omogenee $\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$), otteniamo:

$$\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi \, dx = -\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \Delta v \psi \, dx.$$

La condizione di stazionarietà rispetto a v è dunque:

$$-\alpha\varepsilon \Delta v + v |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{4\varepsilon} (1 - v) = 0 \text{ in } \Omega. \quad (2)$$

5.3 - Sistema accoppiato

Combinando (1) e (2), otteniamo il sistema PDE:

$$-\nabla \cdot (v^2 \nabla u) + \lambda(u - f) = 0, \quad (3)$$

$$-\alpha \varepsilon \Delta v + v |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{4\varepsilon} (1 - v) = 0. \quad (4)$$

Queste equazioni devono essere risolte con condizioni di Neumann naturali:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

5.4 - Interpretazione fisica

- L'equazione per u (3) è un'equazione di diffusione anisotropa, dove il coefficiente di diffusione v^2 riduce la propagazione del segnale vicino ai bordi.
- L'equazione per v (4) bilancia tre effetti: la regolarità spaziale di v (Δv), la penalizzazione del gradiente di u (che abbassa v vicino ai bordi) e il potenziale doppio pozzetto che spinge v verso 1 (regioni) o 0 (bordi).

5.5 - Osservazioni computazionali

Il sistema (3)-(4) è accoppiato e non lineare. Una strategia comune di risoluzione è alternare:

1. Aggiornamento di u risolvendo (3) con v fissato.
2. Aggiornamento di v risolvendo (4) con u fissato.

3. Questa procedura iterativa, detta schema di discesa alternata, garantisce la riduzione dell'energia e facilita la convergenza monotona.

6 - Implementazione Numerica

6.1 Discretizzazione

Usiamo differenze finite centrali per ∇ e Δ , e un aggiornamento alternato di u e v :

$$u^{k+1} = \frac{u^k + \Delta t(\lambda u_0 + \nabla \cdot (v^2 \nabla u^k))}{1 + \lambda \Delta t},$$
$$v^{k+1} = v^k + \Delta t \left(\mu \varepsilon \Delta v^k - v^k |\nabla u^{k+1}|^2 + \frac{\mu(1 - v^k)}{4\varepsilon} \right).$$

6.2 Scelta dei parametri

Il passo temporale Δt deve rispettare condizioni di stabilità (CFL), tipicamente $\Delta t \leq 0.01$ per immagini 256×256 .

7 - Sistema lineare e implementazione in Matlab

Codice Matlab che implementa il sistema di Eulero-Lagrange con il metodo della discesa del gradiente.

```

%Parametri
epsilon=0.1;
nIter=200;
dt=5e-3;
lambda=0.5;
mu=2;

%Carica Immagine
I=imread('peppers.png');
I=im2double(I);
if size(I,3)==3
I=rgb2gray(I);
end

u=I;
[nx,ny]=size(I);
Lx=1;
Ly=1;
dx=Lx/nx;
dy=Ly/ny;
[x,y]=meshgrid(linspace(0,Lx,nx),linspace(0,Ly,ny));
v=ones(size(I));

%Discesa del gradiente
for k=1:nIter
[ux,uy]=gradient(u);
[vx,vy]=gradient(v);

div_u=divergence(v.^2.*ux,v.^2.*uy);
u=(u+dt*(div_u+lambda*I))./(1+dt*lambda);
[ux,uy]=gradient(u);
grad_u_sq=ux.^2+uy.^2;
lap_v=del2(v);
v=v+dt*(mu*epsilon*lap_v-v.*grad_u_sq+mu*(1-v)/(4*epsilon));

```

Teorema 1. Per minimizzare il funzionale di Ambrosio-Tortorelli con aggiornamenti alternati abbiamo applicato il metodo della discesa del gradiente come fatto per u .

```
%Visualizzazione
if mod(k,50)==0 || k==nIter
fprintf('Iterazione:%d\n',k);

subplot(1,2,1);imshow(I,[]); title('Immagine originale');
hold on;
contour (v<0.5,[1 1], 'r', 'LineWidth',1.5);
title('Contorno rilevato'); hold off;
drawnow

edges=edge(u, 'canny');
subplot(1,2,2)
imshow(I, []);
hold on;
h=imshow(cat(3,edges,zeros(size(edges)),zeros(size(edges))));
set(h, 'AlphaData',0.6)
title('Contorni segmentati sovrapposti')
```

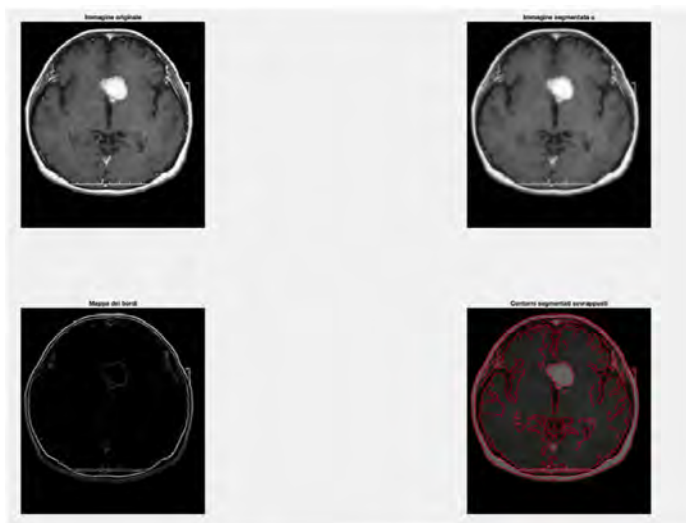


Fig. 1- In alto a sinistra immagine di una lesione originale, a destra lesione segmentata, in basso a sinistra i contorni e in basso a destra l'immagine segmentata con i contorni.

9 - Conclusioni

Abbiamo presentato il modello di Mumford-Shah e l'approssimazione di Ambrosio-Tortorelli, con una implementazione numerica e risultati su immagini reali. Futuri sviluppi possono includere versioni isotrope o non locali.

10 - Percorso Didattico Interdisciplinare: Laboratorio in una quinta di un Liceo Matematico con il Modello di Mumford-Shah

Negli ultimi anni l'insegnamento della matematica e dell'informatica nelle scuole superiori ha visto un crescente interesse verso laboratori in cui gli studenti possano sperimentare e applicare concetti teorici a problemi concreti. In un liceo matematico, un laboratorio basato sul modello di Mumford-Shah può permettere agli studenti di lavorare su problemi di segmentazione delle immagini, unendo matematica, informatica e logica applicata. Questo percorso aiuta gli studenti a capire come la matematica possa essere usata per risolvere problemi reali, come distinguere le diverse parti di un'immagine digitale. Il modello di Mumford-Shah nasce per suddividere un'immagine in regioni più semplici e omogenee. L'idea di base è rappresentare l'immagine come una funzione che assume valori diversi nelle varie aree dell'immagine e cerca di identificare i contorni principali tra queste regioni. In pratica, il modello individua zone "uniformi" e linee di separazione, permettendo di evidenziare oggetti e dettagli importanti. Sebbene il concetto sia

matematicamente complesso, il laboratorio semplifica il problema introducendo strumenti computazionali e algoritmi che permettono agli studenti di ottenere risultati visivi immediati.

Dal punto di vista matematico il laboratorio introduce concetti di base legati alle immagini digitali, come i gradienti e il laplaciano, spiegati in maniera intuitiva: il gradiente misura quanto cambia l'intensità dei pixel tra un punto e i suoi vicini, mentre il laplaciano aiuta a capire dove ci sono cambiamenti importanti nell'immagine. Gli studenti imparano quindi come queste grandezze possono essere usate per evidenziare i contorni delle immagini e migliorare la segmentazione. Dal punto di vista informatico, gli studenti possono imparare a scrivere programmi in MATLAB per implementare il modello. In maniera semplice, vengono introdotti concetti come la discretizzazione dell'immagine (cioè trasformare l'immagine in una griglia di valori numerici) e la discesa del gradiente (un metodo iterativo per trovare la soluzione migliore). Il laboratorio mostra passo passo come calcolare il gradiente numerico, aggiornare i valori dei pixel e ottenere immagini segmentate in modo progressivo. In questo modo gli studenti vedono come la matematica teorica possa diventare un algoritmo concreto che funziona sul computer. Durante le attività pratiche, gli studenti lavorano in gruppi su immagini semplici, osservando come diversi parametri influenzino la segmentazione. Ad esempio, modificando alcuni valori nel programma, contorni diventano più netti o più sfumati, e gli studenti possono confrontare il risultato con le loro aspettative. Questo approccio pratico favorisce la comprensione dei concetti astratti e stimola il pensiero critico,

perché richiede di osservare, modificare e interpretare i risultati ottenuti. Il laboratorio offre anche l'opportunità di collegamenti interdisciplinari. In scienze e fisica, si possono discutere fenomeni analoghi, come la diffusione o la propagazione di segnali. In arte e comunicazione visiva, gli studenti possono riflettere sul modo in cui la segmentazione aiuta a evidenziare forme e contorni, migliorando la percezione dell'immagine. Questo rende l'attività più coinvolgente e mostra come la matematica possa integrarsi con altri ambiti di studio. Alla fine del percorso, gli studenti realizzano un progetto in cui applicano l'algoritmo a immagini più complesse e documentano i risultati. Possono confrontare le immagini originali con quelle segmentate, descrivere le differenze e spiegare le scelte fatte durante l'implementazione. Questo momento finale consolida le competenze acquisite e permette agli studenti di sviluppare autonomia, spirito critico e capacità di lavorare in gruppo. In conclusione, un laboratorio basato sul modello di Mumford-Shah offre agli studenti di quinta superiore un'occasione concreta per vedere come la matematica e l'informatica possano lavorare insieme per risolvere problemi reali.

Attraverso la combinazione di teoria, programmazione e sperimentazione pratica, gli studenti possono apprendere concetti matematici avanzati in modo intuitivo e coinvolgente, sviluppando allo stesso tempo competenze trasversali come il problem solving e la comunicazione dei risultati scientifici.

Bibliografia

AMBROSIO L., TORTORELLI V., (1990). Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8):999–1036.

CHAN T., VESE L., (2001). Active contours without edges, *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(2):266–277.

MUMFORD D., SHAH J., (1989) Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5):577–685.

Curve e contorni

Dalla curva di Koch agli insiemi di Caccioppoli

Loredana Biacino*

* Già dip. Matematica “Federico II”, Na; loredana.biacino@libero.it



Sunto: *In questo lavoro cerco di mettere in relazione alcuni argomenti che sono stati da tempo introdotti nell’insegnamento secondario, quali la curva di Peano e la curva di Koch, con qualche considerazione di tipo nuovo. Si sottolineano per questo alcune proprietà interessanti delle due curve in oggetto: entrambe hanno lunghezza infinita, ma mentre la curva di Peano ha misura bidimensionale positiva, Ernesto Cesaro ha dimostrato che la curva di Koch ha misura bidimensionale nulla. Dalla curva di Koch si passa subito al fiocco di neve: qualunque successione di poligoni le cui aree tendano all’area del fiocco di neve è tale che i perimetri costituiscano una successione illimitata. Cosa accade invece per figure geometriche più semplici? Degli esempi ci fanno capire l’utilità di considerare i domini piani il cui contorno è una curva di lunghezza finita come discorso introduttivo ai così detti “insiemi di Caccioppoli”.*

Parole Chiave: *Curva di Peano, curva di Koch, insiemi piani di misura nulla, insiemi di Caccioppoli.*

Abstract: *In this work, I attempt to connect some topics that have long been introduced in secondary education – such as the Peano curve and the Koch curve – with some new considerations. To this end, I highlight certain interesting properties of the two curves in question: both have infinite length, but while the Peano curve has a positive two-dimensional measure, Ernesto Cesàro demonstrated that the Koch curve has zero two-dimensional measure. From the*

Koch curve, we immediately move to the snowflake: any sequence of polygons whose areas converge to the area of the snowflake will have perimeters that form an unbounded sequence. But what happens with simpler geometric figures? Some examples help us understand the usefulness of considering planar domains whose boundaries are curves of finite length, as an introductory discussion to the so-called "Caccioppoli's sets".

Keywords: Peano curve, Koch curve, planar set of zero measure, Caccioppoli's sets.

1 - Introduzione

Può essere interessante, dopo aver preso confidenza con curve piane, quali circonferenze, ellissi, iperboli etc.. e con grafici di funzioni reali, interrogarsi su alcuni problemi quali ad esempio: esistono curve continue sprovviste di tangente in ogni punto? Ci sono curve che occupano uno spazio limitato ma hanno lunghezza infinita? Una curva occupa sempre uno spazio ad una dimensione? Questi quesiti non sono di immediata risoluzione e portano a considerazioni interessanti: se li sono posti molti matematici a diverse riprese, tra la metà dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento. Per quanto riguarda il problema delle tangenti si riteneva da millenni che automaticamente ogni funzione continua dovesse essere dotata di tangente ovunque tranne al più in un numero finito di punti.

Il primo esempio noto di funzione continua che non possiede tangente in un insieme di punti infinito e denso, ma numerabile, è dovuto a Bernhard Riemann (1826- 1866), che lo ideò nel 1854, ma fu conosciuto solo qualche anno dopo. Karl Weierstrass (1815- 1897) a sua volta fornì un esempio nel 1861,

pubblicato nel 1872, di una funzione continua e non derivabile in alcun punto.



Weierstrass

Karl Weierstrass

Scrive Gaston Darboux (1842 - 1917) nel suo saggio "Mémoire sur les fonctions discontinues" che fino all'apparizione della memoria di Riemann sulle funzioni trigonometriche nessun dubbio si era levato circa l'esistenza di funzioni continue senza derivata. Dei bravissimi geometri, tra cui Ampère avevano cercato di dare una dimostrazione rigorosa dell'esistenza della derivata. Nessuno di tali tentativi era stato coronato dal successo, ciò non di meno, nessuno avrebbe dubitato di tale derivata.

Delle funzioni di Riemann e di Weierstrass vennero a conoscenza tutti i matematici del momento. La funzione di

Weierstrass ebbe un impatto ancora maggiore perché provava che la continuità non implica in alcun modo la derivabilità, in quanto ci possono essere funzioni continue in tutti i punti di un intervallo ma non derivabili in alcun punto: questo generò spesso reazioni di disappunto.



Charles Hermite

Ad esempio Charles Hermite (1822- 1901) commentò il fatto, nella lettera a Stieltjes del 20 maggio 1893, con le seguenti parole: "Mi ritraggo con spavento ed orrore da questa lamentevole disgrazia delle funzioni che non posseggono derivata". Nonostante la repulsione di Hermite e di altri matematici, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo paradossi e anomalie tipo la funzione di Weierstrass si andarono accumulando.

2 - Curve che riempiono un quadrato

Prima di entrare nel merito delle questioni trattate si ricordano alcune definizioni basilari.

2.1 - Lunghezza di un arco di curva

Data una curva nel piano, per definirne la lunghezza procediamo al seguente modo.



Scelto un numero finito di punti lungo la curva, connettiamo ogni punto al successivo con un segmento, otteniamo una poligonale inscritta nella curva, la cui lunghezza è la somma delle lunghezze dei segmenti via via ottenuti: tale lunghezza è una approssimazione della lunghezza della curva, quanto più fitti sono i punti tanto più il valore è prossimo al valore reale della lunghezza della curva, che per definizione è l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte nella curva.

La lunghezza di una curva può essere finita e allora la curva si dice rettificabile, o può essere infinita e allora la curva si dice non rettificabile. Ogni circonferenza è una curva rettificabile e la sua misura può essere approssimata mediante i perimetri di una successione di poligoni regolari inscritti.

2.2 - Curve di Jordan



Camille Jordan

Una curva di Jordan è una curva immagine biunivoca e continua di un intervallo. In generale una curva continua si rappresenta nella forma $x = x(t)$; $y = y(t)$ con $x(t)$ e $y(t)$ funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ tali che se $t', t'' \in]a, b[$ sono diversi tra loro, i punti $P' = (x(t'), y(t'))$ e $P'' = (x(t''), y(t''))$ non coincidono. La curva è chiusa se, oltre a quanto detto fin qui, si ha che gli estremi della curva, $A = (x(a), y(a))$ e $B = (x(b), y(b))$, coincidono. Deve il suo nome al matematico francese Camille Jordan (1838- 1922) che la definisce nella prima edizione del terzo volume del *Cours d'analyse* del 1887; egli dimostra che una curva di Jordan rettificabile ha misura

bidimensionale (area) nulla, cioè è rinchiudibile in un numero finito di intervalli del piano di misura complessiva piccola quanto si vuole. Sussiste il seguente:

Teorema - Una curva di Jordan divide il piano in due regioni, una interna e l'altra esterna: due punti della stessa regione possono essere congiunti con un cammino poligonale che non interseca la curva, mentre due punti appartenenti a regioni diverse possono essere uniti solo mediante poligoni che intersecano la curva.

La dimostrazione analitica del precedente teorema non è facile: molti hanno cercato di determinarla, e anche lo stesso Jordan, ma commettevano errori. La prima dimostrazione corretta si ebbe nel 1905 ad opera di O. Veblen.

2.3 - La curva di Peano

Il risultato più originale e famoso di Giuseppe Peano (1858-1932), quello che maggiormente risente del generale proposito di rigorizzazione dell'analisi e il più citato dei suoi lavori, è l'articolo sui «*Math. Annalen*» del 1890 relativo alla curva continua che riempie un quadrato (Peano, 1890).

Si tratta di un'applicazione continua dell'intervallo $I=[0,1]$ sull'intervallo I^2 , di equazioni parametriche $x=x(t)$, $y=y(t)$ con t appartenente ad I , essendo $x(t)$ e $y(t)$ funzioni continue. Ma tale rappresentazione ovviamente non è biunivoca! Peano non fornì in un primo momento una rappresentazione analitica di tale curva e nemmeno una rappresentazione geometrica, ma solo una formulazione algebrica.

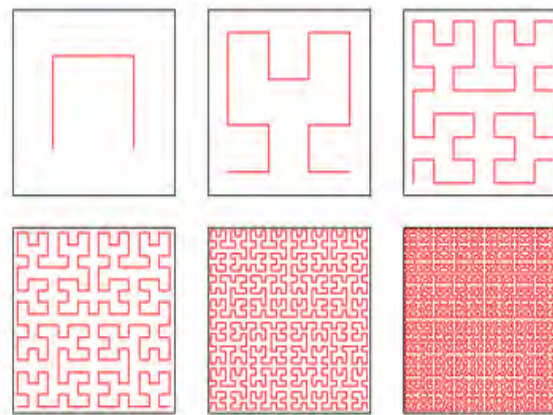


Giuseppe Peano e David Hilbert

L'anno dopo, sempre sui «*Math. Annalen*», compare un articolo analogo da parte di David Hilbert (1862- 1943), dove viene data per la prima volta una rappresentazione geometrica di una curva simile a quella di Peano.

La curva di Hilbert si ottiene al seguente modo: al primo passo si divide il quadrato in quattro quadrati uguali e si congiungono nell'ordine i centri di tali quadrati con continuità come in figura partendo dal punto in basso a sinistra e terminando col punto in basso a destra. Al passo successivo si divide a sua volta ognuno dei precedenti quadrati in quattro quadrati uguali, si considerano i loro centri e si congiungono come in figura, partendo sempre dal punto in basso a sinistra fino al punto in basso a destra. Al passo successivo si divide ognuno dei precedenti quadrati in quattro quadrati ancora più piccoli e si procede allo stesso modo. Proseguendo

indefinitamente questo processo al limite si otterrà una curva che passa per tutti i punti del quadrato.

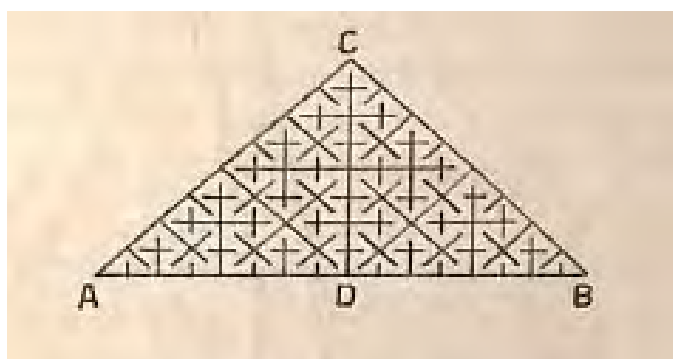


Curva di Hilbert

Nel 1897 Ernesto Cesaro (1859 - 1906) pubblica la prima rappresentazione analitica della curva di Peano (Cesaro, 1897). Nel 1905 propone egli stesso una curva che riempie un'area triangolare.

Egli afferma che, come si evince dalla curva di Peano, c'è uno stretto legame tra la lunghezza di una curva e la sua tendenza a riempire un'area. Tenendo presente questo legame si propone di suddividere con una successione di curve un triangolo in modo da ridurre le aree che si determinano negli interstizi fino a farle tendere a zero. Considera un triangolo isoscele ABC , retto in C e lo divide in due triangoli eguali mediante la mediana CD . Operando allo stesso modo sui triangoli ADC e CDB , si determinano quattro triangoli, poi otto, etc .. Si divide così, per ogni n , ABC in 2^n triangoli dello stesso tipo di ABC . Supponiamo di numerare tali triangoli e

immaginiamo un punto M che passi (con continuità) dal primo all'ultimo triangolo passando per tutti i triangoli intermedi nell'ordine indicato dai loro lati. Se, al crescere di n , M ripete il suo cammino da A a B , il suo percorso tenderà, al tendere di n all'infinito, verso una curva che passerà per tutti i punti di ABC .



Successivamente nel suo *Formulario*, nel 1908, Peano pubblicava una successione di curve come quella di Hilbert.



Foto della terrazza della casa di Peano a Cavoretto,

Ammirandone la geniale formulazione geometrica, faceva pure costruire una riproduzione di una approssimante della sua curva sul terrazzo della villa di Cavoretto, vicino Moncalieri, acquistata nell'estate del 1891: era formata da mattonelle nere e bianche: purtroppo ne resta solo una fotografia.

Una rappresentazione algebrica molto semplice di una curva continua che riempie il quadrato unitario, analoga a quelle di Peano e di Hilbert si trova in (Lebesgue, 1904, p. 44). Uno studio della curva di Peano e la rappresentazione algebrica che ne diede Lebesgue si trova in (Biacino, 1921), dove sono esposte anche altre curve di particolare interesse.

Si tenga presente che le curve, continue, di Peano e di Hilbert che riempiono un quadrato non sono curve di Jordan, in quanto non sono rappresentative di una corrispondenza biunivoca.

3 - Una curva di Jordan non rettificabile: la curva di Koch

Nei primi anni del '900 era stato pubblicato un lavoro che poneva all'attenzione una curva continua e non dotata di tangente in nessun punto, la curva di Helge von Koch (1870 – 1924) cui era seguito uno studio delle curve piane da parte dello stesso autore, un matematico svedese dell'Università di Stoccolma (von Koch, 1906).

La curva di von Koch si ottiene come limite di una successione di linee poligonali partendo da un segmento di lunghezza unitaria, al primo passo è eliminata la parte centrale di tale segmento e sostituita da due segmenti di lunghezza eguale alla parte rimossa, che formano un triangolo privo di base; si ottiene una poligonale con 4 lati; al secondo passo da ognuno dei quattro lati della figura ottenuta in precedenza si sottrae la parte centrale e la si sostituisce con due segmenti ognuno di lunghezza eguale a quella del segmento rimosso; si ottiene una poligonale con 16 lati eguali

per la quale si può ripetere la precedente costruzione; al passo successivo si itera la precedente procedura su ognuno dei 16 lati e così di seguito indefinitamente.

La curva di Koch è la curva (matematica, che non si può disegnare) che si ottiene al limite iterando la procedura indefinitamente.

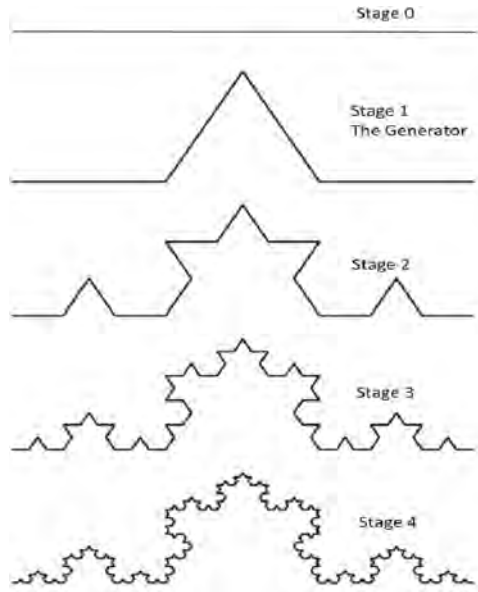


Helge von Koch

Già al quarto passo si può constatare come sia quasi impossibile iterare la procedura. La curva non è il grafico di alcuna funzione reale.

E' questa similitudine tra il tutto e le sue parti, perfino quelle infinitesime, che ci porta a considerare la curva di Koch alla stregua di una linea veramente meravigliosa tra tutte. Se fosse dotata di vita, non sarebbe possibile annientarla senza sopprimerla al primo colpo, poiché in caso

contrario rinascerebbe incessantemente dalle profondità dei suoi triangoli, come la vita dall'universo (Cesaro, 1905).



La curva di von Koch

3.1 - La curva di Koch non è una curva rettificabile

La curva di Koch è una curva di Jordan, in quanto è una curva continua e non ci sono punti doppi, in quanto nella costruzione ad ogni passo si aggiungono nuovi punti in zone non occupate dalla curva nel passo precedente. Ogni poligonale che interviene nella costruzione della curva di Koch è inscritta nelle successive e tutte sono inscritte nella curva di Koch. Tutti i vertici delle poligonali sono punti della curva di Koch che via via si aggiungono nella costruzione in un processo infinito. Si ottiene al passo n una poligonale

costituita da $N = 4^n$ lati tutti della stessa lunghezza $L = 3^{-n}$, di lunghezza complessiva $N \times L = 4^n 3^{-n}$, che tende a infinito essendo il termine generale di una successione geometrica di ragione $4/3 > 1$. L'estremo superiore dei valori della successione è ∞ e quindi la curva che si ottiene al limite ha lunghezza infinita. Si osservi che per la similitudine di ogni arco della curva al tutto, ogni arco ha lunghezza infinita e questo fatto già mostra, secondo Cesaro, la tendenza della curva ad occupare un'area.

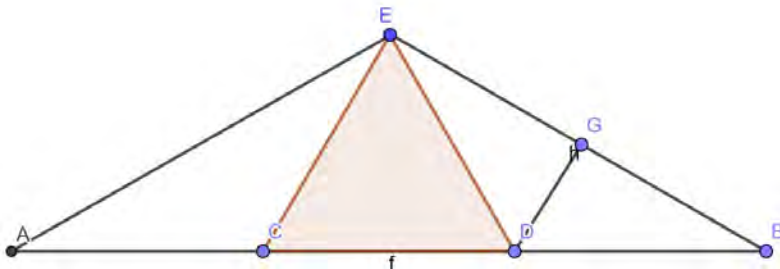
È una curva continua, ma sprovvista di tangente in ogni punto in quanto se una curva è provvista di tangente fissando un suo punto P e considerando ingrandimenti sempre maggiori della curva attorno a P si vede che essa tende a confondersi con una retta passante per P , mentre in questo caso la curva si ripropone sempre uguale. È autosimilare, cioè matematicamente generata da un processo che si ripete indefinitamente sempre eguale a sé stesso, sempre con lo stesso fattore di proporzionalità. Ovviamente se lo schema di partenza è diverso avremo uno sviluppo diverso, ma nello stesso ordine d'idee.

3.2 - La curva di Koch ha area nulla

Della curva di von Koch si occupò Ernesto Cesaro (1859 - 1906), che la approssima ad ogni passo mediante una congiungente i vertici delle figure triangolari ottenute nella costruzione della curva allo stesso passo (Cesaro, 1905). Si viene così a formare una intercapedine, tra la poligonale al passo n della curva data e quella ottenuta da Cesaro, la cui area egli dimostra essere infinitesima al divergere di n . Quindi la curva pur non essendo rettificabile ha misura piana nulla.

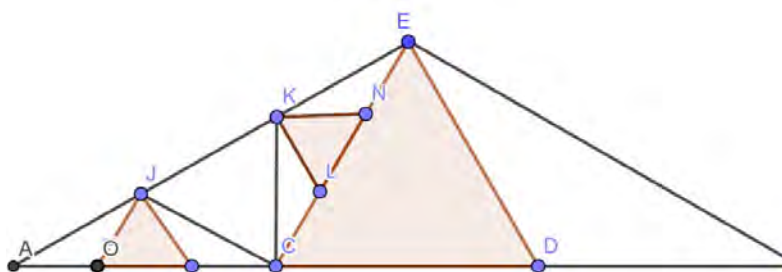


Dimostriamo che l'area dell'intercapedine è infinitesima. Al primo passo osserviamo che il triangolo ABE racchiude la nostra curva: supposto il segmento di partenza AB unitario, la sua area è $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4}$. Al passo successivo si vede che la curva è racchiusa nei due triangoli compresi tra la configurazione iniziale e i due segmenti che congiungono il vertice con gli estremi del segmento di partenza, triangoli che si ottengono dal triangolo ABE eliminando il triangolo equilatero centrale di lato $1/3$, che ha area uguale ai due triangoli che restano in quanto i tre triangoli hanno le basi eguali tutte a $1/3$ e la stessa altezza. Pertanto la figura che ricopre la nostra curva ha area eguale a $\frac{2}{3} \Delta$.



Continuando nella suddivisione la situazione si ripete, ogni triangolo del passo precedente risulta diviso in tre triangoli

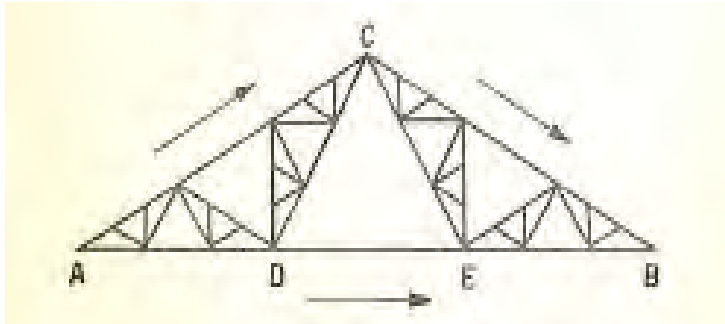
equivalenti: infatti il triangolo JCK è equilatero in quanto gli angoli in J e K si verifica subito che sono di 60° ; analogamente si verifica che sono isosceli i triangoli AJC e CKE. Quindi $JK = KC = KE$, $JK = JC = JA$, da cui $KE = JA = JK$ e i triangoli EKC, JKC e AJC hanno le basi eguali e stessa altezza. Pertanto i tre detti triangoli sono equivalenti e solo due di essi bastano a ricoprire la curva. Quindi eliminando i triangoli che non ricoprono la curva si ottiene una figura la cui area complessiva è $\frac{2}{3}$ della precedente e pertanto coincide con $(\frac{2}{3})^2 \Delta$.



Lo stesso accade al passo successivo, in quanto ognuno dei triangoli precedenti risulta diviso in tre triangoli equivalenti e solo due di essi sono sufficienti a ricoprire la curva. La figura che rimane ha quindi area complessive eguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area della figura precedente e pertanto eguale a $(\frac{2}{3})^3 \Delta$.

Iterando tali calcoli teniamo presente che dobbiamo ad ogni passo moltiplicare per $\frac{2}{3}$ il risultato precedente; si perviene quindi alla formula generale al passo $n-1$ data da $(\frac{2}{3})^{n-1} \Delta$, si ottiene così Δ moltiplicato per il termine generale di una successione geometrica di ragione $\frac{2}{3} < 1$, prodotto che è quindi infinitesimo. Quindi al tendere di n all'infinito l'area dell'intercapedine tende a zero, e poiché la curva è sempre compresa in essa, l'area della curva è zero.

Cesaro propone il precedente modo di fare la dimostrazione, come suggerisce la seguente sua figura:



Nota:- Tutte le linee spezzate della costruzione di cui la curva di Koch rappresenta il limite sono tutte poligonali inscritte nella curva. Solo i vertici di tali spezzate sono punti della curva.

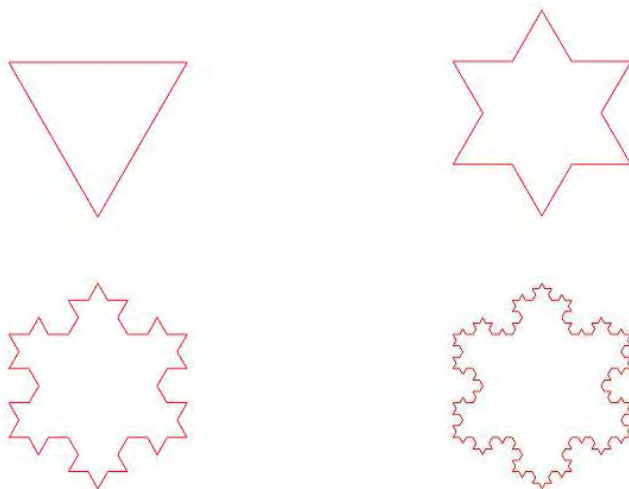
3.3 - La curva di Koch ha dimensione frattale strettamente compresa tra 1 e 2.

La curva di von Koch è una curva interessante anche perché è un semplice frattale: essa presenta il fenomeno dell'autosomiglianza, cioè ogni sua parte è simile al tutto in quanto essa si ottiene ad ogni passo sostituendo nella costruzione 3 parti eguali con 4 parti eguali alle precedenti e ripetendo questa operazione indefinitamente disponendo sempre le parti allo stesso modo. Quindi per quanto si proceda nella costruzione le parti che si aggiungono sono sempre simili delle precedenti.

Dicesi dimensione frattale l'esponente D a cui dobbiamo elevare 3 per avere 4. Se da 4 parti eguali se ne ricavano 4 eguali alle precedenti (è il caso di un segmento o una circonferenza) allora $D=1$. Nel caso della curva di von Koch si ha: $3^D=4$ e quindi $D= \log_3 4 = 1,26$, numero non intero compreso tra 1 e 2.

3.4 - Il fiocco di neve

La figura geometrica conosciuta col nome di *fiocco di neve* è una figura il cui contorno è costituito da 3 curve di Koch raccordate con continuità. Si tratta di una figura piana il cui contorno ha misura nulla e lunghezza infinita.



3.5 - Area del fiocco di neve

L'area racchiusa dal fiocco di neve si può calcolare al seguente modo: sia $\Delta = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ l'area del triangolo equilatero di partenza di lato l . Ad esso vengono aggiunti al passo uno tre triangoli equilateri di lato $l/3$ e quindi di area complessiva $3 \frac{1}{9} \Delta = \frac{1}{3} \Delta$; al passo successivo compaiono per ogni lato altri 4 triangoli di lato $l/9$ e quindi 12 triangoli di area complessiva $12 \cdot \frac{1}{9^2} \Delta = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \Delta$; al passo tre a ognuno dei precedenti triangoli se ne aggiungono altri 4 di lato $l/27$ e quindi di area complessiva $48 \cdot \frac{1}{9^3} \Delta = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \Delta$ e così di seguito si agghiederà sempre un termine che si ottiene moltiplicando per 4 e dividendo per 9 il risultato precedente.

La somma degli infiniti addendi è:

$$\begin{aligned} \Delta + \frac{1}{3} \Delta + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \Delta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \Delta + \dots &= \Delta + \frac{1}{3} \Delta \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right] = \\ &= \Delta \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{8}{5} \Delta \end{aligned}$$

Se una successione di poligoni approssima questa figura in modo che l'area dei poligoni approssimi tanto bene quanto si vuole l'area del fiocco allora necessariamente i perimetri dei poligoni non possono essere limitati. Infatti abbiamo già osservato che tutte le linee poligonali del tipo considerato in precedenza sono inscritte nella nostra figura ma abbiamo visto che le loro misure tendono all'infinito. C'è quindi una notevole differenza con quanto accade per il cerchio e quanto accade in questo caso a causa della merlettatura del bordo e del conseguente fatto che il perimetro del fiocco è infinito.

Invece per una figura a contorno curvilineo di lunghezza finita esistono senz'altro successioni di poligoni la cui area tende all'area della figura e il cui perimetro tende alla lunghezza del contorno e di conseguenza si mantiene limitato. Ma ovviamente, come vedremo, possono esserci anche successioni di poligoni la cui area tende all'area della figura ma tali che la lunghezza dei contorni tende all'infinito.

4 - Successioni di poligoni le cui aree tendono all'area di una data figura geometrica: limiti dei loro perimetri (se esistono)

Utilizzeremo nel seguito alcune nozioni su cui ci siamo soffermati in precedenza per cercare di comprendere, non nei particolari, ma in un senso complessivo, che possa essere compreso da un giovane non specialista della materia, alcune definizioni che si trovano in una serie di lavori degli anni 1951-1952 di Renato Caccioppoli (1904-1959). In tali lavori il matematico napoletano torna su una questione che aveva già affrontato in gioventù, cambiando il punto di vista: si tratta del problema della misura dell'area delle superfici curve. Alla fine dell'Ottocento il problema era già stato risolto per superfici che fossero sufficientemente regolari, Caccioppoli intendeva occuparsi del problema nel caso più generale, cioè per superfici quanto più possibili arbitrarie. Qui non ci soffermiamo sul modo in cui questi problemi, sia nel caso più elementare, sia nel caso trattato da Caccioppoli, venivano risolti. Ma accenniamo a una classe di superfici per le quali Caccioppoli svolge la sua teoria: le superfici che egli considera coincidono con le frontiere di domini dello spazio a tre

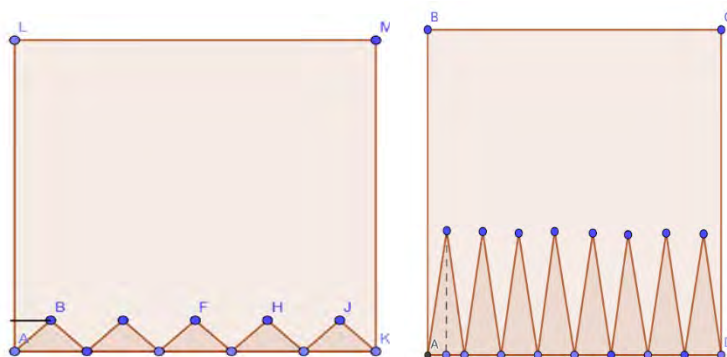
dimensioni, domini descritti accuratamente nei suoi lavori e la cui descrizione viene qui riportata. Per semplificare la trattazione svolgiamo delle considerazioni analoghe relative a una classe di curve che costituiscono il contorno di certe particolari figure piane, analoghe bidimensionali dei solidi di Caccioppoli. Si deve tenere comunque presente che il tutto non va inteso nel senso di costruire una teoria generale per la misura delle curve, che nel caso piano è stata completamente effettuata da Leonida Tonelli nel 1908.

Consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 1 - Sia Q il quadrato unitario $Q=[0, 1] \times [0, 1]$: dentro Q e su un lato di Q si considerino $\frac{n}{2}$ triangoli isosceli la cui base è $\frac{2}{n}$ e la cui altezza è $\frac{k}{n}$. In questo modo si ottiene una successione di poligoni $\{P_n\}$ la cui area tende all'area of Q . Il poligono P_n ha come base una linea spezzata la cui lunghezza è $\sqrt{1 + K^2}$ e perciò il limite dei perimetri dei poligoni P_n è $3 + \sqrt{1 + K^2}$.

Esempio 2 - Se, come prima, su un lato di Q si considerano $\frac{n}{2}$ triangoli isosceli la cui base è $\frac{2}{n}$ e la cui altezza è però $\frac{1}{\sqrt{n}}$, allora, come prima, i poligoni ottenuti hanno area che tende all'area di Q , ma la lunghezza della spezzata è $\sqrt{1 + n}$ e perciò il limite della successione dei perimetri dei poligoni è infinito.

Si noti che in tutti i casi considerati in precedenza i poligoni che approssimano il quadrato Q convergono ad esso uniformemente. Però è possibile costruire successioni di poligoni per cui ciò non avviene, come mostra il seguente:



Esempio 3 - Come al solito, si supponga che un lato del quadrato Q sia diviso in $\frac{n}{2}$ intervalli eguali e consecutivi, con n multiplo di 4. Si consideri su esso un solo triangolo isoscele, avente per base l'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{2}{n}]$ e altezza $\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$. I poligoni ottenuti sottraendo tali triangoli da Q hanno area che tende all'area di Q , ma non convergono uniformemente. I perimetri di questi poligoni sono uniformemente limitati e tendono a 6.

Dagli esempi precedenti si evince che, dato il quadrato Q , è possibile costruire molte successioni di domini poligonalari la cui aree tendono all'area di Q che sono però di diverso tipo: per alcune di esse le lunghezze dei perimetri sono limitate, mentre per altre tali lunghezze sono illimitate. Lo stesso fenomeno può essere osservato per tutti i domini che sono delimitati da curve rettificabili, mentre, se D è un dominio delimitato da curve di lunghezza infinita, anche se D è limitato, qualunque successione di domini poligonalari le cui aree tendono all'area di D , è tale che le lunghezze dei perimetri dei poligoni sono illimitate.

Questo è il motivo per cui Renato Caccioppoli nel 1951 propose a Taormina, al quarto Congresso dell'U.M.I., in vista di uno studio generale delle superfici curve di uno spazio ad n dimensioni, di considerare la classe Ω dei sottoinsiemi regolari D dello spazio ad n dimensioni che verificano le seguenti proprietà:

1. La misura spaziale del contorno di D è zero.
2. D può essere approssimato in media da una successione di domini poliedrali.
3. Le misure dei contorni di tali domini poliedrali sono uniformemente limitate.

Grazie alla 1. i domini di Ω sono abbastanza regolari, misurabili secondo Peano- Jordan. Per la 3. i limiti delle successioni regolari delle misure dei contorni dei domini poliedrali, le cui misure tendono alla misura di D grazie alla 2. sono tutti finiti.

Grazie allo studio profondo che Caccioppoli dedicò con una serie di lavori a tali insiemi, essi sono stati chiamati in seguito alla sua morte "insiemi con perimetro finito" o anche "insiemi di Caccioppoli". Da quanto precede il fiocco di neve di Koch non è un insieme di Caccioppoli, mentre è un insieme di Caccioppoli un cerchio o anche un qualunque insieme racchiuso da una curva di lunghezza finita. Ma ci sono insiemi di Caccioppoli ancora più generali: lo stesso Caccioppoli pensò di eliminare la condizione 1., ma non sviluppò le conseguenze.

Bibliografia

BIACINO L. (2021). Curve patologiche nei primi anni del XX secolo, *Per. di Matematica, Anno XXXVI- Serie IV, Vol. III (2)*, 47-85.

CACCIOPPOLI R. (1952). Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati, Note I e II, *Rend. Naz. Lincei, s. VIII, v. 12*, 3-11 e 137-146. In *Opere, Vol. I*, 358- 380.

CESARO E. (1897). Sur la representation analytique des régions et des courbes qui le remplissent, *Bull.Sc. Math. (2) 21*, 257- 266, *Opere Scelte, Cremonese, Vol. II*, 1963, 423-431.

CESARO E. (1905). Remarque sur la courbe de von Koch, *Atti Acc. Sci. Napoli (2) 12*.

HILBERT D. (1891). Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, *Math. Ann., 38*, 459 - 460.

KLINE M. (1996). Storia del pensiero matematico, Vol. II, Einaudi.

LEBESGUE H. (1904). Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, Gauthier-Villars.

PEANO G. (1890). Sur une curbe qui remplit toute une aire plane, *Math. Ann., 36*, 157-160.

VON KOCH H. (1903-04). Sur une courbe continue sans tangente obtenu par une construction géométrique élémentaire, *Arkiv für Mathematik, Astronomie och Fysik I*, 681-702.

VON KOCH H. (1906). Une méthode géométrique pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Math. 30*, 145-175.

Il pendolo semplice

Sofia La Franca*

*Studentessa del Liceo Classico Torquato Tasso di Salerno, Italia;
sofialf700@gmail.com



Sunto: Dopo aver brevemente illustrato il moto del pendolo semplice, si proseguirà con l'analisi tramite codice Python. Quest'ultima si propone sia come metodo per fissare le conoscenze, così da comprendere le possibili applicazioni, sia come strumento per l'osservazione di ulteriori moti.

Parole Chiave: Moto del Pendolo Semplice, Analisi Matematica, Codificazione Python

Abstract: After briefly illustrating the motion of the simple pendulum, we will continue with the analysis by Python code. The latter is proposed both as a method to fix knowledge, so as to understand the possible applications, and as a tool for the observation of future motions.

Keywords: Simple Pendulum Motion, Mathematical Analysis, Python Coding

1 - Formule base

Si definisce pendolo un corpo rigido sospeso a un punto fisso che è dislocato rispetto al baricentro del corpo. Se si assume che tutta la massa sia concentrata in punto, il pendolo ottenuto è ideale.

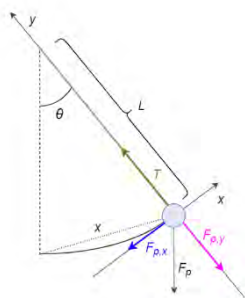


Fig. 1: Moto del Pendolo Semplice

Facendo riferimento alla figura 1:

$$F_p = F_{px} + F_{py} \tag{1}$$

dove F_p è la forza peso, scomposta nella forza tangenziale F_{px} e nella forza radiale F_{py} .

Le due forze ottenute dalla scomposizione corrispondono rispettivamente a $F_p \sin\theta$ e $F_p \cos\theta$. Quest'ultima si oppone alla tensione della fune T , per cui le due forze si bilanciano. Tale equilibrio fa in modo che la traiettoria rimanga sull'arco di circonferenza e risulta nella forza centripeta F_c : $T + F_p \cos\theta = F_c$

Effettuando le dovute sostituzioni si ricava $ma_c = T - mg \cos\theta$, dove m è la massa del corpo rigido sospeso, a_c l'accelerazione centripeta e $-mg \cos\theta = F_p \cos\theta$, dove il segno meno deriva dalla natura di forza di richiamo di F_{py} .

2 - Calcolo

Si prosegue esprimendo l'accelerazione centripeta a_c sotto forma di derivata, dove θ' è la velocità angolare e θ'' è

l'accelerazione angolare. Si sostituiscano i termini dell'equazione precedentemente espressa, per cui $L\theta'' = -g\theta$, da cui si ottiene l'equazione differenziale $\ddot{\vartheta} + \frac{g}{L}\vartheta = 0$. Proseguendo i calcoli, dalla sua integrazione si ricava funzione oscillante successivamente trascritta.

$$\vartheta(t) = \vartheta_{MAX} \cos \vartheta \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \varphi_0 \right)$$

3 - Sperimentazione

Al fine di provare la validità delle precedenti formule si prosegue mostrando i dati rilevati tramite le misurazioni di moti del pendolo che differiscono per angolo θ , massa m del corpo rigido sospeso, lunghezza L della fune; ogni misura è stata effettuata cinque volte, così da diminuire l'errore di misura a 1/5.

m (kg)	θ (°)	L (m)	g (m/s ²)	5T (s)	T (s)	$T=2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$
1,2	10	0.8	9,81	8,96	1,79	$6,28\sqrt{\frac{0,8}{9,81}}$
0,4	10	0,8	9,81	8,96	1,79	$6,28\sqrt{\frac{0,8}{9,81}}$
0,4	80	0,8	9,81	10,17	2,03	$6,28\sqrt{\frac{0,8}{9,81}}$

Tabella 1: Dati sperimentali sul moto del pendolo

Come si può notare dai dati, cambiando le masse e lasciando invariata la lunghezza, il periodo non subisce modifiche. Applicando la formula data (v. Tabella 1) per $\theta > 10^\circ$ la formula non si rivela più valida, perché $\sin \theta \approx \theta$; infatti, l'arco di circonferenza può essere approssimato al segmento che congiunge il centro del baricentro del corpo rigido con il punto massimo della traiettoria solo per $\theta < 10^\circ$.

4 - Programmazione Python

Procedendo su Python è stato progettato un programma basato sulla formula sopra analizzata, permettendo quindi la simulazione di un moto del pendolo con $\theta < 10^\circ$. Diverse funzioni sono state aggiunte dal punto di vista informatico, poiché non presenti nel programma base, tra queste rientrano *numpy*, ossia *numerical Pythom*, che consente di lavorare più efficientemente con una mole consistente di dati, come in questo caso; *matplotlib*, che fornisce l'interfaccia capace di creare grafici, in particolare per questo tipo di azione è necessario *matplotlib animation*.

Per conferire fluidità al moto si è usufruito del metodo Runge-Kupta, al fine di approssimare la soluzione quando è ignota la fase iniziale.

Si riporta di seguito il codice del programma *Python* per l'animazione del moto del pendolo con $\theta < 10^\circ$.

semplice

```

import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation

def ask_float(prompt, default):
    s = input(f"{prompt} [{default}]: ").strip()
    return float(s) if s else default

def main():
    print("=== Pendolo semplice: inserisci i parametri (premi Invio per usare i
    L = ask_float("Lunghezza L (m)", 1.0) # m
    theta0_deg = ask_float("Angolo iniziale  $\theta_0$  (gradi)", 15.0) # gradi
    omega0 = ask_float("Velocità angolare iniziale  $\omega_0$  (rad/s)", 0.0) # rad/s
    g = ask_float("Accelerazione di gravità g (m/s^2)", 9.81) # m/s^2
    beta = ask_float("Smorzamento  $\beta$  (1/s, 0 per nessuno)", 0.05) # 1/s

    theta0 = math.radians(theta0_deg)

    # Periodo teorico per piccoli angoli
    T0 = 2 * math.pi * math.sqrt(L / g)
    print(f"\nPeriodo teorico (piccoli angoli): T0 = {T0:.3f} s")

    # Durata e passo di integrazione
    dt = 0.01 # s
    durata = max(15.0, 3.0 * T0) # almeno 15 s o ~3 periodi
    n_steps = int(durata / dt)

    # Equazioni del moto (stato = [theta, omega])
    def f(state):
        theta, omega = state
        dtheta = omega
        domega = - (g / L) * math.sin(theta) - 2.0 * beta * omega
        return np.array([dtheta, domega], dtype=float)

    # Integrazione RK4
    state = np.array([theta0, omega0], dtype=float)

    # Setup figura
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))
    ax.set_aspect('equal', 'box')

    # Scala dell'asse in funzione della lunghezza
    r = 1.2 * L
    ax.set_xlim(-r, r)
    ax.set_ylim(-r, r)

```

```

# Elementi grafici: asta e bob
line, = ax.plot([], [], lw=2, color='tab:blue') # asta
bob, = ax.plot([], [], 'o', color='tab:red', ms=12) # massa
pivot = ax.plot(0, 0, 'o', color='k', ms=4)[0]

# Testo informativo
txt = ax.text(0.02, 0.95, '', transform=ax.transAxes, va='top', fontsize=10)

ax.set_title("Pendolo semplice")
ax.set_xlabel("x (m)")
ax.set_ylabel("y (m)")
ax.grid(True, alpha=0.3)

# Parametri fisici per energia (massa unitaria)
m = 1.0

t = 0.0

def init():
    line.set_data([], [])
    bob.set_data([], [])
    txt.set_text('')
    return line, bob, txt

def step_rk4(state, dt):
    k1 = f(state)
    k2 = f(state + 0.5 * dt * k1)
    k3 = f(state + 0.5 * dt * k2)
    k4 = f(state + dt * k3)
    return state + (dt / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

def update(frame):
    nonlocal state, t
    # Integra un passo
    state = step_rk4(state, dt)
    t += dt

    theta, omega = state
    # Coordinate del bob
    x = L * math.sin(theta)
    y = -L * math.cos(theta)

    # Aggiorna grafica
    line.set_data([0, x], [0, y])
    bob.set_data([x], [y])

```

```

# Energia totale (m=1): potenziale + cinetica
E = m * g * L * (1.0 - math.cos(theta)) + 0.5 * m * (L**2) * (omega**2)

txt.set_text(
    f"t = {t:5.2f} s\n"
    f"θ = {math.degrees(theta):6.2f}°\n"
    f"ω = {omega:6.3f} rad/s\n"
    f"E = {E:7.4f} J\n"
    f"T0 (teorico) = {T0:.3f} s"
)

return line, bob, txt

anim = FuncAnimation(fig, update, frames=n_steps, init_func=init,
                    interval=dt*1000, blit=True, repeat=False)

plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()

```

5 - Conclusioni

Il moto del pendolo semplice è impiegato ampiamente in ambito ingegneristico, per strumenti quali gli umanoidi, ma in generale tutti i veicoli autobilanciati, la Taipei Tower e i modelli trasposti sul corpo umano, dove il pendolo inverso è usato in ambito bioingegneristico per analizzare il corpo umano, paragonato a un pendolo inverso, con fulcro nella testa. Le potenzialità del pendolo erano già state evidenziate ab imo tempore da Galileo Galilei, che ne scopre la proprietà fondamentale dell'isocronismo: pendoli di uguale lunghezza che compiono piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio hanno lo stesso periodo.

L'altro particolare, veramente meraviglioso, è che il medesimo pendolo fa le sue vibrazioni con l'istessa frequenza, o pochissimo e quasi insensibilmente differente, sien elleno fatte per archi grandissimi o per piccolissimi dell'istessa circonferenza. (Galilei, Dialogo

*sopra i due massimi sistemi del mondo, Giornata
Quarta)*

*In summa, nella sua apparente semplicità il pendolo si
rivela un affascinante applicativo.*

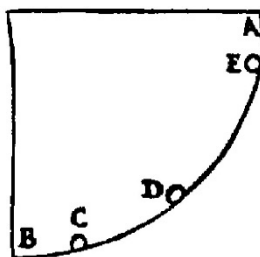


Figura 3: Isocronismo del pendolo

Bibliografia

AMALDI Ugo (2021). *Le traiettorie della fisica meccanica volume 1* (terza edizione). Bologna: Zanichelli.

GALILEI Galileo. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*

L'arte della programmazione Python: Un Percorso Completo per Combinare la Teoria con l'Applicazione Pratica e Diventare un Esperto, Partendo da Zero (Nuova edizione) (Tecnologia e Informatica Vol. 1)

Sitografia

Oscillazioni e onde meccaniche

https://staticmy.zanichelli.it/catalogo/assets/9788808935151_04_C_AP.pdf

Lecture L24 - Pendulums

https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/c0c881f96f4ff4e21f082c88e8b015d6_MIT16_07F09_Lec24.pdf

70 anni di Intelligenza Artificiale

Cos'è - Come funziona - Limiti - Rischi

a cura di
Luca Nicotra



Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, 1956.

Contributi di:

Luca Nicotra, Pierluigi Assogna, Paolo Severino Manca,
Luigi Campanella, Giordano Bruno, Ezio Sciarra,
DUILIO Carpitella, Armando Guidoni, Leonardo Maria Rocca,
Carmela Silvia Messina, Mariangela Vanalli, Andrea Manzo,
Vincenzo Luca Messina, Violetta Chiarini.

numero

16

in riga
edizioni 
Tecnologia
e innovazione

Il pendolo di Foucault nel nome della Rosa

*«Stat rosa pristina nomine, nomina nuda
tenemus»*

Ulderico Dardano*

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, Università
Federico II, Italia; dardano@unina.it



Sunto: *«La rosa primigenia esiste solo nel nome, noi possediamo soltanto nudi nomi», ammonisce Umberto Eco citando una frase di Bernardo di Cluny (XII sec.). Qui leggiamo il monito del grande in chiave propositiva: sebbene non sempre possiamo ambire a raggiungere la verità, l'uso delle parole e delle definizioni, nella loro nudità, purezza, astrazione, ci è invece sempre consentito, sicché queste ci appartengono. In questo scritto proponiamo allora la parola rosa come chiave di lettura per l'affascinante esperimento noto come “pendolo di Foucault”, parafrasando – evidentemente – i titoli dei primi due capolavori di Eco. Per fare ciò ci serviamo di vetrate circolari (rosoni), fori, frutti, coordinate polari, un giocattolo del XX secolo, lo spirografo, dei suoi antesignani (coppia di Tusi) ed eredi, della trigonometria. Questo lavoro deriva da una presentazione di un progetto, detto Spiromania, al V convegno Matematica Natura e Scienze (Agerola 5-7 settembre 2025). Questo progetto si propone di avvicinare i giovani (e i loro docenti) alla matematica attraverso attività grafiche e tattili. Infatti, qui si intende riflettere sull'uso delle coordinate polari nel piano per rappresentare e descrivere degli oggetti che non siano di origine matematica e dello strumento/giocattolo detto Spirografo per tracciare le curve strumento di tale rappresentazione. Il lavoro si propone con finalità divulgativa ma anche come canovaccio per unità di apprendimento/potenziamento nelle scuole. Lo stile narrativo oscilla – volutamente – fra il divulgativo, il didascalico e lo scientifico lasciando a chi*

legge il piacere di scegliere in che direzione approfondire le sue conoscenze in materia aver brevemente illustrato alcune ipotesi sulle origini delle terne Pitagoriche, ci soffermeremo su due proprietà molto interessanti che forse sono poco citate in letteratura. La prima è la connessione delle terne Pitagoriche con la successione di Fibonacci, la seconda riguarda la loro natura algebrica, in quanto tra le terne pitagoriche si può definire un'operazione che permette di individuare il gruppo delle terne pitagoriche.

Parole Chiave: *Pendolo, rosone, moto circolare, spirografo, coordinate polari.*

Abstract: *The primal rose exists only in name, we possess only bare names, warns Umberto Eco, citing a phrase from Bernard of Cluny (12th century). Here we read the great warning in a proactive key: although we cannot always aspire to reach the truth, the use of words and definitions, in their nudity, purity, and abstraction, is always permitted to us, and thus they belong to us. In this paper, we therefore propose the word 'rose' as a key to interpreting the fascinating experiment known as the "Foucault pendulum", evidently paraphrasing the titles of Eco's first two masterpieces. To do this, we use circular stained-glass windows (rose windows), holes, fruits, polar coordinates, a 20th-century toy – the Spirograph – its predecessors (Tusi couple), and successors, and trigonometry. This work stems from a presentation of a project, called Spiromania, at the 5th Mathematics Nature and Sciences conference (Agerola, September 5-7, 2025). This project aims to bring young people (and their teachers) closer to mathematics through graphic and tactile activities. In fact, the intention here is to reflect on the use of polar coordinates in the plane to represent and describe objects that are not of mathematical origin, and on the tool/toy called the Spirograph for tracing the curves that are the instrument of this representation. The work has a divulgative purpose but is also intended as a framework for learning/enrichment units in schools. The narrative style deliberately oscillates between the informative, the didactic, and the scientific, leaving the reader the pleasure of choosing in which direction to deepen their knowledge on the subject.*

Keywords: *Pendulum, Rose window, Circular motion, Spirograph, Polar coordinates.*

1 - Il Pendolo di Foucault

Il giorno 8 aprile 1851 nel Pantheon di Parigi, il fisico Léon Foucault con un celeberrimo e plateale esperimento dimostrò evidente la rotazione della terra facendo oscillare per molte ore un pendolo (con un cavo di 67 metri) e osservando che il piano spazzato dal cavo non era costante nel tempo. In sostanza il pendolo oscillava e girava al tempo stesso. Ciò appare contrario alle leggi della Fisica (legge del moto di Newton) e anche al buon senso perché sul pendolo, lasciato partire per caduta e privo di velocità iniziale, agisce solo la forza di gravità, verso il basso, cioè lungo lo stesso piano di sopra. Nessuna forza “laterale”. Il fatto che il pendolo ruota rispetto alle pareti dell’edificio ci convince che – in realtà – sono le pareti, e quindi la Terra, a ruotare intorno al pendolo, cioè rispetto alle stelle fisse. Però, questa rotazione dura più di 24 h, anzi un tempo che non è nemmeno costante.

Andiamo allora ad analizzare brevemente, ma con dettagli, il fenomeno introducendo dei modelli matematici, dove però, come consueto in Fisica, tratteremo i numeri con approssimazione (senza commettere abusi irreparabili). In particolare, cerchiamo di decifrare quale sia la traiettoria che compie questo pendolo. Per arrivare alla meta preferiamo una strada “panoramica” che passa in luoghi d’arte ove possiamo ammirare i rosoni delle chiese e cercare una loro descrizione attraverso le coordinate polari nel piano. Alla ricerca di un mezzo per disegnare le curve che intravediamo (la matematica dietro le cose) ci imbattiamo nel giocattolo al nome spirografo (1965), e nei giochi basati sulla tecnologia touch-screen, e nella la *coppia di Tusi* (XIII sec), uno strumento persiano per costruire un moto rettilineo come combinazione di moti circolari.

Alcuni studenti dell'università di Padova hanno realizzato un paio di ottimi video che riproducono il fenomeno (in scala). Brevi e chiari: <https://youtu.be/NfvSJPiVDNg?t=5> che continua in <https://youtu.be/VPxu1zANe0c?t=3>.

Alleghiamo anche un QR, in modo che chi legge li possa consultare immediatamente.

Dal secondo video traiamo un paio di foto che ci serviranno in seguito per la nostra sfida: come possiamo disegnare queste curve senza avere il pendolo di Foucault?

Lo faremo nel nome della rosa!

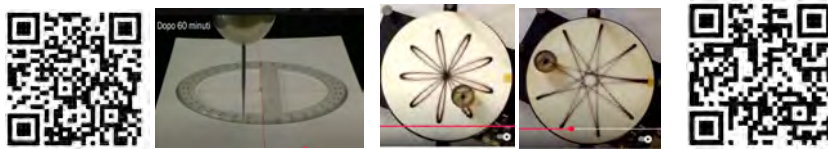


Fig. 1

Tornando a Parigi, assieme a Foucault possiamo misurare, senza molta fatica, ma molta pazienza, che il suo pendolo ritorna nella posizione iniziale dopo $k = 6968$ oscillazioni impiegando un tempo (periodo totale) $T = 114.420,1$ secondi (31 h e 47 min circa). Per fortuna, almeno i punti estremi del percorso (quelli in cui il pendolo torna indietro) si trovano tutti su una circonferenza il cui diametro dipende da dove noi abbiamo fatto partire il pendolo. Ammesso pure che il responsabile di questo moto con una componente circolare fosse la rotazione della terra intorno al suo asse per i poli, come sosteneva lo scienziato... ci saremmo però aspettati un periodo di 24 h cioè, 86400 secondi. Come si spiega la differenza?

In primo luogo, rileviamo che ai poli geografici (Sud o Nord non importa) questo periodo si può verificare sperimentalmente valere $T' = 86164$ secondi, il cosiddetto

giorno siderale. Un attimo di riflessione ci fa capire che, rispetto alle stelle fisse, siccome la terra ruota anche intorno al Sole in circa 365,25 giorni, il suo movimento è composizione di almeno due moti circolari (quasi) uniformi. Pertanto, ci aspettiamo una differenza $T - T'$ di circa $1/365.25$ della durata T . Bene! se facciamo i conti... i conti tornano, con una tollerabile approssimazione. Ma non risolvono il problema! La differenza ora è pure aumentata. Manca ancora qualcosa.

Orbene, Parigi non si trova al polo, quindi la rotazione della Terra sotto il piano del pendolo è complicata dall'angolo fra i due assi, che poi risulta essere uguale proprio alla latitudine. Quindi per compiere un giro, alla latitudine λ ci vuole un periodo $T(\lambda) = T'/\sin(\lambda) = 86164/\sin(\lambda) > 86164$. Ne segue subito che a Parigi la latitudine è

$$\arcsin\left(\frac{86164}{114420}\right) \approx 0,85300 \text{ radianti} \approx 48,8584 \text{ gradi.}$$

Una cosa che possiamo confermare anche con altre fonti. Siamo più sereni e deduciamo pure subito che ad Agerola, che ha latitudine $\approx 0,70928$ radianti, il pendolo di Foucault compirebbe un giro in ≈ 132299 secondi, ovvero circa 36 ore 45 min. Abbastanza di più che non a Parigi, ma questo perché ci stiamo sensibilmente avvicinando all'equatore dove $T(0)$ tende all'infinito (cioè, il pendolo non ruota). Possiamo enunciare:

Teorema 1. *Con il pendolo (di Foucault) si può misurare la latitudine λ di un luogo con la seguente formula*

$$\lambda = \arcsin(T(\lambda)/86164),$$

dove $T(\lambda)$ è il periodo totale, misurabile con l'aiuto di un semplice orologio.

Osserviamo pure che, viceversa, al Polo, il pendolo compie un giro completo in 24 ore (massimo effetto Foucault) mentre ad Agerola il giro completo richiede più di un giorno, circa 37 ore. Infine, all'Equatore, il piano del pendolo resta fisso rispetto alla Terra. Va da sé che, nella pratica – viste le simmetrie radiali che approfondiamo più avanti ma che sono del tutto intuitive – per valutare $T(\lambda)$ si può misurare anche solo una parte della rotazione (ed es. un dodicesimo di giro, 15 gradi) e poi moltiplicare per 12 riducendo così di 12 volte il tempo necessario per compiere la misura.

Da quanto scritto sopra segue che il *periodo semplice* del pendolo di 67 metri, cioè il tempo impiegato per compiere una singola oscillazione è $t = n/z = 114.420,1 / 6.968 = 16,4206$ secondi. D'altra parte, la fisica matematica ci insegna che la formula $t = 2\pi\sqrt{L/g}$ ci permette di calcolare con precisione tale valore senza attendere tante ore. Questo, però, se noi conosciamo il valore esatto dell'accelerazione di gravità g . Ma non è un problema! Dai dati sopra segue che $g = 9,809$ e quindi oramai... conosciamo g grazie pendolo di Foucault. Purtroppo, ahinoi, realizziamo ora che questo valore non è costante sulla superficie della Terra a causa della sua forma irregolare, ellissoidale. Tuttavia, g non varia troppo e resta fra 9,78 all'equatore e 9,83 ai poli. Come fare? Quale valore standard si assume uno intermedio quale 9,80665 (o più spesso semplicemente 9.8). Sicché dalla formula segue $t \approx 2,00641441\sqrt{L} \approx 2\sqrt{L}$. In altre parole, abbiamo notato come la terna (t, L, g) sia dipendente nel senso che, se sono noti qualunque due valori posso calcolare il terzo. Così possiamo scrivere anche il seguente:

Teorema 2. Con il pendolo (di Foucault) si può misurare l'accelerazione di gravità g in un luogo con la formula $g = 4\pi^2 L/t^2$ dove L è la lunghezza del pendolo (che possiamo ritenere nota a priori) e t il periodo misurabile con un orologio (e con la precisione voluta, visto che possiamo misurare molte oscillazioni di seguito). \square

Riflettendoci... si può fare di più... se – alla latitudine λ – conosco il periodo del mio pendolo campione e conto le oscillazioni nel periodo completo, cioè fin quando il pendolo torna nella posizione iniziale, (e chiamo $k = k(\lambda)$ questo numero) ho ovviamente $T(\lambda) = k(\lambda)t$. Ne segue:

Corollario. Con un fissato pendolo campione di periodo noto t , possiamo calcolare la latitudine del luogo dove sono anche senza orologio. \square

Vediamo ora come varia il numero delle oscillazioni $k(\lambda) = T(\lambda)/t = T'/[2\pi\sqrt{L} \sin(\lambda)]$:

Teorema 3. Alla latitudine λ il numero di oscillazioni del pendolo di Foucault di lunghezza L in un periodo completo è

$$k(\lambda) = \frac{T'}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{1}{\sin(\lambda)}.$$

Viceversa, se il pendolo compie k oscillazioni prima di tornare nella posizione iniziale allora siamo alla latitudine

$$\lambda = \arcsen\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{T'}{t}\right) = \arcsen\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{T'}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}\right). \square$$

Siccome oltre alla fisica ci piace anche la geometria, dopo avere capito i segreti dietro il numero k delle oscillazioni ci domandiamo ora... quale sia la forma completa della traiettoria del pendolo di Foucault, se ha una descrizione matematica facile, come tracciarla in maniera dinamica o con animazioni video.

Siccome il problema non è banale con i soli metodi che conosciamo e, da come si vede nelle foto in Fig. 1 sopra, sembra avere almeno due soluzioni: una convessa ed una concava.... Sembra tutto un po' difficile... Allora facciamoci prima una passeggiata fra fiori e chiese. Magari ci viene qualche idea.

2 - Le Rose Polari

Guardando la facciata di una chiesa del periodo romanico o gotico ci capita spesso di ammirare un finestrone circolare, generalmente composto da vetrate policrome separate da un numero variabile di colonnine radiali di pietra che descrivono figure di varia complessità. Questo elemento architettonico viene generalmente definito *rosone*, una parola che evidentemente deriva dal nome del fiore che esso ricorda. Naturalmente i possibili rosoni sono tanti, ma noi cerchiamo di individuare un modello matematico, cioè un ragionamento nel linguaggio basato su numeri, funzioni, equazioni, che ce li descriva, riproduca o addirittura produca ex-novo. Evidentemente queste figure sono tutte a simmetria radiale, come arance tagliate a metà, sul loro equatore.



Fig. 2

Notiamo subito che ruotando queste immagini su sé stesse di un angolo giusto... la figura non cambia... Ricordiamo allora che si dice infatti che una parte X del piano è a simmetria radiale se essa è, appunto, invariante rispetto ad una rotazione

(movimento rigido che lascia fisso uno ed un sol punto, detto centro) di un angolo α . Si vede subito che, per evitare casi strani, $n = 2\pi/\alpha$ deve essere un intero che diciamo ordine o periodo della simmetria. Si noti che, qui e sempre, noi misuriamo gli angoli in radianti e 2π è la misura dell'angolo giro (cioè, 360 gradi). Riassumendo, la parte X a simmetria radiale la si può vedere come unione di n sui sottoinsiemi tra loro congruenti, che diciamo spicchi o petali o poiché questa descrizione ci ricorda – appunto – i fiori o gli agrumi tagliati a metà. Anche una “stella” viene in genere disegnata a simmetria radiale.

Come disegnare queste figure? La rappresentazione delle funzioni in coordinate polari ci viene incontro. Qui la descriviamo in maniera molto sintetica, limitandoci ad esporre solo le sue proprietà che ci sono immediatamente utili pur raccomandando la consultazione di uno dei numerosi validi testi sull'argomento. Fissato un riferimento cartesiano, alla coppia (r, θ) di numeri reali associamo non più il punto che ha r come ascissa e θ come ordinata, ma il punto di coordinate cartesiane

$$P = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

e lo chiamiamo punto di coordinate polari (r, θ) laddove – nel nostro immaginario – r è l'iniziale di *raggio* e il nome della lettera θ , una t nell'alfabeto greco, vuole ricordarci che essa svolge un po' il ruolo del “tempo” (ma la scriviamo in greco perché invece misura un angolo). In particolare, se $O = (0, 0)$ e $\theta \in]0, \pi[$, il vettore OP ha lunghezza $|r|$, come si verifica subito, e d'altra parte θ misura l'angolo fra il semiasse positivo delle x e la retta OP se $r > 0$ (oppure $-\theta$ se $r < 0$).

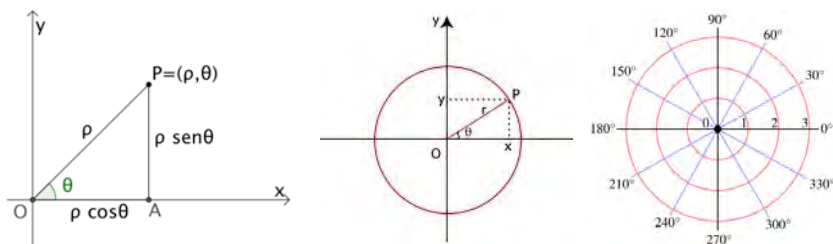


Fig. 3

L'operazione inversa, cioè, dotare ogni punto del piano cartesiano di coordinate polari è sì possibile, ma non univoca. La si rende tale considerando solo punti diversi da $O = (0,0)$ e valori θ nell'intervallo $[0,2\pi[$. Possiamo così ad una qualunque funzione reale $f(x)$ associare, con il procedimento esposto sopra, l'insieme dei punti di coordinate polari $(\theta, f(\theta))$ cioè – ripetiamo – di coordinate cartesiane

$$f(\theta) (\cos(\theta) , \text{sen}(\theta)) = (f(\theta) \cos(\theta) , f(\theta) \text{sen}(\theta))$$

e chiamarlo grafico polare di $f(x)$ dove la messa in evidenza del fattore $f(\theta)$ si chiama prodotto scalare. Ad esempio, se c è una costante, l'equazione $r = c$ ha come grafico polare, una circonferenza di raggio $|c|$. Si noti la non dipendenza dal segno di c , poiché seno e coseno assumono tutti i valori fra -1 e 1. D'altra parte, ma non simmetricamente, $\theta = c$ rappresenta invece una retta per l'origine, come nelle immagini sopra.

Come accennato sopra, rispetto al riferimento non inerziale della terra la punta P del nostro pendolo di Foucault, da un canto ruota su un asse e così fa la retta OP , dall'altro ha una legge temporale del moto del tipo $r(t) = R \cos(ct)$ con c costante, una delle leggi del pendolo semplice (che qui assumiamo note). Insomma, se partiamo con la punta al centro

(dandogli una spintarella in qualunque direzione, come nei video e nella Fig. 1, la punta P del pendolo si muove sulla curva di equazione stavolta polare

$$r(\theta) = a \cos(\theta)$$

dove il parametro a indica l'elongazione della traiettoria e possiamo porlo a piacere uguale a 1. Se partiamo invece – come naturale – con la punta in un punto diverso dal centro e lasciamo il pendolo libero la traiettoria sarà concava e non convessa, come ottenuto sperimentalmente e riprodotto in Fig. 1, e avrà quindi un'altra equazione, forse meno intuitiva, simile per certi aspetti, ma diversa. Ci sarà comunque familiare alla fine di questo articolo.

Ribadiamo come, se $f(x)$ è una qualunque funzione, il grafico polare della funzione $cf(x)$ è lo stesso, ma in scala c costante non nulla, di quello di $f(x)$. Se poi $f(x)$ è periodica di periodo a , cioè $f(x + a) = f(x)$, allora il suo grafico polare è un insieme (diciamolo curva) a simmetria radiale di periodo polare $n = 2\pi/a$. In sostanza, alle traslazioni nel piano cartesiano corrispondono rotazioni in quello a coordinate radiali.

Teorema 4. *Il grafico polare di $f(\theta)$ è a simmetria radiale se e solo se $f(x)$ è periodica. Se il periodo cartesiano è $2\pi/n$ e allora il periodo radiale è multiplo di n .*

La funzione periodica con la quale siamo più familiari è probabilmente $\text{sen}(x)$, seguita a ruota da $\text{cos}(x)$ che le è molto correlata dalle classiche identità trigonometriche:

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1 \text{ e } \text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\pi/2 - \alpha)$$

ed è proprio quella che ci è capitata seguendo Foucault. Detto questo, vogliamo subito tracciare il grafico polare di $f(t) = \cos(kt)$ oppure $f(t) = \text{sen}(kt)$ con k numero intero.

3 - La curva nel nome della rosa

Prima di fare fatica, per cominciare a capire possiamo farci aiutare dal software gratuitamente disponibile in rete, come la calcolatrice grafica online gratuita Desmos,¹ con QR in Fig. 4 più avanti dove troviamo i disegni che otteniamo giocando con Desmos.

Questi propongono – come desideravamo – *una figura simile ad un fiore*. Pertanto, seguendo Luigi Guido Grandi che la studiò nel 1735, diamo “il nome della rosa” anzi *k-rosa* o, meglio, *rodonea*, al disegno che ci produce la funzione (già incontrata giocando con il pendolo)

$$r(\theta) = \cos(k\theta).$$

Ora, siccome $\text{sen}(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$ e simmetricamente $\cos(\alpha) = \text{sen}(\pi/2 - \alpha)$, scambiando coseno e seno, il risultato non cambierebbe: abbiamo rose equivalenti (ma, certo, sfasate e tracciate in senso inverso). L'uso di seno ci assicura grafici che per $\theta = 0$ partono dall'origine e, al crescere di θ , si avvolgono in senso antiorario (cioè, positivo). L'uso di coseno invece produce animazioni che illustrano meglio la rotazione. Lasciamo a chi legge formarsi un'idea su quale preferisca. A proposito... nell'immaginare (o proprio tracciare con il

¹ www.desmos.com/calculator/dm7j9pjxb?lang=it

software) il grafico polare di queste funzioni, di periodo 2π , possiamo ridurci a considerare solo punti con seconda coordinata $\theta = 2\pi t \in [0, 2\pi[$ cioè, $t \in [0, 1[$ senza perdere alcun punto del grafico polare.

Facciamo ora un piccolo ragionamento che ci aiuta a leggere il risultato “sperimentale” ottenuto con il software grafico (vedi Fig. 4). Siccome $r = f(\theta)$ è funzione di θ , abbiamo che ai massimi locali di $f(t)$ corrispondono i punti della curva che hanno maggiore distanza r dal centro. Li chiamiamo apici o apsi o vertici. Ad esempio, l’afelio e il perielio (come in geografia astronomica) sono fra questi.

Teorema 5. Se $f(\theta)$ è una funzione periodica di periodo n ed ha un massimo, allora la curva polare associata è periodica ed ha almeno n apsi (vertici). \square

Vediamo ora qualche esempio concreto per le rotonde di Grandi $G(k)$ con equazione $r(\theta) = \text{sen}(k\theta)$, dove k è il valore scritto sopra il disegno.

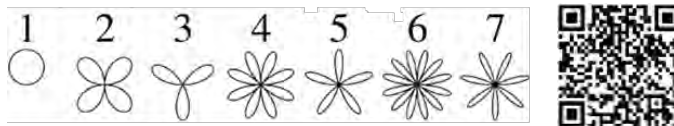


Fig. 4

Osservando... notiamo subito che sembra esserci un po’ di disordine e... poi manca la “rosa” a 6 petali. E anche quella a 2 petali. Ma ragioniamo con calma... Manca il caso $k = 0$, questo equivale a $r = 1$ costante e determina una curva che è la circonferenza $(x^2 + y^2 = 1)$ di centro nell’origine del sistema di coordinate cartesiane x, y e raggio 1.

In effetti per definizione di coordinate polari è sempre vero che $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ per cui vale la regola universale $x^2(\theta) + y^2(\theta) = r^2$, quali che siano $x(\theta)$ e $y(\theta)$ coordinate di un punto sulla curva che stiamo studiando. Questo ci semplifica alcuni calcoli.

Nel caso di $k = 1$, si ha $r = \sin(\theta)$ da cui $x(\theta) = r \cos(\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$ e anche $y(\theta) = \sin^2(\theta)$ che risulta sempre positivo; quindi, la curva è sopra la retta delle x . Inoltre, la regola universale ci dice $x^2(\theta) + y^2(\theta) = r^2 = y$ che si riscrive come $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ equazione della circonferenza di centro $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$. Notiamo che in questa situazione, se $\theta \in]\pi, 2\pi[$, allora $r(\theta) < 0$, ma anche stavolta questo non disturba nulla.

Il caso $k = 2$, cioè il $r = \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ fu studiato da Jacob Bernoulli e produce una croce a 4 petali, che si dispongono nei 4 quadranti; infatti per θ nell'intervallo aperto $]0, \pi[$ si ha che $r > 0$ e quindi la curva è prima nel I e poi nel II quadrante (a seconda del segno di $x = r \cos(\theta) = \sin(2\theta)\cos(\theta)$). Dopo... con $\theta \in [\pi, 2\pi[$ risulta $r < 0$ e quindi la curva passa dal III al IV quadrante. Così abbiamo 4 vertici in corrispondenza dei massimi di $|r|$, ed è facile vedere che abbiamo 4 petali.

Nel caso di $k = 3$, cioè $r = \sin(3\theta)$, sebbene la curva passi per 6 volte nell'origine in corrispondenza della soluzioni di $\sin(3\theta) = 0$, a differenza del caso $k = 2$, la curva passa due volte per uno stesso punto e quindi non produce una rosa a 6 petali,

ma... un trifoglio (a 3 petali) ripassato 2 volte, la prima con $\theta \in [0, \pi[$ e la seconda per $\theta \in [\pi, 2\pi[$.

Non sorprendentemente, dopo quanto visto nel caso $k = 2$, si riscontra che il caso $k = 4$ produce una rosa ad 8 petali, (per le stesse ragioni), mentre il caso $k = 5$ ci regala un bellissimo fiore pentagonale. I casi $k = 6, 7$ seguono senza sorprese.

Con ragionamento simile, ma più simbolico, si ha:

Teorema 6. Se $k > 1$ è un intero e $\alpha \neq 0$ un numero reale, le funzioni polari $r = \text{sen}(k\theta)$ e $r = \text{cos}(k\theta)$ producono entrambe una rodonea a k vertici se k è dispari, oppure $2k$ vertici se k è pari. \square

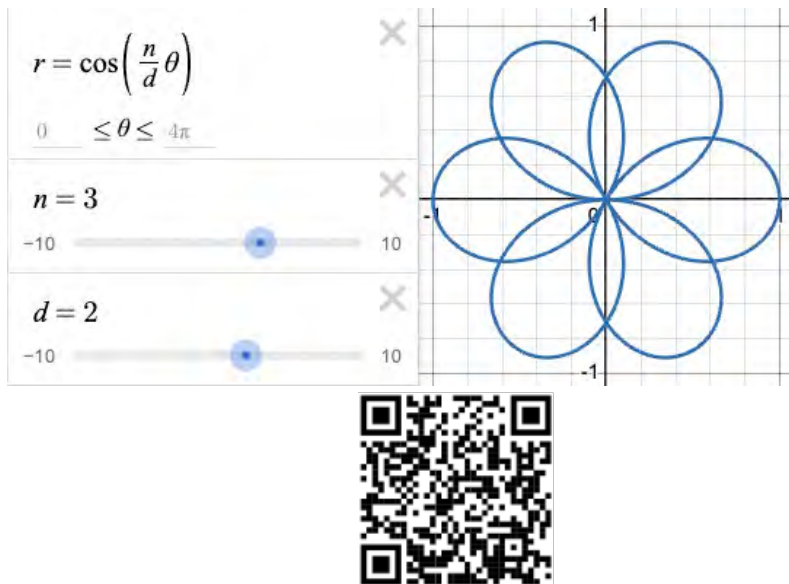


Fig. 5

Dopo quanto enunciato, sappiamo che con k intero non ci sono k -rodonee con 6, 10, 14, ... vertici. Come possiamo non di meno disegnarle? Possiamo provare con altri valori per k , non interi. Ad esempio, con $k = 3/2$ si ottiene una rosa con 6 petali

(parzialmente sovrapposti) come in figura. Il QR sotto ci aiuta a fare il disegno come in Fig. 5.

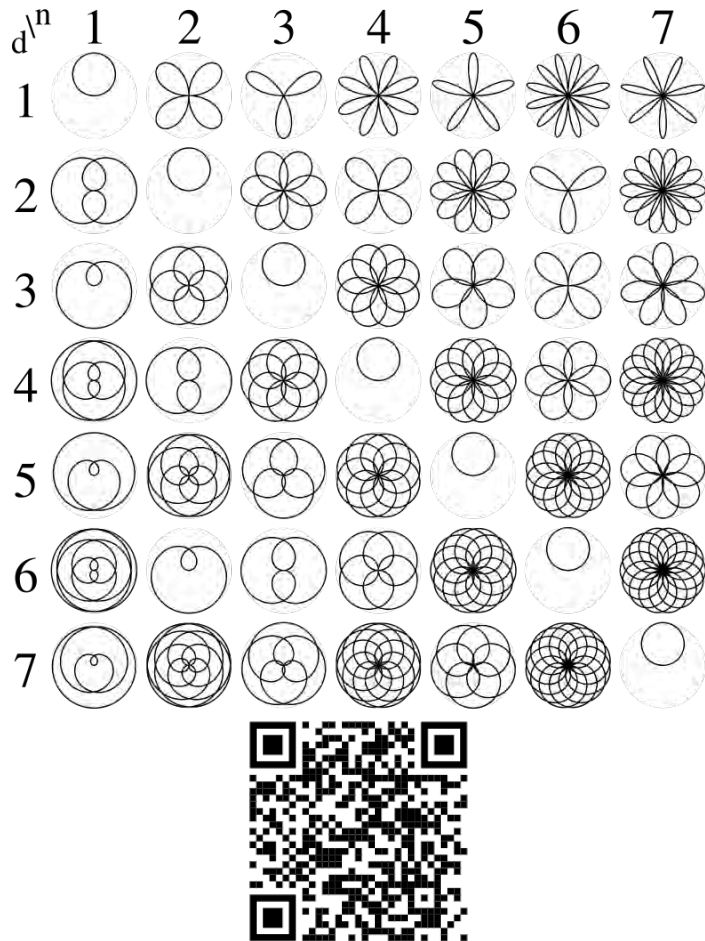


Fig. 6

Teorema 7. Sia $k = n/d$ numero razionale (con n , d interi coprimi). Allora la rodonea di equazione polare $r = \text{sen}(kt)$ ha n petali se n , d sono entrambi dispari, oppure $2n$ altrimenti. I petali sono sovrapposti se e solo se k non è intero (cioè, $d > 1$).

Ad esempio, se $k = 1.5$ abbiamo 6 petali i cui vertici corrispondono alle 6 soluzioni $x \in [0, 2\pi[$ dell'equazione $|\sin(3x/2)| = 1$. La seguente Fig. 6, ci riassume le k -rodonee per $k = n/d$ con n, d interi fra 1 e 7, prodotte con www.desmos.com/calculator/dk5ahjaie9.

Alcuni petali restano sovrapposti, ma questo accade anche in natura. Però alcuni casi non rispondono alla nostra idea primitiva di rosa in quanto il petalo appare troppo largo giacché non è contenuto in un semipiano. Con facili calcoli che coinvolgono le derivate (e limitandosi legittimamente a studiare solo al primo petalo che si compone per θ fra 0 e π/k) si prova che per restare nello stesso semipiano deve essere $\pi/k < \pi$ e quindi $k > 1$. Qual è la poi differenza fra i casi $k = 7, 7/2, 7/3, 7/4$ cioè, le rose che leggiamo nell'ultima colonna della figura? La differenza non sta più nel numero dei petali, ma... in quello delle loro intersezioni o, più elegantemente, nell'ampiezza del petalo, cioè nell'angolo fra le tangenti a un singolo petalo nell'origine (il centro del fiore). Questo calcolo non è difficile e lo lasciamo al lettore.

Cosa succede poi se proviamo con k irrazionale? In tale caso in numero dei vertici della k -rodonea di Grandi, cioè i massimi della funzione $|r| = |\sin(\cdot)|$, è evidentemente infinito, come si verifica studiando la derivata. Di più, si vede che essi riempiono densamente la circonferenza unitaria, laddove X è denso in Y significa che per ogni punto y di Y ne esiste uno di X tanto vicino quanto si vuole. Da un punto di vista grafico, cioè, si può interpretare dicendo che l'immagine di Y e quella di X sono indistinguibili qualunque sia la definizione dello schermo del nostro dispositivo. D'altra parte, questi punti sono in quantità numerabile e, con un ragionamento simile, lo sono i

punti con $0 < r < 1$. Giungiamo così a considerare il seguente enunciato.

Teorema 8. *La k -rodonea di Grandi è densa nel cerchio unitario se e solo se k è un numero irrazionale. In tale caso sebbene sullo schermo essa certamente sembra riempirlo, dal punto di vista della geometria euclidea sui numeri reali ciò non accade (è una fake).*

Va detto però che il caso k irrazionale è chiaro nel modello matematico ma non ha molto senso nel modello fisico del pendolo (vedi più avanti).

4 - Lo spirografo di Tolomeo

Come disegnare la curva descritta da un pendolo di Foucault o la rodonea di Grandi? Ci viene in mente di usare un giocattolo che avevamo alle elementari, che era stato inventato e registrato (va detto), dall'ingegnere britannico Denys Fisher, che lo presentò nel 1965 ad una fiera di giocattoli a Norimberga.



Fig. 7

Per un paio di esempi sull'aspetto e l'uso dello spirografo vedi i link in nota.²

²-www.shutterstock.com/it/video/clip-3850371727-drawing-hypotrochoid-figure-using-spirograph
- www.youtube.com/watch?v=vAVHNUpo8WY
- www.desmos.com/calculator/b6l9e3gggj

Sebbene sia facilmente possibile acquistare per qualche euro il prodotto nella sua esteticamente gradevole versione iniziale, rileviamo che un buon modello virtuale di questo meccanismo si trova nel sito <https://inspiral-web.nathanfriend.com> (o in altri siti). Va detto però questo software è molto più efficace se gestito su un *touchscreen*, ad es. sul proprio smartphone o tablet. Alla APP per Android poi ci si arriva seguendo il QR sotto o dalla pagina *www* sopra indicata.

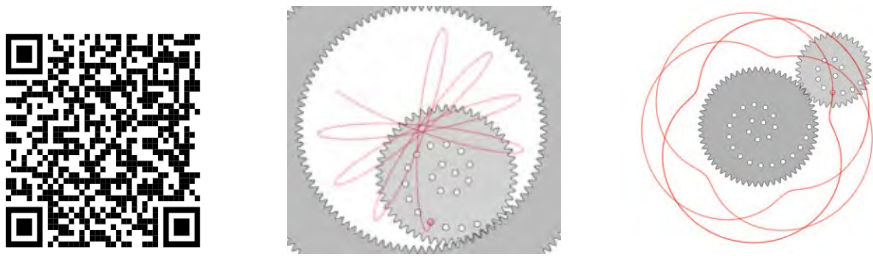


Fig. 8

Lo Spirografo produce un tipo di curve chiamate *ipotrocoidi* ed *epicicloidi*, seconda che si faccia rotolare il cerchio mobile all'interno o all'esterno di quello fisso (Fig. 8). Vedremo che anche da un punto di vista matematico la differenza è facilmente controllabile e i due casi non sono in realtà diversi.

Dopo un attimo di riflessione si capisce che questo luogo di punti (ovvero disegno) si può anche descrivere come traiettoria della composizione di due movimenti circolari uniformi come nell'orbita dei pianeti rotazione/rivoluzione secondo il modello Epiciclo/Deferente di Tolomeo (II sec DC). Nella Fig. 9, ci interessa il punto $P(x,y)$ ovvero il vettore $MP = MC + CP$,

o anche, con più attenzione all'aspetto matematico:
<https://aperiodical.com/2021/12/the-mathematics-of-spirograph/>

laddove, per la facile equazione del moto circolare uniforme, abbiamo

$$MC = (R \cos(\Omega t), R \sin(\Omega t)),$$

e similmente

$$CP = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)),$$

sicché per $OP = (x(t), y(t))$ si ha

$$x(t) = R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t), y(t) = R \sin(\Omega t) + r \sin(\omega t).$$

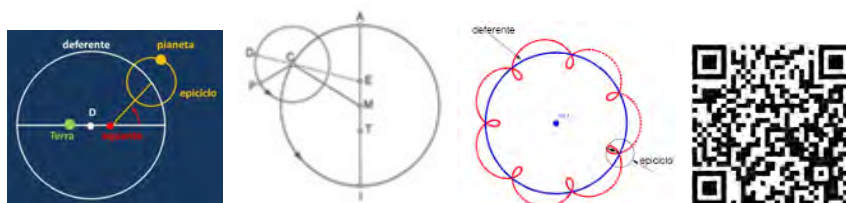


Fig. 9

Osserviamo che una trattazione analoga, con l'uso della forma di Eulero per i numeri complessi si trova in - L. Biacino, M. Barlotti, *Il teorema di Nasir Eddin e l'ellisse come risultante di moti epicyclici*, «Archimede» 8, 2020, articolo nel quale si possono trovare alcune dimostrazioni che qui omettiamo.

Una buona costruzione grafica di questo luogo di punti (anche detto impropriamente *roulette*, nome che si indica una grande famiglia di curve) si può ottenere on-line con software www.desmos.com/calculator/8nnsobtjoz, raggiungibile anche con il QR in Fig. 9, dove si lavora impostando dinamicamente allo stesso modo sia i 4 parametri R, r, Ω, ω , sia t quello relativo al tempo.

Se imponiamo la condizione aggiuntiva

$$\omega = -\frac{R}{r} \Omega$$

che deriva dal fatto che a causa dei denti non vi è strisciamento abbiamo una forma più leggera, che omettiamo scrivere poiché a noi interessa sola la forma della curva possiamo anche moltiplicare/dividere entrambe le equazioni simultaneamente per un qualunque fattore. Inoltre, se non ci interessa a che velocità vengano tracciate le figure possiamo supporre che una delle due velocità angolare (all'interno di \cos e \sin) sia uguale a 1. Insomma... alla fine possiamo ridurci a sistemi con meno parametri, come quello nella Fig. 10 sotto. Notiamo che il segno davanti al seno nelle formule dipende dal fatto che le due rotazioni (e rivoluzione) possono essere concordi (moto anterogrado come quello detta Terra intorno al sole, responsabile dell'accorciamento del giorno siderale di cui sopra) o discordi per rotazione retrograda, come per Venere e per lo spirografo nella sua versione ipotrocoideale. Ricordiamo infatti che $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, ma $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \omega \cos(t) + \cos(\omega t) \\ y(t) &= \omega \sin(t) \pm \sin(\omega t) \end{aligned}$$

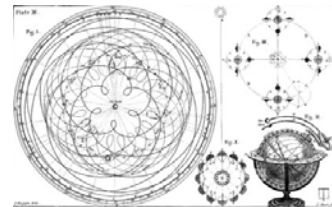


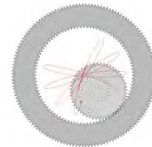
Fig. 10

Per studiare ora l'*ipotrocoide* fatta dello spirografo ci basta porre $R - r$ come raggio della circonferenza fissa (per la rivoluzione), cioè quella che percorre il centro della rotella mobile e $-d$ come raggio della circonferenza mobile poi

dobbiamo porre la condizione di non slittamento (come sopra) e ottenere

Teorema 9. Le componenti dell'**ipetrocoide** $H(R, r, d)$ hanno equazioni

$$\begin{cases} x(\theta) = (R - r) \cos \theta + d \cos\left(\frac{R-r}{r} \theta\right), \\ y(\theta) = (R - r) \sin \theta - d \sin\left(\frac{R-r}{r} \theta\right). \end{cases}$$

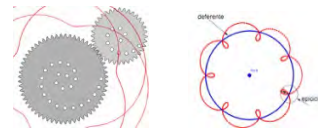


dove dobbiamo imporre $0 < d < r < R$, se vogliamo riprodurre un fenomeno meccanico concretamente realizzabile; infatti, $r < R$ perché la circonferenza interna deve avere raggio minore di quella esterna e $d < r$, altrimenti non si sa dove segnare materialmente il punto P . Il caso $d = 0$ ci dà la circonferenza deferente. \square

Facile ora capire come, in maniera analoga otteniamo.

Teorema 10. Le componenti dell'**epetrocoide** $E(R, r, d)$ hanno equazioni

$$\begin{cases} x(\theta) = (R + r) \cos \theta - d \cos\left(\frac{R+r}{r} \theta\right) \\ y(\theta) = (R + r) \sin \theta - d \sin\left(\frac{R+r}{r} \theta\right) \end{cases}$$

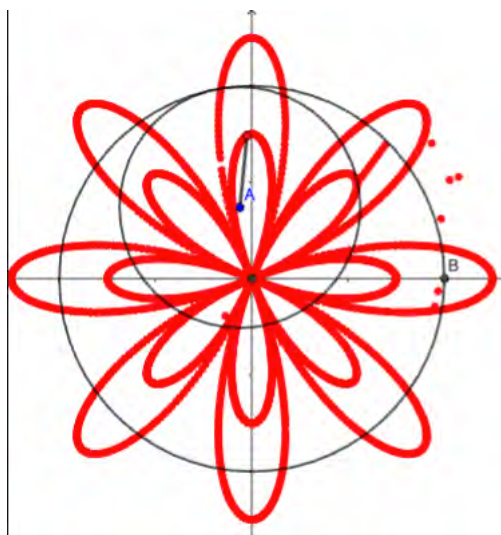


Si osservi che nel caso $d > r$ la traiettoria forma un cappio. \square

Per semplificare ulteriormente la costruzione, osserviamo un'altra interessante proprietà, piuttosto intuitiva ma non banale che ci sospende la limitazione $d < r$ nello spirografo interno.

Lemma. Una ipetrocoide $H(R, r, d)$ passa per l'origine se e solo se $R = r + d$, e in tal caso $H(R, r, d)$ e $H(R, d, r)$ sono simili. \square

Nella figura sotto si vedono $H(8,5,3)$ e $H(8,3,5)$, dove la seconda è la rosa più piccola.



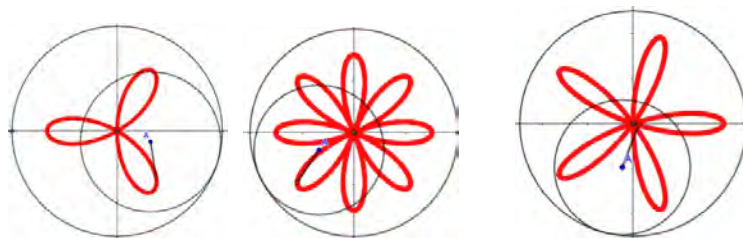
Dunque, a parte la grandezza in scala, per tracciare molte epi/ipotrocoidi basta uno spirografo!

Osservazione. La k -rodonea $G(k)$ è simile a $H(2k, k+1, k-1)$ e non è difficile verificare che (se nella definizione di $G(k)$ si usa \cos e non \sin si ha proprio uguaglianza come in

- $G(3)$ è simile a $H(6,4,2)$ e quindi a $H(3,2,1)$;

- $G(4)$ è simile a $H(8,5,3)$;

- $G(5)$ è simile a $H(10,6,4)$ o anche $H(5,3,2)$.



Si confronti questa figura con fig 4.

Corollario. Lo spirografo disegna le rodonee! E non solo.

Teorema 11. La curva $H(2,1, d)$ è un'ellisse di assi $1 + d$ e $1 - d$.

Corollario. La curva $H(1,1,1)$ è un segmento (di lunghezza 2). □

Quest'ultimo risultato ci dice che è possibile tracciare un segmento con uno spirografo che consiste in un cerchio che rotola all'interno di una circonferenza di raggio doppio (*coppia di Tusi*). Questo risultato era già noto all'astronomo e matematico persiano del XIII secolo Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī e contenuto in un suo libro di cui immagine sotto.

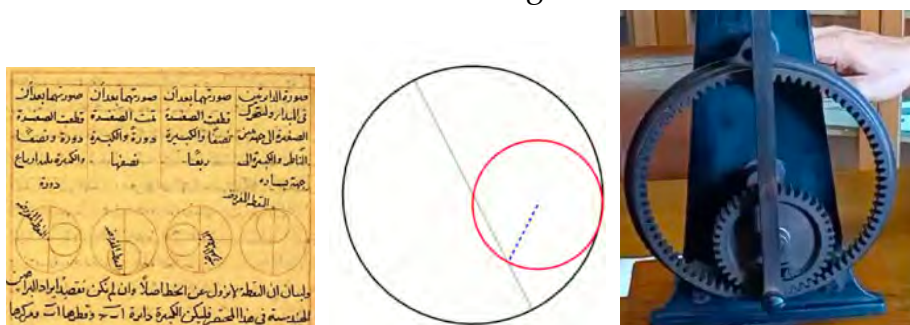


Fig. 11

dove il modello mostrato (1880 circa) è quello custodito nei locali museali del Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”.

5 - Conclusioni

Siamo partiti da un celeberrimo esperimento di Fisica e – con un viaggio nella natura e nell’arte – siamo riusciti a riprodurlo con il modello ludico-matematico dello Spirografo. Infatti, abbiamo ottenuto che la curva del pendolo di Foucault degli studenti di Padova da cui siamo partiti, in Fig. 1, hanno come modello $H(9,4,5)$ o $H(9,4,4)$ a seconda che essa passi per il

centro o meno (in dipendenza dalle condizioni iniziali del pendolo). Queste curve “cloni” sono riporate in figura Fig. 12 e ottenute su www.desmos.com/calculator/ckfssg6nwc.

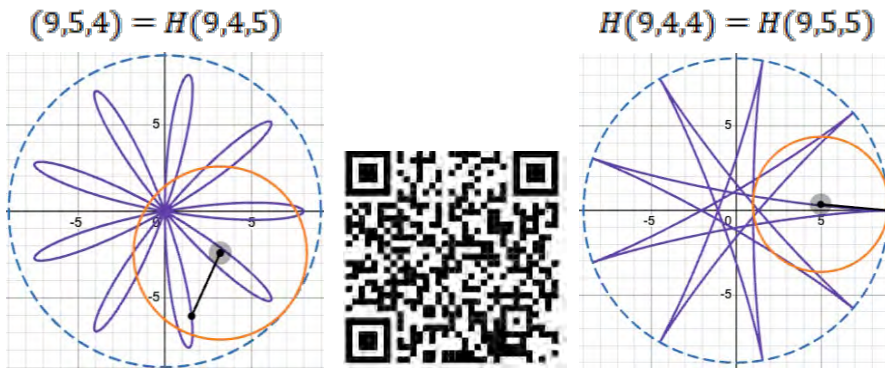


Fig. 12

Ci domandiamo... ma il pendolo di Foucault non aveva un k molto più grande? Questa domanda non ci spaventa perchè ci basta aumentare il parametro k nelle equazioni delle curve che stiamo usando, cioè $H(2k, k + 1, k - 1)$ e $H(2k, k - 1, k - 1)$.

Ad esempio per avere 45 petali /oscillazioni si considerano $H(90,46,44) = H(45,22,23)$, una rodonea e $H(90,44,22)$ un'ipocotride non rodonea (a tratti concava), come in Fig. 13 e ottenuta su www.desmos.com/calculator/sbkrhnecee.

Questo studio, questa gita matematica, ci ha permesso di avvicinarci problemi di varia difficoltà e tutti significativi. Confesso che sento il rammarico di non avere fatto entrare sul palco il personaggio immaginario che, con i suoi numeri complessi e la formula di Eulero ci avrebbe fatto vedere le cose ancora da un altro punto di vista. Ma chi troppo vuole...

non si diverte più. Invece ci ha dato molta soddisfazione difendere la tesi: con un giocattolo come lo spirografo alla fine sembra si possa disegnare di tutto.



Fig. 13

In effetti, con l'analisi di Fourier, si può provare che – se si dichiara prima la definizione del nostro schermo – e si hanno spirografi virtuali (come Desmos) con sufficientemente molte ruote.... possiamo disegnare automaticamente quello che vogliamo. Ad esempio, a Copernico che ci ha insegnato che la deferente è un'ellisse e non una circonferenza (e così sembra che il mostro modello non funzioni), rispondiamo che il nostro spirografo con la coppia di cerchi disegna anche l'ellisse. Quindi con 3 o più ruote possiamo affrontare un nuovo viaggio nel sistema solare.

Di questo ed altri argomenti correlati ci piacerà discutere con tutti quelli interessati al progetto SPIROMANIA che prego pertanto contattarmi a dardano@unina.it.

La serra idroponica

Legame naturale tra matematica e scienze per evidenziare vantaggi ambientali, sanitari ed economici nell'utilizzo di nuovi sistemi di coltivazione

Prof.ssa Mariagrazia Santella * - Prof.ssa Rosanna Ramacciato ** - Prof. Nicola Iannaccio ***

* Liceo Scientifico "A. Romita" Campobasso (CB) Italia;
mariagrazia.santella@gmail.com

** Liceo Scientifico "A. Romita" Campobasso (CB) Italia;
rosanna.ramacciato@liceoscientificoromita.edu.it

*** Liceo Scientifico "A. Romita" Campobasso (CB) Italia;
nicola.iannaccio@liceoscientificoromita.edu.it



Sunto: *La serra idroponica rappresenta una soluzione innovativa, sostenibile e comoda per la produzione agricola, consentendo di coltivare ortaggi, frutta da arbusti ed erbe aromatiche senza l'uso del terreno, senza l'uso di fitosanitari (pesticidi, anticrittogamici, antiparassitari), riducendo il consumo di acqua e ottimizzando la resa produttiva. Nonostante tutti questi vantaggi, possiamo affermare con certezza che questo sia il metodo di coltivazione migliore? L'unica disciplina che può darci una risposta affidabile è la matematica: abbiamo modellizzato la crescita delle piante coltivate nella nostra scuola, in un piccolo impianto che simula una serra idroponica. Grazie a questo studio, abbiamo analizzato la crescita di quattro diverse colture, quali ravanello, pomodoro, fragole e basilico. La crescita è stata analizzata mediante modelli matematici e abbiamo ottenuto come risultato che il ravanello e il pomodoro sono le piante più adatte alla nostra serra. Le piante di pomodoro trapiantate nel terreno ed esposte a*

un'inclinazione dei raggi delle luci a led, differenti da quelle inizialmente coltivate non si sono sviluppate. Mentre le piante di pomodoro trapiantate nella lana di roccia e poste sul davanzale, quindi ad inclinazione dei raggi delle luci a led di circa 45°, dopo un'iniziale fase di adattamento con andamento parabolico e lineare, hanno mostrato una crescita costante con un aumento medio di 1,25 cm al giorno negli ultimi venti giorni.

Abbiamo inoltre dedotto l'importanza dell'acqua che agisce come serbatoio di calore.

Parole Chiave: *Serra Idroponica – Crescita – Nutrienti – Modellizzazione Matematica*

Abstract: *The hydroponic greenhouse represents an innovative, viable and comfortable solution for agricultural production, allowing to cultivate without the need of potting soil, without the use of pesticides, reducing water consumption and optimizing the productive yield. Despite all those benefits, is it safe to say that this is the best cultivation method? The only subject that can give us a definitive answer is math; therefore, we have modelled the growth of the plants in our school, in a small system that mimics a hydroponic greenhouse. Thanks to this study, we analyzed the growth of four different crops: radish, tomato, strawberry, and basil. The growth was analyzed using mathematical models, and we found that radish and tomato were the most suitable plants for our greenhouse. The transplanted tomato plants, exposed to an inclination of LED light rays, different from those initially cultivated, did not develop. While the tomato plants transplanted into rock wool and placed on the windowsill, therefore at an angle of approximately 45° to the LED light beams, after an initial adaptation phase with a parabolic and linear trend, showed constant growth with an average increase of 1.25 cm per day over the last twenty days.*

We also deduced the importance of water, which acts as a heat tank.

Keywords: *Hydroponic Greenhouse – Growth – Nutrients – Mathematical Modeling*

1 - Finalità del sistema innovativo di coltivazione mediante serra idroponica

Sin dagli albori delle prime civiltà, l'essere umano è sempre andato alla ricerca di metodi per migliorare le proprie condizioni di vita, arrivando a spingersi oltre i limiti imposti dalla natura in nome dell'innovazione e del progresso. Questo bisogno incessante di sviluppo si è diffuso in ogni ambito nel corso dei secoli, ad averne risentito maggiormente è l'agricoltura, dove la crescente domanda di cibo e la necessità di utilizzare le risorse in modo più efficiente hanno portato alla ricerca di soluzioni sempre più sostenibili. In questo contesto la serra idroponica rappresenta la risposta più avanzata: un sistema agricolo che consente di coltivare piante senza l'uso del suolo e diserbanti, sfruttando soluzioni nutritive bilanciate e controllate. Questa tecnologia non solo aumenta la produttività e riduce eventuali consumi, ma rappresenta anche una risposta concreta alle sfide globali legate alla sicurezza alimentare e ai cambiamenti climatici. A questo proposito il traguardo 2.4 dell'Agenda 2030 afferma che:

«Entro il 2030, garantire sistemi di produzione alimentare sostenibili e implementare pratiche agricole resilienti che aumentino la produttività e la produzione, che aiutino a proteggere gli ecosistemi, che rafforzino la capacità di adattamento ai cambiamenti climatici, a condizioni meteorologiche estreme, siccità, inondazioni e altri disastri e che migliorino progressivamente la qualità del suolo» (Paesi membri delle Nazioni Unite, 2015, sotto-obiettivo specifico dell'Obiettivo 2 dell'Agenda 2030).

Nel corso del nostro articolo, osserveremo le funzionalità di queste coltivazioni moderne e modelleremo i nostri studi sulla crescita di quattro differenti prodotti tra ortaggi, frutta ed erba aromatica: ravanello, pomodoro, fragola e basilico. L'attività didattica è rivolta alla classe terza sezione B del Liceo Scientifico "A. Romita" di Campobasso.

2 - Struttura della batteria

In questo paragrafo descriviamo le componenti fisiche della serra idroponica allestita nel Laboratorio "De Rerum Natura" della nostra scuola: vasche di contenimento, illuminazione, sistema di distribuzione nutrienti e irrigazione.

La serra idroponica presenta una batteria sulla quale si estendono 40 piante di 4 coltivazioni diverse, ognuna di esse distribuita nella rispettiva vasca: *Raphanus raphanistrum sativus* (ravanello), *Fragaria moupinensis* (fragola), *Lycopersicon esculentum* Mill (pomodoro) e *Ocimum basilicum* (basilico). Le piante hanno come substrato dei vasi di lana di roccia, un silicato amorfo ricavato da un mix di rocce e altri materiali inerti.



Sopra la batteria sono sospese, tramite appositi fili, due fonti di luce a led che simulano la luce del sole con raggi perpendicolari alle vasche. L'illuminazione a led può essere di tre lunghezze d'onda, a seconda della fase di crescita: seminazione, crescita vegetativa e fioritura. Per ottenere una crescita ottimale, l'illuminazione va dalle ore 8:00 alle ore 20:00 (per il dì), ossia per 12 ore e l'inclinazione dei raggi delle luci a led è perpendicolare alle batterie contenenti i vasi così come avviene alle ore 12:12 dell'equinozio di primavera, mentre nelle restanti ore le luci sono spente. La temperatura dell'ambiente è basata sulla temperatura media che si raggiunge nell'orario delle 12:12 dell'equinozio primaverile. Su uno dei due sistemi di illuminazione è posizionata una piccola centralina che garantisce il funzionamento delle luci ed un sensore, necessario per il controllo dell'umidità e della temperatura ambientale.

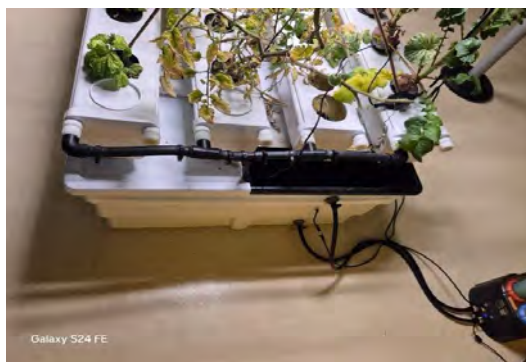


Per garantire i nutrienti necessari alla crescita e sviluppo delle piante, è stato installato "NIDO ONE V2", un dispositivo di somministrazione automatica di dimensioni 375x230x200 mm che permette di gestire volumi d'acqua fino a 200 litri.

Sono disponibili quattro slot personalizzabili per cartucce di sali minerali e correttori pH. Questi ultimi vengono erogati in un vascone d'acqua, per essere messi in comunicazione con il sistema di irrigazione.



Il sistema di circolazione dell'acqua serve a fornire equamente un costante apporto di acqua e nutrienti. Infatti, come già accennato, questi ultimi vengono immessi in un vascone tramite un tubo di 2 metri con sezione 9x13 mm, che deve essere riempito manualmente con un quantitativo minimo di acqua (controllato da un sensore). Dal vascone, l'acqua raggiunge le quattro vasche entrando in contatto con le piante. Raggiunta una certa altezza, l'acqua ritorna in circolazione attraverso dei buchi posti sopra il vascone.



3 - Software e parametri di controllo

In questo paragrafo descriviamo i software che controllano e regolano la serra da remoto.

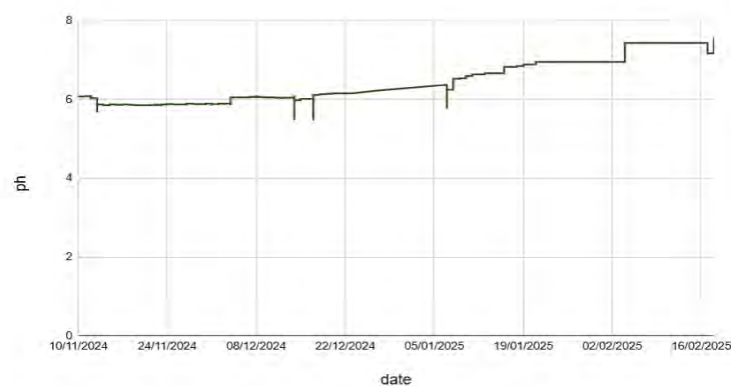
La serra idroponica è semiautomatica, in quanto il sistema è gestito da un sito web (NIDO Lab) e da una app (NIDO App) dedicati, che permettono di monitorare e regolare i parametri fondamentali e i giusti nutrienti attraverso NIDO ONE V2. Così facendo viene garantito un ambiente di crescita ottimale senza necessità di interventi da parte dell'uomo che, tuttavia, deve dare una prima impostazione a tutto il sistema.

3.1 - Nido lab e parametri di controllo

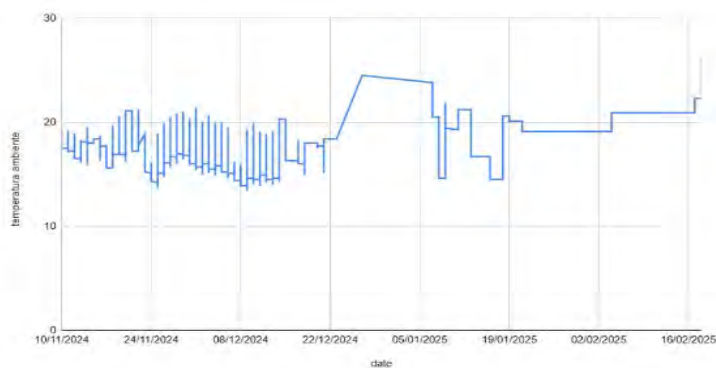
NIDO Lab fornisce una panoramica completa del sistema tramite grafici, visualizzando come e quando i parametri di controllo influenzano la crescita delle piante. Inoltre, permette di scaricare tutti i dati raccolti in un file Excel per un'analisi più approfondita. Sul sito si possono selezionare i valori dei parametri e le azioni che vengono svolte. I valori rappresentano la quantità di ciascun parametro in relazione a intervalli di tempo regolabili, mentre le azioni indicano quando determinati eventi vengono eseguiti. Di seguito illustriamo i suddetti valori e i relativi grafici per ognuno dei quali è riportata sull'asse x la scansione temporale in giorni dell'ultima settimana di rilevamento e sull'asse y il valore di ognuna delle voci seguenti:

pH: è un parametro essenziale per mantenere la solubilità degli elementi nutritivi e garantire un efficace assorbimento da parte delle radici. Se il pH si discosta dal valore ottimale,

possono verificarsi problemi nutrizionali dovuti all'immobilizzazione chimica o fisiologica di alcuni elementi minerali, compromettendo la crescita e la salute delle piante.



Temperatura ambientale: misura la temperatura dell'aria all'interno della serra. È fondamentale per mantenere il microclima ottimale per la crescita delle piante.



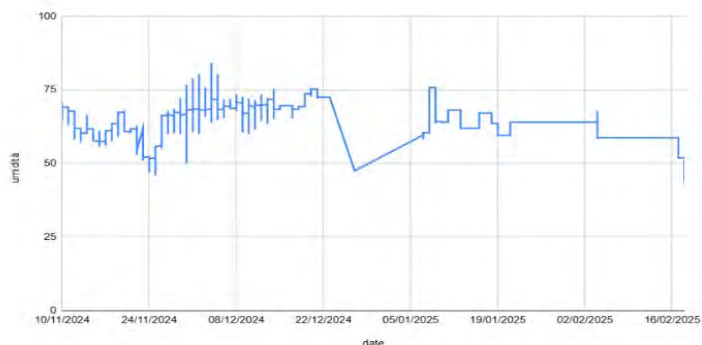
Conducibilità Elettrica (EC): misura la concentrazione della soluzione nutritiva. Una conducibilità troppo bassa indica un'eccessiva diluizione, causando carenze nutrizionali che

possono ridurre resa e qualità del raccolto. Al contrario, una conducibilità troppo elevata genera un'alta tensione osmotica, rendendo difficile l'assorbimento dell'acqua e dei nutrienti. Se il valore supera le soglie critiche, inoltre, l'assorbimento radicale si blocca, provocando appassimento o avvizzimento delle piante. Eccessi temporanei possono essere tollerati solo per brevi periodi, mentre valori molto elevati possono causare danni irreversibili in poche ore.



Il grafico della conducibilità elettrica è decrescente perché le piante, crescendo, assorbono sempre più sali minerali presenti nell'acqua, riducendo la loro concentrazione.

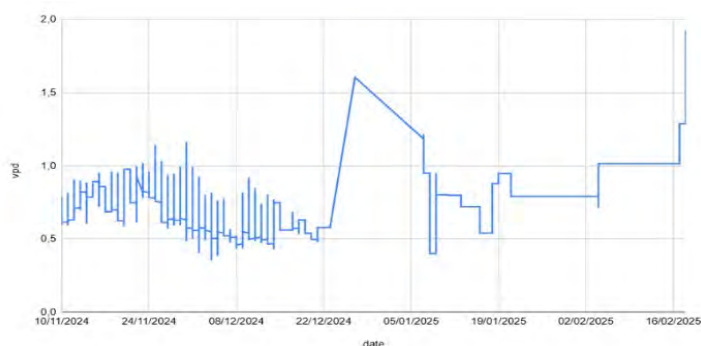
Umidità: rappresenta la percentuale di vapore acqueo presente nell'aria. Un controllo accurato dell'umidità è essenziale per evitare sia condizioni di stress idrico che problemi di muffe e funghi.



Temperatura dell'acqua: indica la temperatura dell'acqua utilizzata per l'irrigazione. Questa influisce sull'assorbimento dei nutrienti da parte delle radici e sul metabolismo vegetale.



VPD (deficit di pressione di vapore): misura la differenza tra la pressione di vapore dell'aria e quella di saturazione a una determinata temperatura, indicando il grado di secchezza o umidità dell'aria. È un parametro fondamentale, poiché regola la traspirazione delle piante, essenziale per il trasporto di nutrienti, il raffreddamento fogliare e la pressione osmotica. Un VPD troppo alto aumenta la traspirazione, causando stress idrico, mentre un VPD troppo basso la riduce, favorendo malattie e limitando la fotosintesi.



Di seguito sono riportati le azioni visualizzabili:

Illuminazione: si possono visualizzare le ore in cui si accendono e spengono le luci: attive dalle ore 8:00 alle ore 20:00 e spente nelle ore rimanenti.

Irrigazione: il programma ci mostra come l'acqua viene pompata all'incirca ogni tre ore, dove in ogni ciclo le piante vengono annaffiate due volte consecutive a distanza di 10 minuti.

Correzione del pH: se il pH dell'acqua aumenta più del dovuto, il sistema somministra automaticamente, attraverso NIDO ONE V2, acido fosforico.

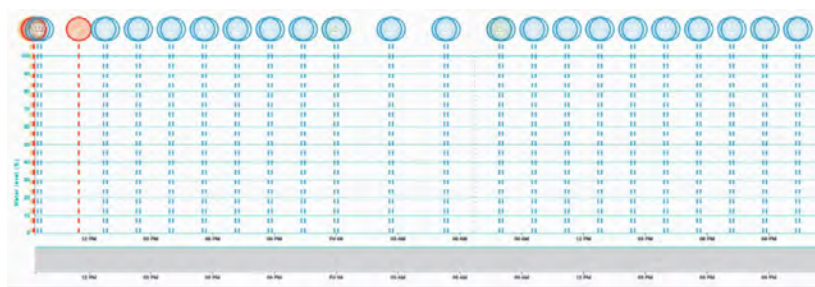
Controllo dell'Umidità: se l'ambiente non presenta la giusta quantità di acqua nell'aria, il sistema lo umidifica o deumidifica. Per fortuna, questo problema non si è mai verificato.

Erogazione di Nutrienti: l'azione deve essere attentamente regolata per prevenire sprechi di soluzione e di nutrienti, che potrebbero aumentare i costi e causare impatti ambientali negativi. Al contrario, un'erogazione insufficiente o che

avviene in maniera diradata, comprometterebbe lo stato nutrizionale delle piante, riducendo la loro produttività.

Stabilizzazione delle Temperature: circa ogni due ore, a distanza di 10 minuti, il sistema riscalda o raffredda la serra per due volte, mantenendo costante la temperatura ambientale e evitando stress termici che potrebbero compromettere la salute delle piante.

Livello dell'Acqua: attraverso il sensore nel vascone, Nido lab controlla il riempimento manuale dell'acqua ed il livello raggiunto all'interno dello stesso.



Azioni di irrigazione (blu), Stabilizzazione della temperatura ambientale (rosso), Illuminazione (giallo) 07/11/2024 - 09/11/2024

3.2 - Temperatura ambientale e temperatura dell'acqua

La quantità d'acqua presente nel sistema gioca un ruolo essenziale nel controllo della temperatura. Oltre a fornire un ambiente ideale per l'assorbimento dei nutrienti da parte delle piante, agisce anche come un regolatore termico naturale, mitigando gli sbalzi di temperatura all'interno della serra:

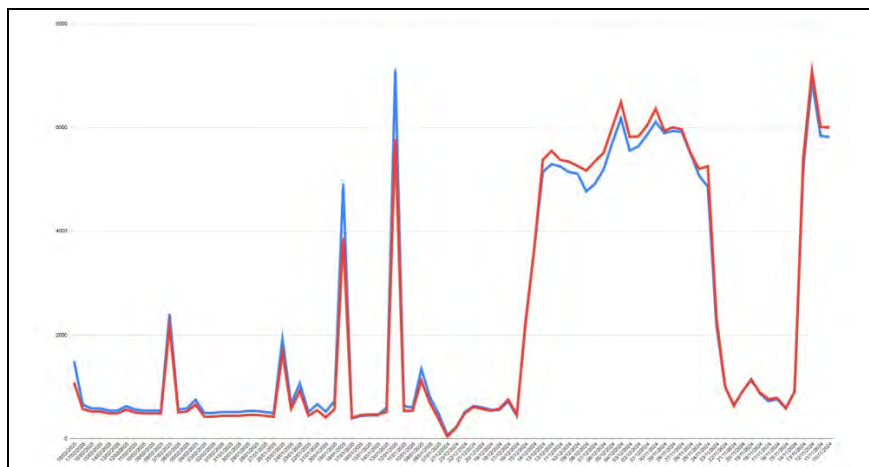
Refrigera quando si riscalda - l'acqua assorbe il calore in eccesso nelle ore più calde della giornata.

Riscalda quando si raffredda – durante le ore notturne o nei periodi più freddi, l'acqua rilascia lentamente il calore accumulato, contribuendo a mantenere una temperatura più stabile.

Queste proprietà sono importanti in un ambiente chiuso, dove il controllo della temperatura è essenziale per garantire ottimali condizioni di crescita. Lo stesso principio viene utilizzato anche nelle applicazioni industriali, dove la regolazione termica dell'acqua diventa un fattore chiave per la produttività e la sostenibilità.

L'accumulo di calore dell'acqua viene adoperato per bilanciare le escursioni termiche e questo riduce il bisogno di sistemi di riscaldamento e raffreddamento artificiali.

Il raffreddamento evaporativo e gli scambiatori di calore acqua-aria migliorano l'efficienza termica della serra.



azioni di stabilizzazione delle temperature messe a confronto

10/11/2024 – 28/02/2025

in azzurro temperatura ambiente – in rosso temperatura acqua

Le nostre considerazioni vengono confermate dal grafico raffigurante la temperatura dell'acqua in rosso e quella

ambientale in blu. Infatti, si può notare che i due grafici hanno lo stesso andamento e che la temperatura dell'acqua è stata di poco inferiore rispetto a quella dell'aria nei mesi più freddi quali seconda metà di dicembre, gennaio e febbraio, mentre è stata superiore rispetto a quella ambientale nei mesi di novembre e prima metà di dicembre. Riusciamo quindi a capire che l'acqua è riuscita effettivamente ad influenzare l'ambiente circostante, trattenendone il calore per poi cederlo quando la temperatura dell'ambiente scendeva. Essa diventa così un isolante termico.

3.3 - NIDO App e nutrienti

NIDO App controlla in tempo reale i principali parametri di crescita come temperatura, umidità e nutrienti, mantenendo le condizioni necessarie alla crescita delle piante. NIDO app considera le fasi di crescita delle piante ed i loro parametri (pH, conducibilità elettrica, temperatura e umidità). L'applicazione notifica le eventuali carenze come acqua o nutrienti, permettendo ai gestori della serra di prendersene cura. Tramite impostazioni si può stabilire la costante erogazione di nutrienti (A, B, C e pH-), l'unità di misura ($^{\circ}\text{C}/\text{mS}/\text{L}$) ed il formato orario (24:00).

3.4 - NIDO ONE V2

Per assicurare una regolare e sana crescita, il motore NIDO ONE V2, attraverso una pompa, eroga i 3 nutrienti assieme ad un derivato di acido fosforico per far abbassare il livello del pH:

A. È un derivato del nitrato di magnesio ($\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$) e nitrato

di potassio (KNO_3), un nutriente essenziale che favorisce la crescita delle foglie e contribuisce allo sviluppo generale della pianta.



- B. È un derivato di fosfato di ammonio ($(\text{NH}_4)_3\text{PO}_4$), fosfato di potassio (K_3PO_4), nitrato di potassio (KNO_3), solfato di potassio (K_2SO_4) e urea ($\text{H}_2\text{N}-\text{CO}-\text{NH}_2$) per la fase di fioritura. L'urea si trasforma in sali ammoniacali e poi questi in nitrati per dare nutrimento immediato ed una crescita vegetativa vigorosa. Il fosforo (P) è fondamentale per lo sviluppo delle radici e per la fioritura e lo sviluppo dei frutti, mentre il potassio (K) migliora la resistenza della pianta alle malattie e regola l'equilibrio idrico, migliora il colore ed il sapore dei frutti.



- C. Questo fertilizzante contiene una miscela di micronutrienti essenziali, che supportano vari processi fisiologici della pianta, garantendo una crescita sana e vigorosa. E' un

derivato dell'acido borico (H_3BO_3), nitrato di calcio ($Ca(NO_3)_2$), ferro DTPA (Fe), ferro EDDHA (acido etilendiammino-succinico), ferro EDTA (acido etilendiamminotetracetico) (importante per la fissazione dell'azoto nel metabolismo e respirazione delle piante, previene e cura l'ingiallimento delle foglie), manganese EDTA (Mn), nitrato di magnesio ($Mg(NO_3)_2$). L'acido borico è ammesso nell'agricoltura biologica regola l'assorbimento del calcio ed il trasporto degli zuccheri.



Utilizzando NIDO ONE V2 per erogare questi tre fertilizzanti, le piante ricevono una nutrizione completa e bilanciata, promuovendo una crescita ottimale e una maggiore resistenza alle avversità.



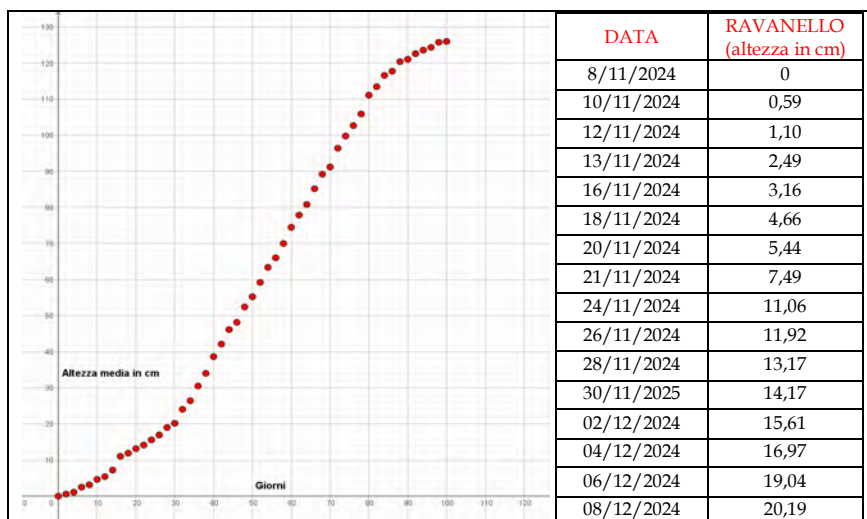
4 - Crescita delle piante e modellizzazione matematica

In questo paragrafo analizziamo la crescita del ravanello, del pomodoro, della fragola e del basilico coltivate nella batteria senza l'uso di fitosanitari (pesticidi, anticrittogamici, antiparassitari). Il ravanello, il pomodoro ed il basilico sono stati seminati, mentre le fragole sono state trapiantate come piantine già sviluppate.

Le misurazioni delle altezze di ognuna delle piante suddette sono avvenute manualmente ed a cadenza di due giorni. Abbiamo misurato a partire dalla base fino alla punta della foglia più alta, posizionata in verticale. Inizialmente, quando le piante erano piccole, abbiamo utilizzato un calibro per avere una misura più precisa, successivamente abbiamo utilizzato un metro.

4.1 - Ravanello

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle dieci piante di ravanello, del tipo Saxa, coltivate nella batteria. Le misurazioni sono avvenute fino al 18 febbraio come riportato nel grafico, mentre nella tabella abbiamo riportato fino all'08/12/2024 per brevità.



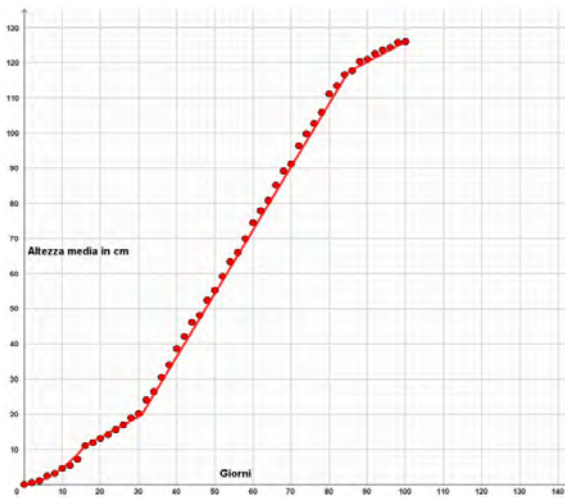
La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che dal primo al diciassettesimo giorno la crescita del ravello può essere approssimata da una funzione quadratica, ossia una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e concavità verso l'alto. Il primo giorno corrisponde al giorno 0, ossia il giorno in cui inizia l'osservazione della crescita del ravello. Mentre la crescita è lineare dal diciottesimo al trentaduesimo giorno, dal trentatreesimo all'ottantaseiesimo e dall'ottantasettesimo al centunesimo seppur con diverse pendenze.

Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$\text{ravello}(x) = \begin{cases} 0,03705x^2 + 0,09856x & \text{se } 0 \leq x \leq 16, & x \in N \\ 0,5909x + 1,6086 & \text{se } 16 < x \leq 31, & x \in N \\ 1,8x - 35,61 & \text{se } 31 < x \leq 85, & x \in N \\ 0,574x + 68,60 & \text{se } 85 < x \leq 100, & x \in N \end{cases}$$

Il nostro è un modello discreto, ma per rappresentarlo nel piano cartesiano come una curva a tratto continuo, consideriamo la curva supporto per la quale $x \in \mathbb{R}$, quindi si tratta di un modello continuo, la cui equazione è:

$$ravanello(x) = \begin{cases} 0,03705x^2 + 0,09856x & \text{se } 0 \leq x \leq 16, & x \in \mathbb{R} \\ 0,5909x + 1,6086 & \text{se } 16 < x \leq 31, & x \in \mathbb{R} \\ 1,8x - 35,61 & \text{se } 31 < x \leq 85, & x \in \mathbb{R} \\ 0,574x + 68,60 & \text{se } 85 < x \leq 100, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita del ravanello, nei primi diciassette giorni, aumenta in modo quadratico, nei quindici giorni successivi la crescita è stata costante, ovvero la pianta di ravanello è cresciuta in media ogni giorno di 0,6 cm, nei cinquantaquattro giorni successivi la crescita è stata costante con un aumento di 1,8 cm in media al giorno, negli ultimi quindici giorni la crescita è ancora costante con aumento di circa 0,6 cm in media al giorno.

4.2 - Fragola

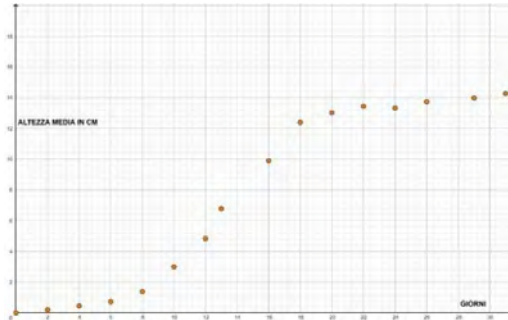
A differenza delle altre piante, le fragole non sono state seminate ma trapiantate come piantine già sviluppate, in quanto entrano in produzione più rapidamente.

Nel corso del nostro studio abbiamo notato che nella seconda metà del mese di dicembre le piante presentavano afidi e muffe ed apparivano poco sviluppate, forse a causa delle dimensioni eccessive delle piante di pomodoro, che, essendo vicine alle stesse, hanno determinato un minore apporto di luce. Nel tentativo di salvarle, le abbiamo trapiantate nell'orto della scuola.

Per quanto riguarda le fragole non sono stati ottenuti i risultati attesi, in quanto le piantine sono state trapiantate e probabilmente già presentavano dei potenziali infestanti, perché non selezionate da un vivaio.

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle dieci piante di fragola coltivate nella batteria.

Anche il grafico riporta l'altezza delle piante fino all'08/12/2024 perché successivamente trapiantate nell'orto all'esterno della scuola.

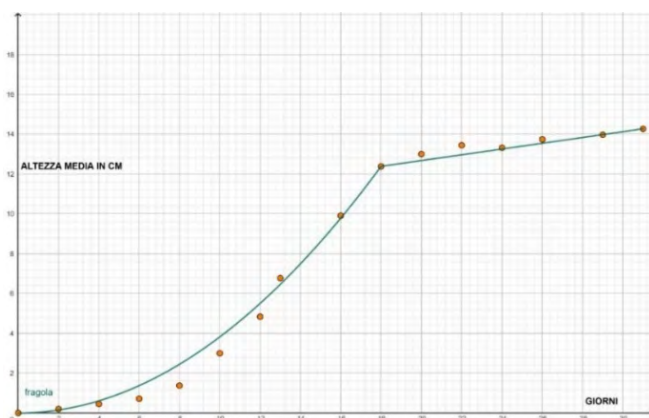


DATA	FRAGOLA (altezza in cm)
10/11/2024	0,20
12/11/2024	0,42
14/11/2024	0,64
16/11/2024	1,38
18/11/2024	3,00
20/11/2024	4,84
21/11/2024	6,77
24/11/2024	9,91
26/11/2024	12,39
28/11/2024	13,00
30/11/2025	13,44
02/12/2024	13,32
04/12/2024	13,74
06/12/2024	13,97
08/12/2024	14,27

La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che dal primo (giorno 0) al diciannovesimo giorno la crescita delle fragole può essere approssimata da una funzione quadratica, ossia una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e concavità verso l'alto. Mentre dal ventesimo al trentaduesimo giorno la crescita è lineare. Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$fragola(x) = \begin{cases} 0,03822x^2 & se \ 0 \leq x \leq 18, & x \in N \\ 0,14485x + 9,77 & se \ 18 < x \leq 31, & x \in N \end{cases}$$

$$fragola(x) = \begin{cases} 0,03822x^2 & se \ 0 \leq x \leq 18, & x \in R \\ 0,14485x + 9,77 & se \ 18 < x \leq 31, & x \in R \end{cases}$$



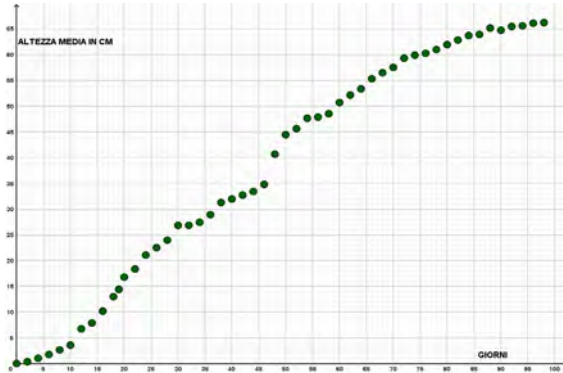
Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita della fragola, nei primi diciannove giorni aumenta in modo quadratico. Mentre nei tredici giorni successivi la crescita è stata costante, aumentando ogni giorno in media di 0,15 cm.



4.3 - Pomodoro

I pomodori coltivati appartengono alla Cultivar di Montagano che si avvicina alla Cultivar San Marzano. Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle dieci piante di pomodoro coltivate nella batteria. Le misurazioni sono avvenute fino al 18 febbraio

come riportato nel grafico, nella tabella abbiamo riportato fino all'08/12/2024 per brevità.



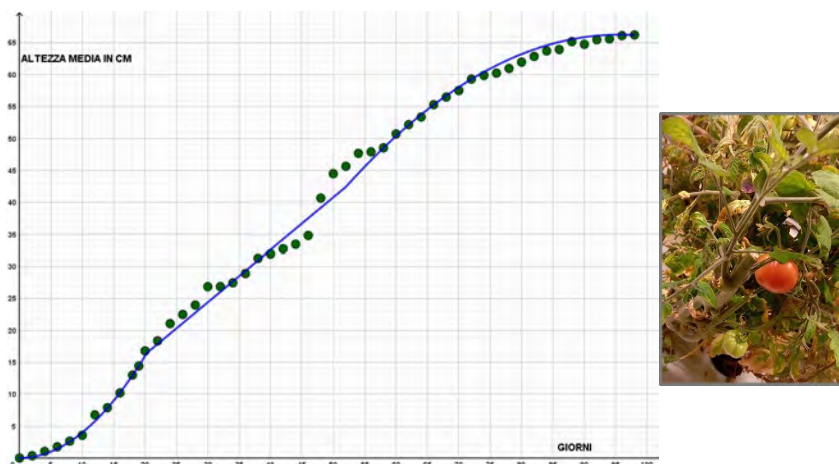
DATA	POMODORI (altezza in cm)
10/11/2024	0,00
12/11/2024	0,35
14/11/2024	1,03
16/11/2024	1,75
18/11/2024	2,65
20/11/2024	3,57
22/11/2024	6,77
24/11/2024	7,90
26/11/2024	10,21
28/11/2024	13,01
30/11/2025	14,43
02/12/2024	16,80
04/12/2024	18,37
06/12/2024	21,08
08/12/2024	22,51

La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che dal primo giorno, che corrisponde al giorno 0, al ventunesimo la crescita del pomodoro può essere approssimata da una funzione quadratica, ossia una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e concavità verso l'alto. Mentre dal ventiduesimo al cinquantatreesimo giorno la crescita è lineare. La crescita avvenuta nei giorni rimanenti può essere rappresentata da una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e con concavità rivolta verso il basso.

Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$pomodorobatteria(x) = \begin{cases} 0,004x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 20, & x \in \mathbb{N} \\ 0,81855x - 0,1365 & \text{se } 20 < x \leq 52, & x \in \mathbb{N} \\ -0,01257x^2 + 2,403x - 48 & \text{se } 52 < x \leq 98, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

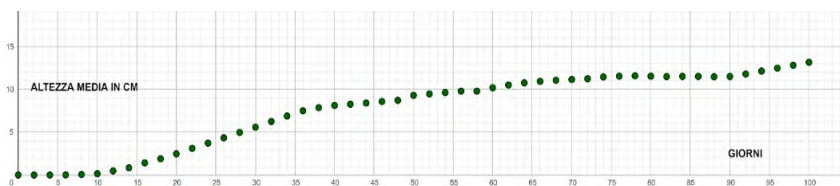
$$pomodorobatteria(x) = \begin{cases} 0,004x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 20, & x \in \mathbb{R} \\ 0,81855x - 0,1365 & \text{se } 20 < x \leq 52, & x \in \mathbb{R} \\ -0,01257x^2 + 2,403x - 48 & \text{se } 52 < x \leq 98, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita del pomodoro, nei primi ventuno giorni è aumentata in modo quadratico. Mentre nei trentadue giorni successivi la crescita è stata costante, aumentando ogni giorno di 0,82 cm, un incremento considerevole. Negli ultimi quarantasei giorni le piante sono cresciute in modo quadratico; la differenza con la prima parte della crescita parabolica con la concavità verso l'alto è che adesso la concavità della parabola è rivolta verso il basso. Da questo grafico possiamo quindi prevedere che, dopo aver raggiunto un'altezza massima, la pianta continuerà a rimanere alla medesima altezza.

4.4 - Basilico

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle dieci piante di basilico coltivate nella batteria. Le misurazioni sono avvenute fino al 18 febbraio come riportato nel grafico.

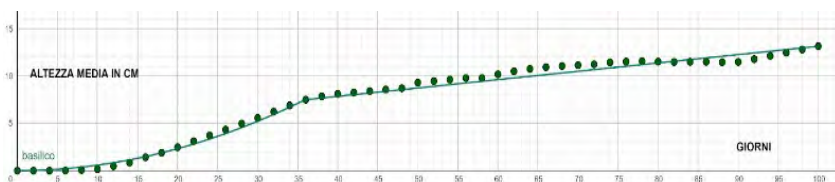


La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che dal primo giorno, che corrisponde al giorno 0, al trentasettesimo la crescita del basilico può essere approssimata da una funzione quadratica, ossia una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e concavità verso l'alto. Mentre dal trentottesimo giorno la crescita è lineare.

Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$\text{basilico}(x) = \begin{cases} 0,0058x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 36, & x \in N \\ 0,0822x + 4,3219 & \text{se } 36 < x \leq 100, & x \in N \end{cases}$$

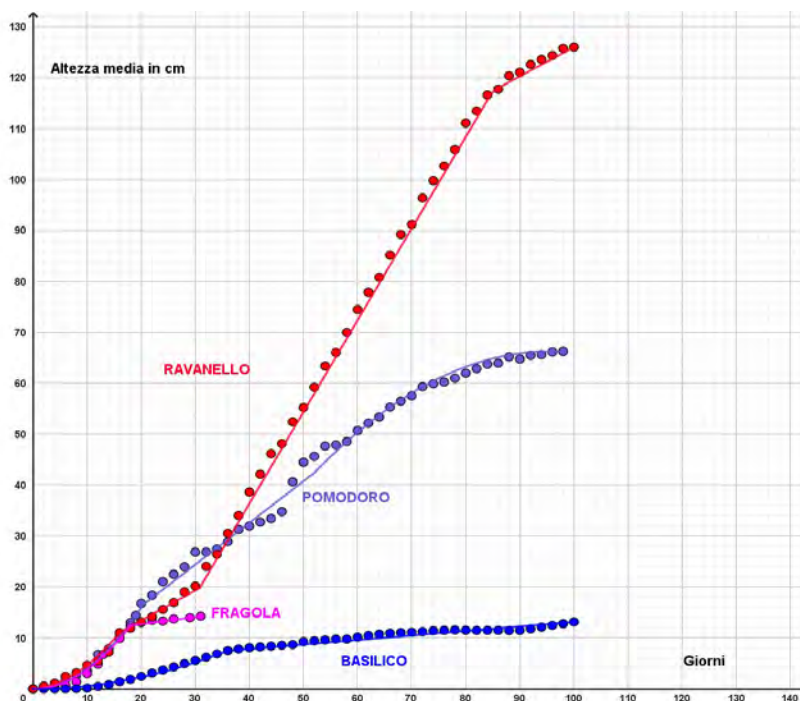
$$\text{basilico}(x) = \begin{cases} 0,0058x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 36, & x \in N \\ 0,0822x + 4,3219 & \text{se } 36 < x \leq 100, & x \in N \end{cases}$$



Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita del basilico nei primi trentasette giorni aumenta in modo quadratico. Mentre nei sessantaquattro giorni successivi la crescita è stata costante, aumentando ogni giorno di 0,09 cm, meno di 1 mm al giorno, davvero molto lenta.



4.5 - Confronto della crescita delle quattro piante



Dal confronto dei grafici possiamo dedurre che la crescita iniziale è quadratica per tutte e quattro le piante. Poi, per ognuna la crescita prosegue in modo costante. Solo per le piante di pomodoro abbiamo osservato che la crescita lineare si è trasformata in una crescita quadratica con concavità verso il basso che ha portato la pianta a raggiungere un'altezza massima nella fase finale.

Le piante di ravanello hanno raggiunto una maggiore altezza rispetto alla altre.

Le piantine di basilico hanno mostrato una crescita significativamente più lenta rispetto alle altre.

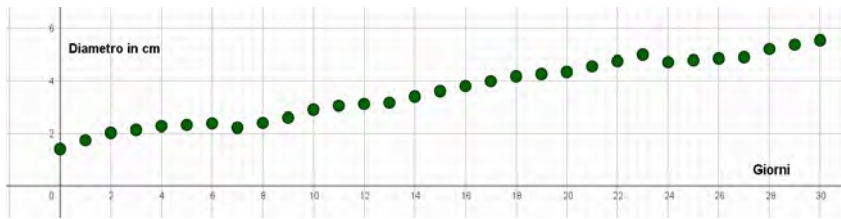
Le piante di fragola hanno mostrato, dopo i primi giorni, la presenza di alghe che non ha compromesso la crescita quadratica, successivamente sono comparsi afidi e muffe, che hanno influenzato la crescita lineare che è stata molto lenta.

4.6 - Crescita della radice del ravanello

Le radici (non il frutto) di ravanelli nella nostra serra idroponica sono cresciute notevolmente. Abbiamo misurato i diametri di ognuna e abbiamo deciso di modellizzare la crescita della radice con diametro maggiore.

Riportiamo di seguito le misurazioni giornaliere del diametro della radice più grande.

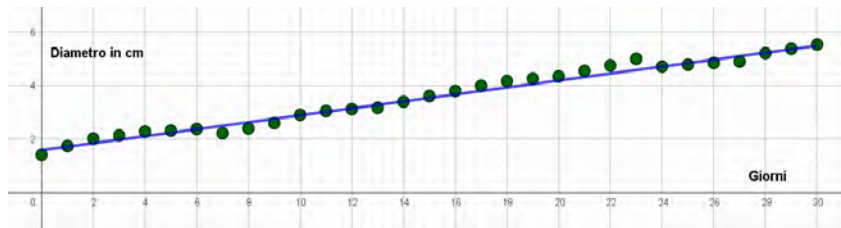
Data	26/11/2024	28/11/2024	30/11/2025	2/12/2024	4/12/2024	6/12/2024	8/12/2024	10/12/2024	12/12/2024
Diametro	1,42	2,15	2,56	2,87	2,96	3,33	3,36	3,83	4,44
Data	14/12/2024	16/12/2024	18/12/2024	20/12/2024	22/12/2024	24/12/2024	26/12/2024	28/12/2024	30/12/2024
Diametro	5,01	5,17	5,17	5,43	5,71	6,07	6,23	6,14	6,37
Data	1/1/2025	3/1/2025	5/1/2025	7/1/2025	9/1/2025	11/1/2025	13/1/2025		
Diametro	6,51	6,67	7,45	8,48	8,97	9,03	9,4		



Dal grafico dei punti possiamo evincere che la crescita della radice è avvenuta in maniera lineare e infatti possiamo ricavare un'equazione di primo grado, ovvero:

$$diametroradice(x) = 0,1436x + 1,9404 \quad x \in N$$

$$diametroradice(x) = 0,1436x + 1,9404 \quad x \in R$$



Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita del diametro della radice del ravanella è avvenuta seguendo un modello lineare, ossia la crescita è stata costante, aumentando ogni giorno di 0,144 cm.

Il percorso di crescita del ravanella nel nostro ambiente idroponico è avvenuto come segue: in una prima fase, in ogni pianta si è sviluppata una radice ingrossata dalla quale si è sviluppato l'apparato fogliare; da questo momento in poi le foglie hanno assorbito la maggior parte dei nutrienti raggiungendo un'importante estensione, mentre la radice ha

rallentato la crescita. Successivamente la radice è aumentata pronta per la raccolta e l'apparato fogliare ha rallentato la propria crescita. Nel nostro caso, i ravanelli non sono stati raccolti, quando la radice è diventata enorme, le foglie hanno ripreso la loro crescita. Il diametro maggiore raggiunto dai ravanelli è di 9,4 cm.

Le piante di ravanello sono cresciute maggiormente rispetto alle altre perché adatte ad una serra idroponica. In alcuni vasi si sono sviluppate fino a tre piante e nell'ultima fase hanno raggiunto l'altezza delle luci a led, ossia 181 cm. Considerato che i vasi sono posti nella batteria ad un'altezza di 55 cm dal pavimento, vuol dire che la pianta di ravanello ha raggiunto un'altezza di $181 \text{ cm} - 55 \text{ cm} = 126 \text{ cm}$.



5 - Studio in diverse condizioni

In questo paragrafo parleremo dello studio della crescita delle piante di pomodoro trapiantati nel terriccio e nella lana di roccia e posti all'esterno della batteria idroponica, coltivati anch'essi all'interno del laboratorio in condizioni diverse.

5.1 - Pomodori trapiantati

Nel corso del nostro progetto, le piante di pomodoro sono diventate numerose all'interno del proprio vaso e per questo abbiamo pensato di monitorarne la crescita in diverse condizioni ambientali. All'interno del nostro laboratorio sono state trapiantate dalla batteria undici piante di pomodori, di cui due in vasi con lana di roccia e tre in un vaso con terriccio e poste su un davanzale, che non riceve luce naturale, mentre sei in un altro vaso con terriccio e poste sul pavimento.



Dalle nuove posizioni dei vasi abbiamo ricavato, attraverso misurazioni manuali, l'inclinazione dei raggi delle luci a led; l'inclinazione sul davanzale è di circa 65° mentre sul pavimento è di circa 35° . Le piante, così, hanno ricevuto meno luce e la crescita ne ha risentito. Inoltre, la crescita delle piante è stata influenzata anche dall'irrigazione manuale che è diversa da quella automatica della serra ed è avvenuta ogni $2/3$ giorni.

5.2 - Differenze tra lana di roccia e terriccio

Nella coltivazione sul davanzale i pomodori sono stati trapiantati in due substrati diversi: terriccio e lana di roccia. Ma quali sono le sostanziali differenze tra l'uno e l'altro? Innanzitutto la lana di roccia viene principalmente utilizzata nei sistemi idroponici perché è un ottimo mezzo che consente un migliore assorbimento da parte delle radici. Inoltre, le fibre della lana di roccia favoriscono l'ossigenazione evitando il ristagno d'acqua. Il terriccio utilizzato per la nostra coltivazione è costituito da terra, torba, sabbia, composti e materiali organici e favorisce la crescita sana delle piante, fornendo loro i nutrienti necessari.

Il suolo è una risorsa limitata e fondamentale per l'agricoltura, diversi fattori come l'urbanizzazione, la desertificazione e l'erosione lo stanno riducendo ulteriormente. Utilizzare alternative come la lana di roccia permette di diminuire la dipendenza dal suolo tradizionale, rendendo possibile la coltivazione anche in ambienti poco fertili.



Terriccio

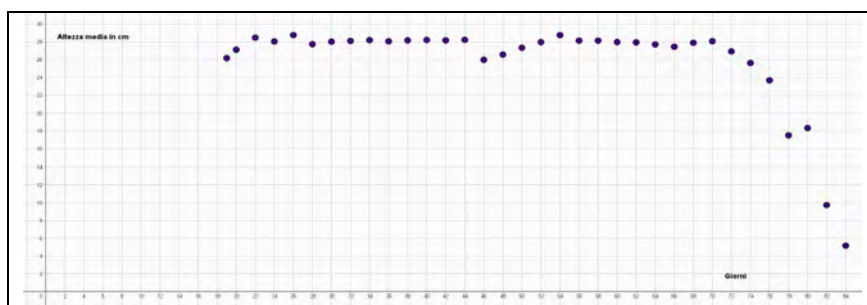


Lana di roccia

5.3 - Pomodori in vaso con terriccio posti sul pavimento

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle sei piante di pomodoro piantate nel vaso di terriccio e poste sul pavimento.

DATA	POMODORI IN TERRICCIO SUL PAVIMENTO	DATA	POMODORI IN TERRICCIO SUL PAVIMENTO
14/12/2024	26,18	17/01/2025	27,35
16/12/2024	27,13	19/01/2025	27,98
18/12/2024	28,48	21/01/2025	28,76
20/12/2024	28,05	23/01/2025	28,15
22/12/2024	28,77	25/01/2025	27,99
24/12/2024	27,75	27/01/2025	27,96
26/12/2024	28,03	29/01/2025	27,72
28/12/2024	28,12	31/01/2025	27,47
30/12/2024	28,20	02/02/2025	27,91
01/01/2025	28,07	04/02/2025	28,08
03/01/2025	28,18	06/02/2025	26,94
05/01/2025	28,22	08/02/2025	25,63
07/01/2025	28,18	10/02/2025	23,69
09/01/2025	28,18	12/02/2025	17,51
11/01/2025	28,23	14/02/2025	18,33
13/01/2025	25,99	16/02/2025	9,74
15/01/2025	26,58	18/02/2025	5,17



La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che, dal ventesimo giorno (19 gg + giorno 0) al sessantanovesimo giorno, l'altezza media dei pomodori è rimasta quasi invariata.

Possiamo modellizzare questo andamento con una retta quasi parallela all'asse x , caratterizzata da un coefficiente angolare molto basso e negativo, pari a $-0,01$. Questo vuol dire che le piante hanno mostrato una lentissima decrescita, pari ad una diminuzione di $0,01$ cm al giorno. Tuttavia, a partire dal settantesimo fino all'ottantacinquesimo giorno (84 gg + giorno 0), l'altezza delle piante ha iniziato a diminuire seguendo un andamento che si può approssimare con una funzione quadratica, ovvero una parabola con asse parallelo all'asse y e con concavità rivolta verso il basso.

La causa della decrescita può essere attribuita a diversi fattori:

Stress da trapianto. Il trasferimento delle piante in un nuovo ambiente può aver causato uno shock radicale, riducendo la loro capacità di adattarsi e svilupparsi correttamente.

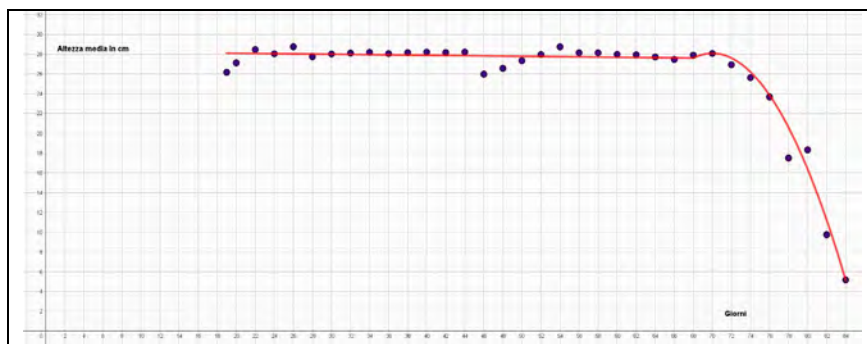
Minore esposizione alla luce. Una riduzione della quantità di luce solare potrebbe aver compromesso la fotosintesi, limitando la crescita e la produzione di energia necessaria alle piante.

Irrigazione manuale. Una gestione non uniforme dell'irrigazione, con possibili periodi di eccessiva o scarsa irrigazione, potrebbe avere influenzato negativamente il metabolismo delle piante.

Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$pomodori_{pavimento}(x) = \begin{cases} -0,01x + 28,29 & \text{se } 19 \leq x \leq 68, & x \in N \\ -0,117x^2 + 16,38x - 545,22 & \text{se } 68 < x \leq 84, & x \in N \end{cases}$$

$$pomodoripavimento(x) = \begin{cases} -0,01x + 28,29 & \text{se } 19 \leq x \leq 68, & x \in R \\ -0,117x^2 + 16,38x - 545,22 & \text{se } 68 < x \leq 84, & x \in R \end{cases}$$

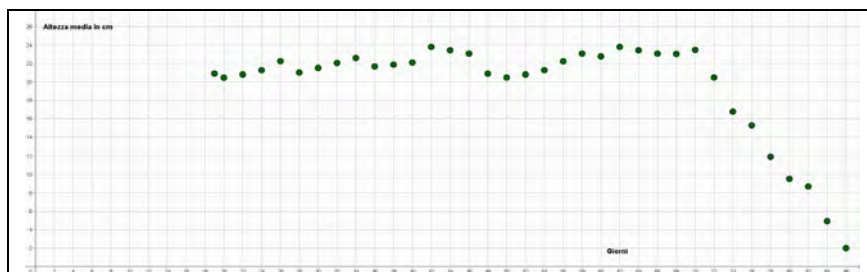


Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita dei pomodori, dal ventesimo al sessantanovesimo giorno, è avvenuta seguendo un modello lineare decrescente con una riduzione di 0,01 cm al giorno. Mentre nei sedici giorni successivi la crescita è diminuita seguendo il modello di una funzione quadratica con concavità verso il basso, ossia l'altezza media è diminuita in modo parabolico al passare dei giorni fino ad arrivare ad un'altezza minima di 5 cm.

5.4 - Pomodori in vaso con terriccio posti sul davanzale

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle tre piante di pomodoro piantate nel vaso con terriccio e poste sul davanzale.

DATA	POMODORI IN TERRICCIO SUL DAVANZALE	DATA	POMODORI IN TERRICCIO SUL DAVANZALE
14/12/2024	20,90	17/01/2025	20,80
16/12/2024	20,45	19/01/2025	21,27
18/12/2024	20,80	21/01/2025	22,23
20/12/2024	21,27	23/01/2025	23,07
22/12/2024	22,25	25/01/2025	22,77
24/12/2024	21,01	27/01/2025	23,80
26/12/2024	21,51	29/01/2025	23,43
28/12/2024	22,05	31/01/2025	23,07
30/12/2024	22,59	02/02/2025	23,03
01/01/2025	21,67	04/02/2025	20,47
03/01/2025	21,88	06/02/2025	16,77
05/01/2025	22,10	08/02/2025	15,27
07/01/2025	23,80	10/02/2025	11,93
09/01/2025	23,43	12/02/2025	9,53
11/01/2025	23,07	14/02/2025	8,70
13/01/2025	20,90	16/02/2025	4,93
15/01/2025	20,47	18/02/2025	2,00



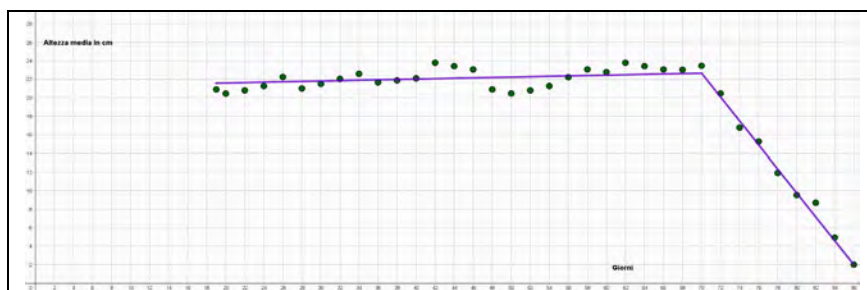
La posizione dei punti nel piano ci consente di osservare che dal ventesimo al settantunesimo giorno l'altezza media dei pomodori è rimasta quasi invariata con lenta crescita. Possiamo modellizzare questo andamento con una retta quasi parallela all'asse x , caratterizzato da un coefficiente angolare molto basso pari a 0,0211. A partire dal settantaduesimo fino all'ottantasettesimo giorno (86 gg + giorno 0), l'altezza delle piante è diminuita costantemente seguendo un andamento lineare, con decrescita di circa 1,3 cm al giorno.

Il declino delle piante può essere attribuito agli stessi fattori osservati per i pomodori trapiantati nel terriccio e posti sul pavimento.

Abbiamo modellizzato la crescita e la decrescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

$$pomodoridavanzaleterra(x) = \begin{cases} 0,0211x + 21,1824 & \text{se } 19 \leq x \leq 70, & x \in N \\ -1,2919x + 113,1012 & \text{se } 70 < x \leq 86, & x \in N \end{cases}$$

$$pomodoridavanzaleterra(x) = \begin{cases} 0,0211x + 21,1824 & \text{se } 19 \leq x \leq 70, & x \in R \\ -1,2919x + 113,1012 & \text{se } 70 < x \leq 86, & x \in R \end{cases}$$

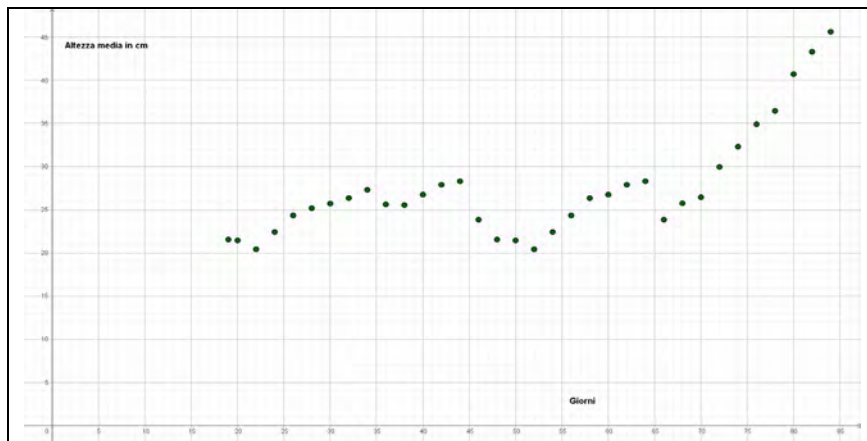


Considerata l'equazione e tracciato il grafico, osserviamo che la crescita di questi pomodori, dal ventesimo giorno (19 gg + giorno 0) al settantunesimo giorno, è avvenuta seguendo un modello lineare, aumentando ogni giorno di 0,02 cm. Nei sedici giorni successivi abbiamo osservato una decrescita costante di circa 1,3 cm al giorno, secondo un modello lineare.

5.5 - Pomodori in vaso con lana di roccia posti sul davanzale

Riportiamo di seguito le medie delle misurazioni giornaliere dell'altezza delle due piante di pomodoro trapiantate nei vasi di lana di roccia e poste sul davanzale.

DATA	POMODORI IN-LANA-DI-ROCCIA-SUL- DAVANZALE	DATA	POMODORI IN-LANA-DI-ROCCIA-SUL- DAVANZALE
14/12/2024	21,55	17/01/2025	20,42
16/12/2024	21,45	19/01/2025	22,42
18/12/2024	20,42	21/01/2025	24,35
20/12/2024	22,42	23/01/2025	26,35
22/12/2024	24,35	25/01/2025	26,75
24/12/2024	25,18	27/01/2025	27,90
26/12/2024	25,71	29/01/2025	28,30
28/12/2024	26,36	31/01/2025	23,85
30/12/2024	27,31	02/02/2025	25,75
01/01/2025	25,62	04/02/2025	26,45
03/01/2025	25,55	06/02/2025	29,95
05/01/2025	26,75	08/02/2025	32,30
07/01/2025	27,90	10/02/2025	34,90
09/01/2025	28,30	12/02/2025	36,45
11/01/2025	23,85	14/02/2025	40,70
13/01/2025	21,55	16/02/2025	43,30
15/01/2025	21,45	18/02/2025	45,60



a un andamento decrescente. Quest'ultimo andamento può essere modellizzato con una parabola con concavità rivolta verso il basso ed asse di simmetria parallelo all'asse y . Tuttavia, a partire dal cinquantaquattresimo giorno, la crescita è ripresa secondo un andamento lineare, sebbene con due diversi tassi di incremento: 0,6 cm dal cinquantaquattresimo al sessantacinquesimo giorno e circa 1,3 cm dal sessantaseiesimo giorno in poi, registrando quindi una variazione della pendenza del modello lineare a tratti.

Abbiamo modellizzato la crescita mediante una funzione definita a tratti la cui equazione è:

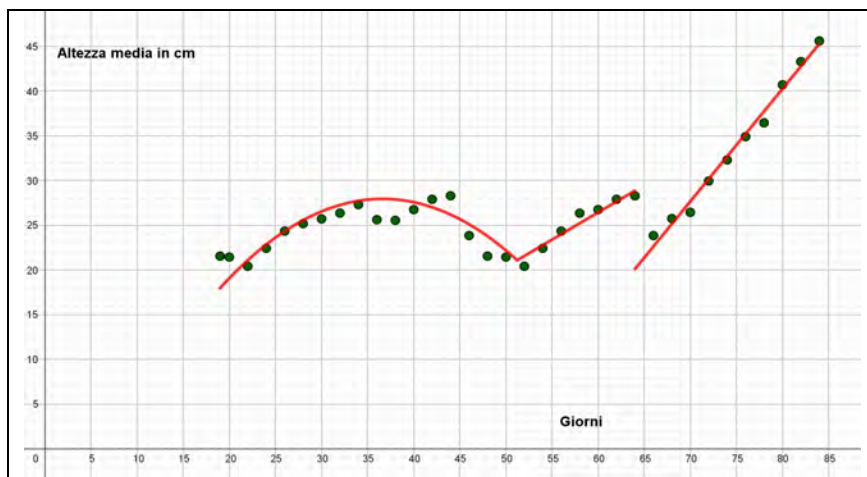
$$pomodorilanadiroccia(x) = \begin{cases} -0,0321x^2 + 2,3504 - 15,08 & \text{se } 19 \leq x \leq 52, & x \in N \\ 0,6086x - 10,0813 & \text{se } 52 < x \leq 64, & x \in N \\ 1,2591x - 60,4764 & \text{se } 64 < x \leq 84, & x \in N \end{cases}$$

$$pomodorilanadiroccia(x) = \begin{cases} -0,0321x^2 + 2,3504 - 15,08 & \text{se } 19 \leq x \leq 52, & x \in R \\ 0,6086x - 10,0813 & \text{se } 52 < x \leq 64, & x \in R \\ 1,2591x - 60,4764, & \text{se } 64 < x \leq 84, & x \in R \end{cases}$$

Fino al trentasettesimo giorno le piante hanno mostrato una crescita parabolica, poi dal trentottesimo giorno al cinquantatreesimo hanno evidenziato una decrescita sempre secondo lo stesso modello parabolico, attribuibile a una mancata irrigazione manuale ed a stress da trapianto. Successivamente abbiamo osservato una crescita di 0,61 cm al giorno fino al sessantacinquesimo giorno.

La discontinuità osservata tra il secondo e il terzo tratto del modello lineare è dovuta all'appassimento ed alla caduta delle foglie superiori che erano già precedentemente sviluppate in serra. Successivamente le nuove foglie più piccole comparse ci hanno consentito di riprendere le misurazioni. Dal

sessantaseiesimo all'ottantacinquesimo giorno abbiamo osservato una crescita lineare vigorosa di circa 1,26 cm al giorno.



Dall'analisi dell'equazione e del grafico emerge che la crescita dei pomodori trapiantati, dal ventesimo al cinquantatreesimo giorno, ha seguito un modello parabolico. Nei dodici giorni successivi, la crescita ha assunto un andamento lineare con un incremento medio di circa 0,6 cm al giorno. Negli ultimi venti giorni, il ritmo di crescita, pur sempre costante, è aumentato raggiungendo una media di circa 1,26 cm al giorno.

6 - Risultati della ricerca

I risultati che abbiamo ottenuto sono:

Le piante di ravanello, del tipo Saxa, sono cresciute notevolmente ed hanno raggiunto un'altezza massima di 126 cm e la radice ha raggiunto un diametro massimo di 9,4 cm.

Le piante di pomodoro della Cultivar di Montagano che si avvicina alla Cultivar San Marzano, sono cresciute in modo considerevole ed hanno raggiunto un'altezza massima di 68 cm portando numerosi grappoli di frutto i quali hanno raggiunto un diametro massimo di $3,5/4$ cm, mentre il valore maggiore raggiungibile è di $5/6$ cm.

Le piante di basilico hanno avuto uno sviluppo lento ed hanno raggiunto un'altezza massima di 13 cm.

Le piante di fragola, non sono state seminate in serra, sono cresciute raggiungendo un'altezza massima di 15 cm e non hanno portato frutti perché sono risultate infestate da afidi e muffe a conferma che non sono stati utilizzati antiparassitari.

Alla luce dei risultati ottenuti possiamo affermare che l'efficacia della serra idroponica è connessa al tipo di coltura praticata, infatti non tutte le piante sono cresciute con lo stesso vigore. Dai modelli matematici possiamo concludere che ad aver avuto i migliori risultati è stato il ravanello, seguito dal pomodoro: entrambi hanno superato efficientemente le fasi di crescita, offrendo frutti omogenei e dal sapore identico a quelli coltivati nel terreno. Gli stessi risultati non stati ottenuti con il basilico dove abbiamo osservato una crescita lenta, ma con le stesse caratteristiche di odore e consistenza. Per quanto riguarda le fragole non sono stati ottenuti i risultati attesi, in quanto le piantine sono state trapiantate e probabilmente già presentavano dei potenziali infestanti, perché non selezionate da un vivaio.

L'utilizzo della coltivazione idroponica ci ha permesso di constatare che la stessa consente un maggiore controllo sui parametri dell'ambiente di crescita quali la temperatura, esposizione alla luce, umidità e nutrienti; consente l'utilizzo efficiente dell'acqua e dei nutrienti riducendo gli sprechi; presenta minore rischio di parassitosi legate al terreno; favorisce la possibilità di coltivare in spazi limitati riducendo l'utilizzo del suolo agricolo; consente una crescita più rapida e maggiore produttività delle piante.

Relativamente alle piante di pomodoro trapiantate nel terriccio fuori dalla batteria idroponica, abbiamo osservato, prima una lenta decrescita e poi una decrescita rapida, mentre per quelli trapiantati in lana di roccia, abbiamo osservato prima una lenta ripresa della crescita seguita da una decrescita e poi da un'ulteriore crescita rigogliosa.

Inoltre, analizzando i grafici forniti da NIDO Lab, abbiamo osservato che, con il passare del tempo, la conducibilità elettrica è diminuita. La variazione di conducibilità elettrica è importante perché fornisce indicazioni circa il grado di assorbimento dei sali minerali e fornisce indicazioni riguardo all'umidità dell'ambiente. La diminuzione del valore di conducibilità elettrica indica la diminuzione della concentrazione dei sali minerali e dell'umidità dell'ambiente. A conferma che le piante hanno gradualmente assorbito i sali minerali.

La temperatura dell'acqua, come confermato dai grafici di NIDO app, agendo da serbatoio di calore, ha influenzato quella ambientale, mantenendola quasi costante nell'arco delle ventiquattro ore.

L'uso efficiente di acqua e fertilizzanti, l'assenza di diserbanti e l'impiego della lana di roccia come substrato rendono l'idroponica una soluzione vantaggiosa anche per aree con terreni aridi o impoveriti. Questo sistema di coltivazione permette una produzione continua e più rapida, con una resa superiore rispetto alle colture tradizionali ed una minore area di sfruttamento di terreno agricolo.

Per le motivazioni suddette, ossia più alimenti possono essere prodotti in meno spazio riducendo così la dipendenza dalle importazioni e migliorando la sicurezza alimentare sia dal punto di vista dell'accessibilità al cibo che dal punto di vista igienico sanitario.

La serra idroponica rappresenta una valida alternativa sostenibile per affrontare le sfide della produzione agricola del futuro.

Questa attività presenta come nucleo centrale la modellizzazione matematica, che è uno strumento di interpretazione e rappresentazione della realtà in accordo con le Indicazioni Nazionali Italiane (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR), 2010) che richiamano il tema dei modelli matematici tra gli obiettivi specifici di apprendimento al termine del primo biennio, del secondo biennio e del quinto anno del Liceo Scientifico.

L'attività didattica è in accordo con le Linee Guida STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria, Matematica) introdotte dal Ministero dell'Istruzione e del Merito (MIM) con DM n. 184 del 15 settembre 2023, che richiedono un approccio interdisciplinare e di rafforzare le competenze matematico-scientifico-tecnologiche e digitali. La matematica è vista come linguaggio universale in dialogo con le altre discipline.

L'attività didattica presenta anche un approccio laboratoriale (Unione Matematica Italiana, 2003), inteso come spazio per progettare, sperimentare, costruire significati, sviluppare il pensiero critico, argomentare e confrontarsi; la metodologia della scoperta guidata per sviluppare il senso della ricerca e dell'esplorazione; l'uso critico delle tecnologie; la valorizzazione della sostenibilità (legge n. 92 del 20/09/2019 educazione ambientale).

Bibliografia

BERGAMINI M., TRIFONE A., BAROZZI G. (2020). *Manuale blu 2.0 di matematica*. Bologna: Zanichelli.

BRANDI P., SALVADORI A. (2015). *I Modelli Matematici entrano a scuola. Vol. C - Dai modelli lineari ai primi modelli non lineari*. Città di Castello (PG): Grafiche VD srl.

BRANDI P., SALVADORI A. (2017). *Math Training - Media e valori medi- primi modelli lineari - equazioni e disequazioni elementari*. Perugia: Aguaplano.

FOSCHI F., ZOCCA C. (1987). *Terra e vita*. Bologna: Edagricole.

FOSCHI S., BRUNELLI A., PONTI I. (1985). *Terapia Vegetale*. Bologna: Edagricole. pp. 1-7.

GENTILE Abbattista I., CIGNETTI A. (1987) *FITOFARMACI, Caratteristiche chimiche e meccanismi d'azione*. Padova: Piccin-Nuova Libreria S.p.A.

PAOLETTI R., NICOSIA S., Clementi F., Fumagalli G. (1998). *Ecotossicologia*. A cura di Vighi M. e Bacci E. Trattato di farmacologia e terapia. Torino: UTET.

TREVISAN M., GENNARI M. (2008). *AGROFARMACI, Conoscenze per un uso sostenibile*. Bologna: Alberto Perdisa Editore.

WALKER C.H., HOPKIN S. P., SIBIY R. M., PEAKALL D. B. (2001). *Principles of ecotoxicology*. Second Edition, Milton Park Abingdon (Regno Unito): Taylor & Francis Ed.

AZIENDA SONLIPO, *LED Grow Light User Manual*.

Sitografia

ISPRA AMBIENTE:

<https://www.isprambiente.it>

NIDO APP:

<https://www.nidopro.com/it/coltivazione-idroponica-nido-one/app-per-la-coltivazione-nido-app/>

NIDO LAB:

<https://www.nidopro.com/it/coltivazione-idroponica-nido-one/gestione-della-coltivazione-nido-lab/>

NIDO ONE V2:

<https://www.nidopro.com/it/coltivazione-idroponica-nido-one/>

NIDO PRO:

[https://www.nidopro.com/it/deficit-di-pressione-di-vapore/#:~:text=Il%20VPD%20\(deficit%20di%20pressione%20di%20vapore\)%20%C3%A8%20un%20fattore,differenza%20di%20pressione%20di%20vapore](https://www.nidopro.com/it/deficit-di-pressione-di-vapore/#:~:text=Il%20VPD%20(deficit%20di%20pressione%20di%20vapore)%20%C3%A8%20un%20fattore,differenza%20di%20pressione%20di%20vapore)

UNRIC:

<https://unric.org/it/obiettivo-2-porre-fine-alla-fame-raggiungere-la-sicurezza-alimentare-migliorare-la-nutrizione-e-promuovere-unagricoltura-sostenibile/>

Il Teorema di Archimede sui corpi galleggianti

Vittorio Bovolin*

*Università di Salerno Dipartimento Ingegneria Civile;
v.bovolin@unisa.it



Sunto: *Il cosiddetto "Principio di Archimede" è uno degli argomenti della Fisica classica che ha maggiore notorietà. Sebbene quasi tutti siano in grado di ricordarne l'enunciato, pochi sono consapevoli che il Principio è in effetti un insieme di Teoremi dimostrati nel terzo secolo p.e.v. da Archimede di Siracusa.*

Nella presente Memoria le dimostrazioni del Principio sono svolte in base ai paradigmi Newtoniano ed Archimedeo.

La dimostrazione Newtoniana si basa su considerazioni di equilibrio globale combinando la rappresentazione grafica con l'interpretazione analitica.

L'analisi del testo Archimedeo è svolta sulla base di elaborazioni grafiche originali che, nel rispetto del testo, aiutano a comprenderne gli aspetti argomentativi e le relazioni esistenti tra la visione "tridimensionale" e le rappresentazioni "bidimensionali".

Parole Chiave: *Archimede, galleggianti, Idrostatica*

Abstract: *The so-called "Archimedes' Principle" is one of the most-known topics in physics. Although almost everyone can recall its statement, few are aware that the Principle is actually a set of theorems proved in the third century b.e.v. by Archimedes of Syracuse.*

In this paper proofs of the Principle are conducted based on both the Newtonian and Archimedean paradigms.

The Newtonian proof is based on considerations of global equilibrium combining the graphical representation with the analytical interpretation.

The analysis of the Archimedean text is conducted using original graphical elaborations that, while respecting the text, help to understand its argumentative aspects and the relationships between the "three-dimensional" vision and the "two-dimensional" representations.

Keywords: *Archimedes, floating bodies, hydrostatic*

1 - Introduzione

Quello che è comunemente conosciuto come il “Principio di Archimede”, ed in quanto tale da assumere in sé senza dimostrazione, è in effetti un insieme di Teoremi dimostrati nel III secolo p.e.v. da Archimede nel Trattato sui corpi galleggianti.

I “Teoremi di Archimede” affrontano il problema di stabilire cosa accade quando all’interno di una massa liquida una porzione del liquido è sostituita con un corpo solido avente stessa forma e volume della porzione liquida rimossa e densità qualsiasi.

La soluzione di tale problema richiede la definizione di un “modello meccanico del mondo” e di una “legge costitutiva” che caratterizzi il comportamento del mezzo originario e, successivamente, di analizzare le conseguenze della sostituzione con il corpo solido.

Nella presente memoria la dimostrazione del Teorema di Archimede verrà svolta prima nell’ambito del paradigma Newtoniano e successivamente nell’ambito del paradigma Archimedeo.

I paradigmi Newtoniano ed Archimedeo sono profondamente diversi sia nella identificazione degli elementi

di base sia nei mezzi concettuali utilizzati per lo sviluppo della dimostrazione.

Il paradigma Newtoniano, almeno nella formulazione contemporanea, identifica nelle forze gli enti di riferimento di base e si appoggia a due approcci: quello grafico, basato sulla rappresentazione delle forze mediante vettori, e quello analitico, basato sulla scrittura di equazioni in forma integrale e/o differenziale.

Il paradigma Archimedeo, che risente delle origini della scienza ellenistica, identifica nelle figure geometriche gli enti di riferimento di base alle quali, solo in secondo momento, sono associate proprietà meccaniche.

Nel paradigma Newtoniano la geometria risulta ancillare alla meccanica, mentre nel paradigma Archimedeo la meccanica è una proprietà associata alle singole figure geometriche.

Le conseguenze in termini di applicazione delle differenze tra i due paradigmi risultano più evidenti nel Secondo Libro del Trattato dedicato allo studio della stabilità dell'equilibrio, ma anche nel Primo Libro è possibile coglierne alcuni aspetti.

2 - Dimostrazione Newtoniana

L'applicazione del II° principio della dinamica al caso in parola può essere convenientemente svolta suddividendo le forze agenti in "forze di massa" e in "forze superficiali" per le quali, in condizioni di equilibrio, vale l'equazione:

$$\text{Forze di massa} + \text{Forze superficiali} = 0 \quad (1)$$

A seconda degli obiettivi la equazione (1) può essere sviluppata nell'ambito di una formulazione integrale o differenziale.

Nel caso dei liquidi la formulazione integrale permette di dimostrare il Teorema di Archimede, mentre la formulazione differenziale porta alla cosiddetta legge di Stevin e conseguentemente alla legge di distribuzione della pressione.

2.1 - Formulazione integrale: teorema di Archimede

Il percorso concettuale di rimozione di un volume da un mezzo qualsiasi e la sostituzione con un corpo solido è rappresentato nella Figura 1.

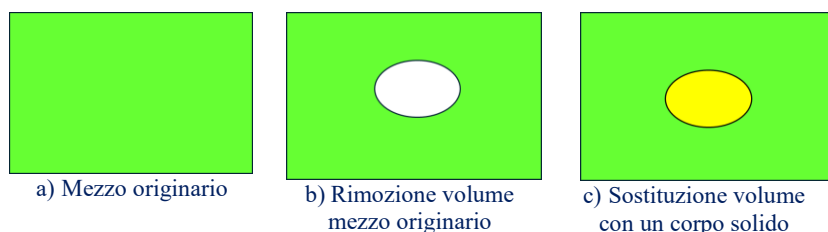


Figura 1 – Percorso concettuale per la definizione del Teorema di Archimede

Con riferimento alla Figura 1 è possibile rimuovere un volume τ interno ad un mezzo qualsiasi ponendo lungo la frontiera Σ del volume τ la corrispondente distribuzione degli sforzi interni Φ_n (vedi Figura 2a).

Per il III° principio della dinamica l'azione che la parte rimossa esercitava sulla parte principale è uguale e contraria a quella che la parte principale esercitava su quella rimossa (vedi Figura 2b).

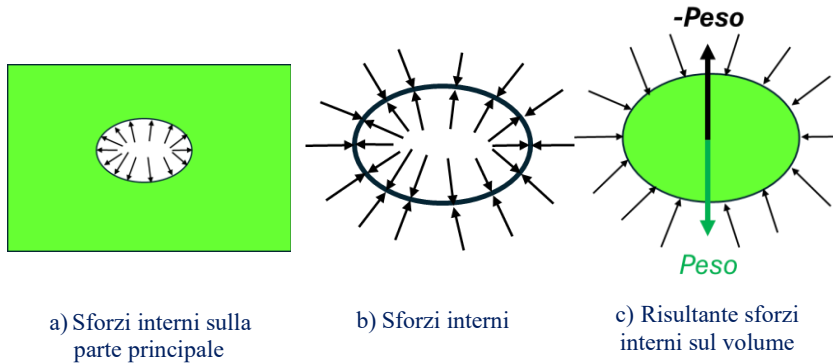


Figura 2 – Sforzi interni ad uno stesso mezzo

L'espressione in forma integrale della eq. (1) al volume rimosso τ comporta che:

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{G} d\tau + \int_{\Sigma} \Phi_n d\sigma = 0 \quad (2)$$

dove:

τ volume rimosso;

Σ frontiera di τ

ρ densità del mezzo (assunta costante);

\mathbf{G} vettore rappresentativo delle forze di massa (assunto costante);

Φ_n sforzi interni al mezzo agenti sulla frontiera Σ .

Nel paradigma Newtoniano il modello meccanico terrestre è rappresentato dalle forze di massa di tipo gravitazionale, conseguentemente il generico vettore \mathbf{G} della eq. (2) è rappresentativo del vettore accelerazione relativo al campo di forze gravitazionali.

La particolarizzazione della eq. 2 al caso di un solido posto in un campo di forze gravitazionali diventa:

$$\int_{\tau} \rho g \mathbf{grad}(z) + \int_{\Sigma} \Phi_n d\sigma = 0 \quad (3)$$

dove:

g accelerazione di gravità (assunta costante);

z quota del potenziale del campo gravitazionale terrestre.

L'applicazione della eq. (3) al caso descritto nella Figura 2, comporta, banalmente, che la risultante degli sforzi interni che agiscono sulla frontiera Σ è pari al peso del volume τ (vedi Figura 2c).

Analizziamo ora la sostituzione del volume del mezzo originario con un corpo solido di pari volume.

Nel caso il mezzo originario sia un solido la possibilità di sviluppare all'interno del mezzo stesso sforzi di compressione, di trazione, di taglio e di torsione comporta che, a seguito della rimozione del volume τ , lungo la frontiera Σ si determini una redistribuzione degli sforzi interni.

Tale caratteristica dei solidi spiega, ad esempio, la possibile formazione di cavità all'interno di un solido (vedi Figura 3a).

Nel caso di un mezzo solido la condizione di equilibrio del corpo comporta che la risultante degli sforzi interni Φ_n lungo la frontiera Σ del corpo τ sia pari al peso del corpo stesso (vedi Figura 3b).

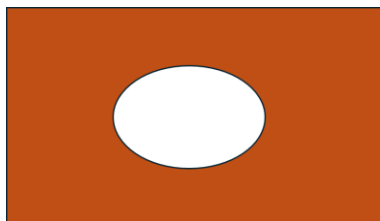


Fig. 3a- mezzo originario solido

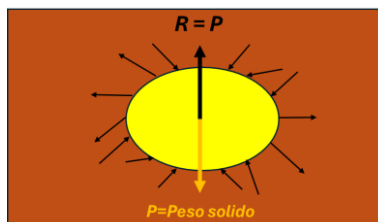


Fig. 3b - solido in solido

Nel caso di un liquido la legge costitutiva Newtoniana assume che esso non sia in grado di resistere a sforzi di trazione e che, in condizioni statiche, non esistano sforzi tangenziali, in altri termini si assume che il liquido possa essere solo compresso.

Ne consegue che lo sforzo interno al liquido agisce sempre lungo la normale alla superficie Σ considerata ed è sempre diretto verso l'interno della superficie stessa.

Tale caratteristica dei liquidi spiega la impossibilità di formare cavità all'interno del liquido (vedi Figura 4a). La particolarizzazione della eq. 2 al caso di un liquido newtoniano posto in un campo di forze gravitazionali diventa:

$$\int_{\tau} \rho g \mathbf{grad}(\mathbf{z}) d\tau + \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (4)$$

dove:

p pressione agente alla quota z ;

\mathbf{n} versore normale alla superficie Σ .

Considerato, quindi, che la distribuzione degli sforzi interni ad un liquido non si modifica a seguito della sostituzione del volume liquido con un corpo solido τ , ne consegue che la risultante degli sforzi interni lungo la frontiera Σ del corpo solido τ ha come risultante il peso del volume di liquido rimosso τ (vedi Figura 4b).

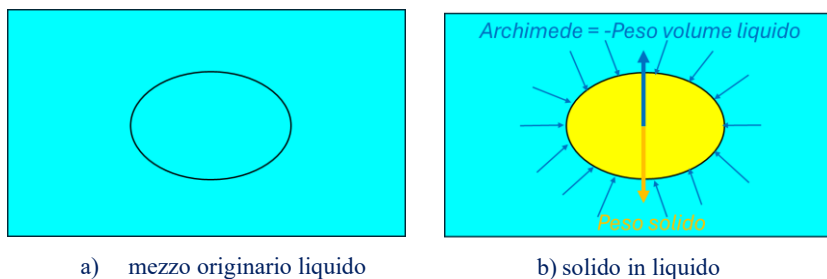


Figura 4 – Risultanti sforzi interni

E' quindi dimostrato che l'azione, detta spinta di Archimede A , che un liquido esercita su un corpo immerso nel liquido stesso è pari al peso del volume di liquido occupato dal corpo.

Il comportamento di un corpo solido immerso in liquido è pertanto descritto dalla seguente relazione:

$$P + A \geq 0 \tag{5}$$

Esprimendo nella eq. 5 il peso P del corpo in funzione della densità media ρ_s e del volume τ_s del corpo e la spinta di Archimede A in funzione della densità ρ_w del liquido e del volume immerso $\tau_{w,imm}$ del corpo (la gravità g non è considerata esplicitamente in quanto è presente in entrambe le espressioni dei pesi) si ottiene la seguente relazione:

$$\rho_s \tau_s + \rho_w \tau_{w,imm} \leq 0 \tag{6}$$

La rappresentazione grafica del significato fisico delle relazioni (5) e (6) è riportata nella Figura 5.

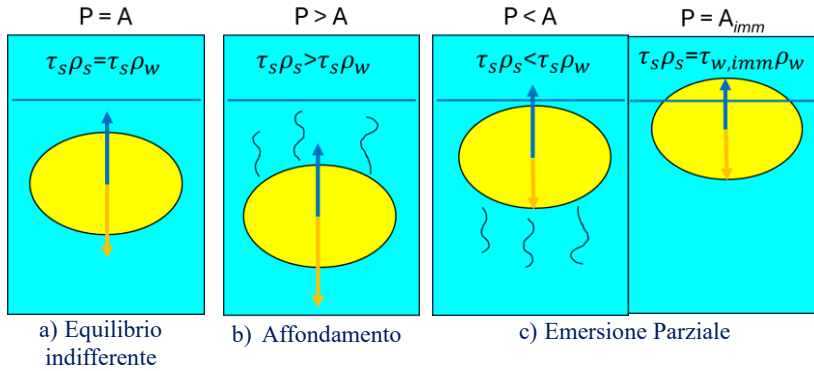


Figura 5 – Significato fisico relazioni (5) e (6)

2.2 - Formulazione differenziale: legge di Stevin

La formulazione differenziale del II° principio della dinamica al caso di un liquido newtoniano in un campo di forze di massa di tipo gravitazionale si può ricavare con riferimento a un volume di dimensioni elementari ottenendo:

$$\rho g \mathbf{grad}(\mathbf{z}) = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (7)$$

Il collegamento formale tra l'approccio integrale, espresso dalle equazioni (2) e (4), e l'approccio differenziale, espresso dalla eq. (7), è rappresentato dalla applicazione del II° lemma di Gauss-Green al termine relativo agli sforzi interni con normale positiva entrante:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\Phi_{nx} \cos nx + \Phi_{ny} \cos ny + \Phi_{nz} \cos nz) d\tau \\ = - \int_{\tau} \left(\frac{\partial \Phi_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{nz}}{\partial z} \right) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Nella condizione semplificatrice di liquido incompressibile, l'integrazione della eq. (7) porta a quella che è nota come legge di Stevin:

$$z + \frac{p}{\gamma} = cost \quad (9)$$

dove:

γ peso specifico del liquido.

L'equazione (9) rappresenta l'espressione "base" della legge di Stevin, in quanto se il liquido "è premuto da qualcosa o contenuto in qualcos'altro" l'applicazione della legge richiede opportuni aggiustamenti che tengano conto delle specifiche condizioni al contorno.

L'espressione "base" della Legge di Stevin stabilisce pertanto che la pressione in un liquido in un punto aumenta linearmente con l'altezza di liquido sovrastante e che il peso specifico del liquido è la costante di proporzionalità.

In termini pratici l'espressione "base" della legge di Stevin si applica a tutte quelle condizioni nelle quali il liquido presenta una superficie "libera" a contatto diretto con l'atmosfera terrestre.

Nella ipotesi di forma sferica della Terra la forza di gravità è diretta lungo i raggi convergenti verso il centro della Terra, ne consegue che le superfici isobariche sono sfere concentriche con il centro della Terra.

Tale identificazione delle superfici isobariche è necessaria in tutti quei casi che presentano una scala spaziale confrontabile con la dimensione della Terra come, ad esempio, nello studio delle correnti oceaniche.

Quando, invece, la scala spaziale del problema è trascurabile rispetto alla dimensione della Terra è possibile approssimare la

forza di gravità con vettori paralleli diretti verticalmente e conseguentemente le superfici isobariche risultano approssimate con piani orizzontali.

3 - Dimostrazione Archimede

Archimede di Siracusa nel III p.e.v. scrisse il Trattato in 2 libri sui corpi galleggianti.

Una lista delle versioni del testo Archimedeo disponibili è riportata nella apposita bibliografia.

Per quanto riguarda una trattazione generale dell'opera di Archimede, incluso il Trattato sui corpi galleggianti, si rimanda a Russo (2019).

Per quanto riguarda una analisi di alcuni aspetti di natura filosofica sottesi dal paradigma Archimedeo si rimanda a Dijksterhuis (2014) e a Russo (2019 e 2024) e alle relative bibliografie.

Il Trattato di Archimede sui corpi galleggianti si compone di 2 Libri che ripropongono in ambito fisico la struttura dei più noti trattati geometrici di epoca Ellenistica.

In essi, ai Postulati di base assunti a priori, seguono una serie di Proposizioni dimostrate deduttivamente sulla base dei Postulati stessi.

Per quanto riguarda la struttura epistemologica della scienza ellenistica, di cui il Trattato sui galleggianti è un caso esemplare, Russo (2024) chiarisce che lo scopo della scienza ellenistica era quello di "salvare i fenomeni", cioè di dedurre dai postulati ciò che si osservava nella realtà.

Secondo Russo (2024) la direzione accettabile del ragionamento era esclusivamente dai postulati verso i

“fenomeni”, mentre il percorso inverso non era considerato accettabile.

In altri termini non era possibile affermare, a partire da osservazioni sperimentali, la “verità” dei postulati di base.

Una teoria scientifica è valida se essa è coerente e se permette di “salvare” alcuni fenomeni, ma ciò non esclude che essa possa essere sostituita da una teoria migliore, in grado di “salvare” una gamma di fenomeni più ampia.

Il Trattato sui galleggianti comprende complessivamente 2 Postulati e 19 Proposizioni di cui 9 sono contenute nel Primo libro e 10 nel Secondo Libro.

In estrema sintesi si può affermare che il Primo Libro ha, principalmente, lo scopo di determinare le condizioni di equilibrio globali di un corpo solido immerso in un liquido, mentre il Secondo Libro riguarda l’analisi delle condizioni di equilibrio e di stabilità dell’equilibrio di un paraboloide retto.

Per quanto riguarda una rivisitazione in chiave moderna delle dimostrazioni archimedee sui corpi galleggianti si rimanda ad Heath (1897), che si concentra principalmente su una scrittura in termini trigonometrici moderni delle Proposizioni del II Libro.

Rorres (2004) e Rorres (2016) trattano analiticamente alcune particolari configurazioni geometriche non presenti nel Trattato di Archimede.

La descrizione sintetica dei contenuti del Postulato iniziale e delle 8 Proposizioni significative rispetto al Teorema di Archimede è riportata di seguito:

- Postulato iniziale: Modello meccanico del mondo e legge costitutiva del liquido
- Proposizione 1.1: «geometrica» definizione sfera

- Proposizione 1.2: «meccanica» modello del mondo e modello del liquido
- Proposizione 1.3: condizione di equilibrio per corpi con densità uguale al liquido
- Proposizione 1.4: condizione di equilibrio qualitativa per corpi aventi densità minore del liquido
- Proposizione 1.5: equilibrio di equilibrio quantitativo per corpi aventi densità minore del liquido
- Proposizione 1.6: forze agenti su corpi con densità minore del liquido
- Proposizione 1.7: forze agenti su corpi con densità maggiore del liquido
- Proposizione 2.1: rapporti tra volume emerso ed immerso e densità relativa per corpi con densità minore del liquido

I Postulati 1.8 e 1.9, conclusivi del Primo Libro, introducono il problema della stabilità dell'equilibrio considerando un galleggiante di forma sferica che risulta di più semplice trattazione rispetto al caso del paraboloide retto trattato nelle 9 Proposizioni da 2.2 a 2.10 del Secondo Libro.

Nel seguito sono esaminati in dettaglio il Postulato iniziale e le 8 Proposizioni significative rispetto al Teorema di Archimede.

3.1 - Libro 1 - Postulato iniziale: Modello meccanico e legge costitutiva del liquido

Sia dato un liquido di tali proprietà che:

- delle sue porzioni contigue ed egualmente disposte la meno compressa sia spinta dalla più compressa.
- ciascuna delle sue parti [si trovi] compressa secondo la [relativa] perpendicolare dal liquido posto sopra,

- a condizione che il liquido [stesso] non sia ricompreso in qualcosa e/o compresso da qualcos'altro (Fleck, 2016).

Il “modello meccanico del mondo” Archimedeo coincide sostanzialmente con quello Newtoniano in quanto il fattore agente sulla massa è il “peso”, che è diretto verso il centro della Terra e la pressione nel liquido, analogamente alla legge di Stevin, aumenta con la profondità.

La “legge costitutiva del liquido” Archimedeo appare sul piano formale meno strutturata rispetto a quella Newtoniana, ma risulta sostanzialmente coincidente dal punto di vista delle conseguenze pratiche.

La sinteticità del “modello meccanico del mondo” e della “legge costitutiva del liquido” è coerente con la condizione di “economicità” utilizzata nella definizione dei Postulati che caratterizza la scienza ellenistica.

Sulla base di tale condizione si afferma solo ciò che è ritenuto strettamente necessario per supportare la successiva parte dimostrativa.

Le limitazioni all'applicazione del modello del fluido specificate nella ultima frase del Postulato iniziale possono ragionevolmente ascriversi alla conoscenza di Archimede delle problematiche relative alle applicazioni della Pneumatica che erano riportate nei testi, in larga parte perduti, dei contemporanei di Archimede Ctesibio e Filone di Bisanzio e che oggi sono note principalmente sulla base del tardo testo del I° secolo e.v. di Erone di Alessandria.

Le dimostrazioni delle prime 5 Proposizioni da 1.1 a 1.5 si basano su semplici considerazioni di tipo geometrico, mentre le restanti 3 Proposizioni 1.6, 1.7 e 2.1 risultano più complesse

in quanto coinvolgono esplicitamente anche elementi di natura meccanica quali i pesi.

3.2 – Libro 1 - Proposizione 1.1

Se una qualsiasi superficie è tagliata da un piano per un punto [che resta] sempre lo stesso generando una circonferenza [ed] avendo centro [sempre] nello stesso punto per cui il piano è tagliato, la superficie [ottenuta] sarà [quella] di una sfera (Fleck, 2016).

Nella Figura 6 è riportato il disegno dei manoscritti relativo alla Proposizione 1.1.

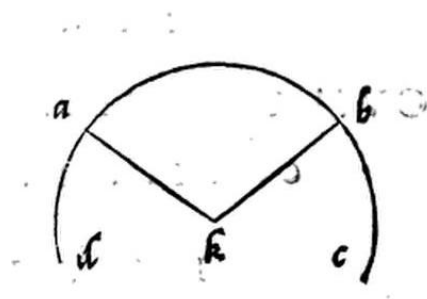


Figura 6 – Proposizione 1.1: definizione di sfera (Commandino, 1565)

La Proposizione 1.1 ripropone semplicemente la definizione di una sfera.

Archimede ha, probabilmente, ritenuto opportuno riportarla all'inizio del Trattato in quanto considerata propedeutica alla successiva Proposizione 1.2.

3.3 – Libro 1 - Proposizione 1.2

Ogni liquido [supposto] immoto [ed] in quiete, assumerà la forma di una sfera con centro in quello della Terra (Fleck, 2016).

Nella Figura 7 è riportato il disegno dei manoscritti relativo alla Proposizione 1.2.

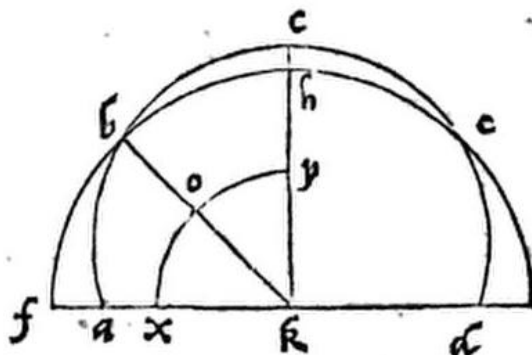
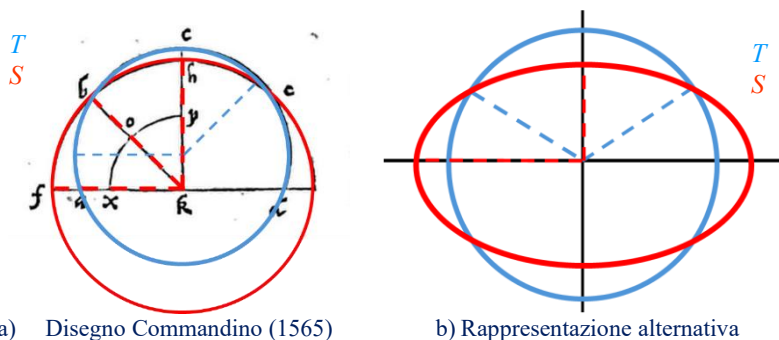


Figura 7 – Proposizione 1.2: definizione modello meccanico e del fluido (Commandino, 1565)



a) Disegno Commandino (1565)

b) Rappresentazione alternativa

Figura 8 – Proposizione 1.2: analisi della Figura dei manoscritti

La dimostrazione della Proposizione 1.2 è condotta “per negazione” e con riferimento alla Figura 8b), si svolge come segue:

- si assuma che la Terra T sia di forma sferica e che siano rispettate le condizioni di equilibrio poste nel Postulato iniziale;
- si consideri quindi una superficie S che non sia una sfera concentrica con il centro della Terra;
- i punti della superficie S hanno pertanto distanze/altezze variabili rispetto al centro della Terra stessa;
- per effetto delle distanze/altezze non costanti zone di fluido adiacenti sarebbero pressate in maniera diseguale;
- quindi il liquido, in contrasto con l'ipotesi iniziale, non sarebbe in equilibrio.

Nella letteratura tecnica i disegni giocano un ruolo non meno importante rispetto a quello del testo in quanto essi non sono ancillari al testo stesso, ma lo completano e, dove necessario, lo integrano, chiarendo in maniera semplice aspetti che sarebbero oltre modo complicati da descrivere a parole.

Nel caso della Proposizione 1.2 la Figura, riportata nella Figura 7 che accompagna il testo archimedeo, non è congruente con il testo stesso.

Il testo giunto fino a noi fa riferimento a 2 due sfere/circonferenze aventi lo stesso centro, circostanza che renderebbe impossibile il ragionamento dimostrativo riportato sopra.

L'estensore della copia del Trattato (vedi Figura 8a) ha evidentemente risolto il problema grafico disegnando 2 sfere/circonferenze con centri diversi.

Una possibile spiegazione della scelta di disegnare 2 sfere/circonferenze con centri differenti può essere una conseguenza del decadimento delle capacità grafiche dei copisti intervenuto tra il periodo ellenistico e il periodo di redazione dell'*originale* della copia a nostra disposizione.

A conferma di questa ipotesi si può osservare che la maggior parte dei disegni del Secondo Libro riproducono, in luogo di parabole, che rappresentano le sezioni trasversali di un paraboloido retto, delle più semplici circonferenze.

Considerato il ruolo preminente che la geometria e la capacità di disegno hanno avuto nella scienza ellenistica e considerato che le sofisticate analisi presenti nel Secondo Libro non possono essere state sviluppate senza la disponibilità di rappresentazioni "esatte" delle parabole, appare probabile che le circonferenze presenti nei manoscritti siano il risultato della sovrvenuta incapacità di disegnare correttamente forme geometriche più complesse di un cerchio.

Si può quindi immaginare che un primo copista abbia sostituito il riferimento ad una curva, ad esempio, di tipo ellittico, che non era in grado di comprendere e/o rappresentare, con il riferimento ad una circonferenza.

Lo stesso copista o un copista successivo, resosi conto che con due sfere/circonferenze concentriche risultava impossibile svolgere la dimostrazione, avendone compresa la logica, ha cercato di adeguare il disegno rappresentando le due sfere/circonferenze con centri differenti.

La soluzione grafica riportata nella Figura 8b rappresenta pertanto un ragionevole tentativo di rendere coerente il disegno con la struttura dimostrativa.

3.4 - Modello tridimensionale e rappresentazioni bidimensionali

La considerazione che i disegni presenti in un testo tecnico non siano un elemento accessorio, ma, al contrario, rappresentino un elemento fondamentale per la comprensione

del testo stesso è ulteriormente confermata dalla analisi delle Proposizioni 1.3, 1.4 e 1.5.

Nelle Proposizioni in parola, in aggiunta alla sfera terrestre, Archimede introduce ulteriori elementi geometrici tridimensionali, quali piramidi e sfere, che sono poi rappresentati graficamente mediante sezioni trasversali piane.

Per le piramidi si riportano di seguito alcuni estratti significativi.

Proposizione 1.3:

S'immagini allora che la figura [che rappresenta] il corpo solido sia compresa da una piramide che abbia per base un parallelogramma [posto] sulla superficie del liquido, per vertice il centro della Terra

..... si consideri quindi un'altra qualsiasi piramide [di geometria] uguale, simile e contigua a quella che comprende il solido(Fleck, 2016)

Proposizione 1.4:

..... e s'immagini una qualche piramide che comprenda [all'interno] il disegno [di cui alla lettera] Z, come già abbiamo veduto, e che abbia vertice in K e si taglino i piani di questa col piano $AB\Gamma$ per le rette AK [e] KB.

Si consideri quindi un'altra piramide in tutto simile a questa e s'intersechino i suoi piani col piano [AB Γ] per le [rette] KB e K Γ e si (Fleck, 2016)

Proposizione 1.5:

Dunque il peso del liquido nella prima piramide, non considerando il solido BH Θ Y, corrisponde al peso del liquido nella seconda piramide,(Fleck, 2016)

Nello sviluppo delle dimostrazioni, per procedere allo studio delle condizioni di equilibrio, Archimede introduce una seconda sfera, di diametro minore rispetto alla prima.

Proposizione 1.3:

.... Si descriva nel fluido con centro in K la superficie di una qualsiasi altra sfera al di sotto della [figura] $EHZY$ e si tagli la superficie del piano lungo la [curva] $\Xi\Gamma$;

Proposizione 1.4:

.... e si descriva ancora, dentro il fluido con centro in K - [e] sotto il solido - la superficie di un'ulteriore sfera ...

Lo schema geometrico concepito da Archimede per la dimostrazione delle Proposizioni 1.3, 1.4 e 1.5 risulta, pertanto, il seguente:

- una sfera esterna rappresentativa della Terra;
- 2 piramidi contigue aventi il vertice comune posto nel centro della Terra e basi sulla superficie della sfera terrestre;
- una sfera, concentrica con quella terrestre, ma di dimensioni minore.

Nella Figura 9 una tipica rappresentazione dei disegni presenti nei manoscritti, nel caso particolare relativa alla Proposizione 1.4 (Figura 9a), è posta a confronto con una educata vista tridimensionale dello schema geometrico archimedeo (Figura 9b).

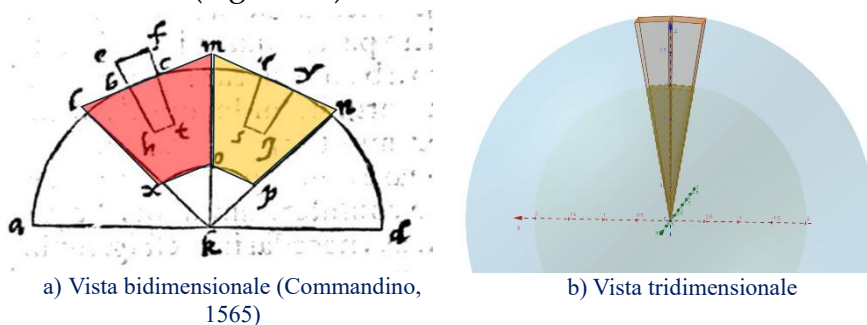


Figura 9 – Confronto tra una rappresentazione tridimensionale delle piramidi richiamate nel testo di Archimede e il disegno dei manoscritti relativo alla proposizione 1.4.

L'analisi dello schema geometrico Archimede comporta che lo studio dell'equilibrio si svolge considerando, di fatto, i

volumi relativi ai due tronchi di piramide (vedi Figura 9a) determinati eliminando le parti delle piramidi che intersecano la sfera interna.

La rappresentazione tridimensionale aiuta a mettere le figure presenti nei manoscritti in una prospettiva più comprensibile.

La progressiva riduzione dell'angolo di apertura delle piramidi rende graficamente evidente l'evoluzione da un approccio di tipo integrale verso un approccio di tipo differenziale.

Tale evoluzione rende quindi più comprensibile la genesi ed il significato della parte del Postulato iniziale relativa alla variazione di pressione nel liquido con la distanza dalla superficie.

La progressiva riduzione dell'angolo di apertura delle piramidi e l'ingrandimento della sfera interna rendono evidenti le modalità di passaggio dal modello di gravità tridimensionale, con vettori diretti verso il centro della Terra, al modello di gravità piano che approssima i vettori come paralleli tra di loro e diretti verso il "basso".

Il modello piano è, in effetti, adottato da Archimede senza dichiararlo a partire dalla Proposizione 1.6.

Un riferimento implicito al modello piano è peraltro già chiaramente presente nel testo archimedeo quando si riferisce alle basi delle piramidi come parallelogrammi in luogo di quelle che, in una visione tridimensionale dovrebbero, invece, essere calotte sferiche.

Riguardo il livello di approssimazione necessario per assumere il modello piano non sappiamo quale sarebbe stato il pensiero di Archimede.

Sappiamo però che la scienza ellenistica era ben consapevole dell'uso di processi di approssimazione, a tal riguardo è ben noto Archimede ha determinato il valore di π -greco utilizzando poligoni regolari di 96 lati.

Non sembra quindi che ci sarebbero stati ostacoli concettuali nel valutare che la scala spaziale all'interno della quale si muove un corpo galleggiante, come ad esempio una imbarcazione, risulta assolutamente trascurabile rispetto a quella del raggio terrestre.

3.5 – Libro 1 - Proposizione 1.3

Corpi solidi dello stesso peso del liquido, se immersi in questo, s'immergeranno senza discendere in alcuna [loro] parte sotto la superficie del liquido, né precipiteranno sul fondo (Fleck, 2016).

Nella Figura 10 sono riportati il disegno dei manoscritti e la rappresentazione tridimensionale relativi alla Proposizione 1.3.

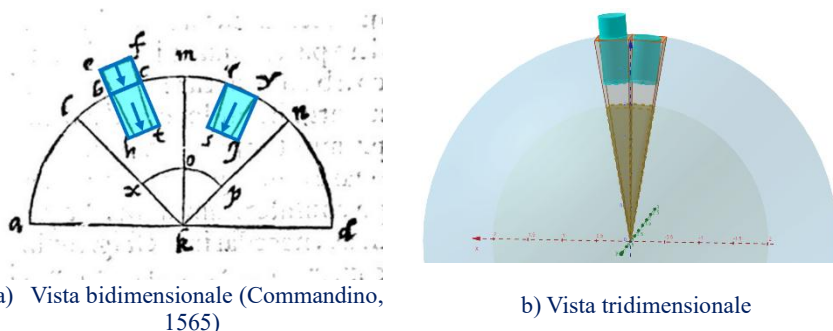


Figura 10 – Proposizione 1.3: condizione di equilibrio per solidi aventi densità uguale a quella del liquido

La dimostrazione della Proposizione 1.3 è condotta “per negazione”:

- si consideri, nel tronco di piramide a sinistra, il volume di un solido avente la stessa densità del liquido e si ipotizzi che tale volume emerga parzialmente dalla superficie libera del liquido;
- si consideri, nel tronco di piramide a destra, un volume di liquido uguale alla porzione immersa del solido presente nel tronco di piramide a sinistra;
- la porzione di liquido nel tronco di piramide a sinistra, per effetto della parte emergente risulterebbe più “premuta”, rispetto a quella presente nel tronco di piramide a destra;
- conseguentemente il tronco di piramide a sinistra “spingerebbe” il tronco di piramide destra e questa circostanza sarebbe in contrasto con la ipotesi di equilibrio.

3.6 – Libro 1 - Proposizione 1.4

Di corpi solidi, quello più leggero del liquido [ed] in questo rilasciato, non precipiterà interamente ma una sua [parte] emergerà sulla superficie del liquido (Fleck, 2016).

Nella Figura 11 sono riportati il disegno dei manoscritti e la rappresentazione tridimensionale relativi alla Proposizione 1.4.

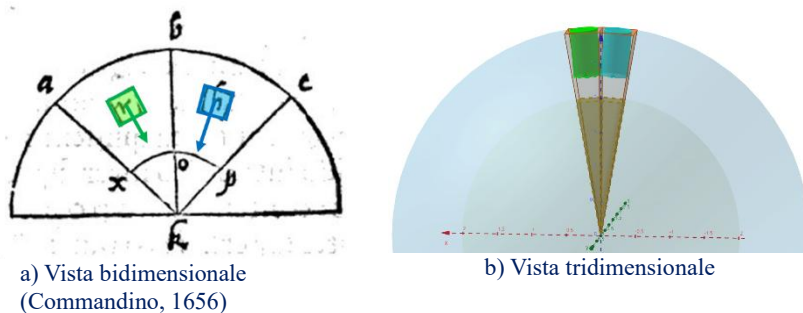


Figura 11 – Proposizione 1.4: condizioni di equilibrio qualitativa per solidi aventi densità minore del liquido

La dimostrazione della Proposizione 1.4 è condotta “per negazione” in maniera sostanzialmente analoga a quella della Proposizione 1.3:

- si consideri, nel tronco di piramide a sinistra, un solido avente densità minore del liquido e si ipotizzi che detto solido sia completamente immerso nel liquido;
- si consideri, nel tronco di piramide a destra, un volume di liquido uguale a quello del solido posto nel tronco di piramide a sinistra;
- la porzione di liquido nel tronco di piramide a destra risulterebbe più “premuta” rispetto a quella presente nel tronco di piramide a sinistra;
- conseguentemente il tronco di piramide a destra “spingerebbe” il tronco di piramide a sinistra e questa circostanza sarebbe in contrasto con la ipotesi di equilibrio.

3.7 – Libro 1 - Proposizione 1.5

Di corpi solidi, quello più leggero del liquido, [se in questo] rilasciato, s’immergerà [in misura] tale [da aversi] corrispondenza fra il volume del liquido, per la parte del solido immersa, e l’intero peso del corpo solido (Fleck, 2016).

Nella Figura 12 sono riportati il disegno dei manoscritti e la rappresentazione tridimensionale relativi alla Proposizione 1.5.

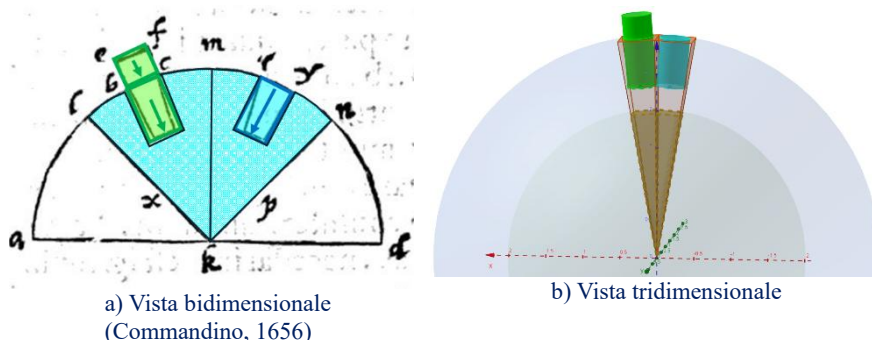


Figura 12 – Proposizione 1.5: condizioni di equilibrio quantitativa per solidi aventi densità minore del liquido

La dimostrazione della Proposizione 1.5 è condotta per “affermazione” e si svolge sulla base di 3 eguaglianze:

- si consideri, nel tronco di piramide a sinistra, un solido avente densità inferiore a quella del liquido e si ipotizzi che tale solido sia parzialmente immerso nel liquido;
- si consideri, nel tronco di piramide a destra, un volume di liquido uguale alla parte immersa del solido posto nel tronco di piramide a sinistra;
- la porzione di liquido nel tronco di piramide a sinistra, ridotta del volume occupato dal solido, è in equilibrio con la porzione di liquido nel tronco di piramide a destra, ridotta del volume liquido a destra;
- affinché il sistema rimanga in equilibrio il peso complessivo del solido a sinistra deve essere uguale al peso del volume liquido a destra.

3.8 – Libro 1 - Proposizione 1.6

Corpi solidi più leggeri del liquido, spinti a forza [in questo], sono condotti in alto con un'intensità proporzionale al [loro] volume, [se] il liquido di volume eguale al solido è più pesante del solido [stesso] (Fleck, 2016).

Nella Figura 13 è riportato il disegno presente nei manoscritti relativo alla proposizione 1.6.

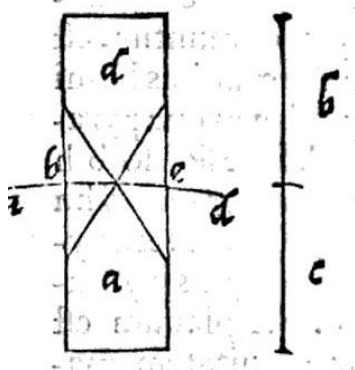


Figura 13 – Proposizione 1.6: forze agenti su corpi aventi densità minore del liquido (Commandino, 1565)

Lo sviluppo grafico della dimostrazione della Proposizione 1.6 è riportata nella Figura 14.

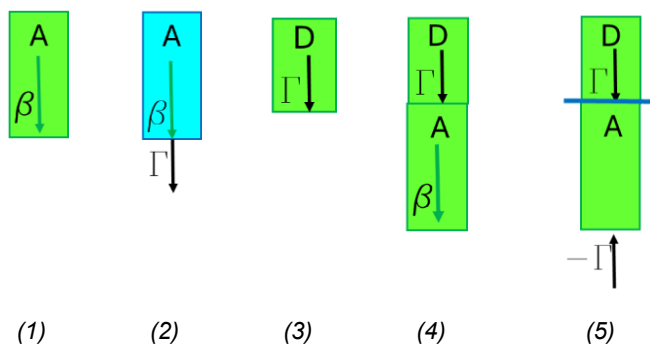


Figura 14 – Proposizione 1.6: sviluppo grafico dimostrazione

La dimostrazione della Proposizione 1.6 si svolge secondo i seguenti passi:

- (1) si consideri un solido avente densità inferiore a quella del liquido, volume A e peso β ;
- (2) il peso del volume di liquido A sia posto pari a $\beta + \Gamma$;
- (3) si consideri il volume solido D avente peso Γ ;
- (4) si consideri il volume $D+A$ avente peso $\beta + \Gamma$;
- (5.1) si immerga il volume $D+A$ nel liquido, come conseguenza della Proposizione 1.5, il volume sarà complessivamente in equilibrio e il volume A sarà la parte immersa mentre il volume D sarà la parte emersa;
- (5.2) siccome il volume A è in equilibrio ed è premuto dal peso Γ , affinché A sia in equilibrio il liquido deve esercitare una spinta Γ uguale e contraria a Γ .

3.9 - Libro 1 - Proposizione 1.7

Solidi più pesanti del liquido in questo rilasciati, saranno condotti in basso verso il fondo, ed il [loro] peso nel liquido diminuirà di una quantità corrispondente al liquido [spostato] per un volume eguale a quello del solido. [Ed] è chiaro che saranno condotti sul fondo (Fleck, 2016).

Nella Figura 15 è riportato il disegno presente nei manoscritti relativo alla Proposizione 1.7.

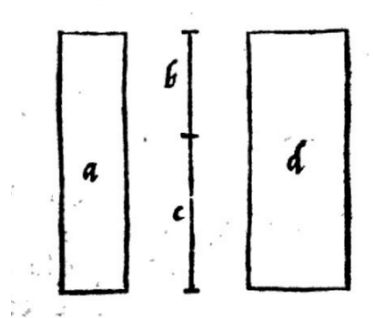


Figura 15 – Proposizione 1.7: forze agenti su corpi avente densità maggiore del liquido (Commandino, 1565)

Lo sviluppo grafico della dimostrazione della Proposizione 1.7 è riportata nella Figura 16.

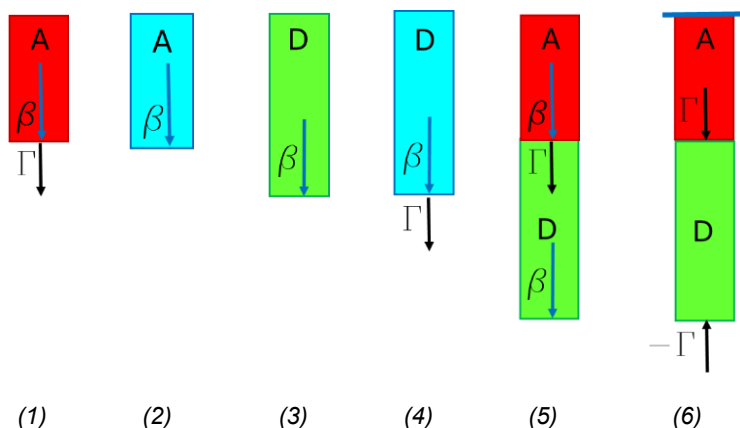


Figura 16 – Proposizione 1.7: sviluppo grafico dimostrazione

La dimostrazione della Proposizione 1.7 si svolge secondo i seguenti passi:

- (1) si consideri un primo solido avente densità superiore a quella del liquido, volume A e peso $\beta + \Gamma$;
- (2) il peso del volume di liquido A sia pari a β ;
- (3) si consideri un secondo solido avente densità inferiore a quella del liquido, volume D e peso β ;
- (4) il peso del volume di liquido D sia $\beta + \Gamma$;
- (5) il volume liquido $A+D$ ha peso specifico medio pari a quello del liquido, infatti:
 - Peso solidi $A+D = 2\beta + \Gamma$;
 - Peso liquido volume $A+D = 2\beta + \Gamma$;
- (6.1) si immerga il volume $D+A$ nel liquido, il volume $D+A$, in base al punto 5, $D+A$ risulta complessivamente in equilibrio e completamente immerso;

- (6.2) siccome il volume A è premuto dal peso Γ , affinché A sia in equilibrio deve ricevere dal liquido una spinta $-\Gamma$ uguale e contraria a Γ .

3.10 - Libro 2 - Proposizione 2.1

Se una grandezza [solida] più leggera del liquido viene abbandonata nel liquido avrà in peso rispetto al liquido lo stesso rapporto che [in volume] la grandezza immersa ha rispetto all'intera grandezza [solida] (Frajese, 1974),

Nella Figura 17 è riportato il disegno presente nei manoscritti relativo alla Proposizione 2.1.

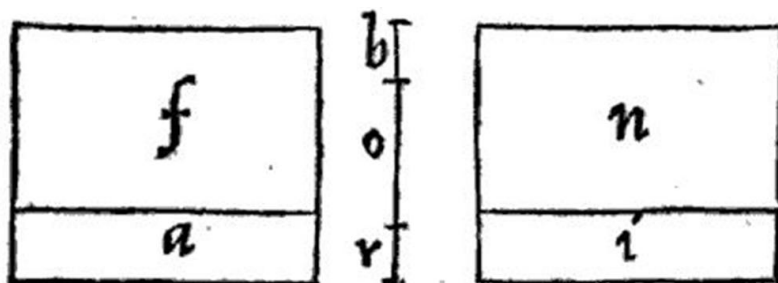


Figura 17 – Proposizione 2.1: rapporti tra volume emerso ed immerso e densità relativa per corpi avente densità minore del liquido (Commandino, 1565)

Lo sviluppo grafico della dimostrazione della Proposizione 1.7 è riportata nella Figura 18.

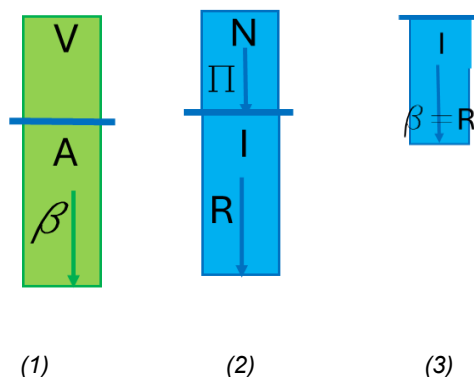


Figura 18 – Proposizione 2.1: sviluppo grafico dimostrazione

La dimostrazione della Proposizione 2.1 si svolge secondo i seguenti passi:

- (1.1) si consideri un solido avente densità inferiore a quella del liquido, volume $V+A$ e peso complessivo β ;
- (1.2) sia V la parte emersa e sia A la parte immersa;
- (2.1) si consideri quindi il volume di liquido $N+I$ e sia N la parte emersa e sia I la parte immersa;
- (2.2) sia Π il peso di N e sia R il peso di I Π ;;
- (2.3) sia il volume $N=V$ e sia il volume $A=I$;
- (2.4) per cui valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\text{Peso}_{V+A}}{\text{Peso}_{N+I}} = \frac{\beta}{R+P} \qquad \frac{R}{R+P} = \frac{I}{N+I} \qquad \frac{I}{N+I} = \frac{A}{V+A}$$

- (3) in base alla Proposizione 1.5 risulta $\beta=R$;
- (4) per cui valgono le seguenti uguaglianze:

$$\beta = R \qquad \frac{\beta}{R+P} = \frac{R}{R+P} \qquad \frac{\text{Peso}_{V+A}}{\text{Peso}_{N+I}} = \frac{A}{V+A}$$

E' interessante osservare che nel paradigma ellenistico i rapporti sono sempre espressi con riferimento a grandezze omogenee.

3.11 - Figure geometriche e baricentri di riferimento dei paradigmi Newtoniano ed Archimedeo

Alla fine della Proposizione 1.7 è riportato che:

Si supponga che ogni solido spinto nel fluido in alto sia condotto per [una linea] perpendicolare diretta secondo il [proprio] centro del peso (Fleck, 2016).

La frase riportata sopra rappresenta a tutti gli effetti un cripto-postulato: postulato in quanto affermazione non dimostrata e cripto in quanto non dichiarato esplicitamente come Postulato.

La posizione del cripto-postulato nel testo archimedeo risulta, peraltro, essenziale in quanto la definizione dei punti di applicazione del peso dell'oggetto e della spinta del liquido risulta indispensabile per affrontare, a partire dalle successive Proposizioni 1.8 e 1.9, lo studio della stabilità dell'equilibrio di corpi immersi nel liquido.

L'analisi delle figure geometriche utilizzate nelle dimostrazioni Newtoniana ed Archimedeo e dei relativi baricentri riportati nella Figura 19 permette di evidenziare una significativa differenza tra i due paradigmi.

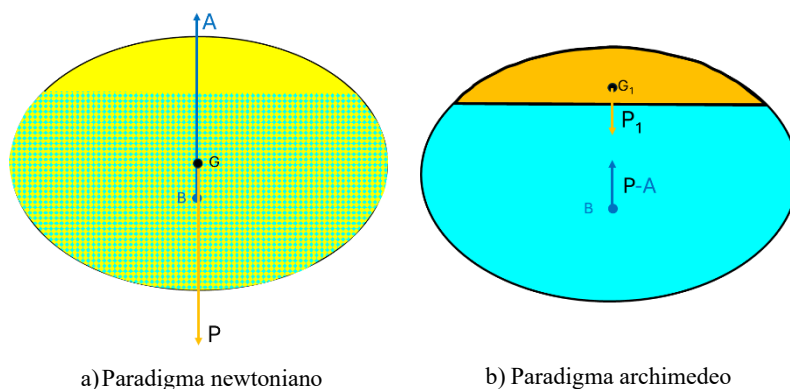


Figura 19 – Figure geometriche e baricentri di riferimento dei paradigmi Newtoniano ed Archimedeo

Nel paradigma Newtoniano si parte dalla individualità delle forze: il peso del solido, che è applicato nel baricentro dell'intero volume, e la spinta di Archimede che è applicata nel baricentro del volume immerso.

Nel paradigma Newtoniano il "volume di calcolo" della spinta di Archimede ricade all'interno del "volume di calcolo" del peso del solido.

Il paradigma Archimedeo si basa, invece, sulla individualità delle singole figure geometriche.

I "volumi fisici" e i "volumi di calcolo", che ciascuna figura geometrica rappresenta, risultano sempre univocamente distinti tra di loro, senza che siano accettabili possibili sovrapposizioni.

Tale caratteristica, che già traspare dalle dimostrazioni delle Proposizioni 1.6, 1.7 e 2.1, emerge in maniera inequivocabile dalla analisi delle Proposizioni del Secondo Libro nelle quali la stabilità dell'equilibrio è sempre studiata a partire da una rigorosa distinzione tra il volume rappresentativo del solido emerso e il volume rappresentativo del solido immerso.

Tale distinzione geometrica ha una ricaduta sugli aspetti meccanici associati alle rispettive figure: nel baricentro della porzione di solido emersa è applicato il relativo peso, mentre nel baricentro del volume immerso è applicata la differenza tra la spinta di Archimede e il peso della porzione di solido immersa.

4. - Conclusioni

La presente memoria ha sviluppato le dimostrazioni del Teorema di Archimede sui corpi galleggianti sulle basi del moderno paradigma Newtoniano e di quello Archimedeo.

Lo sviluppo argomentativo di entrambi i paradigmi rende evidente che il cosiddetto principio di Archimede non è una affermazione in sé da accettare in quanto tale, ma è il risultato di un rigoroso processo deduttivo.

La dimostrazione newtoniana è stata svolta combinando un approccio grafico intuitivo con un approccio analitico rigoroso.

Sebbene i due approcci siano chiaramente complementari tra di loro, il trasferimento della dimostrazione ai differenti livelli didattici può comunque essere adattato dando più peso all'uno o all'altro approccio.

L'analisi della dimostrazione archimedeo permette di evidenziare, in un campo differente da quello della classica geometria euclidea, gli aspetti caratteristici e di modernità della scienza ellenistica: i Postulati e le Proposizioni.

I Postulati definiscono il modello della realtà e sono formulati nella maniera più economica possibile.

Proprio per la loro economicità i Postulati non trasmettono un senso di immutabilità, bensì si presentano come elementi

chiaramente adattabili e riformabili ove appaia necessario migliorare l'interpretazione dei "fenomeni".

Nelle Proposizioni il metodo deduttivo è utilizzato per derivare una serie di "conseguenze" che permettano di "salvare i fenomeni", cioè di spiegare la realtà osservata.

Anche le dimostrazioni archimedee possono essere facilmente adattate al livello didattico nel quale sono inserite.

A tal riguardo appare evidente che le Proposizioni iniziali, da 1.1 a 1.5, sono chiaramente più semplici rispetto alle tre Proposizioni successive 1.6, 1.7 e 2.1 che risultano più complesse.

Bibliografia

Edizioni del Trattato sui corpi galleggianti di Archimede:

AA. VV. (1822). Raccolta di Autori italiani che trattano del moto delle acque Tomo III: Trattato d'Archimede delle cose, che stanno sul liquido. pp. 5-22, *Tipografia Jacopo Marsigli, Bologna*

COMMANDINO F. (1565). Archimedes de iis quae vehuntur in aqua Libri Duo, *ex Officina Alexandri Benacii*

FLECK H. (2006). Archimede Sui corpi galleggianti - libro I e II, <https://www.heinrichfleck.net/quaderni/corpi-galleggianti.pdf>

FRAJESE A. (1974). *Archimede: Opere*, UTET, Torino

HEATH T. L. (1897). The work of Archimedes: On floating bodies pp. 253-300, *Cambridge University Press: C. & J. Caly and sons London*

HEIBERG I. L. (1972). Archimedes Opera Omnia De iis, qua in umido nehuntur, Stutgardiae in aedibus B. G. Tevbneri

PEYARD F. (1844). Oeuvres d'Archimedes: Des corps qui sont portés sur un fluid pp. 265-357, Tome second, Bachelier, Imprimeur-Libraire de l' Ecole Polytechnique, Paris

TARTAGLIA (1565). Archimedis de insidentibus aquae, *apud Curtium Troiaum Venetiis*

TORELLI J., (1792). Archimedis quae supersunt omnia: De iis quae in humido vehuntur pp. 333-354, *Oxonii, e Typographeo Clarendoniano*

VER EECKE P., (1921). Les œuvres complètes d'archimède: les corps flottants pp. 407-476, *Desclée, de Brouwer & C Paris & Brussels*

Commenti al Trattato di Archimede sui corpi galleggianti:

DIJKSTERHUIS E. J. (2014). Archimedes: Chapter XIV Floating Bodies, Project MUSE. muse.jhu.edu/book/34395 Course Book ed. Princeton University Press pp. 273-398

RORRES C. (2004). Completing Book II of Archimedes, *The Mathematical intelligencer* Volume 26, Number 3, Summer 2004, pp. 32-42 Springer-Verlag New York

RORRES C. (2016). Archimedes' floating bodies on a spherical Earth. *Earth, Am. J. Phys.* 84 (1), January

RUSSO L. (2019), *Archimede: un grande scienziato antico*. Carocci editore, Firenze

RUSSO L. (2024), Una breve storia dei concetti di matematica e fisica. *Annales. Proceedings of the Academy of Sciences of Bologna Class of Physical Sciences* 2, 2024

Adelphi eBook

CARLO ROVELLI

*Sull'eguaglianza
di tutte le cose*

LEZIONI AMERICANE



ADELPHI